11. Чисельні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.

§1. Метод Эйлера.

Пусть требуется решить **задачу Коши**: найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y) \qquad \textbf{(1)}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

При численном решении дифференциального уравнения (1) задача ставится следующим образом: в точках x_0 , x_0 , x_1 , x_2 ,...., x_n найти приближения $y_k \left(k = \overline{1, n}\right)$для значений точного решения $y(x_к)$

Разность $\Delta x_к = x_{к-1} - x_к$ называется **шагом сетки**. Во многих случаях величину $\Delta x_к$ принимают постоянной. Пусть $\Delta x_к = h$, тогда

$$x_k = x_0 + kh \text{ где } \left(k = \overline{1, n}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Метод Эйлера основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x;y) \text{, где } \Delta y = y(x+h) - y(x), \Delta x = (x+h) - x = h \qquad \textbf{(3)}$$

Приближенное значение $y_к$ в точке $x_k = x_0 + kh$ вычисляется по формуле:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k) \text{ - } \textbf{формула Эйлера} \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 4.1: Методом Эйлера найти значения решения уравнения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - y$, для которого $y(1) = 1$, в пяти точках отрезка [*1; 1,5*], приняв $h = 0,1$

Решение. По формуле (2) находим точки $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,2$, $x_3 = 1,3$, $x_4 = 1,4$, $x_5 = 1,5$. Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, вычисляем по формуле (4). Результаты вычислений занесем в таблицу.

k	x_k	y_k	$2x_k$	$f(x_k, y_k) = 2x_k - y_k$	$hf(x_k, y_k) = 0,1(2x_k - y_k)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	*1,0*	*1,0000*	*2,0*	*1,0000*	*0,1000*	*1,1000*
1	*1,1*	*1,1000*	*2,2*	*1,1000*	*0,1100*	*1,2100*
2	*1,2*	*1,2100*	*2,4*	*1,1900*	*0,1190*	*1,3290*
3	*1,3*	*1,3290*	*2,6*	*1,2710*	*0,1271*	*1,4561*
4	*1,4*	*1,4561*	*2,8*	*1,3439*	*0,1344*	*1,5905*

5	*1,5*	*1,5905*	*3,0*	*1,4095*	*0,1410*	*1,7315*

§2. Метод Рунге – Кутта. (Один из наиболее употребляемых методов повышенной точности).

Пусть функция y определяется дифференциальным уравнением $y' = f(x;\, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. При численном интегрировании такого уравнения по методу Рунге – Кутта определяются четыре числа:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x;\, y) \\ k_2 = h \cdot f\left(x + \dfrac{h}{2};\, y + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h \cdot f\left(x + \dfrac{h}{2};\, y + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h \cdot f(x + h;\, y + k_3) \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Если положить $y(x+h) = y(x) + \Delta y$, то можно доказать, что

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \qquad \textbf{(6)}$$

Получаем следующую схему вычислений:

x	***y***	***k_i***	***Δy***
x_0 $x_0 + \dfrac{h}{2}$ $x_0 + \dfrac{h}{2}$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + \dfrac{k_1}{2}$ $y_0 + \dfrac{k_2}{2}$ $y_0 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_0 \approx \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
x_1 $x_1 + \dfrac{h}{2}$ $x_1 + \dfrac{h}{2}$ $x_1 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$ $y_1 + \dfrac{k_1}{2}$ $y_1 + \dfrac{k_2}{2}$ $y_1 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_1 \approx \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
x_2 $x_2 + \dfrac{h}{2}$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$ $y_2 + \dfrac{k_1}{2}$	k_1 k_2	$\Delta y_2 \approx \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$x_2 + \dfrac{h}{2}$ $x_2 + h$	$y_2 + \dfrac{k_2}{2}$ $y_2 + k_3$	k_3 k_4	
....	....	....	....

Пример 4.2:

Составь таблицу значений функции y, определяемой уравнением $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, при начальном условии $y(0) = 1,\ 0 \le x \le 1$ при $h = 0,2$.

Решение.

Используя формулы (5) найдем числа:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x;\, y) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \dfrac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2 \\ k_2 = h \cdot f\left(x + \dfrac{h}{2};\, y + \dfrac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;\, 1{,}1) = 0{,}2 \cdot \left(1{,}1 - \dfrac{0{,}2}{1{,}1}\right) = 0{,}1836 \\ k_3 = h \cdot f\left(x + \dfrac{h}{2};\, y + \dfrac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;\, 1{,}0918) = 0{,}1817 \\ k_4 = h \cdot f(x + h;\, y + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2;\, 1{,}1817) = 0{,}1686 \end{cases}$$

Отсюда $\Delta y_0 \approx \dfrac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$

Таким образом $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ при $x = 0{,}2$. По этой же схеме находим y_2 и т.д. процесс вычисления ведем по схеме:

x	***y***	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\Delta y}$
$x_0 = 0$ $x_0 + \dfrac{h}{2} = 0{,}1$ $x_0 + \dfrac{h}{2} = 0{,}1$ $x_0 + h = 0{,}2$	$y_0 = 1$ $y_0 + \dfrac{k_1}{2} = 1{,}1$ $y_0 + \dfrac{k_2}{2}\ 1{,}0918$ $y_0 + k_3 = 1{,}1817$	$k_1 = 0{,}2$ $k_2 = 0{,}1838$ $k_3 = 0{,}1817$ $k_4 = 0{,}1686$	$\Delta y_0 \approx \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 0{,}1832$
$x_1 = 0{,}2$ $x_1 + \dfrac{h}{2} = 0{,}3$ $x_1 + \dfrac{h}{2} = 0{,}3$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}1832$ $y_1 + \dfrac{k_1}{2} = 1{,}2677$ $y_1 + \dfrac{k_2}{2} = 1{,}2626$	$k_1 = 0{,}1690$ $k_2 = 0{,}1589$ $k_3 = 0{,}1575$	$\Delta y_1 \approx \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 1{,}1584$

$x_1 + h = 0,4$	$y_1 + k_3 = 1,3407$	$k_4 = 0,1488$	
x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	k_1	$\Delta y_2 \approx \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$
....	....	....	....

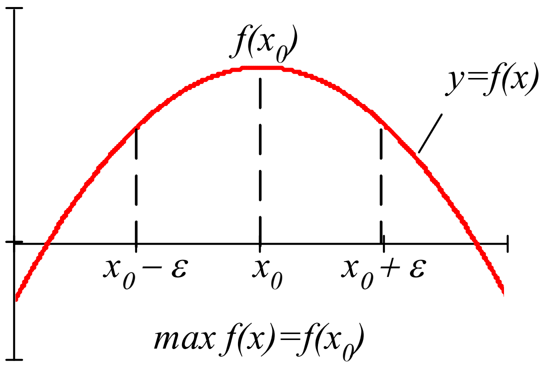
12. Теорія оптимізації у чисельних методах.

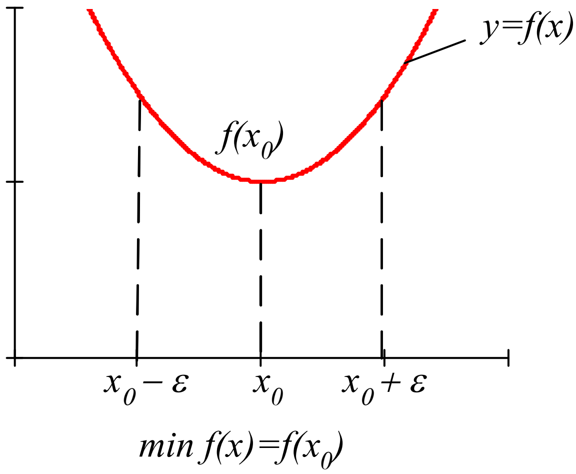
Основные понятия задачи безусловной оптимизации функции 1-ой переменной

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$; точка x_0 - внутренняя точка промежутка: $x_0 \in (a,b)$.

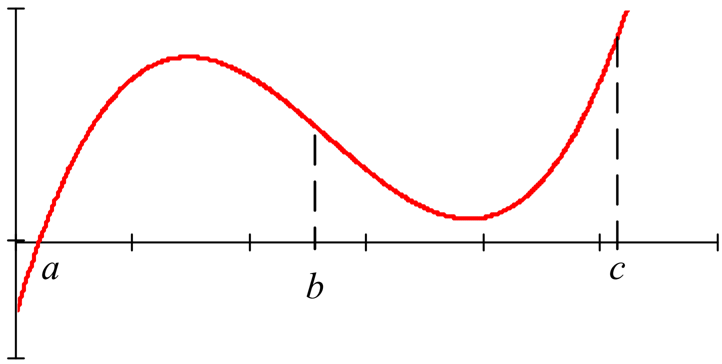
Определение 1. Функция $f(x)$ в точка x_0 имеет максимум, если существует такая окрестность точки x_0 радиусом ε, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Само значение $f(x_0)$ называется максимумом (локальным максимумом) функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается так $\max f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ в точка x_0 имеет минимум, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$. При этом само значение $f(x_0)$ называется минимумом (локальным минимумом) функции $f(x)$ точке x_0 и обозначается так $\min f(x) = f(x_0)$.





Определение 2. Функция $f(x)$ называется унимодальной на интервале $[a,b]$, если она непрерывна на этом интервале и имеет единственное экстремальное значение (максимум или минимум)

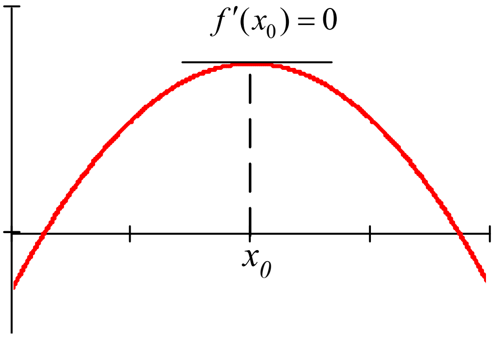


Интервалы *(a, b)* и *(b, c)* называются интервалами унимодальности функции $f(x)$.

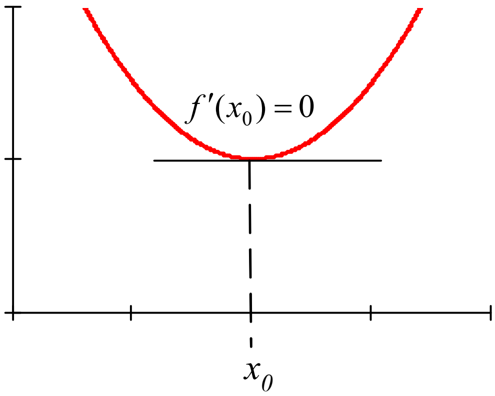
8.2. Классический метод поиска экстремума функции одной переменной

Необходимое условие экстремума. Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум на отрезке $[a,b]$ только в тех точках, в которых выполняется одно из условий:

1. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 непрерывна и ее производная в этой точке ***равна нулю***.

