КОНСПЕКТ ЛЕКЦИОННО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

доц.,к.ф.м.н. Королёв М.Е.

Лист задания

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Вариант	2	16	3	16	25	15	1	25	21	15	18	12	2	20	20	18	18	4	26	17	30	5	8

Расчетно-графическая работа №1: "Линейное программирование"

Балл

1. Графический метод решения задач линейного программирования

Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

2

2 Симплексный метод

Решить задачу линейного программирования симплексным методом.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

16

3. Транспортная задача.

Составить план перевозок продукции таким образом, чтобы затраты на перевозки были минимальными:

						A
C=	12	15	11	19	22	41
	20	15	11	2	19	33
	21	26	23	7	16	25
	11	24	12	3	29	14
B	34	39	24	8	8	

б) открытого типа.

					A
C=	3	1	6	2	10
	4	5	2	5	10
	8	7	5	4	12
	1	2	4	3	13
B	10	10	15	15	

3

Графический метод решения задач линейного программирования

Если ЗЛП содержит не более двух неизвестных и система ограничений состоит только из неравенств, то она допускает простую геометрическую интерпретацию и геометрическое решение.

В этом случае формулировка ЗЛП следующая:

Найти значения переменных X1 и X2, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0,$$

при которых функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

достигает максимума (минимума).

Схема решения ЗЛП графическим методом состоит в следующем:
1. построить область допустимых решений;
2. определить и построить вектор $gradZ$;
3. построить опорную прямую, определяющую точку экстремума;
4. найти координаты точки экстремума, т.е. найти оптимальный план ЗЛП;
5. вычислить оптимальное значение целевой функции.

При рещении ЗЛП указанным методом могут встречаться следующие случаи:
1. Область допустимых решений - выпуклый многоугольник.
   а) опорная прямая проходит через вершину многоугольника;
   б) опорная прямая проходит через сторону многоугольника;
2. Область допустимых решений - пустая область.
3. Область допустимых решений - открытая выпуклая многоугольная область.
4. Область допустимых решений состоит из одной точки.

В том случае, если область допустимых решений является пустой областью, то задача не имеет решения из-за несовместимости системы ограничений.

Прямая, которая имеет с выпуклым многоугольником хотя бы одну общую точку, а весь многоугольник расположен по одну сторону от этой прямой, называется опорной. Если опорная прямая прозодит через сторону, то задача линейного программирования имеет бесконечное множество оптимальных решений.

Если область допустимых решений является неограниченной, то задача может иметь, а может и не иметь решения.

Задача №1

Найти наибольшее значение функции $Z = -1X1 - 1X2 \rightarrow \max$

при условиях:

$$\begin{cases} -4X_1 + 2X_2 \ge 9 \\ 2X_1 + 1X_2 \ge 9 \\ 2X_1 + 5X_2 \le 10 \\ -6X_1 + 8X_2 \le 5 \end{cases} \quad (1)$$

Решение:

1.Определим множество допустимых планов. Для этого необходимо построить область допустимых решений, удовлетворяющих условиям (1) - рис.1

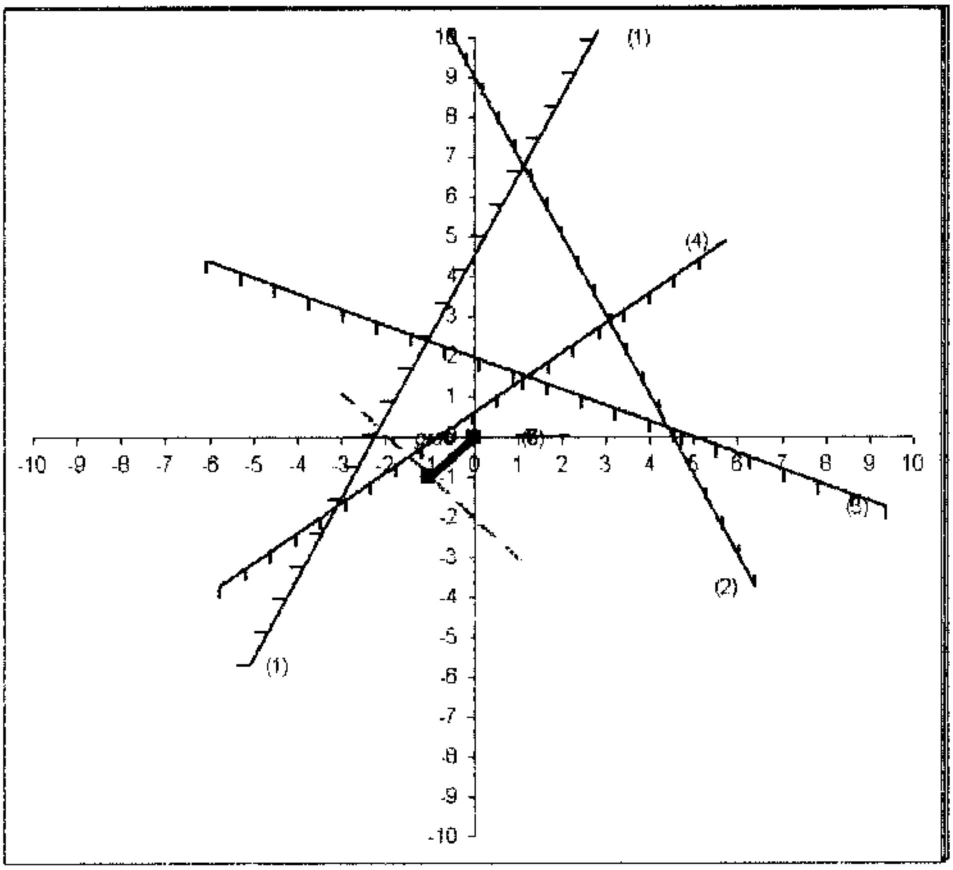

Рис.1 - Область допустимых решений

Из рисунка видно, что не существует ни одной точки, общей для всех полуплоскостей. Это означает, что задача не имеет решения, а система ограничений является несовместимой.

