Конспект лекций по высшей математике

§1.1. Матричные объекты

Аналитическое описание геометрических фигур и тел, равно как и операций с ними, может быть в большом числе случаев упрощено за счет использования специального математического объекта, называемого *матрицей*.

Определение 1.1.1.	*Матрицей размера* $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, входящие в описание матрицы, называемые ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце, как α_{ij} [1]).

Определение 1.1.2.	Числа m , n и $m \times n$ называются *размерами* матрицы.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, как: *матрица с элементами* α_{ij}; $i=[1,m]$; $j=[1,n]$, или же в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} ; \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} ; \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

из которых мы будем использовать последнюю. Если же нам потребуется *неразвернутое* представление матрицы, то мы будем ее записывать в виде $\left\| \alpha_{i\,j} \right\|$ или просто $\left\| A \right\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение 1.1.3.	Если $m = n$, то матрица называется *квадратной, порядка* n. Матрица размера $m{\times}1$ называется m-мерным (или m-компонентным) *столбцом*. Матрица размера $1{\times}n$ называется n-мерной (или n-компонентной) *строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\left\| \alpha_{1\,j} \right\|$ или $\left\| \beta_{i1} \right\|$, неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов принимают вид $\left\| \alpha_{j} \right\|$ или, соответственно, $\left\| \beta_{i} \right\|$. В этих случаях, разумеется, необходимо явно указывать, о чем идет речь: о строке или о столбце.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов, имеют специальные названия и обозначения.

Определение 1.1.4.

Квадратная матрица, для которой $\alpha_{i\,j} = \alpha_{j\,i}$, $\forall i, j = [1, n]$, называется *симметрической*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу будем обозначать $\left\| O \right\|$.

Квадратная матрица порядка n вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

называется *единичной*. Единичную матрицу принято обозначать $\left\| E \right\|$.

Операции с матрицами

Определение 1.1.5. Две матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ называются *равными* (обозначается: $\|A\|=\|B\|$), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$, $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$.

Определение 1.1.6. Матрица $\|C\|$ называется *суммой матриц* $\|A\|$ *и* $\|B\|$ (обозначается: $\|C\|=\|A\|+\|B\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$, $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$, где числа γ_{ij} , $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$ являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.

Определение 1.1.7. Матрица $\|C\|$ называется *произведением числа λ на* матрицу $\|A\|$ (обозначается: $\|C\|=\lambda\|A\|$), если матрицы $\|A\|$ и $\|C\|$ одинаковых размеров и $\gamma_{ij}=\lambda\alpha_{ij}$, $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$.

Отметим, что умножать на число можно матрицу любого размера.

Замечание: в качестве всех или некоторых элементов матрицы возможно использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.

Определение 1.1.8. *Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования.

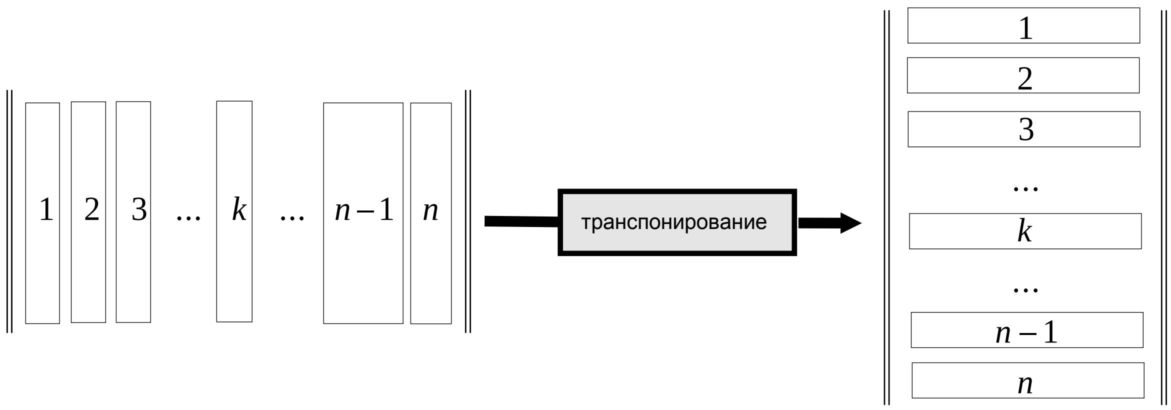

Рисунок 1.1.1.

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы $\| A \|$, обозначается $\| A \|^{\mathrm{T}}$, при этом (см. рис.1.1.1.)

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

то есть для элементов транспонированной матрицы $\| A \|^{\mathrm{T}}$ при $\forall i = [1, m]$, $\forall j = [1, n]$ верно равенство: $\alpha^{\mathrm{T}}_{i\,j} = \alpha_{j\,i}$.

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1{\times}m$ в столбец размера $m{\times}1$ и наоборот.

Детерминанты (определители) квадратных матриц 2-го и 3-го порядка

Для квадратных матриц существует специальная числовая характеристика, называемая *детерминантом* (или *определителем*) и обозначаемая как $\det \| A \|$ [1]). Изучение свойств определителей квадратных матриц n-го порядка будет выполнено в разделе 6, здесь же ограничимся рассмотрением определителей квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

Определение 1.1.9.	*Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы 2-го порядка $\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|$ называется число $\det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Определение 1.1.10.	*Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы 3-го порядка $\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} \right\|$ называется число

[1]) Детерминант квадратной матрицы также часто обозначают при помощи одинарных вертикальных ограничителей |...|. Мы не будем использовать этот вид обозначения, чтобы избежать конфликта с представлением абсолютных величин, модулей, длин и норм.

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - $$
$$- \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} \quad .$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.1.1.

Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} =$$
$$= \alpha_{11} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} + \alpha_{13} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{Vmatrix} \quad ,$$

называемой *разложением определителя по первой строке*.

Доказательство:

Данная формула проверяется непосредственно при помощи определений 1.1.9. и 1.1.10.

Замечания:

1°. Формулы, аналогичные приведенной в формулировке теоремы 1.1.1., могут быть получены как для каждой из остальных строк матрицы, так и для любого из ее столбцов.

2°. Иногда подсчет значения определителя матрицы третьего порядка удобнее выполнить по следующему правилу:

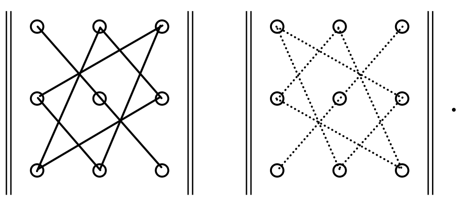

Рисунок 1.1.2.

каждое слагаемое в определении 1.1.10. есть произведение некоторой тройки элементов матрицы, причем элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком "плюс", соединены на рис.1.1.2. сплошными линиями, элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком "минус", - штриховыми линиями.

Непосредственная проверка показывает, что из определений 1.1.9. и 1.1.10. вытекает

Следствие 1.1.1. **При транспонировании квадратных матриц второго или третьего порядка их определители не меняются.**

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема 1.1.2. (Крамера) **Для того чтобы система линейных уравнений** $\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$ **имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы** $\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \neq 0$.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть данная система линейных уравнений имеет единственное решение - упорядоченную пару чисел $\{\xi_1, \xi_2\}$, тогда должны быть справедливыми следующие из ее уравнений соотношения:

$$\xi_1(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = (\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}) \quad ; \quad \xi_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = (\beta_1\alpha_{21} - \beta_2\alpha_{11})$$

$$\text{или} \quad \xi_1\Delta = \Delta_1 \quad ; \quad \xi_2\Delta = \Delta_2, \quad \text{где}$$

$$\Delta = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{Vmatrix}; \quad \Delta_2 = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{Vmatrix}.$$

Равенства $\xi_1\Delta = \Delta_1$; $\xi_2\Delta = \Delta_2$ не верны при $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_1 \neq 0 \end{cases}$ или при $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_2 \neq 0 \end{cases}$. При $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ коэффициенты уравнений исходной системы *пропорциональны*, и тогда у нее имеется бесчисленное множество решений - пар чисел $\{\xi_1, \xi_2\}$ таких, что $\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1$. Поэтому из условия существования и единственности решения следует, что $\Delta \neq 0$.

