Модуль 9
СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

9.1. Процеси обслуговування

Досліджуючи операції, часто доводиться стикатися із системами, призначеними для багаторазового використання в процесі розв'язування однотипних задач. Такі процеси одержали назву *процесів обслуговування*, а системи — *систем масового обслуговування (СМО)*. Прикладами таких систем є телефонні системи, ремонтні майстерні, магазини, перукарні тощо.

Кожна СМО складається з певної кількості обслуговувальних одиниць (приладів, пристроїв, пунктів, станцій), які будемо називати *каналами* обслуговування. Каналами можуть бути лінії зв'язку, робочі точки, обчислювальні машини, продавці тощо. За кількістю каналів СМО поділяють на *одноканальні* і *багатоканальні*.

Заявки надходять у СМО звичайно не регулярно, а випадково, що утворює так званий *випадковий потік заявок (вимог)*. Обслуговування заявок також триває якийсь випадковий час. Випадковий характер потоку заявок і часу обслуговування призводить до того, що СМО виявляється завантаженою нерівномірно: в якісь періоди часу накопичується дуже велика кількість заявок (вони або стають у чергу, або залишають СМО необслугованими), в інші ж періоди СМО працює з недовантаженням або простоює.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, що зв'язують задані умови роботи СМО (кількість каналів, їхня продуктивність, характер потоку заявок тощо) з показниками ефективності СМО, що описують її здатність справлятися з потоком заявок.

Як *показники ефективності* СМО використовуються: середня кількість заявок (тут і надалі середні величини розуміються як математичні очікування відповідних випадкових величин), що їх обслуговують в одиницю часу; середня кількість заявок у черзі; середній час чекання обслуговування; імовірність відмовлення в обслуговуванні без чекання; імовірність того, що кількість заявок у черзі перевищить визначене значення тощо.

СМО поділяють на два основних типи (класи): СМО *з відмовленнями* і СМО *з чеканням (чергою)*. У СМО з відмовленнями заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, одержує відмовлення, залишає СМО і надалі в процесі обслуговування не застосовується (наприклад, заявка на телефонну розмову в момент, коли всі канали зайняті, одержує відмовлення і залишає СМО не обслугованою). У СМО з чеканням заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, стає в чергу на обслуговування.

СМО з чеканням поділяють на різні види залежно від того, як організована черга: з обмеженою або необмеженою довжиною черги, з обмеженим часом чекання тощо.

Для класифікації СМО багато важить *дисципліна обслуговування*, що визначає порядок вибору заявок зі всієї кількості і порядок розподілу їх між вільними каналами. За цією ознакою обслуговування заявки може бути організоване за принципом:

— *«перша прийшла — перша обслугована»;*

— *«остання прийшла — перша обслугована»*.

(Такий порядок може застосовуватися, наприклад, при надходженні для обслуговування виробів зі складу, тому що останні з них виявляються часто доступнішими, або *обслуговування за пріоритетом*, коли перш за все обслуговуються найважливіші заявки.)

Пріоритет може бути як *абсолютним*, коли важливіша заявка «витісняє» з-під обслуговування звичайну заявку (наприклад, у разі аварійної ситуації планові роботи ремонтних бригад перериваються до ліквідації аварії), так і *відносним*, коли важливіша заявка одержує лише «краще» місце в черзі.

9.2. СМО процесу загибелі та розмноження

У теорії масового обслуговування є дуже поширеним спеціальний клас випадкових процесів — так званий *процес загибелі і розмноження*. Назва цього процесу походить із біологічних задач, де він є математичною моделлю зміни чисельності біологічних популяцій. Граф станів процесу загибелі і розмноження має вигляд, показаний на рис. 9.1:

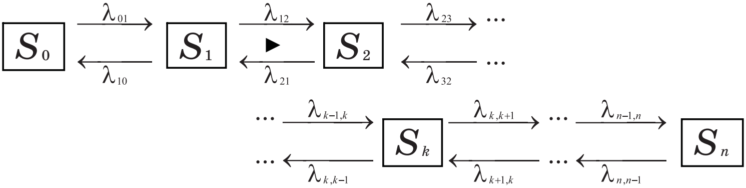

Рис. 9.1. Граф процесу загибелі і розмноження

Розглянемо упорядковану множину станів системи S_0, S_1, S_2, ... S_k.

Переходи можуть здійснюватися з будь-якого стану тільки в стан із сусідніми номерами, тобто зі стану S_k можливі переходи тільки або в стан S_{k-1}, або в стан S_{k+1}.

Припустимо, що всі потоки подій, що переводять систему по стрілках графа, найпростіші з відповідними інтенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ або $\lambda_{k+1,k}$.