Ответ: Решений нет.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА
(Закрытая)

Транспортные задачи - специальный класс задач линейного программирования. Эти модели описывают перевозки какого-нибудь товара из пункта отправления в пункт назначения. Назначением транспортной задачи является определение объемов перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок. При этом должны учитываться ограничения, которые накладывают на объемы грузов, имеющиеся в пунктах отправления (предложения), и ограничения, которые учитывают потребность грузов в пунктах назначения (спрос).
В общем случае транспортную модель можно применять для описания ситуаций, связанных с управлением движения капиталов, складыванием расписаний, назначением персонала и др.
Принципиальная схема алгоритма транспортной задачи изображенна на рисунке 1.

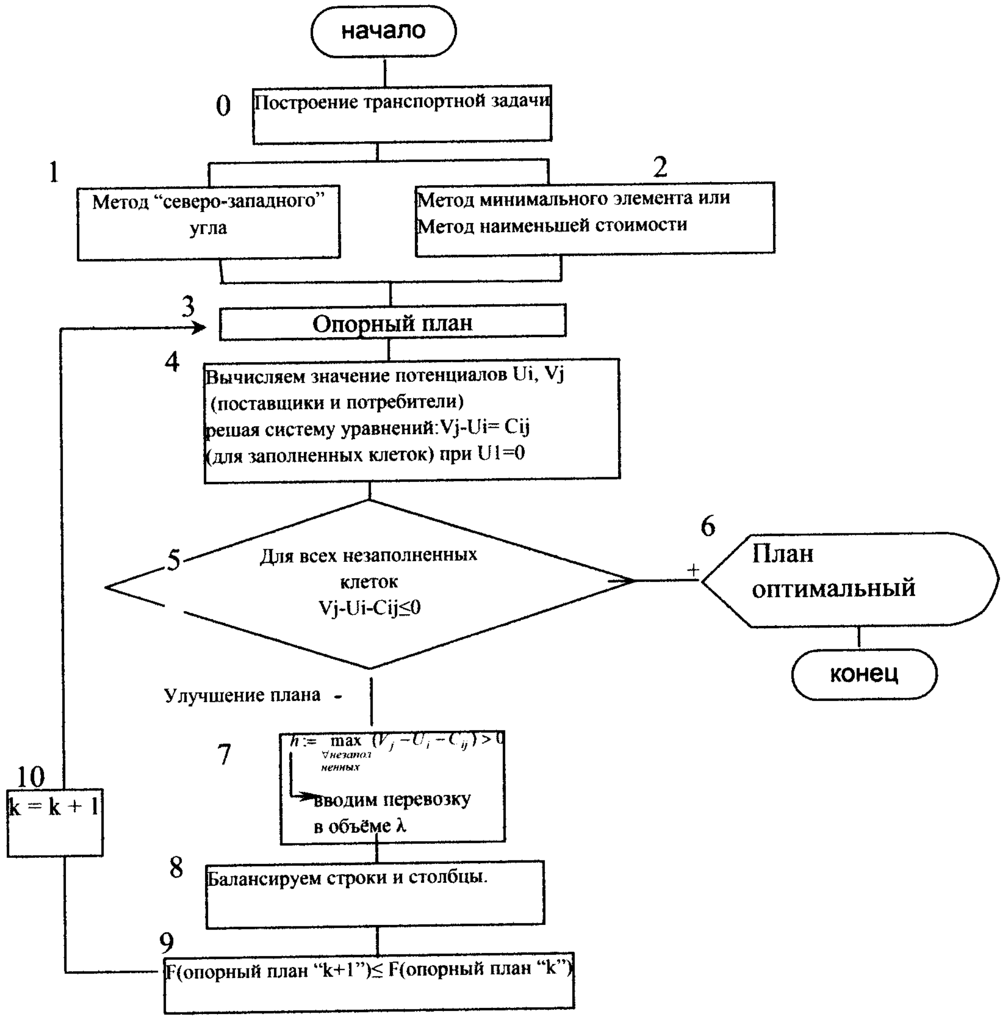

Рисунок 1 - Алгоритм решения транспортной задачи

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

(Закрытая)

Условие:

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 5 \\ 9 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 36 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 24 & 30 & 36 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\frac{129}{129}$$

Решение:

МЕТОД СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА

Выполнение начинается с верхней левой ячейки (северо-западного угла) транспортной таблицы, т.е. с переменной x_{11}.

Шаг 1. Переменной x_{11} присваивается максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение.