Докажем достаточность.

Если $\Delta \neq 0$, то исходная система линейных уравнений имеет решение $\{\xi_1, \xi_2\}$, однозначно определяемое значениями параметров $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ по формулам $\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема доказана.

§1.2. Направленные отрезки

Определение 1.2.1.

Отрезок прямой, концами которого служат лежащие на ней точки A и B, называется *направленным отрезком*, если указано, какая из этих двух точек является *началом* и какая - *концом* отрезка.

Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* направленным отрезком.

Направленный отрезок будем изображать символически $\overline{AB}$, полагая, что точка A является началом отрезка, а точка B - его концом. Иногда направленный отрезок обозначается просто как $\bar{a}$. Длина отрезка обозначается как $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\bar{a}\right|$ соответственно.

Действия с направленными отрезками

Определение 1.2.2.

Два ненулевых направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ при $A \neq C$ называются *равными*, если они

- лежат на параллельных прямых;
- точки B и D лежат по одну сторону от прямой, проходящей через точки A и C;
- имеют равные длины, т.е. $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ [2]).

Кроме того, все нулевые отрезки считаются равными друг другу, а в случае $A = C$ отрезки равны, если и $B = D$.

[2]) В рамках данного курса предполагается знакомство читателя с основными понятиями, аксиомами и теоремами элементарной геометрии, и потому они здесь не рассматриваются.

Заметим, что в силу определения 1.2.2. параллельный перенос направленных отрезков их не меняет.

Пусть даны два направленных отрезка $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Определение 1.2.3.	Совместим начало отрезка $\bar{b}$ с концом $\bar{a}$ (то есть построим направленный отрезок $\overline{b'}$ равный $\bar{b}$, начало которого совпадает с концом отрезка $\bar{a}$), тогда направленный отрезок $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом $\bar{a}$ и конец с концом $\bar{b}$, называется *суммой направленных отрезков* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ [1]).

Это определение иногда называют *правилом треугольника*. (Рис. 1.2.1.)

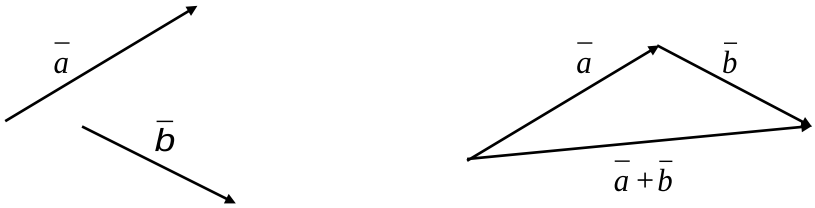

Рисунок 1.2.1.

Отметим, что для операции сложения направленных отрезков:

1°. Обобщение правила треугольника на любое число слагаемых носит название *правила замыкающей*, смысл которого ясен из рис. 1.2.2.

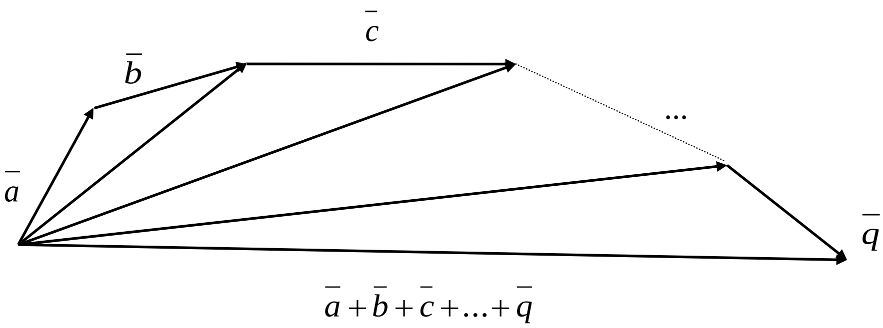

Рисунок 1.2.2.

---

[1]) Для операции замены направленного отрезка на равный, но не совпадающий с ним направленный отрезок будем употреблять термин “*параллельный перенос направленного отрезка*”.

2°. Операция сложения направленных отрезков может быть выполнена по *правилу параллелограмма*, равносильному определению 1.2.3. (см. рис. 1.2.3.).

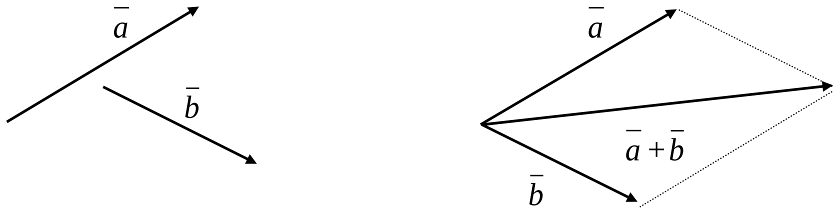

Рисунок 1.2.3.

3°. Разностью $\overline{a}-\overline{b}$ направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется направленный отрезок $\overline{c}$, удовлетворяющий равенству $\overline{a}=\overline{b}+\overline{c}$.

4°. Любой направленный отрезок при сложении с нулевым не изменяется.

Определение 1.2.4.

Под *произведением* $\lambda\overline{a}$ *направленного отрезка* $\overline{a}$ *на число* λ понимают:

при $\lambda=0$

нулевой направленный отрезок,

при $\lambda\neq 0$

направленный отрезок, для которого

длина равна $|\lambda|\,|\overline{a}|$;

направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda>0$,

направление противоположно направлению $\overline{a}$, если $\lambda<0$.

§1.3. Определение множества векторов

Определение 1.3.1.

Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены описанные в §1.2. операции:

- сравнения (опр. 1.2.2.);
- сложения (опр. 1.2.3.);
- умножения на вещественное число (опр. 1.2.4.),

называется *множеством векторов*.

Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с верхней стрелкой, например $\vec{a}$.

Нулевой вектор обозначается символом $\vec{o}$.

Теорема 1.3.1.

Операции сложения и умножения на вещественное число на множестве векторов обладают свойствами:

1°. Коммутативности

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

2°. Ассоциативности

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c};$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a};$$

3°. Дистрибутивности

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любых вещественных чисел λ и μ.

Данные свойства следуют из определения множества векторов и нуждаются в доказательстве. В качестве примера приведем

Доказательство свойства коммутативности:

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Совместим начала этих векторов и построим на них параллелограмм *ABDC*. (Рис. 1.3.1.)

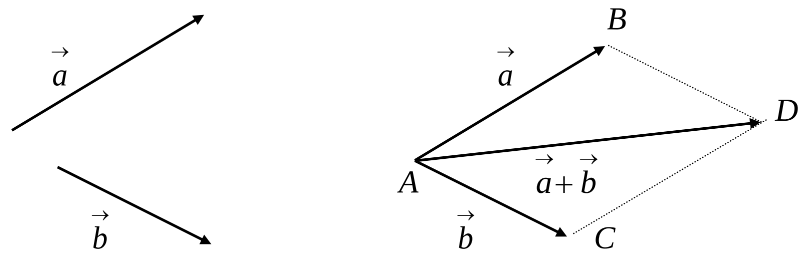

Рисунок 1.3.1.

Поскольку у параллелограмма противолежащие стороны параллельны и имеют равные длины, то $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, но тогда, по правилу треугольника, из треугольников *ACD* и *ABD* следует, что $\overrightarrow{AD} = \vec{b} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{BD}$, то есть $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Свойство 1° теоремы 1.3.1. доказано.

Замечания об определении вектора

1°. Иногда вектор определяют просто как объект, характеризуемый числовой величиной и направлением. Хотя формально такой подход и допустим, он может оказаться причиной некоторых проблем, суть которых иллюстрируется следующим примером.

Поток автомобилей на конкретной дороге является объектом, для характеристики которого нужно указать величину (число проходящих за единицу времени автомашин) и направление. Предположим, что этот объект векторный (в смысле определения 1.3.1.), и рассмотрим перекресток трех дорог, показанный на рис. 1.3.2., на котором сливаются два потока автомобилей по 500 автомашин в час каждый.