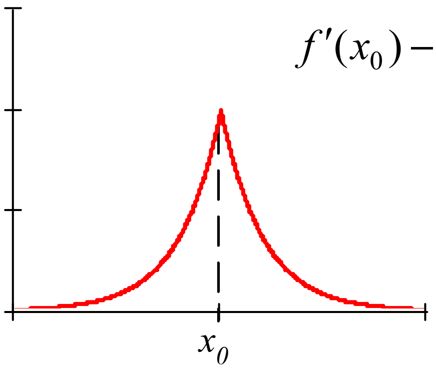


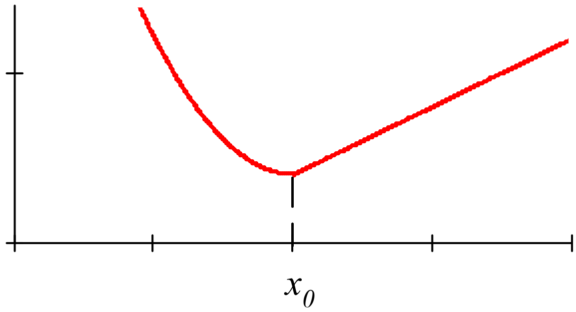
$$f'(x_0) = 0$$



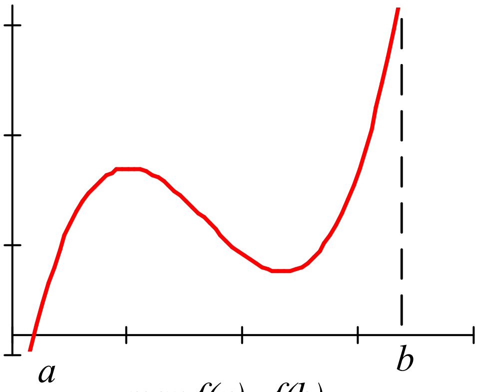
2. Производная функции в точке x_0 ***не существует***

$$f'(x_0) - не\ существует$$

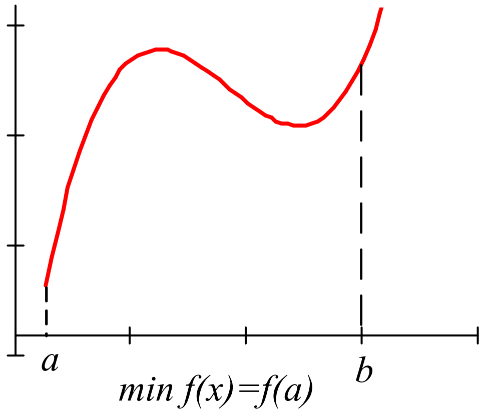




3. Точка экстремума находится на одной из границ интервала $[a,b]$.

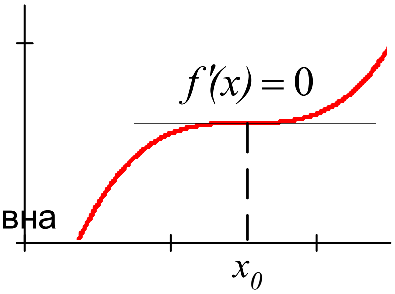


max f(x)=f(b)



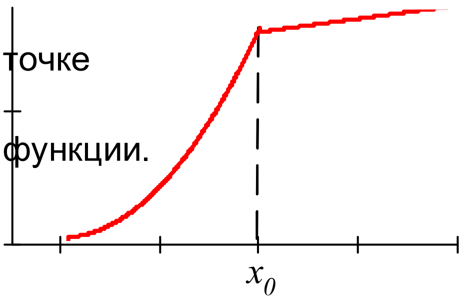
min f(x)=f(a)

Однако, все перечисленные условия являются только необходимыми и вовсе не достаточными для экстремума. Покажем это на примерах.



В точке x_0 производная равна нулю, однако x_0 не есть точка экстремума – это точка перегиба, т. е. точка в которой выпуклость графика функции сменяется вогнутостью. В этой точке вторая производная функции равна нулю ($f''(x_0)=0$).

$f'(x_0)$ – *не существует*



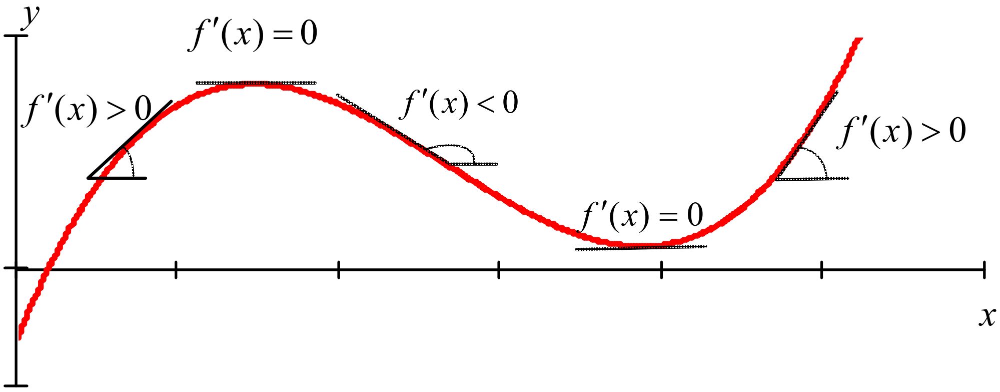
Здесь, несмотря на то, что производная в точке x_0 не существует, x_0 не является точкой экстремума – точка излома графика функции.

Все рассмотренные точки, в которых выполняется одно из необходимых условий экстремуму (1 – 3) называются критическими точками функции $y=f(x)$ и экстремальные точки следует искать среди них.

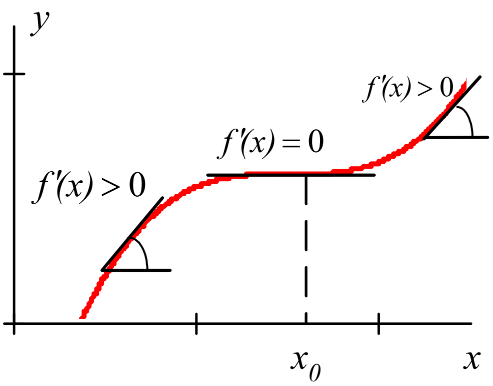
Достаточное условие экстремума функции

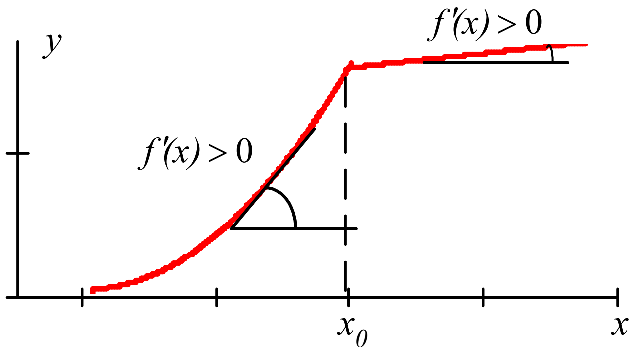
1. В точке экстремума происходит смена знака первой производной при переходе через критическую точку: с « + » на « - » в точке максимума и с « - » на « + »- в точке минимума.

Напомним, что производная в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке к оси Ох. И если касательная образует острый угол с осью Ох, то производная положительна, а если тупой – отрицательна.



В тех критических точках, где нет экстремума, смены знака производной не происходит.



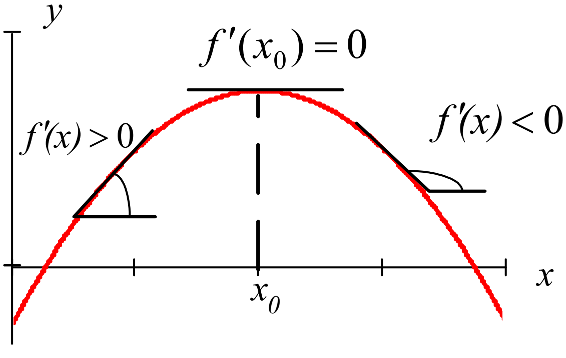


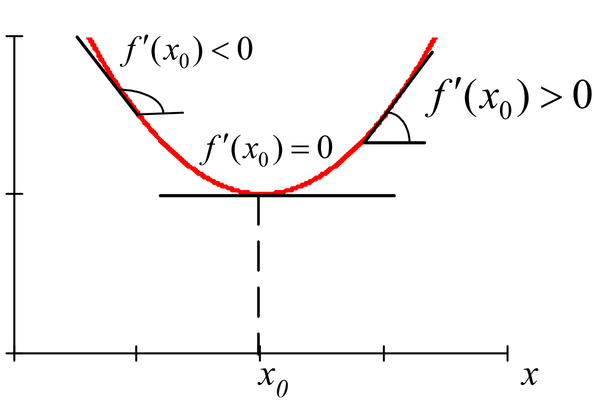
2. В точках экстремума $f''(x) \neq 0$.

Причем

если $f''(x) > 0$, то x_0 -точка минимума;

если $f''(x) < 0$, то x_0 -точка максимума;



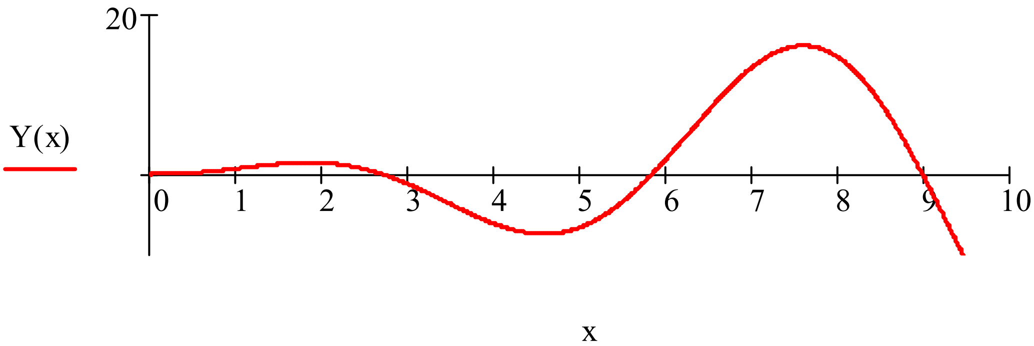


Первая производная $f'(x)$ здесь   Здесь первая производная $f'(x)$

убывает, поэтому $f''(x) < 0$ возрастает, поэтому $f''(x) > 0$

Пример 1 реализации классического метода поиска экстремума дифференцируемой (гладкой) функции одной переменной в среде Mathcad.

$$Y(x) := x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) \cdot \ln(x+1)$$



$x1 := 5 \quad x2 := 7.5$ - Начальные приближения

$$X_{min} := \mathrm{root}\left(\frac{d}{dx1} Y(x1), x1\right) \qquad X_{min} = 4.576 \qquad Y(X_{min}) = -7.483$$

$$X_{max} := \mathrm{root}\left(\frac{d}{dx2} Y(x2), x2\right) \qquad X_{max} = 7.589 \qquad Y(X_{max}) = 16.045$$

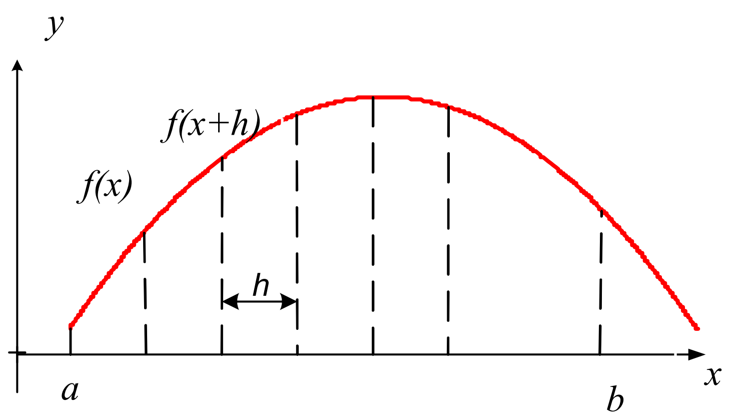
Здесь функция ***root*** ищет такие значения переменной x в окрестности начального приближения $x1$ или $x2$, при которых производная функции $\dfrac{d}{dx} Y(x)$ обращается в ноль.