За графом (рис. 9.1) складемо і розв'яжемо алгебраїчне рівняння для граничних імовірностей станів. Відповідно до правила складання таких рівнянь одержимо:

— для стану $S0$:

$$\lambda_{01}\rho_0 = \lambda_{10}\rho_1; \tag{9.1}$$

— для стану $S_1 \to (\lambda_{12} + \lambda_{10})\rho_1 = \lambda_{01}\rho_0 + \lambda_{21}\rho_2$, що з урахуванням (9.1) приводиться до вигляду

$$\lambda_{12}\rho_1 = \lambda_{21}\rho_2. \tag{9.2}$$

Аналогічно, записуючи рівняння для граничних імовірностей інших станів, одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{01}\rho_0 = \lambda_{10}\rho_1, \\ \lambda_{12}\rho_1 = \lambda_{21}\rho_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1,\,k}\,\rho_{k-1} = \lambda_{k,\,k-1}\,\rho_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1,\,n}\,\rho_{n-1} = \lambda_{n,\,n-1}\,\rho_n, \end{cases} \tag{9.3}$$

до якої додамо нормувальну умову

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = 1. \tag{9.4}$$

Розв'яжемо системи (9.3) і (9.4). Маємо:

$$\rho_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,\,n\ldots}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1\ldots}\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \tag{9.5}$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}\rho_0,\ \rho_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\rho_0,\ \ldots,\ \rho_n = \frac{\lambda_{n-1,\,n\ldots}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1\ldots}\lambda_{21}\lambda_{10}}\rho_0. \tag{9.6}$$

У формулах (9.6) для ρ_1, ρ_2, ... ρ_n коефіцієнти при ρ_0 є елементи, що стоять після одиниці у формулі (9.5). Чисельники цих коефіцієнтів є добутком усіх інтенсивностей, що розміщені над стрілками і ведуть зліва направо до цього стану S_k ($k = 1, 2, ... n$), а знаменники — добутком усіх інтенсивностей, що розміщені під стрілками і ведуть справа наліво до стану S_k.

Задача 9.1

Процес загибелі і розмноження поданий графом на рис. 9.2. Знайти граничні ймовірності станів.

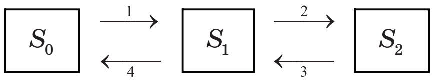

Рис. 9.2. Граф станів для задачі 9.1

Розв'язання. За формулою (9.5) знайдемо

$$\rho_0 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2*1}{3*4}\right)^{-1} = 0{,}706,$$

за (9.6) — $\rho_1 = \frac{1}{4}0{,}706 = 0{,}176$, $\rho_2 = \frac{2*1}{3*4}0{,}706 = 0{,}118$, тобто у сталому, стаціонарному режимі в середньому 70,6% часу система буде перебувати у стані S_0, 17,6% — у стані S_1 і 11,8% — у стані S_2.

9.3. Індивідуальні завдання з теми «СМО процесу загибелі і розмноження»

Граф станів процесу загибелі і розмноження має вигляд, показаний на рис. 9.3.

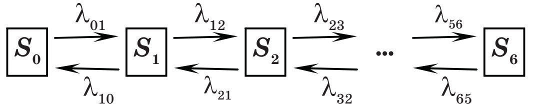

Рис. 9.3. Граф станів

Знайдіть граничні ймовірності станів:

а) для $S = S_2$;

б) для $S = S_6$.

Значення інтенсивностей наведені в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1