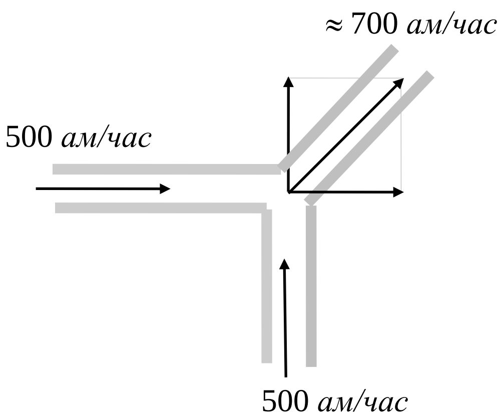

Рисунок 1.3.2.

Если суммировать потоки как векторы, то вместо очевидного результата 1000 ам./час мы получим (по правилу параллелограмма) заведомо бессмысленное значение $500\sqrt{2} \approx 700$ ам./час. Отсюда следует, что хотя поток автомашин характеризуется числовым значением и направлением, но, тем не менее, вектором (в смысле определения 1.3.1.) не является.

2°. С другой стороны, необходимо иметь в виду, что данное определение множества векторов 1.3.1. допускает их дальнейшую, более тонкую дифференциацию. Например, в некоторых физических и технических приложениях различают векторы *полярные* и *аксиальные*. К первым относятся, например, векторы скорости, силы, напряженности электрического поля; ко вторым - векторы момента силы, напряженности магнитного поля. Кроме того, в механике векторы подразделяются на *свободные*, *скользящие* и *закрепленные*, в зависимости от той роли, которую играет точка их приложения.

3°. К заключению о векторной природе тех или иных физических характеристик можно прийти путем рассуждений, основанных на определении 1.3.1. и экспериментальных данных.

Например, пусть некоторая материальная точка A, имеющая электрический заряд, перемещается в пространстве под действием электрического поля. Положение этой точки в пространстве в момент времени τ_0 можно задать исходящим из точки наблюдения и направленным в A вектором $\vec{r}(\tau_0)$, а в момент времени τ - вектором $\vec{r}(\tau)$. Поскольку перемещение $\vec{r}(\tau) - \vec{r}(\tau_0)$ (как разность двух векторов) является вектором, то и скорость движения материальной точки будет вектором в силу определения 1.3.1. Рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вектором является также и ускорение. С другой стороны, согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, и, следовательно, по определению 1.3.1. сила есть вектор. Наконец, принимая во внимание пропорциональность силы, действующей на заряженное тело, и напряженности электрического поля, заключаем, что последняя характеристика также векторная.

§1.4. Линейная зависимость векторов

Вначале введем часто используемые в приложениях, понятия *коллинеарности* и *компланарности* векторов.

Определение 1.4.1.	Два вектора, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Три вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Определение 1.4.2.

Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_i\ ; i=[1,n]$ - некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Если *все* числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю одновременно (что равносильно условию $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| = 0$), то такая линейная комбинация называется *тривиальной*.

Если *хотя бы одно* из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ отлично от нуля (то есть $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| > 0$), то данная линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известно, как зависит значение каждого из слагаемых от его номера, то допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$F(n) + F(n+1) + \ldots + F(N) = \sum_{k=n}^{N} F(k),$$

(читается: "*Сумма* $F(k)$ *по* k *от* n *до* N "), где k - индекс суммирования, n - минимальное значение индекса суммирования, N - максимальное значение индекса суммирования и, наконец, $F(k)$ - общий вид слагаемого.

Пример 1.4.1.

По соглашению о суммировании будут справедливы следующие равенства

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (N-1)^2 + N^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (N-1)^3 + N^3 = \sum_{i=1}^{N} i^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{j=1}^{N} j\right)^2$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(N-1)N} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N-1}{N} .$$

Используя данное соглашение о суммировании, линейную комбинацию $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$ можно записать в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$.

Приведем теперь определение важного понятия *линейной зависимости* системы векторов.

Определение 1.4.3. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}.$$

Определение 1.4.4. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$ следует тривиальность линейной комбинации $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$, то есть, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Иначе говоря, если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независимы, если для любого набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равных нулю одновременно, линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$ не может быть нулевым вектором.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.4.1. **Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.**

Теорема 1.4.2. **Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.**

Теорема 1.4.3. **Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.**

Теоремы 1.4.1. и 1.4.2. предлагаются для самостоятельного доказательства. Здесь же мы рассмотрим подробно теорему 1.4.3., доказав предварительно следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 1.4.1.

Для линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство:

Докажем необходимость. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, одновременно не равные нулю, такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$. Для определенности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$, но тогда

$$\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) \vec{a}_k ,$$

что и доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть, для определенности, $\vec{a}_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$, тогда $(-1)\vec{a}_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$, причем $|-1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| > 0$. То есть нетривиальная линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ равна нулевому вектору.

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 1.4.3.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы, то есть существуют три, одновременно не равных нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, таких, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{o}$. Тогда, по лемме 1.4.1. один из векторов есть линейная комбинация двух остальных и, значит, данные три вектора компланарны.

Докажем достаточность в предположении, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны. Пусть даны три компланарных вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Перенесем эти векторы таким образом, чтобы их начала попали в одну точку.

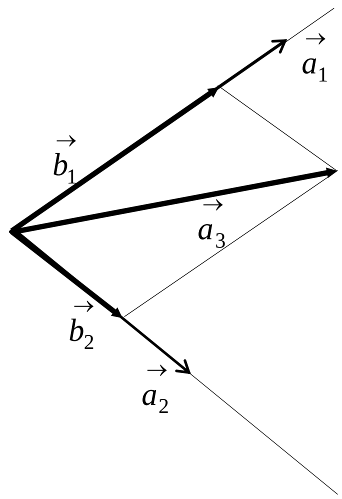

Рисунок 1.4.1.

Через конец вектора $\vec{a}_3$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. При этом получим пару векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ таких, что $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. (Рис. 1.4.1.) Поскольку вектор $\vec{b}_1$ коллинеарен вектору $\vec{a}_1$, а вектор $\vec{b}_2$ коллинеарен вектору $\vec{a}_2$, по теореме 1.4.2. получаем, что $\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$; $\vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2$, но, с другой стороны, имеем $\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$, и векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по лемме 1.4.1., линейно зависимы.

Случай коллинеарных $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

Свойства линейно независимых векторов

1°. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.

2°. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.

3°. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

Теорема 1.4.4. **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ имеется подмножество линейно зависимых, то и все векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.**

Доказательство:

Без ограничения общности можно считать, что линейно зависимы первые $k < n$ векторов (иначе, просто перенумеруем эти векторы), то есть существуют не равные нулю одновременно, числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o} .$$

Построим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$, взяв в качестве первых k коэффициентов числа $\lambda_i,\ i = [1, k]$ и нули в качестве остальных. Тогда получим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} 0 \cdot \vec{a}_i = \vec{o}$.

Теорема доказана.

Следствие 1.4.1. **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ имеется хотя бы один нулевой, то векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.**

§1.5. Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 1.5.1. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.

Базисом в пространстве называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.

Определение 1.5.2. Базис называется *ортогональным*, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).

Определение 1.5.3. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Пространственный базис, составленный из линейно независимых векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, будем обозначать $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Ортогональный или ортонормированный базис условимся обозначать как $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Теорема 1.5.1. **Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$, где α, β, γ - некоторые числа.**

Доказательство:

1°. Докажем вначале существование таких чисел.

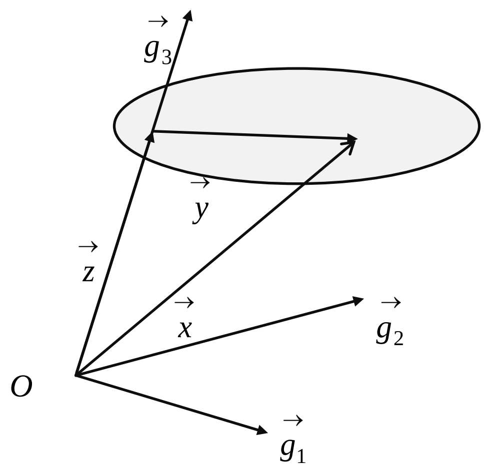

Рисунок 1.5.1.