8.3. Численные методы поиска экстремума функции одной переменной

Классический метод поиска экстремума функции имеет весьма ограниченное применение. Его сложно использовать в тех случаях, когда имеется функция, значения которой получены в экспериментах и заданы таблицей, или если функция не является гладкой и имеет изломы и разрывы на интервале поиска. Даже в тех случаях, когда производную все же удается вычислить, решение уравнения $f'(x) = 0$ для выявления критических точек может составлять проблему. Поэтому важно иметь другие методы поиска экстремума, не требующие вычисления производной и более удобные для реализации на компьютере.

1. Численный метод равномерного поиска

Пусть необходимо найти максимум функции $f(x)$ унимодальной на отрезке $[a,b]$. Для этого переменную x изменяют с постоянным шагом h, начиная от левой границы интервала. На каждом шаге сравнивают значения функции в точках x и $x+h$.



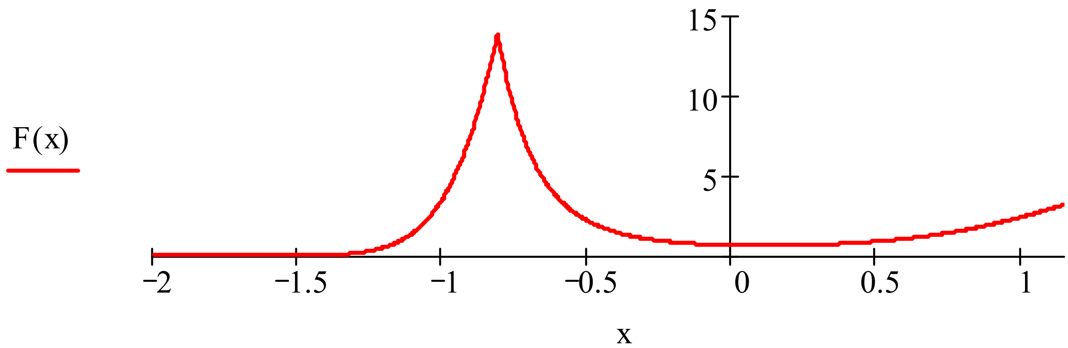
Если $f(x+h) > f(x)$ - процесс смещения вправо на шаг продолжается.

Если $f(x+h) < f(x)$ - процесс поиска прекращается и точкой максимума считается точка x.

Погрешность метода равна шагу h.

Пример 2 реализации алгоритма метода равномерного поиска максимума и минимума в среде программирования Mathcad.

$$F(x) := e^{-\left|x^3-3x^2+2.5\right|}\cdot\left|x^3-2x^2+5x-8\right|$$



Метод равномерного поиска

$$\mathrm{MAXR}(y,a,h) := \left|\begin{array}{l} x \leftarrow a \\ \text{while } y(x) < y(x+h) \\ \quad x \leftarrow x+h \\ x \end{array}\right.$$

$$\mathrm{MINR}(y,a,h) := \left|\begin{array}{l} x \leftarrow a \\ \text{while } y(x) > y(x+h) \\ \quad x \leftarrow x+h \\ x \end{array}\right.$$

$\mathrm{Xmax} := \mathrm{MAXR}\left(F,-1,10^{-5}\right)$

$\mathrm{Xmax} = -0.81$

$F(\mathrm{Xmax}) = 13.894$

$\mathrm{Xmin} := \mathrm{MINR}\left(F,0,10^{-5}\right)$

$\mathrm{Xmin} = 0.108$

$F(\mathrm{Xmin}) = 0.635$

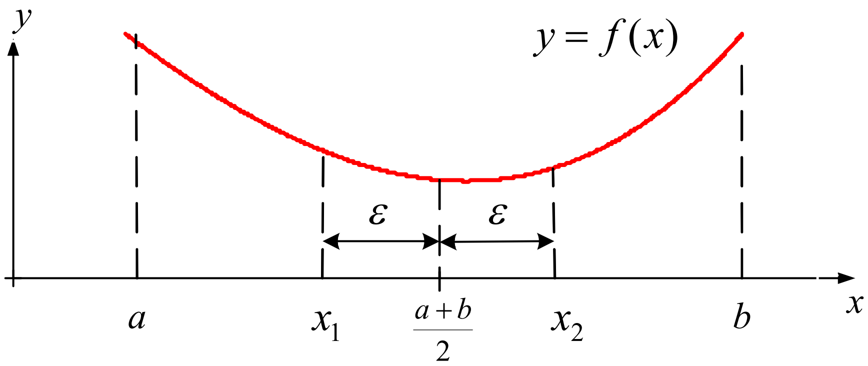
2. Численный метод деления отрезка пополам..

Пусть необходимо найти минимум функции $f(x)$ унимодальной на отрезке $[a,b]$. Начинают с выбора двух точек

$$x_1 = \frac{a+b-\varepsilon}{2}, \quad u \quad x_2 = \frac{a+b+\varepsilon}{2},$$

где ε -выбранная погрешность вычисление.

Точки x_1 и x_2 расположены симметрично относительно середины отрезка $[a,b]$. В точках x_1 и x_2 вычисляют значения функции и сравнивают их.



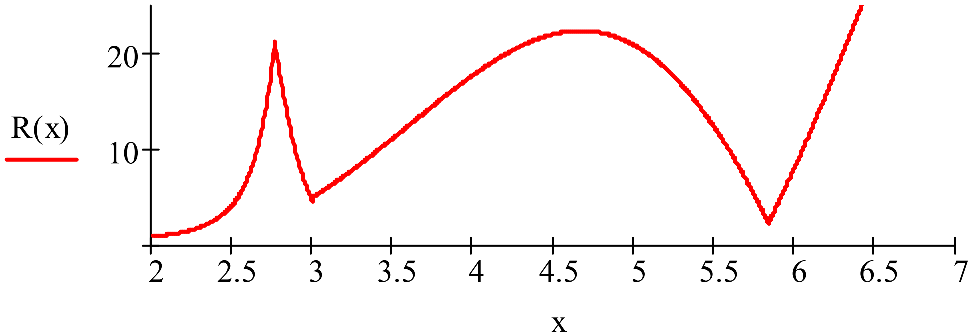
Если $f(x_1) > f(x_2)$ - то $a = x_1$.

Если $f(x_1) < f(x_2)$- то $b = x_2$

Новый, значительно меньший отрезок, вновь делят пополам и находят новые значения для x_1 и x_2 по тем же формулам. Процесс продолжается, пока длина отрезка поиска минимума не станет меньше $2 \cdot \varepsilon$, т. е. $|a-b| < 2 \cdot \varepsilon$.

Пример 3 реализации алгоритма метода деления отрезка пополам в среде программирования Mathcad.

$$R(x) := \begin{cases} e^{-\left|x^3 - 3\cdot x^2 + 1.8\right|}\cdot x^3 & \text{if } -2 < x \le 3 \\ x^2\cdot\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right)\right| + 2.24 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$



Метод делекния отрезка попалам

$$MAXB(y,a,b,\varepsilon) := \left| \begin{array}{l} \text{while } |a-b| > 2\varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow \dfrac{a+b-\varepsilon}{2} \\ x2 \leftarrow \dfrac{a+b+\varepsilon}{2} \\ b \leftarrow x2 \ \text{ if } \ y(x1) > y(x2) \\ a \leftarrow x1 \ \text{ if } \ y(x1) \le y(x2) \end{array} \right. \\ x1 \end{array} \right.$$

$Xmax := MAXB\left(R, 2.5, 3, 10^{-6}\right)$ $\quad Xmax = 2.764 \quad R(Xmax) = 21.127$

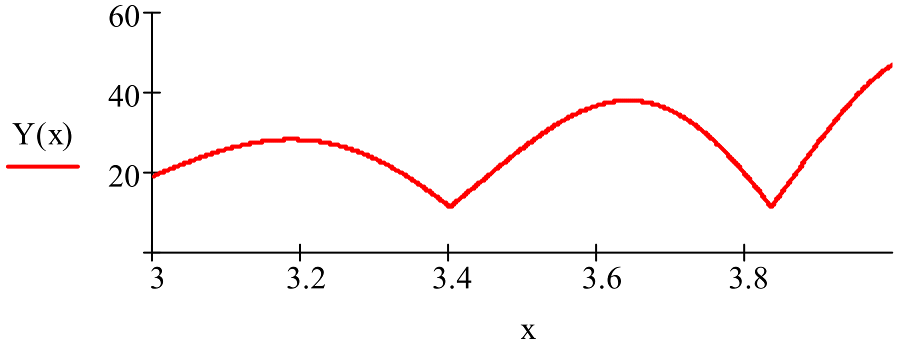
$$MINB(y,a,b,\varepsilon) := \left| \begin{array}{l} \text{while } |a-b| > 2\varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow \dfrac{a+b-\varepsilon}{2} \\ x2 \leftarrow \dfrac{a+b+\varepsilon}{2} \\ b \leftarrow x2 \ \text{ if } \ y(x1) \le y(x2) \\ a \leftarrow x1 \ \text{ if } \ y(x1) > y(x2) \end{array} \right. \\ x1 \end{array} \right.$$

$Xmin := MINB\left(R, 5.5, 6.1, 10^{-6}\right)$ $\quad Xmin = 5.834 \quad R(Xmin) = 2.24$

Однако Mathcad имеет свои встроенные функции реализующие численные методы поиска экстремума.

Пример 4 использования встроенных функций ***Maximize*** и ***Minimize.***

$$Y(x) := \left|\sin\left(x^2+1\right)\right| \cdot \left|x^3 - 2x^2 + 5\right| + 11.2$$



$x1 := 3.6 \quad x2 := 3.8$ - Начальные приближения

$Xmax := Maximize(Y, x1) \quad Xmax = 3.642 \quad Y(Xmax) = 37.764$

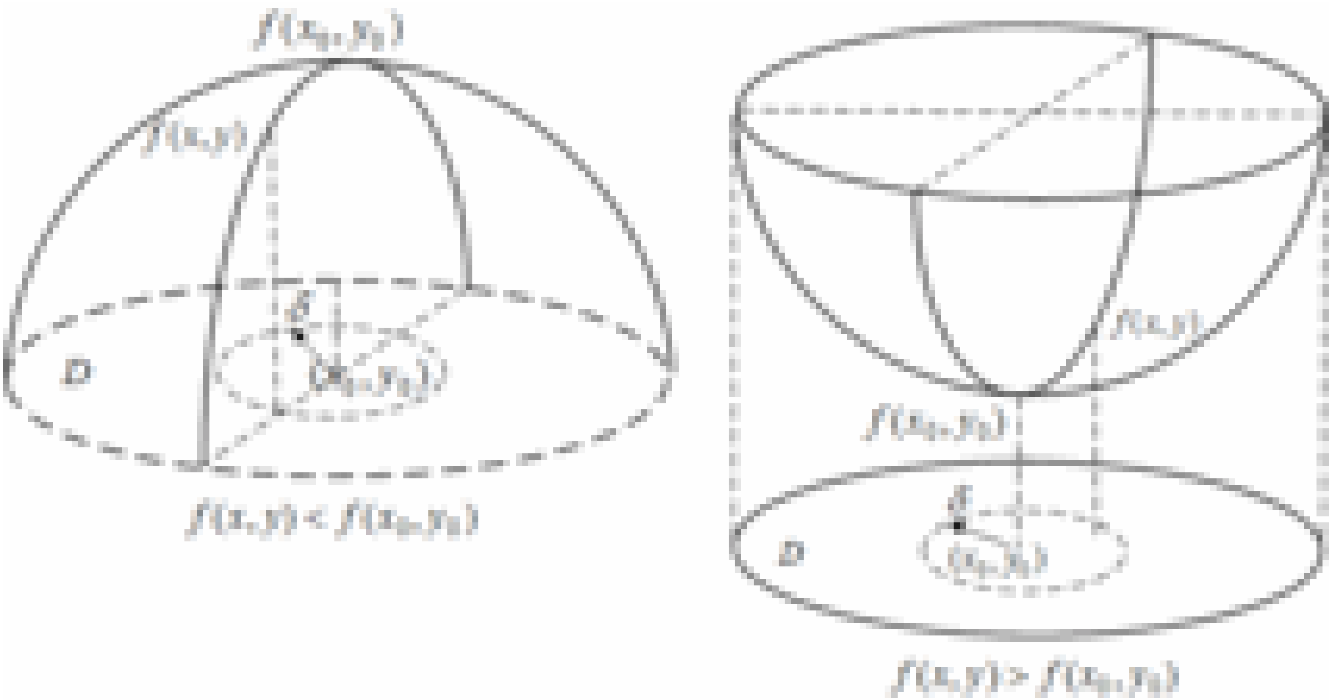
$Xmin := Minimize(Y, x2) \quad Xmin = 1.463 \quad Y(Xmin) = 11.2$

13. Задачі безумовної оптимізації функції 2-х змінних у чисельних методах.