Значення інтенсивностей

Варіант		0	1	2	3	4	5	Варіант		0	1	2	3	4	5
1	$\lambda_{до,до+1}$	1	3	2	4	4	2	16	$\lambda_{до,до+1}$	1	3	1	1	2	2
	$\lambda_{до+1,до}$	3	1	4	2	5	2		$\lambda_{до+1,до}$	3	2	2	2	3	2
2	$\lambda_{до,до+1}$	1	1	2	4	5	2	17	$\lambda_{до,до+1}$	1	1	2	4	5	2
	$\lambda_{до+1,до}$	3	2	1	2	1	4		$\lambda_{до+1,до}$	3	2	1	2	1	4
3	$\lambda_{до,до+1}$	2	3	2	1	1	4	18	$\lambda_{до,до+1}$	2	2	3	1	3	2
	$\lambda_{до+1,до}$	3	1	4	2	5	2		$\lambda_{до+1,до}$	1	1	1	4	5	2
4	$\lambda_{до,до+1}$	2	3	2	3	3	4	19	$\lambda_{до,до+1}$	1	3	2	1	3	4
	$\lambda_{до+1,до}$	3	4	1	1	5	2		$\lambda_{до+1,до}$	4	4	1	2	5	2
5	$\lambda_{до,до+1}$	3	3	2	2	1	1	20	$\lambda_{до,до+1}$	3	4	2	1	1	1
	$\lambda_{до+1,до}$	3	1	4	2	5	2		$\lambda_{до+1,до}$	1	1	2	2	4	3
6	$\lambda_{до,до+1}$	4	3	2	1	4	1	21	$\lambda_{до,до+1}$	4	4	2	2	5	1
	$\lambda_{до+1,до}$	3	1	4	3	5	2		$\lambda_{до+1,до}$	2	2	4	3	3	2
7	$\lambda_{до,до+1}$	2	2	1	1	4	3	22	$\lambda_{до,до+1}$	2	2	4	4	4	3
	$\lambda_{до+1,до}$	5	1	4	1	5	2		$\lambda_{до+1,до}$	4	1	3	3	1	2
8	$\lambda_{до,до+1}$	4	3	2	5	4	2	23	$\lambda_{до,до+1}$	1	1	3	4	3	2
	$\lambda_{до+1,до}$	3	3	4	2	5	2		$\lambda_{до+1,до}$	2	3	2	3	3	2
9	$\lambda_{до,до+1}$	1	2	2	5	3	3	24	$\lambda_{до,до+1}$	2	2	2	3	3	2
	$\lambda_{до+1,до}$	3	1	1	2	2	3		$\lambda_{до+1,до}$	1	1	1	2	2	3
10	$\lambda_{до,до+1}$	1	1	1	4	4	2	25	$\lambda_{до,до+1}$	2	2	2	3	3	3
	$\lambda_{до+1,до}$	2	2	2	3	3	3		$\lambda_{до+1,до}$	1	1	1	4	4	2
11	$\lambda_{до,до+1}$	3	2	1	3	2	1	26	$\lambda_{до,до+1}$	1	3	1	4	1	2
	$\lambda_{до+1,до}$	1	1	2	3	5	4		$\lambda_{до+1,до}$	4	1	3	2	2	3
12	$\lambda_{до,до+1}$	3	3	3	4	4	2	27	$\lambda_{до,до+1}$	2	4	2	4	1	2
	$\lambda_{до+1,до}$	3	1	4	2	2	2		$\lambda_{до+1,до}$	3	2	4	1	3	2
13	$\lambda_{до,до+1}$	2	1	2	1	3	3	28	$\lambda_{до,до+1}$	1	1	2	2	3	3
	$\lambda_{до+1,до}$	2	3	4	1	3	2		$\lambda_{до+1,до}$	3	2	1	1	2	2
14	$\lambda_{до,до+1}$	1	2	3	1	4	2	29	$\lambda_{до,до+1}$	3	2	1	2	3	2
	$\lambda_{до+1,до}$	3	3	4	4	5	5		$\lambda_{до+1,до}$	1	2	4	4	2	3
15	$\lambda_{до,до+1}$	3	3	3	1	1	2	30	$\lambda_{до,до+1}$	1	1	2	2	4	4
	$\lambda_{до+1,до}$	1	1	4	3	3	2		$\lambda_{до+1,до}$	3	3	3	2	2	2

9.4. СМО з відмовленнями

9.4.1. Показники системи з відмовленнями

Як показники ефективності СМО з відмовленнями розглянемо:

A — *абсолютну пропускну спроможність СМО,* тобто середнє число заявок, що обслуговуються в одиницю часу;

Q — *відносну пропускну спроможність,* тобто середню частку заявок, що надійшли, що обслуговуються системою;

$p_{отк}$ — *імовірність відмовлення,* тобто того, що заявка залишить СМО без обслуговування;

k — *середня кількість зайнятих каналів* (для багатоканальних систем).

9.4.2. Одноканальна система з відмовленнями

Розглянемо задачу. Є один канал, на який надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговування має інтенсивність μ. Знайти граничні ймовірності станів системи і показники її ефективності.

Система S (СМО) має два стани: S_0 — канал вільний, S_0 — канал зайнятий. Розмічений граф станів наведений на рис. 9.4.