Шаг 2. Вычеркивается строка (или столбец) с полностью реализованным предложением (с удовлетворенным спросом). Это означает, что вычеркнутой строке (столбце) мы не будем присваивать значения остальным переменным (кроме переменной, определенной на первом шаге). Если одновременно удовлетворяются спрос и предложение, вычеркивается только строка или столбец.

Шаг 3. Если не вычеркнута только одна строка и только один столбец, процесс останавливается. В противном случае переходим к ячейке справа, если вычеркнут столбец, или к нижележащей ячейке, если вычеркнута строка. Затем возвращаемся к первому шагу.

Результаты применения метода северо-западного угла:

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	4 ***18***	4	7	3	18
A2	3 ***6***	1 ***30***	3	4	36
A3	2	7	7 ***36***	5	36
A4	9	4	5	5 ***39***	39
Спрос	24	30	36	39	

Метод потенциалов

С помощью методов "северо-восточного угла" и минимального элемента осуществляются построения первого опорного плана. Для проверки плана на оптимальность и получения оптимального плана используют различные методы. Самым распространённым является метод потенциалов.

В методе потенциалов каждой строке i и каждому столбцу j транспортной таблицы ставится в соответствие числа (потенциалы) ui, vj.
Величины ui и vj называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей.
Для каждой заполненной клетки разность потенциалов потребителя и поставщика должна быть равна стоимости перевозки единицы продукта для соответствующей клетки.

$$v_j - u_i = c_{ij}$$

где - стоимость перевозки единицы груза занятой клетки.
Неизвестные потенциалы u1, u2,..., um, v1, v2,..., vn, рассматриваются как оценки единицы груза, находящегося у поставщиков и потребителей. Для построения системы потенциалов используем условие.

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана.
При таком плане таблица перевозок содержит m + n – 1 заполняемых клеток,, поэтому составить систему из m + n – 1 линейно независимых уравнений с m + n неизвестными.
Если уравнений на одно меньше, система является неопределенной и неизвестному придают произвольные значения. Обычно принимают u1=0, после этого определяют остальные потенциалы.
Для того, чтобы опорный план был оптимальный необходимо чтобы для каждой незаполненной клетки выполнялось неравенство:

$$v_j - u_i - c_{ij} \leq 0$$

Если хотя - бы одна из незаполненных клеток не удовлетворяет данному неравенству, то опорный план не является оптимальным и его можно улучшить.
Чтобы улучшить план, необходимо перевозки перераспределить. Загрузке подлежит в первую очередь свободная клетка, которой соответствует

$$\max(v_j - u_i - c_{ij})$$

Чтобы улучшить план, вводим перевозку в объёме λ между соответствующими пунктами Ai и Bj из условия , т.е. переменную переводим из свободных в базисные. Вместе с тем необходимо одну из базисных переменных перевести в свободные, т.е. освободить одну из заполненных клеток. Введение добавочной перевозки λ не должно нарушить сбалансированность строк и столбцов.
Строим цикл – замкнутую ломанную со звеньями, расположенными по строкам и столбцам. Все вершины цикла, за исключением выбранной клетки (i,j), находятся в занятых клетках. Величину λ записываем в выбранную незанятую клетку со знаком плюс. Двигаясь по циклу от отмеченной клетки (i,j), поочередно проставляем значения + λ и – λ в клетках – вершинах цикла.
Величину λ определяем из следующих условий:
1. Сохранение сбалансированности строк и столбцов;
2. Условия неотрицательности перевозок;
3. Переход только одной занятой клетки в незанятые.
Если при вычитании значения λ освобождается несколько клеток, то их заполняют нулевыми перевозками в таком количестве, чтобы во вновь полученном опорном плане занятых клеток было по-прежнему m + n – 1 .
Для нового плана опять вычисляем потенциалы для поставщиков и потребителей и продолжаем этот процесс до те пор, пока не получим оптимальный план.

Система уравнений примет следующий вид: Итерация № 1

v1 - u1= c(1,1);
v1 - u2= c(2,1);
v2 - u2= c(2,2);
v2 - u3= c(3,2);
v3 - u3= c(3,3);
v3 - u4= c(4,3);
v4 - u4= c(4,4);

Результаты решения системы уравнений:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4 ***18***	4	7	3	0
A2	3 ***6***	1 ***30***	3	4	1
A3	2	7 ***0***	7 ***36***	5	-5
A4	9	4	5 ***0***	5 ***39***	-3
vj	4	2	2	2	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 5.

Для незаполненных клеток проверим условие vj - ui - cij <= 0.

v(2) - u(1) - c(1, 2) = -2
v(3) - u(1) - c(1, 3) = -5
v(4) - u(1) - c(1, 4) = -1
v(3) - u(2) - c(2, 3) = -2
v(4) - u(2) - c(2, 4) = -3
⇨ v(1) - u(3) - c(3, 1) = 7
v(4) - u(3) - c(3, 4) = 2
v(1) - u(4) - c(4, 1) = -2
v(2) - u(4) - c(4, 2) = 1

План неоптимален. Необходимо улучшение.

Необходимо улучшить план (рисунок 1 - блок 7) Итерация № 2

С этой целью вводим перевозку λ в клетку **(3,1), т.к. max{7, 2, 1} = 7**

Объем перевозки λ составляет: **0, т.к. min{6, 0} = 0**

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 8.