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена в некоторой области D; точка (x_0,y_0) - внутренняя точка области:. $(x_0,y_0) \in D$.

Определение 1. Функция в точке (x_0,y_0) имеет максимум, если существует такая окрестность точки (x_0,y_0) радиуса δ, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x,y) < f(x_0,y_0)$. Само значение $f(x_0,y_0)$ называется максимумом (локальным максимумом) функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Функция в точке (x_0,y_0) имеет минимум, если существует такая окрестность точки (x_0,y_0) радиуса δ, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x,y) > f(x_0,y_0)$. Само значение $f(x_0,y_0)$ называется минимумом (локальным минимумом) функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0).



8.5. Классический метод поиска экстремума функции двух переменных

Необходимое условие экстремума функции 2-х переменных. В точке (x_0,y_0) функция $Z = f(x,y)$ имеет локальный экстремум при условии, что либо ее частные производные в этой точке равны нулю

$$f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0 \qquad (1)$$

либо частные производные функции $Z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) не существуют

$f'_x(x_0,y_0), \quad f'_y(x_0,y_0)$ - не существуют (2)

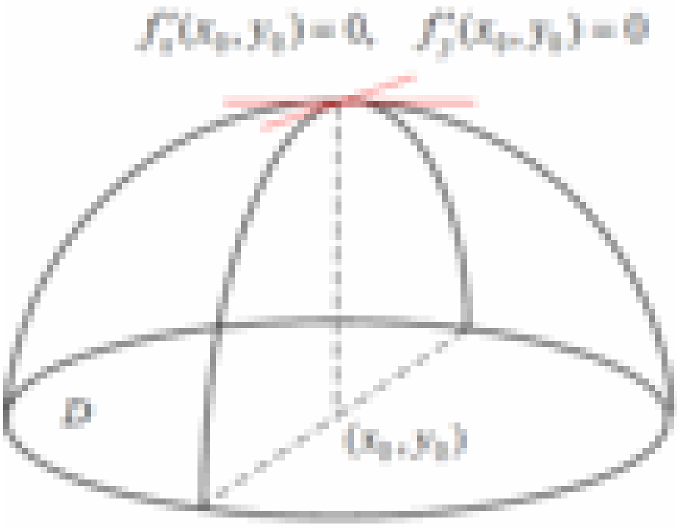
Эти условия не являются достаточными при исследовании функции на экстремум. Возможны случаи, когда условие (1) или (2) выполняется в точке

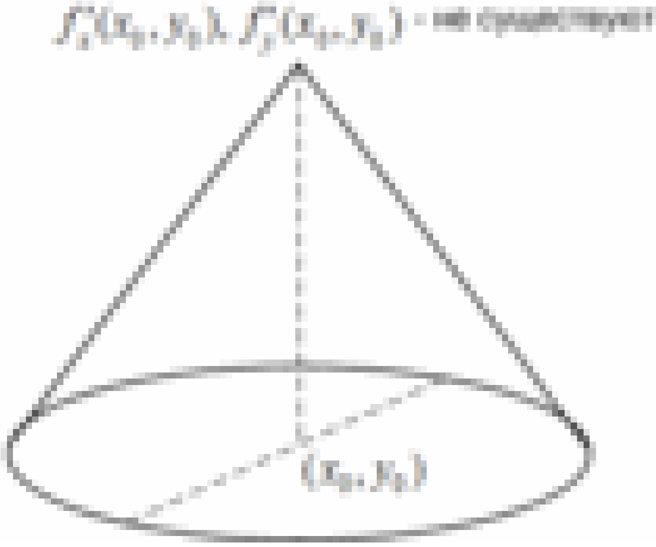
(x_0, y_0), а экстремума в ней нет.

Определение 1. Точки, в которых выполняется условие (1), называются стационарными точками функции $Z = f(x, y)$.

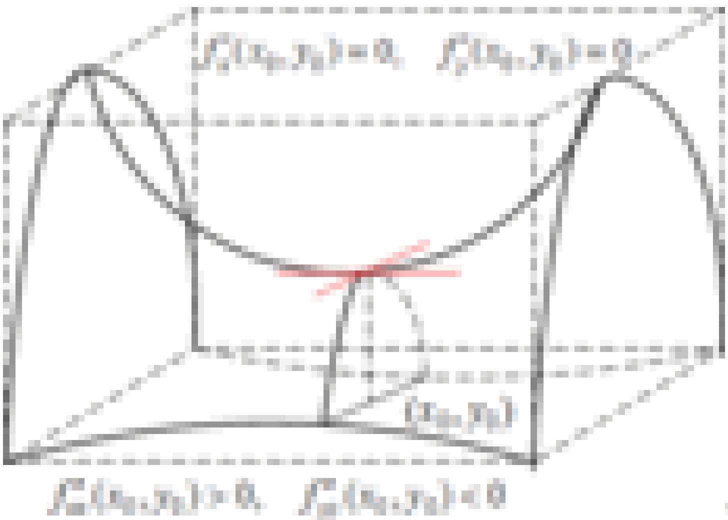
Определение 2. Точки, в которых выполняется условие (1) или (2), называются критическими точками функции $Z = f(x, y)$.

Критические точки – это не только точки экстремума, но и седловые тоски и некоторые точки перегиба.

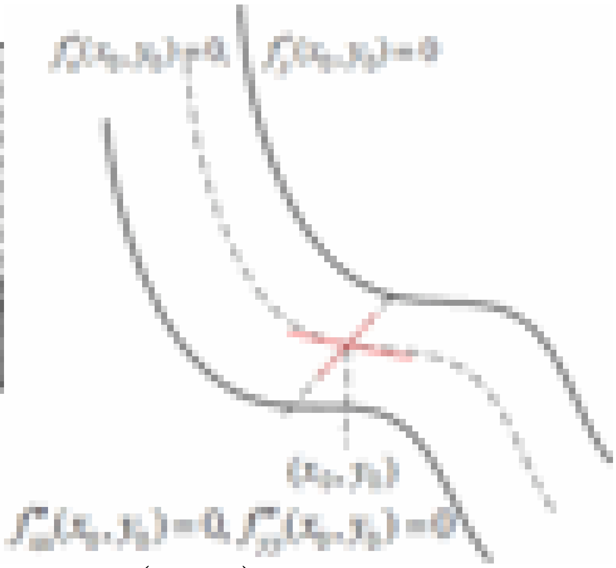




Здесь (x_0, y_0) - точки экстремума



(x_0, y_0) - седловая точка



(x_0, y_0) - точка перегиба.

Достаточное условие экстремума функции 2-х переменных.

Пусть в стационарной точке (x_0, y_0) и ее некоторой окрестности функция $Z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно. Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Раскроем определитель и получим функцию двух переменных

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

1. Если $\Delta > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $Z = f(x, y)$ имеет экстремум
   Причем
   при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$ - минимум, а
   при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$ - максимум.
2. Если $\Delta < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $Z = f(x, y)$ не имеет экстремум
   Причем
   при $f''_{xx}(x_0, y_0) = 0$ и $f''_{yy}(x_0, y_0) = 0$ - имеем перегиб поверхности, а
   при условии, что вторые производные $f''_{xx}(x_0, y_0)$, $f''_{yy}(x_0, y_0)$ имеют разные знаки – седловую точку.
3. Если $\Delta = 0$ экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, а может и не быть. Нужны дополнительные исследования.

8.6. Линии уровней функции 2-х переменных в окрестностях критических точек

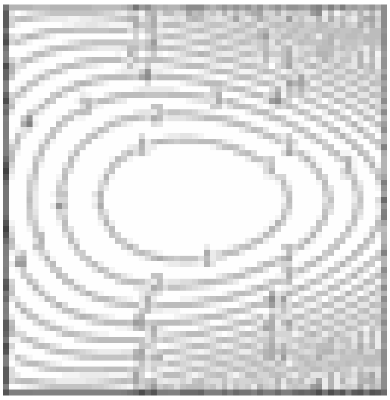
Линии уровней функции 2-х переменных $Z = f(x, y)$ - это линии, вдоль которых значение функции не меняется, т. е. постоянно. Уравнение линий уровня имеет вид

$$f(x, y) = C, \text{ где } C - Const$$

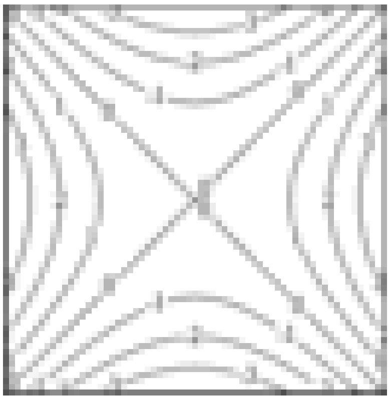
Придавая константе C различные значения, получают семейство линий уровней, вдоль которых значение функции постоянно и равно значению константы C.

Линии уровней функции 2-х переменных можно получить, рассекая поверхность (графическое представление функции $Z = f(x, y)$) плоскостями перпендикулярными оси Oz.

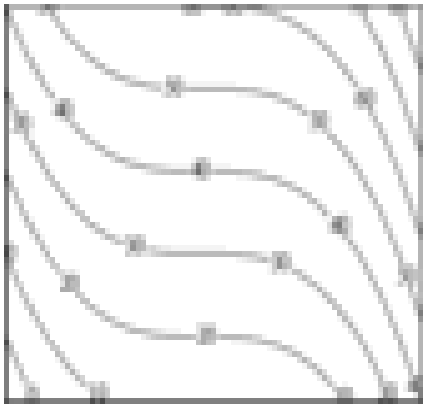
В окрестности точек экстремума линии уровней всегда замкнуты. Этого нельзя сказать о седловых точках и точках перегиба. Вот примеры линий уровней в окрестностях различных критических точек функций 2-х переменных.



Экстремум (минимум)



Седло



Перегиб

8.7. Численные методы поиска экстремума функции нескольких переменных

Классический метод поиска экстремума затруднительно использовать, когда исследуемая функция не является гладкой (дифференцируемой) или задана не аналитически, а таблично и тем более, если функция задается с помощью сложного алгоритма. В этих случаях используют различные численные методы поиска экстремума функции.

Наиболее простым из них является метод покоординатного спуска. Он заключается в поочередном поиске, например, минимума функции $F(x_1, x_2, ...x_n)$ по координате x_1, затем x_2 и т.д. После нахождения точки минимума по координате x_1, переходят к поиску минимума по координате x_2 и т.д. Поиск идет с заданным шагом. При переходе через точку минимума процесс поиска разворачивается в обратном направлении с уменьшенным в 4-е раза шагом.

Численные методы реализуются в среде Mathcad двумя встроенными функциями, которые мы уже использовали в примере 4 раздела 8.3.