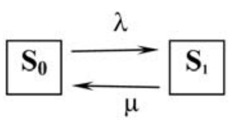

Рис. 9.4. Розмічений граф

У граничному, стаціонарному режимі система алгебраїчних рівнянь для ймовірностей станів має вигляд (див. правило складання таких рівнянь):

$$\begin{cases} \lambda\, p_0 = \mu\, p_1, \\ \mu\, p_1 = \lambda\, p_0, \end{cases} \tag{9.7}$$

тобто система вироджується в одне рівняння. З огляду на нормувальну умову $p_0 + p_1 = 1$, знайдемо з (9.7) граничні ймовірності станів:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},\ p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \tag{9.8}$$

які виражають середній відносний час перебування системи завершить в стані S_0 (коли канал вільний) і S_1 (коли канал зайнятий), тобто визначають відповідно відносну пропускну спроможність Q системи й імовірність відмовлення $P_{\text{отк}}$:

$$P_0 = Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \tag{9.9}$$

$$P_1 = P_{\text{отк.}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{9.10}$$

Абсолютну пропускну спроможність знайдемо, помноживши відносну пропускну спроможність Q на інтенсивність потоку відмовлень

$$Q \cdot \lambda = A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \tag{9.11}$$

9.4.3. Багатоканальна система з відмовленнями

Розглянемо класичну *задачу Ерланга.*

Є n каналів, на які надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговування має інтенсивність μ. Знайти граничні ймовірності станів системи і показники її ефективності.

Система S (СМО) має такі стани (нумеруємо їх за кількістю заявок, що перебувають у системі):

S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n, де S_k — стан системи, коли в ній міститься k заявок, тобто зайнято k каналів.

Граф станів СМО відповідає процесові загибелі і розмноження і показаний на рис. 9.5.

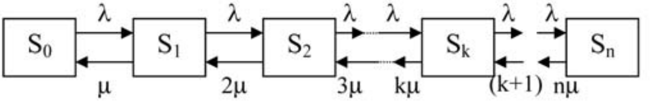

Рис. 9.5. Граф станів

Потік заявок послідовно переводить систему з будь-якого лівого стану в сусідній правий з однією і тією ж інтенсивністю λ. Інтенсивність потоку обслуговування, що переводить систему з будь-якого правого стану в сусідній лівий стан, постійно змінюється залежно від стану. Дійсно, якщо СМО перебуває в стані S_2 (два канали зайняті), то вона може перейти в стан S_1 (один канал зайнятий), коли завершить обслуговування або перший, або другий канал, тобто сумарна інтенсивність їхніх потоків обслуговування буде 2μ. Аналогічно сумарний потік обслуговування, що переводить СМО зі стану S_3 (три канали зайняті) у S_2, буде мати інтенсивність 3μ, тобто може звільнитися кожний із трьох каналів тощо. Використовуючи (9.5) для схеми загибелі і розмноження, одержимо для граничної ймовірності стану

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda n}{n!\mu^n}\right)^{-1}, \qquad (9.12)$$

де члени розкладання $\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2}, \ldots, \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ — це коефіцієнти при p_0 у виразах для граничних ймовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$.

Величина

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (9.13)$$

називається *приведеною інтенсивністю потоку заявок* або *інтенсивністю навантаження каналу*. Вона виражає середню кількість заявок, що надходить за середній час обслуговування однієї заявки. Тепер

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \qquad (9.14)$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0, \ldots,\ p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0, \qquad (9.15)$$

Формули (9.14) і (9.15) для граничних ймовірностей одержали назви ***формул Ерланга*** на честь засновника теорії масового обслуговування.

Імовірність відмовлення СМО є гранична імовірність того, що всі ***n*** каналів системи будуть зайняті, тобто

$$P_n = P_{\text{отк.}} = \frac{\rho^n}{n!}p_0. \qquad (9.16)$$

Відносна пропускна спроможність — імовірність того, що заявка буде обслугована:

$$Q = 1 - P_{\text{отк.}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0. \qquad (9.17)$$

Абсолютна пропускна спроможність:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right). \qquad (9.18)$$

9.5. Індивідуальні завдання з теми «СМО з відмовленнями»

а) *одноканальна система:* є один канал, на який надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговування має інтенсивність μ. Знайдіть граничні ймовірності станів системи і показники її ефективності. Розмічений граф станів показано на малюнку 9.6. Вихідні дані наведені в таблиці 9.2.

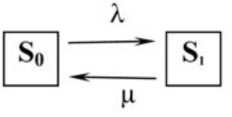

Рис. 9.6. Розмічений граф одноканальної системи

б) *багатоканальна система:* для задачі *Ерланга* знайдіть граничні ймовірності станів системи і показники її ефективності. Граф станів показано на малюнку 9.7. Вихідні дані надані в таблиці 9.2.