Строим цикл. Получим следующую таблицу:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4 ***18***	4	7	3	0
A2	3 ***6*** - λ	1 ***30*** + λ	3	4	1
A3	2 ***λ***	7 ***0*** - λ	7 ***36***	5	-5
A4	9	4	5 ***0***	5 ***39***	-3
vj	4	2	2	2	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 9.

При λ = 0 полулим следующий результат:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4 ***18***	4	7	3	
A2	3 ***6***	1 ***30***	3	4	
A3	2 ***0***	7	7 ***36***	5	
A4	9	4	5 ***0***	5 ***39***	
vj					

Определим суммарную стоимость перевозок при новом плане.

Суммарная стоимость перевозок равна:

z= 18*4 + 6*3 + 30*1 + 0*2 + 36*7 + 0*5 + 39*5 = 567

Для нового плана опять вычисляем потенциалы для поставщиков и потребителей и продолжаем этот процесс до те пор, пока не получим оптимальный план.

Система уравнений примет следующий вид: Итерация № 2

v1 - u1= c(1,1);
v1 - u2= c(2,1);
v2 - u2= c(2,2);
v1 - u3= c(3,1);
v3 - u3= c(3,3);
v3 - u4= c(4,3);
v4 - u4= c(4,4);

Результаты решения системы уравнений:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4 / ***18***	4	7	3	0
A2	3 / ***6***	1 / ***30***	3	4	1
A3	2 / ***0***	7	7 / ***36***	5	2
A4	9	4	5 / ***0***	5 / ***39***	4
vj	4	2	9	9	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 5.

Для незаполненных клеток проверим условие vj - ui - cij <= 0.

v(2) - u(1) - c(1, 2) = -2
v(3) - u(1) - c(1, 3) = 2
⇨ v(4) - u(1) - c(1, 4) = 6
v(3) - u(2) - c(2, 3) = 5
v(4) - u(2) - c(2, 4) = 4
v(2) - u(3) - c(3, 2) = -7
v(4) - u(3) - c(3, 4) = 2
v(1) - u(4) - c(4, 1) = -9
v(2) - u(4) - c(4, 2) = -6

План неоптимален. Необходимо улучшение.

Необходимо улучшить план (рисунок 1 - блок 7) Итерация № 3

С этой целью вводим перевозку λ в клетку **(1,4), т.к. max{2, 6, 5, 4, 2} = 6**

Объем перевозки λ составляет: **18, т.к. min{18, 36, 39} = 18**

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 8.

Строим цикл. Получим следующую таблицу:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4 ***18*** - λ	4	7	3 ***λ***	0
A2	3 ***6***	1 ***30***	3	4	1
A3	2 ***0*** + λ	7	7 ***36*** - λ	5	2
A4	9	4	5 ***0*** + λ	5 ***39*** - λ	4
vj	4	2	9	9	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 9.

При λ = 18 полулим следующий результат:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 ***18***	
A2	3 ***6***	1 ***30***	3	4	
A3	2 ***18***	7	7 ***18***	5	
A4	9	4	5 ***18***	5 ***21***	
vj					

Определим суммарную стоимость перевозок при новом плане.

Суммарная стоимость перевозок равна:

$z = 18*3 + 6*3 + 30*1 + 18*2 + 18*7 + 18*5 + 21*5 = 459$

Для нового плана опять вычисляем потенциалы для поставщиков и потребителей и продолжаем этот процесс до те пор, пока не получим оптимальный план.

Система уравнений примет следующий вид:

Итерация № 3

v4 - u1= c(1,4);
v1 - u2= c(2,1);
v2 - u2= c(2,2);
v1 - u3= c(3,1);
v3 - u3= c(3,3);
v3 - u4= c(4,3);
v4 - u4= c(4,4);

Результаты решения системы уравнений:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 ***18***	0
A2	3 ***6***	1 ***30***	3	4	-5
A3	2 ***18***	7	7 ***18***	5	-4
A4	9	4	5 ***18***	5 ***21***	-2
vj	-2	-4	3	3	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 5.

Для незаполненных клеток проверим условие vj - ui - cij <= 0.

v(1) - u(1) - c(1, 1) = -6
v(2) - u(1) - c(1, 2) = -8
v(3) - u(1) - c(1, 3) = -4
⇨ v(3) - u(2) - c(2, 3) = 5
v(4) - u(2) - c(2, 4) = 4
v(2) - u(3) - c(3, 2) = -7
v(4) - u(3) - c(3, 4) = 2
v(1) - u(4) - c(4, 1) = -9
v(2) - u(4) - c(4, 2) = -6

План неоптимален. Необходимо улучшение.

Необходимо улучшить план (рисунок 1 - блок 7) Итерация № 4

С этой целью вводим перевозку λ в клетку **(2,3), т.к. max{5, 4, 2} = 5**

Объем перевозки λ составляет: **6, т.к. min{6, 18} = 6**

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 8.

Строим цикл. Получим следующую таблицу:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 ***18***	0
A2	3 ***6*** - λ	1 ***30***	3 ***λ***	4	-5
A3	2 ***18*** + λ	7	7 ***18*** - λ	5	-4
A4	9	4	5 ***18***	5 ***21***	-2
vj	-2	-4	3	3	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 9.

При λ = 6 полулим следующий результат:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 ***18***	
A2	3	1 ***30***	3 ***6***	4	
A3	2 ***24***	7	7 ***12***	5	
A4	9	4	5 ***18***	5 ***21***	
vj					

Определим суммарную стоимость перевозок при новом плане.