Совместим начала всех векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и $\vec{x}$ в точке O и проведем через конец вектора $\vec{x}$ плоскость, параллельную плоскости $O, \vec{g}_1, \vec{g}_2$. (Рис. 1.5.1.)

Построим новые векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$, а $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ были коллинеарны, тогда, в силу коллинеарности вектора $\vec{z}$ вектору $\vec{g}_3$, $\vec{z} = \gamma \vec{g}_3$.

Перенеся начало вектора $\vec{y}$ в точку O и рассуждая как при доказательстве теоремы 1.4.3., получим $\vec{y} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$ и, следовательно, $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$, что и доказывает существование разложения.

2°. Докажем единственность разложения по базису. Пусть мы имеем

$$\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3 ,$$

и предположим, что существует другая тройка чисел α', β', γ' таких, что

$$\vec{x} = \alpha' \vec{g}_1 + \beta' \vec{g}_2 + \gamma' \vec{g}_3 .$$

Вычитая почленно эти равенства, получаем

$$(\alpha - \alpha')\vec{g}_1 + (\beta - \beta')\vec{g}_2 + (\gamma - \gamma')\vec{g}_3 = \vec{o} ,$$

где, в силу сделанного предположения о неединственности разложения,

$$|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + |\gamma - \gamma'| > 0$$

Но это означает, что векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно зависимы и, следовательно, не могут быть базисом в силу определения 1.5.1. Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

Определение 1.5.4. Числа α, β, γ - коэффициенты в разложении $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$, называются *координатами* (или *компонентами*) вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Для записи вектора $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$ в координатном представлении используются формы:

1°. $\vec{x}(\alpha; \beta; \gamma)$ 2°. $(\alpha; \beta; \gamma)$ 3°. $\|\alpha \quad \beta \quad \gamma\|$

4°. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ 5°. $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$,

из которых в дальнейшем мы будем использовать последнюю.

В общем случае утверждение "*вектор* $\vec{x}$ *в базисе* $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *имеет координатное представление* $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$" записывается как $\|\vec{x}\|_g = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$, но иногда, если это не приводит к неоднозначности толкования, мы будем использовать и сокращенную запись вида $\vec{x} = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$.

Наконец, если вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости может быть представлен как $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$, то его координатная запись имеет вид $\|\vec{x}\|_g = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$.

§1.6. Действия с векторами в координатном представлении

Поскольку в конкретном базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ каждый вектор находится во взаимно однозначном соответствии с упорядоченной тройкой чисел α, β, γ - своим координатным представлением, то естественным представляется вопрос о том, как выполняются операции с векторами в координатном представлении.

Оказывается, что возможно не только записывать векторы при помощи матриц (столбцов), но и оперировать с ними в матричной форме, поскольку правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

Теорема 1.6.1. **В координатном представлении операции с векторами имеют следующий вид:**

1°. *Сравнение векторов* **Два вектора** $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **и** $\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ **равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления:**

$$\left\|\vec{x}\right\|_g = \left\|\vec{y}\right\|_g \quad \textbf{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases}.$$

2°. *Сложение векторов* **Координатное представление суммы двух векторов** $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **и** $\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ **равно сумме координатных представлений слагаемых.**

$$\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\|_g = \left\|\vec{x}\right\|_g + \left\|\vec{y}\right\|_g .$$

3°. *Умножение векторов на число* **Координатное представление произведения вектора** $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **на число** λ **равно произведению координатного представления вектора** $\vec{x}$ **на это число** λ

$$\left\|\lambda \vec{x}\right\|_g = \lambda \left\|\vec{x}\right\|_g .$$

Доказательство:

Доказательство всех трех пунктов аналогично, поэтому рассмотрим лишь правило сложения векторов в координатной форме.

По свойствам операций сложения и умножения на вещественное число векторов (теорема 1.3.1.) имеем

$$\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|_g = \left\|(\xi_1\vec{g}_1+\xi_2\vec{g}_2+\xi_3\vec{g}_3)+(\eta_1\vec{g}_1+\eta_2\vec{g}_2+\eta_3\vec{g}_3)\right\|_g =$$

$$= \left\|(\xi_1+\eta_1)\vec{g}_1+(\xi_2+\eta_2)\vec{g}_2+(\xi_3+\eta_3)\vec{g}_3\right\|_g = \begin{Vmatrix}\xi_1+\eta_1\\ \xi_2+\eta_2\\ \xi_3+\eta_3\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix} =$$

$$= \left\|\xi_1\vec{g}_1+\xi_2\vec{g}_2+\xi_3\vec{g}_3\right\|_g + \left\|\eta_1\vec{g}_1+\eta_2\vec{g}_2+\eta_3\vec{g}_3\right\|_g = \left\|\vec{x}\right\|_g + \left\|\vec{y}\right\|_g .$$

Теорема доказана.

Следствие 1.6.1.

Координаты линейной комбинации векторов $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$ являются теми же линейными комбинациями соответствующих координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$: $\lambda\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}+\mu\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\lambda\xi_1+\mu\eta_1\\ \lambda\xi_2+\mu\eta_2\\ \lambda\xi_3+\mu\eta_3\end{Vmatrix}$**.**

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема 1.6.2.

Для того чтобы два вектора $\vec{x}=\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Vmatrix}$ и $\vec{y}=\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{Vmatrix}$ на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты в некотором базисе удовлетворяли условию $\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{Vmatrix}=0$.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейно зависимы, тогда в силу леммы 1.4.1. имеет место равенство $\vec{x}=\lambda\vec{y}$ или, в координатной форме, $\begin{cases}\xi_1=\lambda\eta_1\\ \xi_2=\lambda\eta_2\end{cases}$. Исключив λ из этих двух скалярных соотношений, получим $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$, но это и означает, что $\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{Vmatrix} = 0$.

Докажем достаточность.

Пусть $\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{Vmatrix} = 0$, тогда имеем что $\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}$ при $\eta_1 \neq 0$; $\eta_2 \neq 0$, то есть соответствующие координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пропорциональны, что и доказывает линейную зависимость этих векторов.

Случай $\eta_1\eta_2 = 0$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

Теорема доказана.

Теорема 1.6.3. **Для того чтобы три вектора $\vec{x} = \begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}$, $\vec{y} = \begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}$ и $\vec{z} = \begin{Vmatrix}\kappa_1\\ \kappa_2\\ \kappa_3\end{Vmatrix}$ в пространстве были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты в некотором базисе удовлетворяли условию**

$$\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \kappa_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3\end{Vmatrix} = 0.$$

Доказательство:

Приводится в разделе “*Смешанное произведение векторов*” (см. §2.6.).

Следствие 1.6.2. **Равенства $\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{Vmatrix} = 0$ и $\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \kappa_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3\end{Vmatrix} = 0$ соответственно являются необходимыми и достаточными условиями коллинеарности пары векторов на плоскости и компланарности тройки векторов в пространстве.**

§1.7. Декартова система координат

Определение 1.7.1.

Совокупность базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и точки O, в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *общей декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 1.7.2.

Система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, порождаемая ортонормированным базисом, называется *нормальной прямоугольной* (или *ортонормированной*) системой координат.

Если задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\vec{r}$, начало которого находится в точке O, а конец - в точке M.

Определение 1.7.3.

Вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 1.7.4.

Координаты радиус-вектора точки M называются *координатами точки* M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Проиллюстрируем особенности использования векторного описания геометрических объектов на примере решения следующих задач:

Задача 1.7.1.

В некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *заданы координаты радиус-векторов точек M и N, которые являются началом и концом вектора* $\vec{MN}$. *Требуется найти координаты вектора* $\vec{MN}$.

Решение:

Решение очевидно из рис. 1.7.1. и свойств координат векторов.