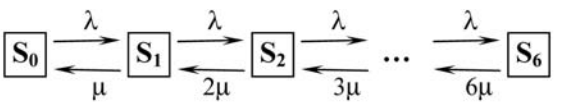

Рис. 9.7. Розмічений граф багатоканальної системи

Таблиця 9.2

Інтенсивності подій

№ варіанту	λ	μ	№ варіанту	λ	μ	№ варіанту	λ	μ
1	2	7	11	6	5	21	8	9
2	3	6	12	5	4	22	9	8
3	4	5	13	4	3	23	8	7
4	5	4	14	3	2	24	7	4
5	6	3	15	2	3	25	6	3
6	7	2	16	3	4	26	5	2
7	8	3	17	4	9	27	4	7
8	9	4	18	5	6	28	3	8
9	8	5	19	6	7	29	2	9
10	7	6	20	7	8	30	3	5

Звіт з теми **СМО** надати у вигляді аналогічно рисунку 9.8.

Рис. 9.6. Звіт із теми **СМО**

Модуль 10
ДОДАТКОВІ МОДЕЛІ

10.1. Цілочисельні задачі

Багато задач визначення максимуму (або мінімуму) лінійної функції крім лінійних мають додаткові обмеження. Прикладом може бути задача пошуку екстремуму лінійної функції з вимогою отримати результат, де певні складові вектора невідомих $\boldsymbol{x}$ мають бути лише цілими числами. Наприклад, коли складові вектора невідомих відображають параметри вантажів, які не можна поділити, або кількість неподільних елементів. Якщо вимоги цілочисельності накладаються на всі складові вектора невідомих, то ми маємо *повністю цілочисельну задачу* (ПЦЗ), а, якщо тільки до частини складових вектора невідомих, то — *частково цілочисельну задачу* (ЧЦЗ). Обмежимо розгляд екстремальних задач такими, де обмеження носять лінійний характер. У цих випадках задачі називаються *повністю* або *частково цілочисельними задачами лінійного програмування* (ПЦЗЛП або ЧЦЗЛП).

Такі задачі складніші, ніж задачі лінійного програмування, і потребують спеціальних методів розв'язання. На перший погляд можна скористатися простим методом розв'язання такої задачі: отримати розв'язок задачі лінійного програмування (не звертати увагу на умови цілочисельності) і округлити результат до цілих чисел у бік зменшення. Такий спосіб може дати оптимальне значення цільової функції, тобто правильний результат, лише в окремих випадках. Для отримання правильної відповіді треба використати методи, які створені для ПЦЗЛП або ЧЦЗЛП. Ми розглянемо тільки один — ***метод Гоморі***. Він полягає у створенні щоразу нових розв'язків задачі лінійного програмування та перевірці її результатів на цілочисельність. Якщо умови цілочисельності не виконуються, то до задачі додають додаткове обмеження у вигляді нерівності, так званий *розріз*, і знову виконують розв'язання задачі лінійного програмування.

10.2. Метод Гоморі

Задача, в якій потрібно знайти найбільше (найменше) значення функції:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum c_jx_j \to \max (\min) \qquad (10.1)$$

при обмеженнях у вигляді рівнянь і нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathrm{K} + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \mathrm{K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K} \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \mathrm{K} + a_{sn}x_n \le b_s \\ a_{s+11}x_1 + a_{s+12}x_2 + \mathrm{K} + a_{s+1n}x_n = b_{s+1} \\ \mathrm{K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K\ K} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \mathrm{K} + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (10.2)$$

й умови невід'ємності змінних

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots n \qquad (10.3)$$

та додаткової умови цілочисельності змінних x.

Позначимо цілу частину будь-якого числа z через $[z]$, а її дробову частину через $\{ z \}$. Наприклад, для $z = 2.46$, маємо $[z] = 2$, а $\{ z \} = 0.46$.

Враховуючи вказані позначеннях, додаткова умова буде мати вигляд:

$$\{ x_j \} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots p. \qquad (10.4)$$

Якщо $p < n$, то ми маємо ЧЦЗЛП, а при $p = n$ — ПЦЗЛП.

Спочатку розв'яжемо цю задачу без останньої умови, тобто без рівняння (10.4). Це можна виконати різними методами розв'язання ЗЗЛП (Розділ 1). Якщо отриманий вектор невідомих $\boldsymbol{x}$ має всі складові цілочисельні, тобто виконується умова (10.4), то ми отримали потрібний результат і процес обчислень припиняємо. В іншому разі до задачі додамо нове лінійне обмеження, яке має назву *розріз*, тобто система (10.2) збільшується на один рядок. Разом із цим додатковим рядком знову розв'язуємо ЗЗЛП і процес розрахунків повторюємо. Кожний новий розв'язок задачі збільшує кількість цілочисельних складових вектора $\boldsymbol{x}$ і може зменшувати значення цільової функції. Процес закінчуємо, коли здійсниться співвідношення (10.4).