Maximize(F, x_1, x_2,…x_n) и *Minimize(F, x_1, x_2,…x_n)*

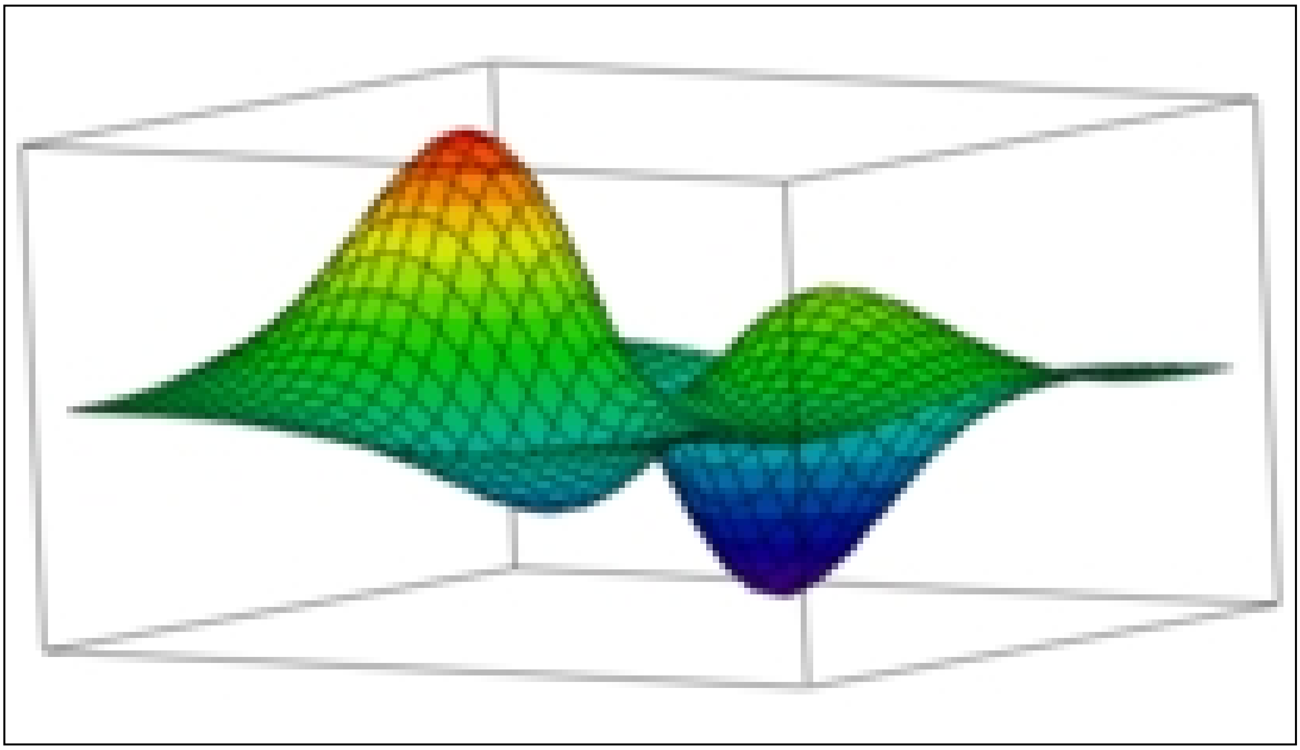
Здесь F- имя исследуемой функции одной или нескольких переменных4

$x_1, x_2, ...x_n$ - имена переменных.

Пример 1. Найти точки экстремума функции двух переменных.

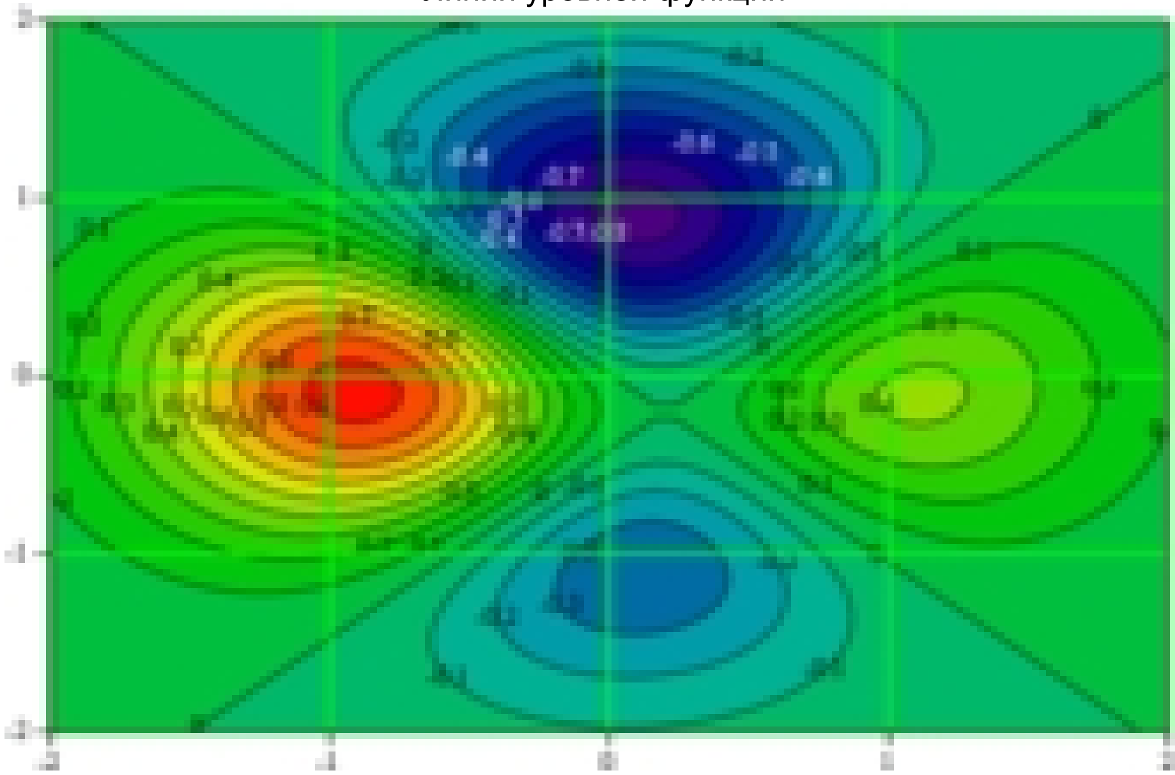
$$Z(x, y) := \left[1.8\cdot(x-0.2)^2 - 1.6\cdot(y+0.2)^2\right]\cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$ - Исследуемая функция

Графие функции 2-х переменных - поверхность



Z

Линии уровней функции



Z

Классический метод поиска экстремумов.

По линиям уровней определяем начальное приближение точек экстремума. Далее с помощью решающего блока *Given – Find* находим такие значения *x* и *y*, в окрестности начального приближения, в которых частные производные исследуемой функции обращаются в ноль.

$x := -0.9 \quad y := -0.1$ - начальное приближение глобального максимума

Given

$$\frac{d}{dx}Z(x,y) = 0 \qquad \frac{d}{dy}Z(x,y) = 0$$

$$\begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} := Find(x,y) \qquad \begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.91 \\ -0.084 \end{pmatrix}$$ - точка глобального максимума

$Z(Xmax, Ymax) = 0.953$ - максимальное значение функции $\quad ERR = 0$

$x := 0.2 \qquad y := 1$ - начальное приближение глобального минимума

Given

$$\frac{d}{dx}Z(x,y) = 0 \qquad \frac{d}{dy}Z(x,y) = 0$$

$$\begin{pmatrix} Xmin \\ Ymin \end{pmatrix} := Find(x,y) \qquad \begin{pmatrix} Xmin \\ Ymin \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.096 \\ 0.91 \end{pmatrix}$$ - точка глобального минимума

$Z(Xmin,Ymin) = -0.845$ - минимальное значение функции $\quad ERR = 0$

Поиск экстремумов с помощью встроенных функций Maximize(F, x_1, x_2,…x_n) и Minimize(F, x_1, x_2,…x_n)

Способ I

$x := 0.2 \qquad y := -1.2$ - начальное приближение локального минимума

$$\begin{pmatrix} Xmin \\ Ymin \end{pmatrix} := Minimize(Z,x,y) \qquad \begin{pmatrix} Xmin \\ Ymin \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.116 \\ -1.11 \end{pmatrix}$$ - точка локального минимума

$Z(Xmin,Ymin) = -0.378 \qquad ERR = 0$

Способ II

Given

$1 < x < 1.2 \qquad -0.2 < y < 0$ - область поиска локального максимума

$$\begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} := Maximize(Z,x,y) \qquad \begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.11 \\ -0.104 \end{pmatrix}$$ - точка локального максимума

$Z(Xmax,Ymax) = 0.426 \qquad ERR = 0$

14. Оптимізаційні задачі з обмеженням у вигляді рівності.

1. Постановка задачи. Найти локальный экстремум функции двух переменных

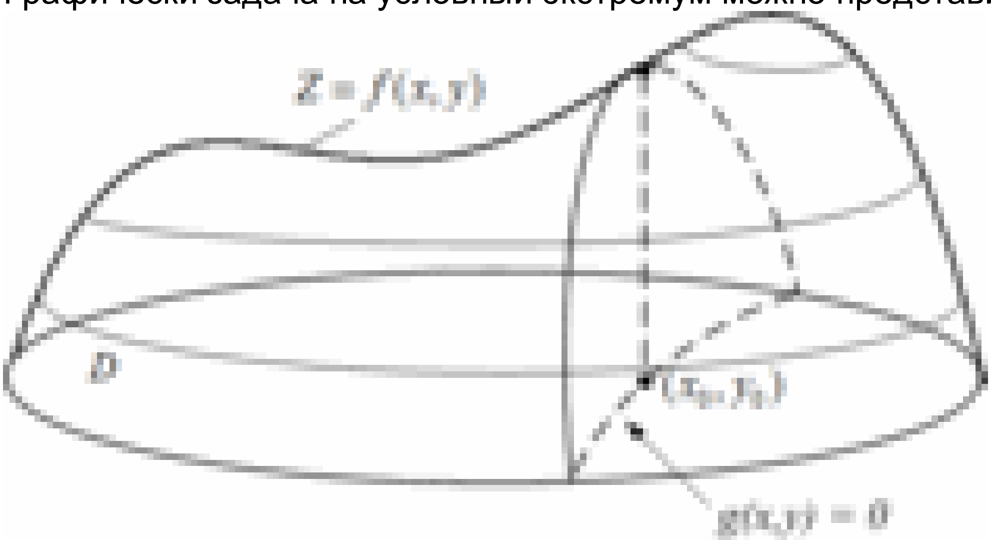
$$Z = f(x, y) \to \max\ (\min) \qquad (1)$$

при условии, что независимые переменные x и y удовлетворяют ограничению в виде равенства, т. е.

$$g(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Функция $f(x,y)$ называется целевой функцией, а уравнение (2) – ограничением. Задача на условный локальный экстремум может иметь несколько ограничений, а целевая функция может иметь n переменных.

Графически задача на условный экстремум можно представить так



2. Методы решения задач на условный экстремум.

а). Метод исключения

Этот метод состоит в разрешении условия $g(x,y) = 0$ относительно одной из переменных x или y и подстановки, полученного соотношения в целевую функцию (1). При этом задача на условный экстремум функции 2-х переменных сводится к задаче на безусловный экстремум функции 1-й переменной.

Пример 1. Найти экстремум функции

$$Z = x^2 + y^2 \qquad (3)$$

при условии

$$x + y = 1 \qquad (4)$$

Решение. Из условия следует, что точку экстремума функции (x_0, y_0) следует искать не во всей плоскости Oxy, а на прямой $x + y = 0$.