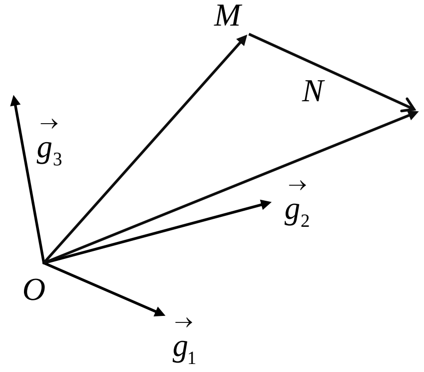

Рисунок 1.7.1.

Пусть $\vec{OM} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ и $\vec{ON} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$. Тогда

$$\vec{OM} + \vec{MN} = \vec{ON} \quad ; \quad \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$$

и окончательно

$$\vec{MN} = \begin{Vmatrix} \eta_1 - \xi_1 \\ \eta_2 - \xi_2 \\ \eta_3 - \xi_3 \end{Vmatrix}.$$

Задача 1.7.2.

В некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *заданы координаты несовпадающих точек* M_1 *и* M_2*, для которых соответственно*

$$\vec{OM_1} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{OM_2} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}.$$

Требуется найти точку M такую, что $\vec{M_1M} = \lambda\, \vec{MM_2}$.

Решение:

Заметим, что λ может принимать любое значение, кроме -1, при котором точка *M* уходит в бесконечность (Рис. 1.7.2.). Найдем радиус-вектор точки *M*. Из соотношений в треугольниках OM_1M и OMM_2 получаем

$$\vec{OM_1} + \vec{M_1M} = \vec{OM} \quad ; \quad \vec{OM} + \vec{MM_2} = \vec{OM_2} ,$$

но, так как $\vec{M_1M} = \lambda\, \vec{MM_2}$, то

$$\vec{OM} - \vec{OM_1} = \lambda(\vec{OM_2} - \vec{OM})$$

и окончательно, $\vec{OM} = \dfrac{1}{1+\lambda}\vec{OM_1} + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\vec{OM_2}$.

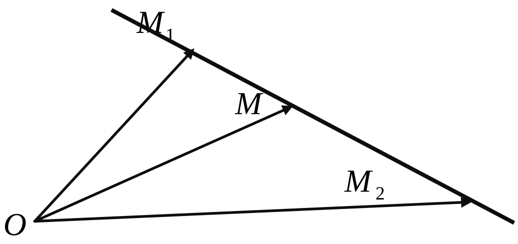

Рисунок 1.7.2.

Радиус-вектор точки М равен $\overrightarrow{OM} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\xi_1 + \lambda\eta_1}{1+\lambda} \\ \dfrac{\xi_2 + \lambda\eta_2}{1+\lambda} \\ \dfrac{\xi_3 + \lambda\eta_3}{1+\lambda} \end{matrix} \right\|$, в силу следствия 1.6.1.

Замечание: к задаче 1.7.2. приводит решение задачи отыскания центра масс системы материальных точек.

Раздел 2

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§2.1. Ортогональное проектирование

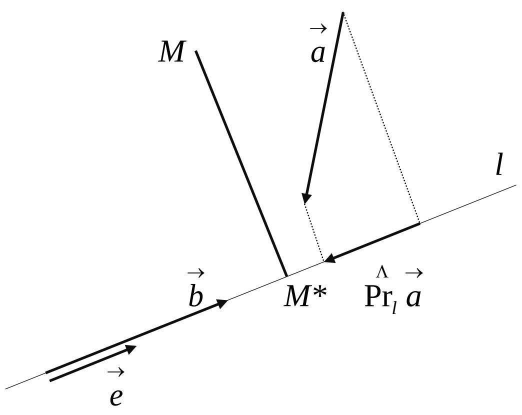

Рисунок 2.1.1.

Определение 2.1.1. Прямую l, с расположенным на ней ненулевым вектором $\vec{b}$, будем называть *осью*.

Вектор $\vec{b}$ называется *направляющим* вектором оси l.

Определение 2.1.2. Пусть дана точка M , не лежащая на оси l , тогда основание перпендикуляра, опущенного из M на ось l - точку M^* будем называть *ортогональной проекцией* точки M на ось .

Примером оси может служить *ось координат* - прямая, проходящая через начало координат, направляющим вектором которой служит один из базисных векторов.

Определение 2.1.3. Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется вектор $\hat{\mathrm{Pr}}_l\,\vec{a}$, лежащий на оси l, начало которого есть ортогональная проекция начала вектора $\vec{a}$ на ось l, а конец - ортогональная проекция конца вектора $\vec{a}$ [1]).

[1]) Верхний символ $\wedge$ будет использоваться для условного обозначения различного рода операций, например: проектирования, поворота, отражения, дифференцирования и т.д.

Выполним нормировку направляющего вектора $\vec{b}$, то есть заменим его на вектор $\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ и рассмотрим нормированный базис $\{\vec{e}\}$ на оси *l*. (Рис. 2.1.1.)

Определение 2.1.4.	*Численным значением* ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l называется координата вектора $\hat{\mathrm{Pr}}_l\,\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$.
Определение 2.1.5.	*Углом* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина наименьшего из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал.

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l обозначим как $\mathrm{Пр}_l\,\vec{a}$. Из рис. 2.1.2. очевидно, что $\mathrm{Пр}_l\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi$, где φ есть угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$.

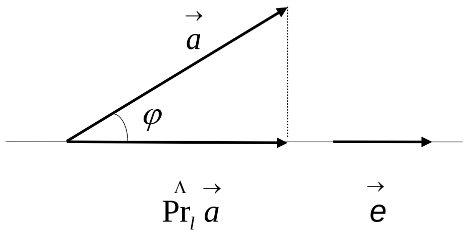

Рисунок 2.1.2.

Свойства ортогональных проекций

1.1°. **Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов**

$$\hat{\mathrm{Pr}}_l\,(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \hat{\mathrm{Pr}}_l\,\vec{a}_1 + \hat{\mathrm{Pr}}_l\,\vec{a}_2\,.$$

Данное свойство иллюстрирует рис. 2.1.3.

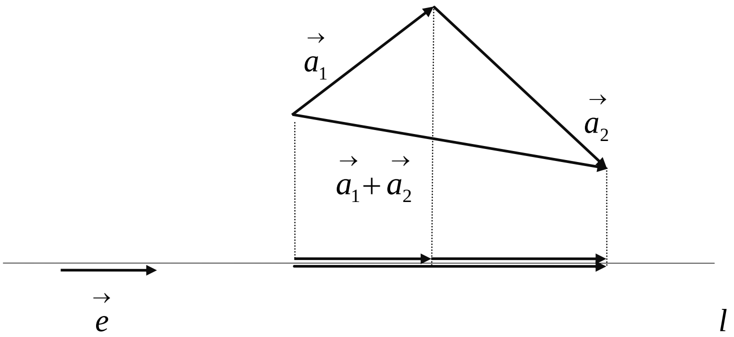

Рисунок 2.1.3.

1.2°. **Если вектор умножить на вещественное число, то его проекция также умножится на это число**

$$\overset{\wedge}{\mathrm{Pr}}_l\,(\lambda \vec{a}) = \lambda \overset{\wedge}{\mathrm{Pr}}_l\, \vec{a}\,.$$

Заметим, что свойства 1.1° и 1.2° можно объединить в следующее утверждение:

Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации проекций

$$\overset{\wedge}{\mathrm{Pr}}_l\,(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \overset{\wedge}{\mathrm{Pr}}_l\, \vec{a}_1 + \lambda_2 \overset{\wedge}{\mathrm{Pr}}_l\, \vec{a}_2\,.$$

Справедливость свойств 1° и 2° вытекает из определения операции ортогонального проектирования и правил действия с векторами.

Свойства численных значений ортогональных проекций

$$2.1°.\ \text{Пр}_l\,(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Пр}_l\, \vec{a}_1 + \text{Пр}_l\, \vec{a}_2\,;$$

$$2.2°.\ \text{Пр}_l\, \lambda \vec{a} = \lambda\, \text{Пр}_l\, \vec{a}\,.$$

Или, объединяя 2.1° и 2.2°,

$$\text{Пр}_l\,(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1\, \text{Пр}_l\, \vec{a}_1 + \lambda_2\, \text{Пр}_l\, \vec{a}_2\,.$$

Отметим, что эти равенства следуют из свойств ортогональных проекций и свойств координат векторов.