Для розв'язання ПЦЗЛП можна використати перший розріз Гоморі. Ця додаткова умова має вигляд:

$$\{ b_s \} - \sum_k \{a_{sk}\}\, x_k <= 0. \qquad (10.5)$$

Тут k — індекс вільних змінних в останній симплексній таблиці, а s — номер рядка цієї таблиці з максимальним значенням b.

Другий розріз Гоморі частіше використовують для розв'язання ЧЦЗЛП. Він має такий вигляд:

$$\{ b_s \} - \sum d_{sk}\, x_s <= 0. \tag{10.6}$$

Тут для x_s, які мають бути цілочисельними і $\{a_{sk}\} > \{ b_s \}$ маємо

$$d_{sk} = \{ b_s \}(1 - \{a_{sk}\})/(1 - \{ b_s \}), \tag{10.7}$$

а інакше $$d_{sk} = \{a_{sk}\}; \tag{10.8}$$

а для x_k, які не мають вимог цілочисельності і $a_{sk} < 0$, маємо

$$d_{sk} = \{ b_s \} \cdot \{a_{sk}\} \,/\, (1 - \{ b_s \}), \tag{10.9}$$

а інакше $$d_{sk} = a_{sk}. \tag{10.10}$$

Розглянемо процес розв'язання цілочисельної задачі лінійного програмування на простому прикладі.

Приклад № 1

Цільова функція має вигляд $F = 2x_1 + 3x_1 \rightarrow \max$.

Система обмежень $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 4 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$

та обмеження невід'ємності змінних:

$$x_1 \ge 0 \text{ і } x_2 \ge 0,$$

і додаткові обмеження задані рівняннями: $\{ x_1 \} = 0$ і $\{ x_2 \} = 0$.

Уведемо додаткові змінні до кожної нерівності і перетворимо їх на рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + x_6 = 21. \end{cases}$$

Уведемо умови невід'ємності змінних:

$x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$

і будемо вважати задачу повністю цілочисельною, тобто:

$$\{ x_j \} = 0 \qquad j = 1, 2, \dots 6.$$

Процес розв'язання задачі виконаємо як задачу лінійного програмування симплексним методом (§ 1.2). Побудуємо першу початкову таблицю. Базисними змінними візьмемо x_3, x_4, x_5, x_6. У результаті отримуємо нульове значення цільової функції (табл. 10.1) і значення вектора невідомих $\boldsymbol{x}$ (додаткова таблиця 10.1, *а*).

Таблиця 10.1

	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Початкові дані	x_3	1	4	1	0	0	0	[redacted]
	x_4	2	1	0	1	0	0	
	x_5	0	[redacted]	0	0	1	0	
	x_6	3	0	0	0	0	1	

Таблиця 10.1, а

Результат	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	0	18	16	5	21

У рядку з мінімальним від'ємним значенням коефіцієнта цільової функції ($c_2 = -3$) знаходимо мінімум співвідношення b_i / a_{i2}:

$$\min\{18/4\ ,\ 16/1,\ 4/1,\ 21/0\} = 4.$$

Таким чином вибираємо розв'язувальний елемент, заштрихований у таблиці 10.1 (у рядку x_5 та в стовпчику x_2). Виконаємо симплексне перетворення. Це призведе до введення в базис x_2 і виведення з базису x_5. У результаті отримаємо таблицю 10.2.

Значення цільової функції зросло до 12, а значення вектора невідомих $\boldsymbol{x}$ наведені в додатковій таблиці 10.2, *а*.

Таблиця 10.2

	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Ітерація 1	x_3	[redacted]	0	1	0	−4	0	[redacted]
	x_4	2	0	0	1	−1	0	
	x_5	0	1	0	0	1	0	
	x_6	3	0	0	0	0	1	

Таблиця 10.2, а

Результат	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	4	2	12	0	21

Отриманий результат після ітерації ще не є оптимальним, тому що перший елемент цільової функції містить елемент з від'ємним значенням. У цьому стовпчику ($c_1 = -2$) знаходимо мінімум співвідношення b_i / a_{i1}:

$$\min \{2/1 \ , 12/2, 4/1, 21/3\} = 2.$$

Таким чином вибираємо розв'язувальний елемент, заштрихований у таблиці 10.2 (у рядку x_3 та в стовпчику x_1). Виконаємо симплексне перетворення. Це призведе до введення в базис x_1 і виведення з базису x_3. У результаті отримаємо таблицю 10.3.