Суммарная стоимость перевозок равна:

z= 18*3 + 30*1 + 6*3 + 24*2 + 12*7 + 18*5 + 21*5 = 429

Для нового плана опять вычисляем потенциалы для поставщиков и потребителей и продолжаем этот процесс до те пор, пока не получим оптимальный план.

Система уравнений примет следующий вид:

Итерация № 4

v4 - u1= c(1,4);
v2 - u2= c(2,2);
v3 - u2= c(2,3);
v1 - u3= c(3,1);
v3 - u3= c(3,3);
v3 - u4= c(4,3);
v4 - u4= c(4,4);

Результаты решения системы уравнений:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 / ***18***	0
A2	3	1 / ***30***	3 / ***6***	4	0
A3	2 / ***24***	7	7 / ***12***	5	-4
A4	9	4	5 / ***18***	5 / ***21***	-2
vj	-2	1	3	3	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 5.

Для незаполненных клеток проверим условие vj - ui - cij <= 0.

v(1) - u(1) - c(1, 1) = -6
v(2) - u(1) - c(1, 2) = -3
v(3) - u(1) - c(1, 3) = -4
v(1) - u(2) - c(2, 1) = -5
v(4) - u(2) - c(2, 4) = -1
v(2) - u(3) - c(3, 2) = -2
v(4) - u(3) - c(3, 4) = 2
v(1) - u(4) - c(4, 1) = -9
v(2) - u(4) - c(4, 2) = -1

План неоптимален. Необходимо улучшение.

Необходимо улучшить план (рисунок 1 - блок 7)
С этой целью вводим перевозку λ в клетку **(3,4), т.к. max{2} = 2**
Объем перевозки λ составляет: **12, т.к. min{12, 21} = 12**

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 8.

Строим цикл. Получим следующую таблицу:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 ***18***	0
A2	3	1 ***30***	3 ***6***	4	0
A3	2 ***24***	7	7 ***12*** - λ	5 ***λ***	-4
A4	9	4	5 ***18*** + λ	5 ***21*** - λ	-2
vj	-2	1	3	3	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 9.

При λ = 12 полулим следующий результат:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 ***18***	
A2	3	1 ***30***	3 ***6***	4	
A3	2 ***24***	7	7	5 ***12***	
A4	9	4	5 ***30***	5 ***9***	
vj					

Определим суммарную стоимость перевозок при новом плане.

Суммарная стоимость перевозок равна:

z= 18*3 + 30*1 + 6*3 + 24*2 + 12*5 + 30*5 + 9*5 = 405

Для нового плана опять вычисляем потенциалы для поставщиков и потребителей и продолжаем этот процесс до те пор, пока не получим оптимальный план.

Система уравнений примет следующий вид: Итерация № 6

v4 - u1= c(1,4);
v2 - u2= c(2,2);
v3 - u2= c(2,3);
v1 - u3= c(3,1);
v4 - u3= c(3,4);
v3 - u4= c(4,3);
v4 - u4= c(4,4);

Результаты решения системы уравнений:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	4	4	7	3 ***18***	0
A2	3	1 ***30***	3 ***6***	4	0
A3	2 ***24***	7	7	5 ***12***	-2
A4	9	4	5 ***30***	5 ***9***	-2
vj	0	1	3	3	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 5.

Для незаполненных клеток проверим условие vj - ui - cij <= 0.

v(1) - u(1) - c(1, 1) = -4
v(2) - u(1) - c(1, 2) = -3
v(3) - u(1) - c(1, 3) = -4
v(1) - u(2) - c(2, 1) = -3
v(4) - u(2) - c(2, 4) = -1
v(2) - u(3) - c(3, 2) = -4
v(3) - u(3) - c(3, 3) = -2
v(1) - u(4) - c(4, 1) = -7
v(2) - u(4) - c(4, 2) = -1

План оптимален. Ответ: Затраты на перевозку составят 405 ден.ед.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

(Открытая)

Транспортные задачи - специальный класс задач линейного программирования. Эти модели описывают перевозки какого-нибудь товара из пункта отправления в пункт назначения. Назначением транспортной задачи является определение объемов перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок. При этом должны учитываться ограничения, которые накладывают на объемы грузов, имеющиеся в пунктах отправления (предложения), и ограничения, которые учитывают потребность грузов в пунктах назначения (спрос).

В общем случае транспортную модель можно применять для описания ситуаций, связанных с управлением движения капиталов, складыванием расписаний, назначением персонала и др. Принципиальная схема алгоритма транспортной задачи изображенна на рисунке 1.