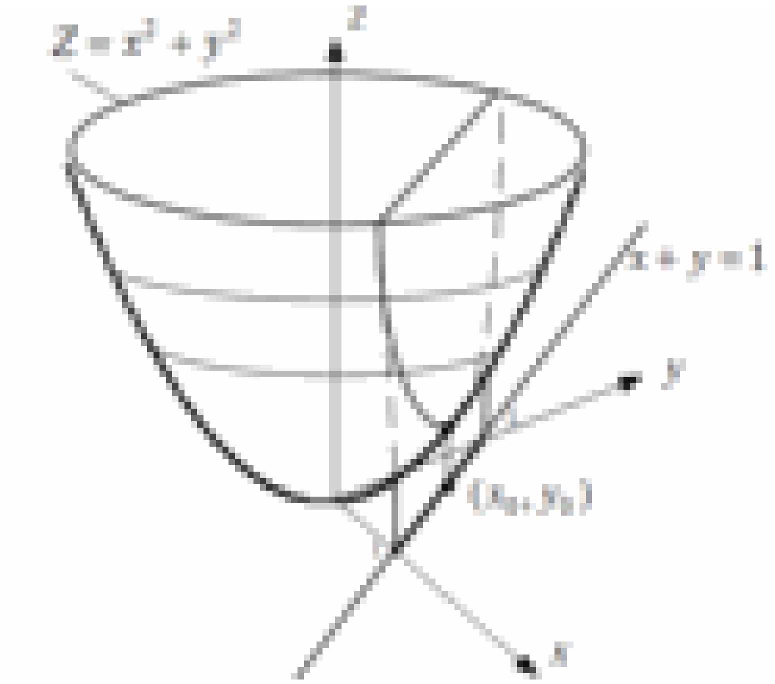
Выразим y через x , получим $y = 1 - x$ и подставим в целевую функцию.

$Z = x^2 + (1-x)^2$ или $Z = 2x^2 - 2x + 1$- это функция уже одной переменной. Найдем ее критические точки. Для этого найдем производную функции Z и прировняем ее нулю.

$Z'_x = 4x - 2, \quad 4x - 2 = 0, \quad x_0 = 1/2$ - критическая точка.

Исследуем характер этой критической точки – найдем вторую производную.

$Z''(x) = 4 > 0$. Следовательно, в точке $x_0 = {}^1\!/_2$ имеем минимум. При этом $y_0 = 1 - x = ½$.



Таким образом,

$(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ - точка условного минимума функции (3) при ограничении (4). Причем $Z_{min}(1/2,\ 1/2) = ½$.

Однако далеко не всегда удается разрешить ограничение (2) относительно одной из переменных и свести задачу на условный экстремум функции 2-х переменных к задаче на безусловный экстремум функции 1-й переменной.

б). Метод Лагранжа

Суть метода состоит в построении функции

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \tag{5}$$

3-х переменных x, y, λ, называемой функцией Лагранжа, в сведении задачи на условный экстремум (1), (2) функции 2-х переменных к задаче на безусловный экстремум функции 3-х переменных x, y, λ.

Функция Лагранжа есть сумма целевой функции и функции ограничения, умноженной на независимую переменную λ - множитель Лагранжа.

Точка (x_0, y_0, λ_0) будет критической точкой функции Лагранжа (5) при условии, что частные производные функции Лагранжа в этой точке равны нулю, т. е.

$$\begin{cases} L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

После того, как решения системы (6) найдены, их следует «укоротить», удалив координату λ. Затем каждую укороченную критическую точку нужно проанализировать – является ли она действительно точкой локального условного экстремума. При этом обычно используют наглядное геометрическое их представление или экономическое или техническое их содержание.

Пример 2. Решим задачу примера 1 методом Лагранжа.

$$f(x,y) = x^2 + y^2; \quad g(x,y) = x + y - 1$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x + y - 1)$$

Найдем критические точки функции Лагранжа.

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda = 0, \\ L'_y = 2y + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = x + y - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \lambda = 0, \\ 2y + \lambda = 0, \\ x + y = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 1, \\ 2x + \lambda = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Таким образом, имеем

(1/2, 1/2, -1) – критическая точка функции Лагранжа,

(1/2, 1/2) – укороченная критическая точка,

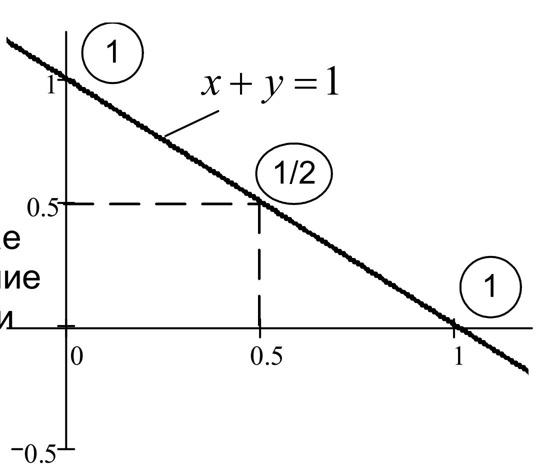
$f_{min}(1/2,\ 1/2) = 1/2$ – значение функции цели в точке условного минимума.

То, что мы получили именно минимум функции $f(x, y)$ можно проверить, исследуя функцию в окрестности точки *(1/2, 1/2)*.

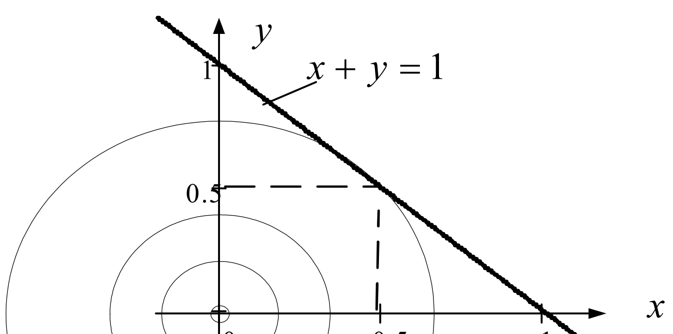
Действительно,

При $x = 1,\ y = 0$ $f(1, 0) = 1 > f_{min}$ = 1/2,

При $x = 0,\ y = 1$ $f(0,10) = 1 > f_{min}$ = 1/2,



Если нанести на координатную плоскость линии уровней функции цели (в данном случае это концентрические окружности) и ограничение g(x,y)=0, то в точке локального экстремума эти линии касаются.

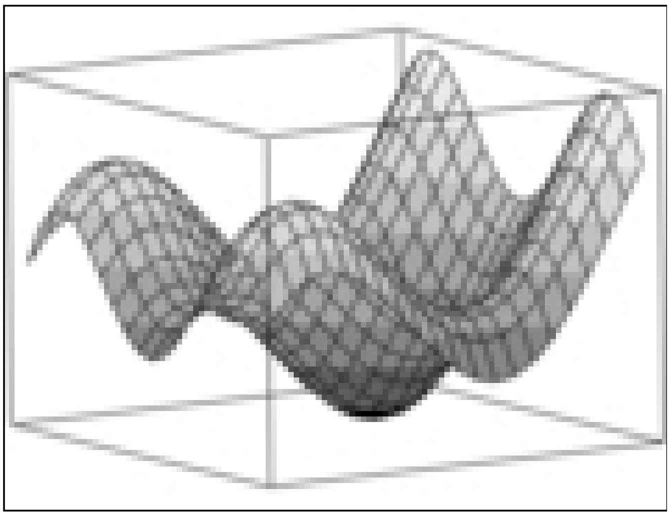


8.9. Решение задач на условный экстремум в среде Mathcad

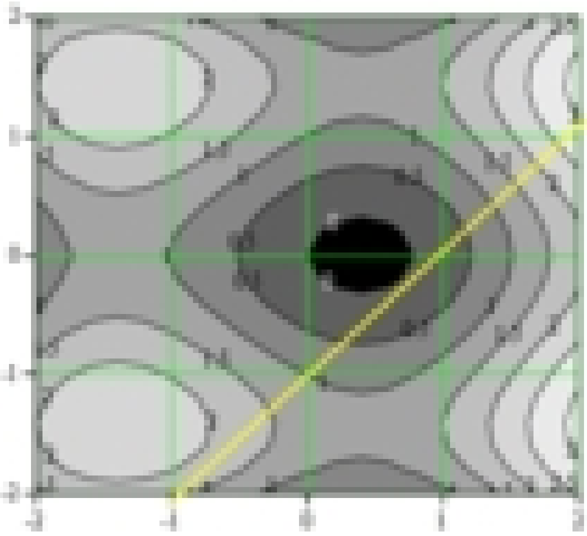
Задача 1. Найти условный экстремум функции

$f(x,y) := y\cdot\sin(1.4y) - x\cdot\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ - функция цели

$g(x,y) := x - y - 1$ - ограничение задачи



f



f

Построены график поверхности целевой функции и линии уровней этой функции. На график линий уровней нанесена прямая (желтого цвета) функции ограничения $x - y - 1 = 0$. Условный экстремум целевой функции следует искать на этой прямой. Отождествляя линии уровней с картой рельефа местности, можно сказать, что двигаясь вдоль желтой линии мы будем спускаться, а затем подниматься. Самое низкое место на желтой линии ограничения будет в точке с примерными координатами (0,7; -0,2).

Метод Лагранжа

$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$ - функция Лагранжа

$x := 0.7 \quad y := -0.2 \quad \lambda := 1$ - начальное приближение

Given

$$\frac{d}{dx}L(x,y,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{dy}L(x,y,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{d\lambda}L(x,y,\lambda) = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{min} \\ \lambda_0 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x,y,\lambda) \qquad \begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{min} \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.741 \\ -0.259 \\ -0.695 \end{pmatrix} \qquad ERR = 4.856 \times 10^{-11}$$