§2.2. Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение 2.2.1.	*Скалярным произведением* ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В случае, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $(\vec{a},\vec{b})$. По определению: $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где φ - угол между векторами-сомножителями. При этом, согласно определению 2.1.5., $0\le\varphi\le\pi$.

Заметим также, что, если $\vec{b}\ne\vec{o}$, то справедливо равенство $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}|\ \text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения

1°. $(\vec{a},\vec{b})=0$ при $\vec{a}\ne\vec{o}$ и $\vec{b}\ne\vec{o}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *взаимно ортогональны*;

2°. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (*коммутативность*). Следует из определения скалярного произведения и свойств косинуса);

3°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b})=(\vec{a}_1,\vec{b})+(\vec{a}_2,\vec{b})$ (*дистрибутивность*).

Доказательство:

Если $\vec{b}=\vec{o}$, то 3° очевидно. Пусть $\vec{b}\ne\vec{o}$, тогда

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b})=|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}_1+|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}_2=(\vec{a}_1,\vec{b})+(\vec{a}_2,\vec{b}).$$

Свойство доказано.

4°. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$;

5°. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2\ge 0\ \ \forall\vec{a}$; $\quad|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;

(заметим также, что условия $(\vec{a},\vec{a})=0$ и $\vec{a}=\vec{o}$ равносильны);

6°. При $\vec{a}\ne\vec{o}$ и $\vec{b}\ne\vec{o}$ $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$.

§2.4. Векторное произведение векторов и его свойства

Определение 2.4.1.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *правой*, если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки. В противном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *левой*.

Определение 2.4.2.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что

1°. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.

3°. Тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $[\vec{a}, \vec{b}]$. Из определения 2.4.2. следует, что

1°. $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Свойства векторного произведения

1°. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативность, следует из определения 2.4.2. и нечетности функции $\sin\varphi$)

2°. $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$ (следует из определения векторного произведения и того факта, что векторы $[\lambda\vec{a},\vec{b}]$ и $[\vec{a},\vec{b}]$ ортогональны одной и той же плоскости при неколлинеарных $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\lambda\neq 0$).

3°. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (дистрибутивность).

§2.6. Смешанное произведение

Определение 2.6.1.	*Смешанным* (или *векторно-скалярным*) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаемым как ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), называется число ([$\vec{a}$, $\vec{b}$], $\vec{c}$).

Свойства смешанного произведения

Для смешанного произведения справедливы тождества:

1°. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

2°. $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

3°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$,

справедливость которых следует из определения смешанного произведения и теоремы 2.6.1.

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара коллинеарных векторов.

§2.8. Двойное векторное произведение

Определение 2.8.1. *Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$.

Для ряда задач оказывается полезным применение формулы

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}),$$

Раздел 3

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§3.1. Прямая на плоскости

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L, проходящая через точку $\vec{r}_0$ с лежащим на ней *ненулевым* вектором $\vec{a}$.

Определение 3.1.1.	Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* прямой L.

Теорема 3.1.1. **Множество радиус-векторов точек на прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, где τ - произвольный вещественный параметр.**

Теорема 3.1.3.

Всякое уравнение вида $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.

Доказательство:

Пусть дано уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$. Выберем пару чисел x_0 и y_0 таких, что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычитая почленно два эти равенства, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Возьмем точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ и вектор $\vec{a} = \begin{Vmatrix} -B \\ A \end{Vmatrix}$. По теореме 3.1.2. имеем, что прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0$ в направлении вектора $\vec{a}$, имеет уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Следовательно, исходное уравнение есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

§3.2. Формы задания прямой на плоскости

В произвольной декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1°. *Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки* $\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$ *и* $\vec{r}_2 = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Vmatrix}$

Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{Vmatrix}$, то ее уравнение в векторной форме будет иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ или $\vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2$.

Соответственно в координатах, исключив параметр τ, получим одну из следующих формул:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$$

$$y = y_1; \quad \forall x, \quad \text{если} \quad y_2 = y_1$$

$$x = x_1; \quad \forall y, \quad \text{если} \quad x_2 = x_1 \quad .$$

Заметим, что эти три случая могут быть описаны условием

$$\det \begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix} = 0 .$$

Определение 3.2.1.

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* прямой L .

3°. *Нормальное уравнение прямой*

Рассмотрим скалярное уравнение прямой в *ортонормированной* системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$ и преобразуем его, разделив обе части на $\sqrt{A^2+B^2}$. Подставляя обозначения

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \quad \rho = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

получим так называемую *нормальную* форму записи уравнения

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + \rho = 0.$$

Геометрический смысл параметров ρ и φ ясен из следующего рис. 3.2.2.

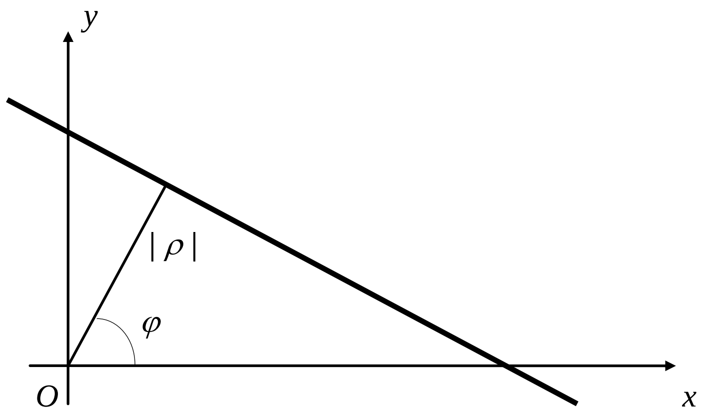

Рисунок 3.2.2.

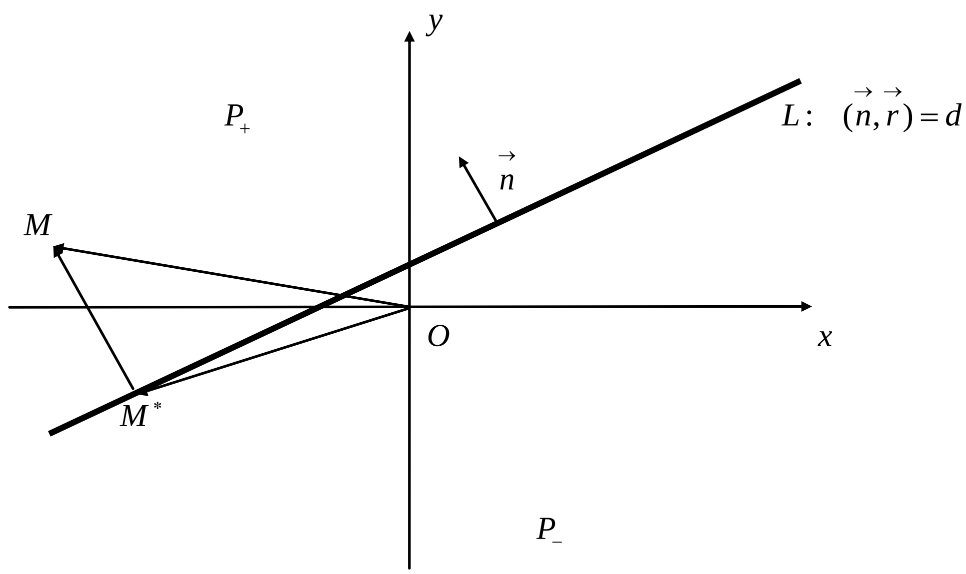

Рисунок 3.2.3.

§3.3. Плоскость в пространстве

Теорема 3.3.2.

Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad |A| + |B| + |C| > 0\,.$$

Доказательство:

Условие компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в координатной форме имеет, в силу теоремы 1.6.3., вид

$$\det \begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{Vmatrix} = 0\,.$$

Откуда $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или, окончательно, $Ax + By + Cz + D = 0$, где числа A, B и C находятся по теореме 1.1.1. и равны соответственно

$$A = \det \begin{Vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{Vmatrix}\,; \quad B = -\det \begin{Vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{Vmatrix}\,; \quad C = \det \begin{Vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{Vmatrix}\,,$$

а $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, и таким образом, мы получили, что уравнение плоскости есть уравнение первой степени.

Условие невозможности одновременного равенства нулю чисел A, B и C вытекает из неколлинеарности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и следствия 2.5.1.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.3. **Всякое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$ в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости**.

Определение 3.3.2. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$.

Определение 3.3.3. Вектор $\begin{Vmatrix} A \\ B \\ C \end{Vmatrix}$ называется *главным вектором* плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$.

§3.4. Формы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в некоторой декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

1°. *Уравнение прямой в параметрической форме*

Пусть точка с радиус-вектором $\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$ лежит на прямой в пространстве, имеющей ненулевой направляющий вектор $\vec{a} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$ и проходящей через точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$, тогда из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ следует, что уравнение прямой в пространстве должно иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$

2°. *Уравнение прямой в канонической форме*

Если исключить параметр τ из скалярной записи уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \\ z = z_0 + \tau a_z \end{cases},$$

то получается так называемое *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

Подсказки для реализаций моделей:

Геометрическое условие	**Возможная векторная форма представления**
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ 2°. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a} = \lambda [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$. 2°. $[\vec{a}, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] = \vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$	$(\vec{a}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$
Совпадение прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	1°. Существуют $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ такие, что $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ и $\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02} = \mu \vec{a}_1$ 2°. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}$ и $[\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1] = \vec{o}$

Пересечение прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau\vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau\vec{a}_2$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$
Условие скрещивания прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau\vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau\vec{a}_2$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0$.

Таблица 3.5.1. Относительная ориентация прямых в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1, \vec{q}_1] = \lambda [\vec{p}_2, \vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) \neq 0$. 2°. $[[\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]] = \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) \neq 0$.
Совпадение плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1, \vec{q}_1] = \lambda [\vec{p}_2, \vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) = 0$. 2°. $[[\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]] = \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) = 0$.
Ортогональность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$	$([\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]) = 0$.
Параллельность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$ и $(\vec{n}, \vec{r}) = d$	$(\vec{p}, \vec{q}, \vec{n}) = 0$, при условии $(\vec{n}, \vec{r}_0) \neq d$.
Совпадение плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$ и $(\vec{n}, \vec{r}) = d$	$(\vec{p}, \vec{q}, \vec{n}) = 0$, при условии $(\vec{n}, \vec{r}_0) = d$.
Ортогональность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$ и $(\vec{n}, \vec{r}) = d$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $[\vec{p}, \vec{q}] = \lambda \vec{n}$. 2°. $[[\vec{p}, \vec{q}], \vec{n}] = \vec{o}$.

Таблица 3.5.2. Относительная ориентация плоскостей в пространстве

Геометрическое условие	**Возможная векторная форма представления**
Параллельность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существуют $\lambda;\ \mu;\ \lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{a}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})\neq 0$. 2°. $\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{p},\ \vec{q})=0\\(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\ \vec{p},\ \vec{q})\neq 0\end{cases}.$
Принадлежность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существуют $\lambda;\ \mu;\ \lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{a}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})=0$. 2°. $\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{p},\ \vec{q})=0\\(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\ \vec{p},\ \vec{q})=0\end{cases}.$
Ортогональность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}=\lambda[\vec{p},\ \vec{q}]$. 2°. $[\vec{a},[\vec{p},\ \vec{q}]]=\vec{o}$.
Параллельность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	$(\vec{a},\ \vec{n})=0$, при условии $(\vec{n},\vec{r}_0)\neq d$.
Принадлежность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	$\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{n})=0\\(\vec{r}_0,\ \vec{n})=d\end{cases}.$
Ортогональность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ к плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}=\lambda\vec{n}$. 2°. $[\vec{a},\vec{n}]=\vec{o}$.

Ортогональность прямой $\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{r})=d_1\\(\vec{n}_2,\vec{r})=d_2\end{cases}$ и плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	1°. Существуют λ; μ; $\lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{n}=\lambda\vec{n}_1+\mu\vec{n}_2$. 2°. $[\vec{n},[\vec{n}_1,\vec{n}_2]]=\vec{o}$.

Таблица 3.5.3. Относительная ориентация прямой и плоскости в пространстве

Раздел 4
НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ
§4.4. Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана *ортонормированная* система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и некоторая линия L.

Определение 4.4.1. В соответствии с определениями 4.1.2. и 4.1.3. будем говорить, что линия L является *алгебраической линией второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (4.4.1.)$$

где числа A, B и C не равны нулю одновременно ($|A| + |B| + |C| > 0$), а x и y суть координаты радиус-вектора точки, лежащей на линии L.

Поскольку коэффициенты уравнения 4.4.1. зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно предварительно перейти к той системе координат, в которой запись уравнения линии оказывается наиболее простой.

Если ввести обозначение $\Delta = \det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} = AC - B^2$, то будет справедлива

	Пустые множества	*Точки*	*Совпадающие прямые*	*Несовпадающие прямые*	*Кривые*
$\Delta > 0$	$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$	$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$			*Эллипс* $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$
$\Delta < 0$				$\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$	*Гипербола* $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$
$\Delta = 0$	$y'^2 = -a^2$, $\forall x'$		$y'^2 = 0$, $\forall x'$	$y'^2 = a^2$, $\forall x'$	*Парабола* $y'^2 = 2px'$

§4.5. Поверхности второго порядка в пространстве

Пусть дана *ортонормированная* система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в пространстве.

Определение 4.5.1. В соответствии с определениями 4.2.2. и 4.2.3. будем говорить, что поверхность S является *алгебраической поверхностью второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + \\ &+ 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0 \quad , \end{aligned} \qquad (4.5.1.)$$

где числа A_{11}; A_{22}; A_{33}; A_{12}; A_{13}; A_{23} не равны нулю одновременно, а x, y и z суть координаты радиус-вектора точки, лежащей на поверхности S.

Как и в плоском случае, коэффициенты уравнения (4.5.1.) зависят от выбора системы координат, поэтому при исследовании свойств поверхностей второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой запись уравнения поверхности оказывается наиболее простой.

Пустые множества	*Точки, прямые и плоскости*	*Цилиндры и конусы*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{b^2}=-1$ $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1;\quad \forall z'$ $x'^2=-a^2;\quad \forall y', z'$	*Изолированная точка* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{b^2}=0$ *Прямая* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0;\quad \forall z'$ *Пара пересекающихся плоскостей* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0;\quad \forall z'$ *Пара параллельных или совпадающих плоскостей* $x'^2=a^2 \quad x'^2=0;\quad \forall y', z'$	*Эллиптический цилиндр* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1;\quad \forall z'$ *Гиперболический цилиндр* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1;\quad \forall z'$ *Параболический цилиндр* $y'^2=2px';\quad \forall z'$ *Конус* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0$

Невырожденные поверхности

Эллипсоиды	*Параболоиды*	*Гиперболоиды*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$	*Эллиптический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=2z'$ *Гиперболический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=2z'$	*Однополостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$ *Двуполостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$

причем $a>0$, $b>0$, $c>0$, $p>0$**.**

§4.6. Альтернативные системы координат

В ряде практических приложений оказывается целесообразным использование систем координат, отличных от декартовой.

Примером альтернативной системы координат на плоскости является *полярная система координат*.

Положение точки на плоскости в этой системе координат задается парой упорядоченных чисел $\{\rho, \varphi\}$, где $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, $\varphi = \angle\,(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$, удовлетворяющих ограничениям $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

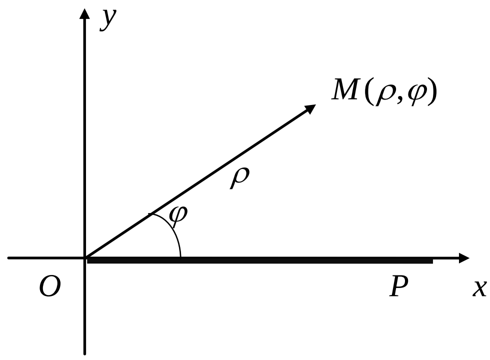

Рисунок 4.6.1.