Таблиця 10.3

Ітерація 2	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
	x_1	1	0	1	0	−4	0	[redacted]
	x_4	0	0	−2	1	[redacted]	0	[redacted]
	x_2	0	1	0	0	1	0	[redacted]
	x_6	0	0	−3	0	12	1	[redacted]
	[redacted]							

Таблиця 10.3, а

Результат	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	2	4	0	8	−5	5/4

Отриманий результат після другої ітерації також не оптимальний, тому що цільова функція містить елемент із від'ємним значенням. У цьому стовпчику ($c_5 = -5$) знаходимо мінімум співвідношення b_i / a_{i5} серед позитивних елементів:

$$\min \{8/7 \ , 4/1, 15/12\} = 8/7.$$

Вибираємо розв'язувальний елемент, заштрихований у таблиці 10.3 (у рядку x_4 та в стовпчику x_5). Виконаємо симплексне перетворення. Це призведе до введення в базис x_5 і виведення з базису x_4. Отримаємо таблицю 10.4.

Таблиця 10.4

Ітерація 3	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	$\{b_i\}$
	x_1	1	0	−1/7	4/7	0	0	[redacted]	[redacted]
	x_5	0	0	−2/7	1/7	1	0	[redacted]	[redacted]
	x_2	0	1	2/7	−1/7	0	0	[redacted]	[redacted]
	x_6	0	0	3/7	−12/7	0	1	[redacted]	[redacted]
	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	

Таблиця 10.4, а

Результат	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	46/7	20/7	0	0	8/7	9/7

Значення цільової функції зросло до 152/7, а значення вектора невідомих $\boldsymbol{x}$ приведені в додатковій таблиці 10.4, а.

Отриманий результат після третьої ітерації оптимальний, тому що жоден елемент цільової функції не має від'ємного значення. Але умова цілочисельності (10.4) не виконується: усі змінні — дробові числа.

Для розв'язання нашого прикладу застосуємо перший розріз Гоморі. Ця додаткова умова має вигляд формули (10.5). Створимо додатковий стовпчик у правій частини таблиці 10.4 і занесемо туди дробову частину елементів b_i. Виберемо рядок з максимальним значенням дробової частини елементів b_i. У нашій таблиці це буде рядок з елементом x_2. Для цього рядка запишемо формулу першого розрізу Гоморі:

$$\{20/7\} - (\{2/7\}\, x_3 + \{-1/7\}\, x_4)\ \mathbf{J} \le 0$$

Для перетворення нерівності введемо додаткову змінну u_1:

$\{20/7\} - (\{2/7\}\, x_3 + \{-1/7\}\, x_4) + u_1 = 0$, або:

$2/7\, x_3 + 6/7\, x_4 - u_1 = 6/7$,

бо $\{20/7\} = 6/7$; $\{2/7\} = 2/7$;

$\{-1/7\} = -1/7 - [-1/7] = -1/7 + 1 = 6/7$.

Для нової змінної створимо додатковий рядок перед рядком з цільовою функцією F і додатковий стовпчик перед стовпчиком b_i.

Маємо нову таблицю 10.5 з початковими даними для ПЦЗЛП.

Таблиця 10.5

	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	b_i
Початкові дані	x_1	1	0	−1/7	4/7	0	0	0	[redacted]
	x_5	0	0	−2/7	1/7	1	0	0	
	x_2	0	1	2/7	−1/7	0	0	0	
	x_6	0	0	3/7	−12/7	0	1	0	
	u_1	0	0	[redacted]	6/7	0	0	−1	
	[redacted]								

У новому рядку змінна u_1 не може бути базисною, тому що її значення буде від'ємне (і дорівнюватиме −6/7), і тому треба вивести цю змінну. Для цього вибираємо позитивні коефіцієнти в рядку змінної u_1 (в нашому прикладі це третій та четвертий стовпчики). З цих двох стовпчиків вибираємо той, який містить мінімальне значення відношення b_i / a_{ik} зі знаком «плюс». У нашому прикладі таке значення буде в третьому стовпчику:

3 стовпчик 20/7 : 2/7; 9/7 : 3/7 = 3.
4 стовпчик 46/7 : 4/7; 8/7 : 1/7 = 8.

Таким чином, вибираємо розв'язувальний елемент у третьому стовпчику (виділена клітинка). Виконаємо симплексне перетворення і отримаємо таблицю 10.6.