$$Z_{min} := f(x_{min}, y_{min}) \qquad Z_{min} = 0.059$$

Задача 2. Найти условный экстремум функции

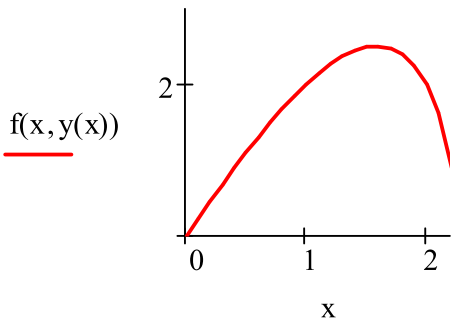
$f(x,y) := x \cdot y$ - функция цели

$g(x,y) := x^2 + y^2 - 5$ $\quad x > 0 \quad y > 0$ - ограничения задачи

Метод исключения переменной

$x := 0, 0.1 .. 4 \qquad y(x) := \sqrt{5 - x^2}$

$x1 := 1.5$ - начальное приближение



$$X_{max} := \mathrm{root}\left(\frac{d}{dx1} f(x1, y(x1)), x1\right)$$

$X_{max} = 1.581 \qquad y(X_{max}) = 1.581$

$f(X_{max}, y(X_{max})) = 2.5$ - условный экстремум

Использование функции Maximize

$x := 1.5 \qquad y := 1.5$ - начальное приближение

Given

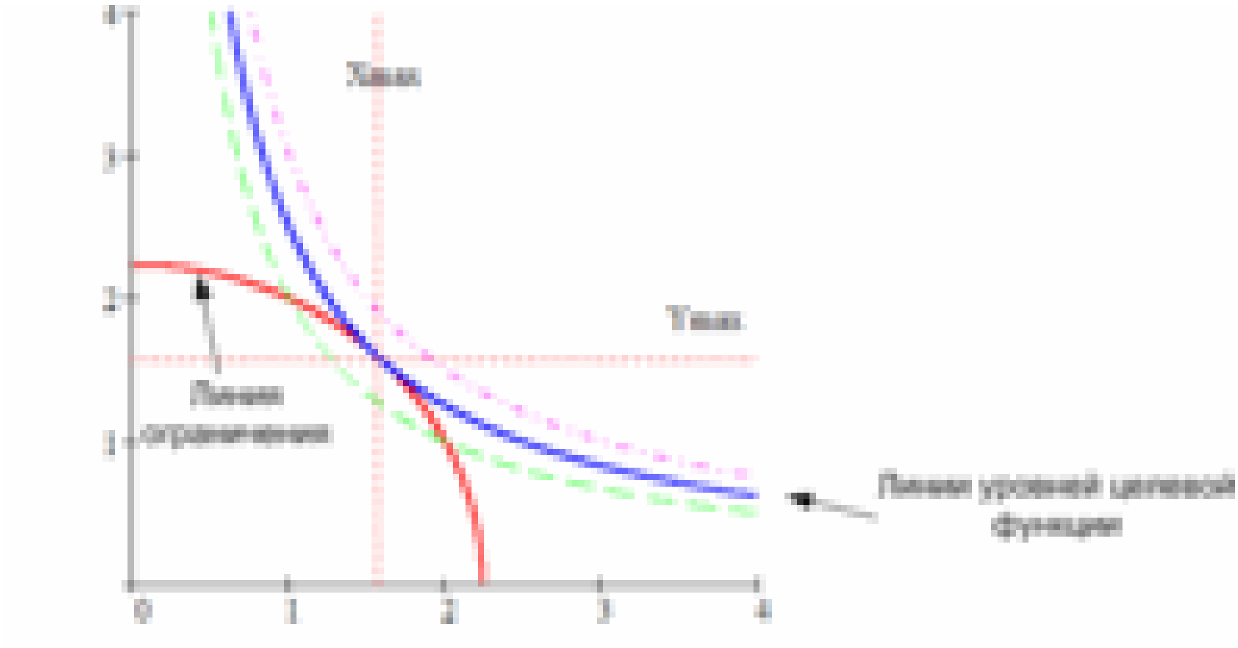
$x^2 + y^2 - 5 = 0$

$$\begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(f, x, y) \qquad \begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581 \\ 1.581 \end{pmatrix}$$

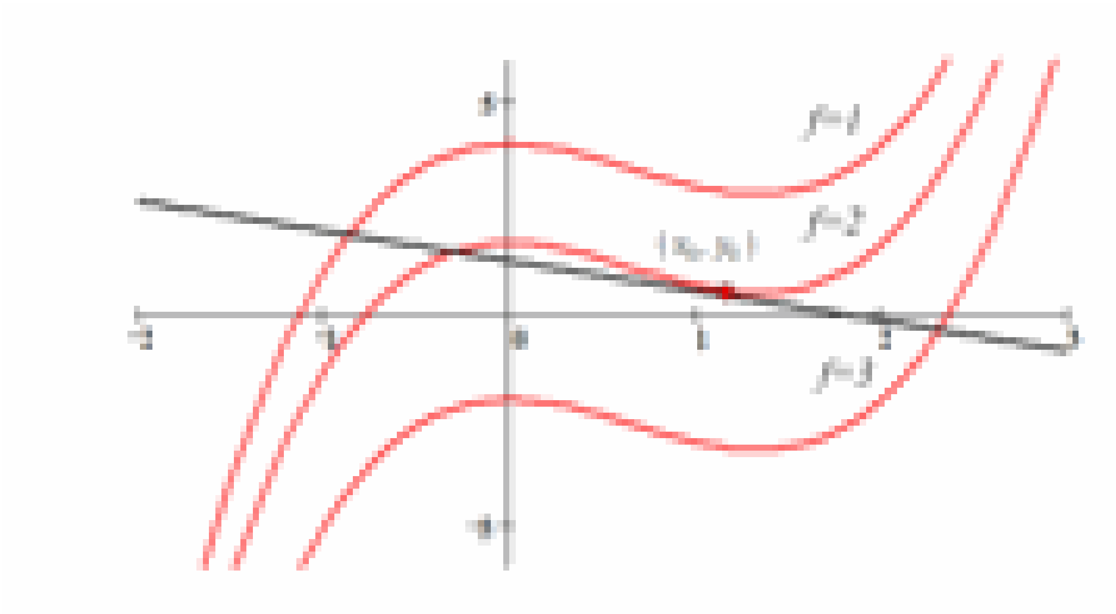
$Zmax := f(Xmax, Ymax) \quad ERR = 4.28 \times 10^{-6}$ - погрешность

$Zmax = 2.5$ - максимальное значение функции цели на линии ограничения

$x := 0, 0.001 .. 4$



Если линии уровней функции $f(x,y)$ и линия ограничения $g(x,y)$ расположены таким образом,



то в критической точке (x_0, y_0) нет экстремума

3. Достаточное условие экстремума функции Лагранжа.

Для исследования на экстремум в полученных критических точках вычисляют значения производных

$$\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{\partial g}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$$

и составляют определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x(x_0,y_0,\lambda_0) & g'_y(x_0,y_0,\lambda_0) \\ g'_x(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ g'_y(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}$$

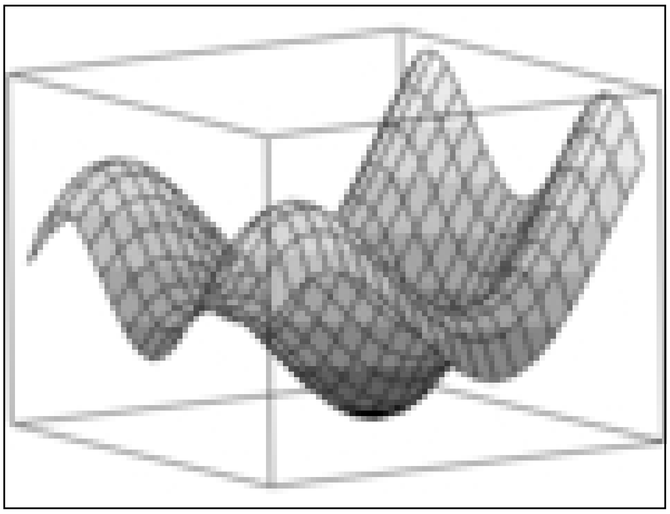
Если $\Delta < 0$, то функция цели Z имеет в точке (x_0, y_0, λ_0) условный максимум, если $\Delta > 0$ - то условный минимум

15. Розв'язання задач на умовний екстремум в середовищі Mathcad.

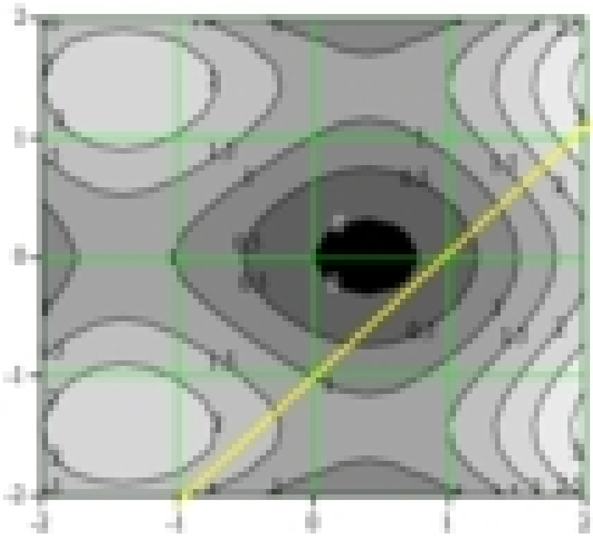
Задача 1. Найти условный экстремум функции

$$f(x, y) := y \cdot \sin(1.4y) - x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$ - функция цели

$$g(x, y) := x - y - 1$$ - ограничение задачи



f



f

Построены график поверхности целевой функции и линии уровней этой функции. На график линий уровней нанесена прямая (желтого цвета) функции ограничения $x - y - 1 = 0.$ Условный экстремум целевой функции следует искать на этой прямой. Отождествляя линии уровней с картой рельефа местности, можно сказать, что двигаясь вдоль желтой линии мы будем спускаться, а затем подниматься. Самое низкое место на желтой линии ограничения будет в точке с примерными координатами (0,7; -0,2).

Метод Лагранжа

$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$ - функция Лагранжа

$x := 0.7 \quad y := -0.2 \quad \lambda := 1$ - начальное приближение

Given

$$\frac{d}{dx}L(x,y,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{dy}L(x,y,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{d\lambda}L(x,y,\lambda) = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{min} \\ \lambda_0 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x,y,\lambda) \qquad \begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{min} \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.741 \\ -0.259 \\ -0.695 \end{pmatrix} \qquad ERR = 4.856 \times 10^{-13}$$

$$Z_{min} := f(x_{min}, y_{min}) \qquad Z_{min} = 0.059$$

Задача 2 . Найти условный экстремум функции

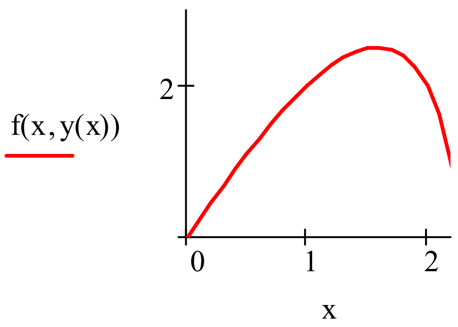
$f(x,y) := x \cdot y$ - функция цели

$g(x,y) := x^2 + y^2 - 5 \qquad x > 0 \qquad y > 0$ - ограничения задачи

Метод исключения переменной

$x := 0, 0.1 .. 4 \qquad y(x) := \sqrt{5 - x^2}$

$x1 := 1.5$ - начальное приближение



$$X_{max} := root\left(\frac{d}{dx1}f(x1, y(x1)), x1\right)$$

$X_{max} = 1.581 \qquad y(X_{max}) = 1.581$

$f(X_{max}, y(X_{max})) = 2.5$ - условный экстремум

Использование функции Maximize

$x := 1.5 \qquad y := 1.5$ - начальное приближение

Given

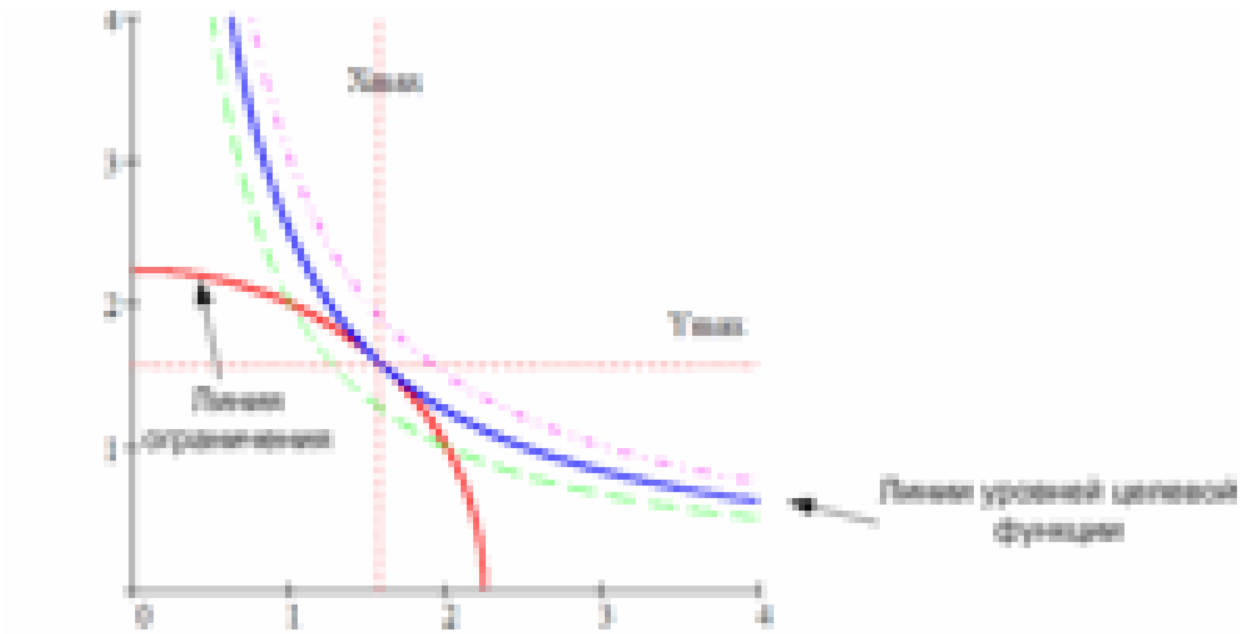
$x^2 + y^2 - 5 = 0$

$$\begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} := Maximize(f, x, y) \qquad \begin{pmatrix} Xmax \\ Ymax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581 \\ 1.581 \end{pmatrix}$$