Точка *O* называется *полюсом*, а луч *OP* - *полярной осью*. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки (рис. 4.6.1.). Для полюса этот угол не определяется.

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к полярной и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,; \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

Использование полярной системы координат позволяет упростить описание объектов, обладающих точечной симметрией.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§5.1. Определители

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел $1,2,3,\ldots,n$. Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без повторений) как $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$. Напомним, что полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 6.1.1.	Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка,* или *инверсию*), если при $i < j$ имеет место $k_i > k_j$.

Полное число беспорядков в перестановке $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ будем обозначать $Б(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$. Например, $Б(3,1,4,2) = 3$.

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| = \|\alpha_{ij}\|; \quad i, j = [1, n].$$

§5.2. Свойства определителей

Теорема 5.2.4.	**Определитель произведения матриц размера $n \times n$ равен произведению их определителей, то есть** $\det(\|A\|\|B\|) = \det\|A\| \cdot \det\|B\|$ **.**

§6.3. Разложение определителей

Выберем в *квадратной* матрице $\|A\|$ строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Определение 6.3.1.	Детерминант квадратной матрицы порядка k, образованной элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором k-го порядка* и обозначается $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$.
Определение 6.3.2.	Детерминант квадратной матрицы порядка $n-k$, образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором, дополнительным к минору* $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$, и обозначается $\overline{M}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$.

Выберем в матрице $\|A\|$ *i*-ю строку и *j*-й столбец, на пересечении которых расположен элемент α_{ij}. Удалим из $\|A\|$ выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу $\|A^+\|$ размера $(n-1) \times (n-1)$.

Определение 6.3.3.	Детерминант матрицы $\|A^+\|$ называется *дополнительным минором* $\overline{M}_i^j$ *элемента* α_{ij}.

Сгруппируем в определении 6.1.2. - детерминанта матрицы $\|A\|$ все $(n-1)!$ слагаемых, содержащих элемент α_{ij}, и вынесем его за скобки. Получим выражение вида $\det\|A\| = \alpha_{ij} D_{ij} + \ldots$.

Определение 6.3.4.	Число D_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента α_{ij}.

Заметим, что в силу определения 6.1.2. имеют место равенства

$$\det\|A\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ij} \ ; \forall i = [1, n] \quad \text{и} \quad \det\|A\| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} D_{kj} \ ; \forall j = [1, n] \qquad (6.3.1.)$$

Теорема 6.3.1. **Справедливо соотношение $D_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_i^j$.**

Следствие 6.3.1. **Разложение определителя по i-му столбцу имеет вид $\det\|A\| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}\alpha_{ki}\overline{M}_k^i$ или $\det\|A\| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}M_k^i\overline{M}_k^i$.**

§5.4. Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}\xi_i = \beta_j \ ; \ j = [1, n] \qquad (6.4.1.)$$

Или же в матричной форме $\|A\|\|x\| = \|b\|$, где квадратная матрица $\|A\|$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\|x\|$ и $\|b\|$ - соответственно компоненты ξ_i и β_j .

Определение 6.4.1. Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ будем называть *решением системы линейных уравнений*, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество.

Имеет место

Теорема 6.4.1. (Правило Крамера) **Если $\Delta = \det\|A\| \neq 0$, то существует единственное решение системы линейных уравнений 5.4.1., определяемое формулами**

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}\ ;\ i = 1,2,...,n \quad , \quad \textbf{где}\ \Delta_i = \det \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \beta_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \phantom{\alpha_{11}} & \phantom{\alpha_{12}} & & \uparrow & & \phantom{\alpha_{1n}} \end{array} \\ i-\text{й столбец} \end{array}$$

- определитель матрицы, получаемой из матрицы $\|A\|$, заменой ее i-го столбца на столбец свободных членов $\|b\|$.

Доказательство(при дистанционном образовании можно пропустить):

1°. Получим вначале утверждение теоремы в предположении, что система (6.4.1.) имеет решение $\|x\| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$, то есть когда выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j\ ;\ j = [1,n].$$

Умножив последовательно для всех $j = [1,n]$ обе части этих равенств на алгебраическое дополнение D_{jk} и просуммировав результаты умножения по j, получим

$$\sum_{j=1}^{n} D_{jk} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk}\ , \quad \forall k = [1,n] \quad .$$

Изменим порядок суммирования (то есть выполним перегруппировку слагаемых) в левой части этого равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} D_{jk})\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk}.$$

Но выражение в круглых скобках равно $\Delta \cdot \delta_{ik}$ (по теореме 6.3.2.), поэтому, учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} = \Delta_k$ и $\Delta \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\xi_i = \Delta\xi_k$, получаем $\Delta\xi_k = \Delta_k$, $k = [1,n]$.

Или, окончательно, $\xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = [1,n]$.

2°. Докажем теперь, что в условиях теоремы набор чисел $\{ \xi_i = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}\ ,\ i = [1, n] \}$ есть решение данной системы линейных уравнений. Убедимся в этом, подставив значения ξ_i в левые части исходной системы линейных уравнений (6.4.1.).

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} (\sum_{k=1}^{n} \beta_k D_{ki}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} D_{ki}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{kj} \Delta = \beta_j\ , \quad j = [1, n].$$

Для получения последнего равенства мы снова изменили порядок суммирования и воспользовались теоремой 6.3.2.

Теорема доказана.

§5.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $\| A \|$ размера $m \times n$. Пусть $1 \le k \le \min\{m, n\}$. Выберем *k* фиксированных столбцов и строк, на пересечении которых стоит матрица минора порядка *k*.

Пусть при данном *k* все миноры *k*-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем *k*, поскольку каждый минор $(k+1)$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка *k*. (См. следствие 6.3.1.)

Определение 6.5.1.	Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы $\| A \|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\operatorname{rg} \| A \|$.

Определение 6.5.2.	Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

Определение 6.5.3.	Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Рассмотрим n m-компонентных столбцов вида:

$$\| a_1 \| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{Vmatrix}; \ \| a_2 \| = \begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{Vmatrix}; \dots ; \ \| a_n \| = \begin{Vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{Vmatrix} \text{ и столбцы } \| b \| = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{Vmatrix}; \ \| o \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сложения и умножения на число, то можно говорить, что столбец $\| b \|$ есть *линейная комбинация* столбцов $\| a_1 \|, \| a_2 \|, \dots, \| a_n \|$, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что $\| b \| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| a_i \|$.

§5.6. Системы m линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{cases}, \text{ или } \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j, \quad j = [1, m] \qquad (6.6.1.)$$

или же, в матричной форме $\| A \| \| x \| = \| b \|$, где матрица $\| A \|$ размера $m \times n$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\| x \|$ и $\| b \|$ соответственно компоненты ξ_i, $i = [1, n]$, и β_j, $j = [1, m]$.

Определение 6.6.1. Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0\}$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений (6.6.1.), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем верные равенства. Частное решение системы линейных уравнений может также быть записано в виде столбца $\| x^0 \| = \begin{Vmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{Vmatrix}$. Совокупность *всех* частных решений системы линейных уравнений (6.6.1.) назовем *общим решением* системы (6.6.1.)

Определение 6.6.2. Если система (6.6.1.) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае - *несовместной* системой уравнений.

Определение 6.6.3.

Матрица $\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|$ называется *основной* матрицей системы (6.6.1.), а матрица $\|A \mid b\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{matrix} \right\|$ - *расширенной* матрицей этой системы.

Определение 6.6.4.

Система (6.6.1.) называется *однородной*, если $\beta_j = 0$, $\forall j = [1, m]$, в противном случае - *неоднородной* системой уравнений.

Теорема 5.6.1. (Кронекера-Капелли)

Для того чтобы система (5.6.1.) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.

При дистанционном образовании приймем данную теорему без доказательств.