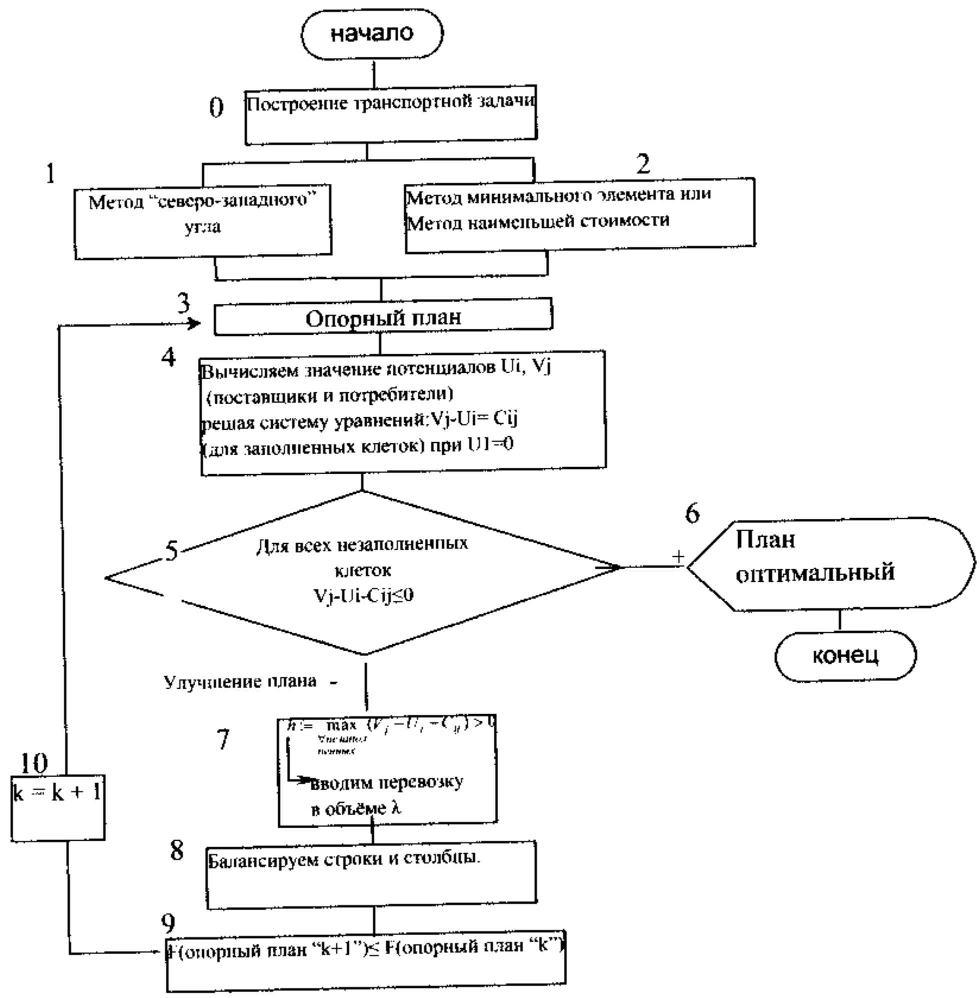

Рисунок 1 - Алгоритм решения транспортной задачи

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

(Открытая)

Условие:

$$
C=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 2 & 7 \\ 9 & 9 & 12 & 10 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 70 \end{pmatrix}
$$

$$
B\ \begin{pmatrix} 80 & 55 & 70 & 45 \end{pmatrix} \qquad \frac{230}{250}
$$

Решение:

МЕТОД НАИМЕНЬШЕЙ СТОИМОСТИ (МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА)

Данный метод, как правило, лучшее начальное решение, чем метод северо-западного угла, поскольку выбирает переменные, которым соответствуют наименьшие стоимости. Сначала по всей транспортной таблице ведется поиск ячейки с наименьшей стоимостью. Затем переменной в этой ячейке присваивается наибольшее значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение. Если таких переменных несколько, выбор произволен. Далее вычеркивается соответствующий столбец или строка и соответствующим образом корректируются значения спроса и предложений. Если одновременно выполняются ограничения и по спросу, и по предложению, вычеркивается или строка, или столбец (точно так же, как в методе северо-западного угла). Затем просматриваются невычеркнутые ячейки, и выбирается новая ячейка с минимальной стоимостью. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока
не останется лишь одна невычеркнутая строка или столбец.

Результаты применения метода наименьшей стоимости:

	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	5 ***15***	10	5	2 ***45***	60
A2	7 ***30***	7	2 ***70***	7	100
A3	9 ***35***	9 ***35***	12	10	70
A4	0	0 ***20***	0	0	20
Спрос	80	55	70	45	

Суммарная стоимость перевозок равна:

z= 15*5 + 45*2 + 30*7 + 70*2 + 35*9 + 35*9 + 20*0 = 1145

Метод потенциалов

С помощью методов "северо-восточного угла" и минимального элемента осуществляются построения первого опорного плана. Для проверки плана на оптимальность и получения оптимального плана используют различные методы. Самым распространённым является метод потенциалов.

В методе потенциалов каждой строке i и каждому столбцу j транспортной
таблицы ставится в соответствие числа (потенциалы) ui, vj.
Величины ui и vj называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей.
Для каждой заполненной клетки разность потенциалов потребителя и поставщика должна быть равна стоимости перевозки единицы продукта для соответствующей клетки.

$$v_j - u_i = c_{ij}$$

где - стоимость перевозки единицы груза занятой клетки.
Неизвестные потенциалы u1, u2,..., um, v1, v2,..., vn, рассматриваются как
оценки единицы груза, находящегося у поставщиков и потребителей. Для построения системы потенциалов используем условие.