Таблиця 10.6

	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	b_i
Ітерація 1 ПЦЗЛП	x_1	1	0	0	1	0	0	−1/2	[redacted]
	x_5	0	0	0	1	1	0	−1	
	x_2	0	1	0	−1	0	0	1	
	x_6	0	0	0	−3	0	1	3/2	
	x_3	0	0	1	3	0	0	−7/2	
	[redacted]								

Таблиця 10.6, а

Результат	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1
	7	2	0	0	2	0	0

Усі компоненти отриманого результату — цілі числа і значення цільової функції дорівнює 20. Це трохи менше, ніж значення цільової функції в попередній таблиці ($152/7 \approx 21{,}714$), але в останній таблиці виконуються всі умови задачі. Приклад розв'язано правильно.

10.3. Індивідуальні завдання з теми: «Цілочисельна задача лінійного програмування»

Виберіть свій варіант завдання з розділів 1, 2, 3. Якщо після розв'язання задачі лінійного програмування відразу отримаєте цілі числа, то змініть праві частини: зменшіть або збільшіть на 1.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абчук В. А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций.— С Пб.: Союз, 1999.— 320 с.
2. Волков И. К., Загоруйко Е. А. Исследование операций: Учеб. для вуз / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко.— М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.— 436 с.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: Учеб. пособ. для студ. втуз.— 2-е изд., стер.— М.: Высшая школа, 2001.— 208 с.
4. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций.— С Пб: Питер, 2001.— 192 с.
5. Исследование операций в экономике: Учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера.— М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.— 407 с.
6. Таха Х., Хэмди А. Введение в исследование операций.— 6-е изд. / Пер. с англ.— М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.— 912 с.
7. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: Учеб. пособ.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.— 240 с.
8. Сборник индивидуальных заданий по дисциплине «Введение в исследование операций в транспортных системах» (для дневной и заочной формы обучения студентов всех специальностей) / Сост.: А. И. Чугун, М. Е. Королев.— Горловка: АДИ ДонГТУ, 2000.— 30 с.
9. Пинегина М. В. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособ. для студ. вузов экономических специальностей.— М.: Издательство «Экзамен», 2004.— 128 с.

Список додаткової літератури

1. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособ.— М.: Финансы и стат., 2003.— 368 с.

2. Волков И. К. Исследование операций.— М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.— 436 с.

3. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Учеб.— 6 изд., перераб. и доп.— К: Издательский Дом «Слово», 2003.— 688 с.

4. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Учеб.— К.: Слово, 2003.— 688 с.

5. Волков И. К., Загоруйко Е. А. Исследование операций.— М.: Мос. ГосТехничес, 2002.— 435 с.

6. Косоруков О. А. Исследование операций: Учеб. для вузов.— М.: Экзамен, 2003.— 448 с.

7. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: Навч. посіб.— К.: Вид-во ТОВ «Видавничий дім «Професіонал», 2004.— 350 с.

8. Протасов И. Д. Теория игр и исследование операций: Учеб. пособ.— М.: Гелиос АРВ, 2003.— 368 с.

9. Тихоненко О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах.— К.: ЦУЛ, 2003.— 327 с.

10. Улянченко О. В. Дослідження операцій в економіці.— Х.: «Гриф», 2002.— 580 с.

11. Методические указания по практическим занятиям по курсу «Линейное программирование» / Ефремов Н. Ф.— Донецк.: ДПИ, 1982.— 64 с.

Навчальне видання

КОРОЛЬОВ Марк Євгенович
ПАВЛЕНКО Володимир Іванович
САВІНА Олександра Володимирівна
ТИМОШЕНКО Анатолій Григорович

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ І МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Навчальний посібник

Головний редактор	Н. І. Перинська
Відповідальна за випуск	А. В. Сіренко
Літературний редактор	С. В. Єременко
Технічний редактор	І. Є. Гнатюк
Художник-дизайнер	І. О. Клименко
Комп'ютерна верстка	Н. О. Карякіна
Коректор-редактор	О. В. Камінська

Автори несуть відповідальність за подання матеріалів,
які вміщені в посібнику «Дослідження операцій і методи оптимізації».
Університет «Україна» користується майновими правами на посібник
М. Є. Корольова, В. І. Павленка, О. В. Савіна, А. Г. Тимошенка
«Дослідження операцій і методи оптимізації» як такий.

Оригінал-макет виготовлено у видавничо-друкарському комплексі
Університету «Україна»
03115, м. Київ, вул. Львівська, 23, тел. (044) 450-18-75, 424-40-69
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 405 від 06.04.01

Віддруковано з оригінал-макета у видавничо-друкарському комплексі
Університету «Україна»

Підписано до друку 31.07.2007. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Умовн. друк. арк. 10,7.
Обл. вид. арк. 6,41. Наклад 1300 прим.