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана.
При таком плане таблица перевозок содержит m + n – 1 заполняемых клеток,, поэтому
составить систему из m + n – 1 линейно независимых уравнений с m + n неизвестными.
Если уравнений на одно меньше, система является неопределенной и неизвестному придают произвольные значения. Обычно принимают u1=0, после этого определяют остальные потенциалы.
Для того, чтобы опорный план был оптимальный необходимо чтобы для каждой незаполненной клетки выполнялось неравенство:

$$v_j - u_i - c_{ij} \le 0$$

Если хотя - бы одна из незаполненных клеток не удовлетворяет данному неравенству, то опорный план не является оптимальным и его можно улучшить.
Чтобы улучшить план, необходимо перевозки перераспределить. Загрузке подлежит в первую очередь свободная клетка, которой соответствует

$$\max(v_j - u_i - c_{ij})$$

Чтобы улучшить план, вводим перевозку в объёме λ между соответствующими пунктами
Ai и Bj из условия , т.е. переменную переводим из свободных в базисные. Вместе с тем необходимо одну из базисных переменных перевести в свободные, т.е. освободить одну из заполненных клеток. Введение добавочной перевозки λ не должно нарушить сбалансированность строк и столбцов.
Строим цикл – замкнутую ломанную со звеньями, расположенными по строкам и столбцам. Все вершины цикла, за исключением выбранной клетки (i,j), находятся в занятых клетках. Величину λ записываем в выбранную незанятую клетку со знаком плюс. Двигаясь по циклу
от отмеченной клетки (i,j), поочередно проставляем значения + λ и – λ в клетках – вершинах цикла.
Величину λ определяем из следующих условий:
1. Сохранение сбалансированности строк и столбцов;
2. Условия неотрицательности перевозок;
3. Переход только одной занятой клетки в незанятые.
Если при вычитании значения λ освобождается несколько клеток, то их заполняют нулевыми перевозками в таком количестве, чтобы во вновь полученном опорном плане занятых клеток было по-прежнему m + n – 1 .
Для нового плана опять вычисляем потенциалы для поставщиков и потребителей и продолжаем этот процесс до те пор, пока не получим оптимальный план.

Система уравнений примет следующий вид:

Итерация № 2

v1 - u1= c(1,1);
v4 - u1= c(1,4);
v1 - u2= c(2,1);
v3 - u2= c(2,3);
v1 - u3= c(3,1);
v2 - u3= c(3,2);
v2 - u4= c(4,2);

Результаты решения системы уравнений:

	B1	B2	B3	B4	ui
A1	5 **15**	10	5	2 **45**	0
A2	7 **30**	7	2 **70**	7	-2
A3	9 **35**	9 **35**	12	10	-4
A4	0	0 **20**	0	0	5
vj	5	5	0	2	

Алгоритм решения транспортной задачи (рисунок 1) - блок 5.

Для незаполненных клеток проверим условие vj - ui - cij <= 0.

v(2) - u(1) - c(1, 2) = -5
v(3) - u(1) - c(1, 3) = -5
v(2) - u(2) - c(2, 2) = 0
v(4) - u(2) - c(2, 4) = -3
v(3) - u(3) - c(3, 3) = -8
v(4) - u(3) - c(3, 4) = -4
v(1) - u(4) - c(4, 1) = 0
v(3) - u(4) - c(4, 3) = -5
v(4) - u(4) - c(4, 4) = -3

План оптимален. Ответ: Затраты на перевозку составят 1145 ден.ед.

Решение задачи линейного программирования симплексным методом

Линейное программирование - наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Таким образом, задачи линейного программирования (далее ЗЛП) относятся к задачам на условный экстремум. При этом методы математического анализа неэффективны.

Формулировка задачи. Даны линейная функция

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \quad (*)$$

и система линейных ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (**)$$

где $\quad x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \quad (***)$

$$a_{i,j}, b_i, C_j = const$$

Найти такие неотрицательные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений $(**)$ и доставляют целевой функции $(*)$ минимальное (максимальное) значение.

В системе ограничений $(**)$ все b_i, $i = \overline{1,m}$ можно считать неотрицательными.

Определение 1. Планом или допустимым решением ЗЛП называют вектор $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ удовлетворяющий условиям (**) и (***).

Определение 2. Оптимальным планом ЗЛП называется план, доставляющий целевой линейной функции наибольшее (наименьшее) значение.

Различают векторную, матричную формы записи ЗЛП, а также запись с помощью знаков суммирования.

Матричная форма записи. Минимизировать линейную функцию Z=CX при ограничениях

$$AX = A_0, \quad X \geq 0,$$

где $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - матрица - строка; $A = (a_{ij})$ - матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица - столбец, $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица - столбец.

Запись с помощью знаков суммирования. Минимизировать линейную функцию $Z = \sum_{i=1}^{n} C_jx_j$ при ограничениях $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j, \quad x_j \geq 0, \quad i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n}$

Решение основной задачи ЗЛП графическим методом затруднительно при числе неизвестных n=3 и не всегда возможно при n>3.

Доказано, что оптимальное решение ЗЛП связано с угловыми точками многогранника решений, т.е. с опорными планами, каждый из которых определяется системой m линейно-независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задаче, определяется числом сочетаний C_n^m

При больших значениях m и n найти оптимальный план, перебирая все опорные планы, очень трудно, поэтому нужно иметь схему, позволяющую осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является *симплексный метод*, который позволяет за конечное число шагов получить оптимальный план. Каждый из шагов (или итераций) состоит в нахождении нового плана, которому соответствует большее значение линейной функции, чем значение этой же функции в предыдущем плане. Процесс продолжают до получения оптимального плана. Если задача не обладает планами или её линейная функция не ограничена на многограннике решений, то симплексный метод позволяет установить это в процессе решения.

Алгоритм симплексного метода состоит из подготовительного этапа и конечного числа итераций.

Подготовительный этап заключается в следующем:

1) привести систему к каноническому виду;
2) в системе уравнений выделить единичный базис, удовлетворяющий условию неотрицательности;
3) целевую функцию выразить через свободные переменные.

Каждая итерация алгоритма симплексного метода состоит из проверки базисного решения на оптимальность и перехода к новому базису. Если при данном базисном решении Б1 целевая функция не достигла максимума (минимума), то дальнейшее решение состоит в отыскании второго базиса Б2, такого, что F(Б1)>F(Б2), и в то же время выполнялось условие неотрицательности $x_j \geq 0$

Таким образом, ***итерации симплексного метода*** проводят по следующей схеме:

1) просматриваем коэффициенты целевой функции:
   - если они все положительные, то план, соответствующий базисному, является оптимальным;
   - если среди них есть отрицательные, то переходим к рассмотрению столбца коэффициентов системы, стоящих при переменной с наименьшим коэффициентом в целевой функции.
2) просматриваем элементы выбранного столбца:
   - если они все отрицательные, то целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов и ЗЛП не имеет решения;
   - если среди них есть хотя бы один положительный, то из условия $\min\limits_{\forall a_{ik}}$, где k - номер рассматриваемого столбца, определяем разрешающий элемент.
3) переходим к новому базису.
   - делим коэффициенты разрешающего уровнения на разрешающий элемент
   - пересчитываем коэффициенты остальных уравнений и целевой функции по "методу прямоугольника"

Задача (вариант 13)

Найти максимум функции F=1*x1+1*x2+5*x3-5*x4
при ограничениях:

$$\begin{cases} 1*x1+3*x2+5*x3-1*x4>=-5, \\ -4*x1+1*x2+2*x3+1*x4>=3, \\ 3*x1-6*x2-6*x3+3*x4>-5, \\ 1*x1-6*x2+6*x3+3*x4<=-4 \end{cases}$$

Базис	С базиса	Своб. чл.	x1	x2	x3	x4	Var1	Var2	Var3	Var4	Add1	Add2	
			1	1	5	-5	0	0	0	0	-M	-M	
Var1	0	5	-1	-3	-5	1	1	0	0	0	0	0	
Add1	-M	3	-4	1	2	1	0	-1	0	0	1	0	
Var3	0	5	-3	6	6	-3	0	0	1	0	0	0	
Add2	-M	4	-1	6	-6	-3	0	0	0	-1	0	1	X(Б0)={0,0,0,0,5,0,5,0,3,4}
	F	0	-1	-1	-5	5	0	0	0	0	0	0	F(Б1)=0
	M	-7	5	-7	4	2	0	1	0	1	0	0	

Var1	0	7	-3/2	0	-8	-1/2	1	0	0	-1/2	0	1/2	
Add1	-M	7/3	-23/6	0	3	3/2	0	-1	0	1/6	1	-1/6	
Var3	0	1	-2	0	12	0	0	0	1	1	0	-1	
x2	1	2/3	-1/6	1	-1	-1/2	0	0	0	-1/6	0	1/6	X(Б1)={0,2/3,0,0,7,0,1,0,7/3,0}
	F	2/3	-7/6	0	-6	9/2	0	0	0	-1/6	0	1/6	F(Б2)=2/3
	M	-7/3	23/6	0	-3	-3/2	0	1	0	-1/6	0	7/6	

Var1	0	23/3	-17/6	0	0	-1/2	1	0	2/3	1/6	0	-1/6	
Add1	-M	25/12	-10/3	0	0	3/2	0	-1	-1/4	-1/12	1	1/12	
x3	5	1/12	-1/6	0	1	0	0	0	1/12	1/12	0	-1/12	
x2	1	3/4	-1/3	1	0	-1/2	0	0	1/12	-1/12	0	1/12	X(Б2)={0,3/4,1/12,0,23/3,0,0,0,25/12,0}
	F	7/6	-13/6	0	0	9/2	0	0	1/2	1/3	0	-1/3	F(Б3)=7/6
	M	-25/12	10/3	0	0	-3/2	0	1	1/4	1/12	0	11/12	

Var1	0	301/36	-71/18	0	0	0	1	-1/3	7/12	5/36	1/3	-5/36	
x4	-5	25/18	-20/9	0	0	1	0	-2/3	-1/6	-1/18	2/3	1/18	
x3	5	1/12	-1/6	0	1	0	0	0	1/12	1/12	0	-1/12	
x2	1	13/9	-13/9	1	0	0	0	-1/3	0	-1/9	1/3	1/9	X(Б3)={0,13/9,1/12,25/18,301/36,0,0,0}
	F	-61/12	47/6	0	0	0	0	3	5/4	7/12			F(Б4)=-61/12

Целевая функция F достигла своего максимального значения:

F = -61/12

при оптимальном плане:

Xopt = { 0,13/9,1/12,25/18 }

Дата выполнения:30.12.2005
Проверил: Королёв М.Е.
Кафедра "Прикладная математика
и информатика"