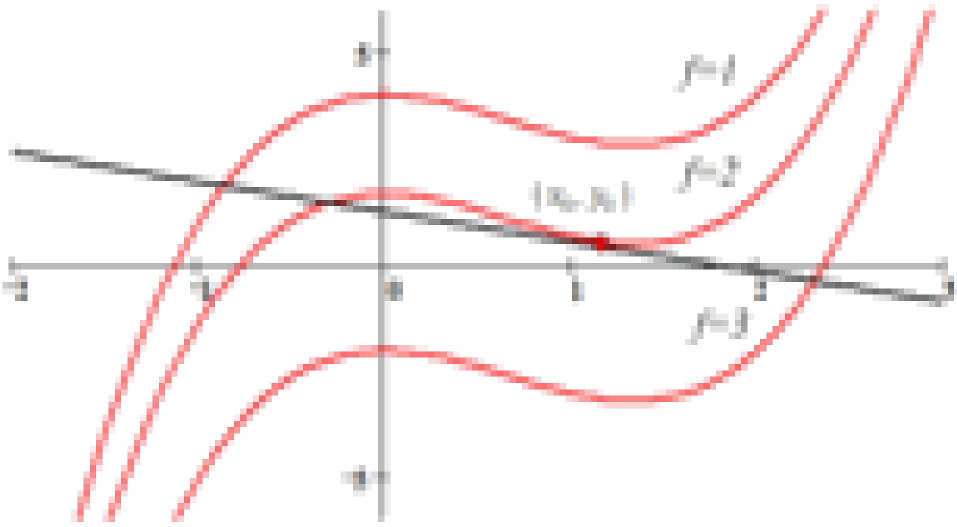
$Zmax := f(Xmax, Ymax) \quad ERR = 4.28 \times 10^{-6}$ - погрешность

$Zmax = 2.5$ - максимальное значение функции цели на линии ограничения

$x := 0, 0.001 .. 4$



Если линии уровней функции *f(x,y)* и линия ограничения *g(x,y)* расположены таким образом,



то в критической точке (x_0, y_0) нет экстремума

3. Достаточное условие экстремума функции Лагранжа.

Для исследования на экстремум в полученных критических точках вычисляют значения производных

$$\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{\partial g}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$$

и составляют определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_x(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_y(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

Если $\Delta < 0$, то функция цели Z имеет в точке (x_0, y_0, λ_0) условный максимум, если $\Delta > 0$ - то условный минимум

16. Оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді нерівностей і рівностей.

Задачі математичного програмування.

Математической моделью задачи называется совокупность математических соотношений, описывающих рассматриваемый экономический или технический процесс.

Для составления математической модели необходимо: 1) выбрать переменные задачи; 2) составить систему ограничений; 3) задать целевую функцию.

Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые полностью характеризуют процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Системой ограничений задачи называется совокупность уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи. Система ограничений может является выражением ограниченности ресурсов, необходимого объема выполненных работ и т. д. В общем случае система ограничений имеет вид

$$g_j(x_1, x_2, \ldots x_n) \le (=, \ge) B_j \quad j = 1, 2 \ldots m \tag{1}$$

$$x_i \ge 0$$

Целевой функцией называется функция $Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных задачи, которая выражает качество выполняемой задачи и экстремум которой требуется найти.

Общая задача математического программирования формулируется так: Найти такие значения переменных задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, , которые удовлетворяют системе ограничений (1) и обеспечивают экстремум целевой функции

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\ (\min) \tag{2}$$

.

Допустимым решением (планом) задачи называется n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$., удовлетворяющий системе ограничений (1). Множество допустимых решений задачи образуют *область допустимых решений.*

Оптимальным решением (оптимальным планом) задачи называется такое допустимое решение задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

Если система ограничений (1) и целевая функция (2) линейны, то задача математического программирования называется задачей линейного программирования.

Общая задача линейного программирования состоит в определении оптимального (максимального или минимального) значения линейной функции цели при линейных ограничениях.

$$Z(X) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \to \max\ (\min) \tag{3}$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le, =, \ge B_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le, =, \ge B_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m1n}x_n \le, = \ge B_m.
\end{cases}
\tag{4}
$$

Рассмотрим примеры задачи линейного программирования.

Задача 1. О распределении ресурсов

При изготовлении изделий И1 и И2 используется токарный и фрезерный станки, а также сталь и цветной металл. По технологическим нормам на производство единицы изделия И1 требуется 300 и 200 единиц (станко-часов) токарного и фрезерного оборудования и 10 кг и 20 кг стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия И2 требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12400 и 6800 станко-часов оборудования, 640 и 840 кг металлов. Прибыль от реализации одного изделия И1 - 6 ден. един, И2 -16 ден. един.

Требуется:

1. свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;
2. составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль от реализации продукции;
3. определить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Решение

1. Обозначим через x_1 число изделий И1, через x_2 - число изделий И2, которое необходимо изготовить. Т.е. x_1 и x_2- есть план выпуска продукции. Исходные данные представим в виде

Ресурсы	Затраты на единицу продукции		Объем ресурсов
Станки, ст.-ч Токарный Фрезерный	 300 200	 400 100	 12400 6800
Сталь,кг	10	70	640
Цв. металл	20	50	840
Прибыль на одно изделие, ден. ед.	6	16	
План выпуска	x_1	x_2	

2. Составим математическую модель задачи.

Цель производства – получить максимальную прибыль. Функция цели имеет вид

$$Z\max = 6x_1 + 16x_2$$

Ограничения задачи

на фонд рабочего времени токарного станка

$$300x_1 + 400x_2 \le 12400$$

на фонд рабочего времени фрезерного станка

$$200x_1 + 100x_2 \le 6800$$

на запасы стали

$$10x_1 + 70x_2 \le 640$$

на запасы цветных металлов

$$20x_1 + 50x_2 \le 840$$

Общие ограничения

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

2 Решение задачи в системе MathCAD

$$Z(x1, x2) := 6 \cdot x1 + 16 \cdot x2$$

$x1 := 10 \qquad x2 := 10$ Начальное приближение

Given

$$300 \cdot x1 + 400 \cdot x2 \le 12400$$

$$200 \cdot x1 + 100 \cdot x2 \le 6800$$

$$10 \cdot x1 + 70 \cdot x2 \le 640$$

$$20x1 + 50x2 \le 840$$

$$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$$

$$\begin{pmatrix} X1max \\ X2max \end{pmatrix} := Maximize(Z, x1, x2) \qquad \begin{pmatrix} X1max \\ X2max \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.778 \\ 4.889 \end{pmatrix}$$

$$Z(X1max, X2max) = 256.889 \qquad ERR = 6.076 \times 10^{-6}$$

Получен план выпуска X1max = 29.778 и X2max = 4.889, удовлетворяющий всем ограничениям. При этом плане выпуска продукции, полученная прибыль будет максимальной.

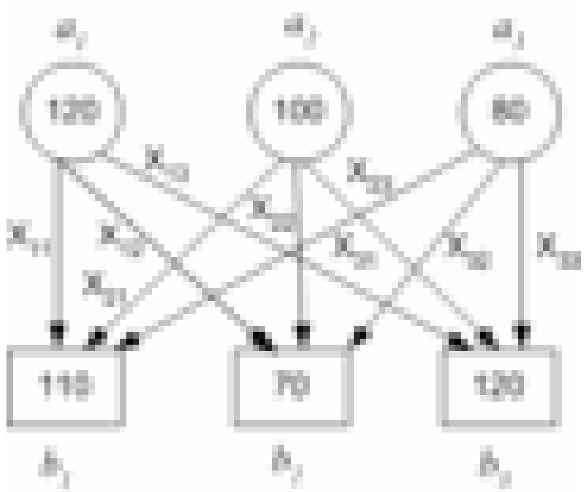
Задача 2. Транспортная задача. На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количестве 120, 100 и 80 единиц. Этот груз необходимо перевезти трем магазинам. Каждый магазин должен получить соответственно 110, 70 и 120 единиц груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого склада в каждый магазин заданы матрицей.

$$\{C_{i,j}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Найти оптимальный план перевозок, т.е. количество груза который необходимо перевезти от каждого склада в каждый магазин, при котором затраты на транспортировку будут минимальны.

Решение

1. Составим схему возможных перевозок



2. Обозначим через $X_{i,j}$ - количество груза вывезенного с i –го склада в j –й магазин. Совокупность всех 9-и $X_{i,j}$ составляют план перевозок.
3. Составим математическую модель задачи, учитывая следующее:

План перевозок является оптимальным если:

a. весь груз со складов вывезен

$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120;$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 100;$ $\qquad\qquad \sum_{j=1}^{3} X_{i,j} = a_i$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 80.$

b. Все магазины получили весь заказанный груз

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 110;$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 70;$ $\qquad\qquad \sum_{i=1}^{3} X_{i,j} = b_j$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 120.$

c. Встречные транспортировки недопустимы.

$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3; \quad j=1,2,3).$

d. Суммарные транспортные издержки должны быть минимальными

$$\begin{aligned} &C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + \\ &C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + \\ &C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33} \end{aligned} \qquad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} \cdot X_{ij} \to \min$$

Это функция цели транспортной задачи. Данная транспортная задача называется замкнутой, поскольку запасы в точности равны потребностям

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$$

Решение задачи в среде Mathcad

Транспортная задача $\quad ORIGIN := 1$

$$a := \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 110 \\ 70 \\ 120 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..3 \qquad j := 1..3 \qquad X_{i,j} := 1$$

$$Z(X) := \sum_{i} \sum_{j} C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

Given

$$\begin{pmatrix} \sum_{j} X_{1,j} \\ \sum_{j} X_{2,j} \\ \sum_{j} X_{3,j} \end{pmatrix} = a \qquad \begin{pmatrix} \sum_{i} X_{i,1} \\ \sum_{i} X_{i,2} \\ \sum_{i} X_{i,3} \end{pmatrix} = b$$

$$X \ge 0$$

$$V := Minimize(Z, X) \qquad V = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 110 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 10 \end{pmatrix} \qquad Z(V) = 810$$

$$ERR = 8.21 \times 10^{-12}$$

17. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування з двома змінними в середовищі Mathcad.

Данный метод используется для решения задач с двумя переменными следующего вида:

$$Z(X) = C_1x_1 + C_2x_2 \to \max\,(\min) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ \le, =, \ge \ B_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ \le, =, \ge \ B_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ \le, = \ge \ B_m. \end{cases} \qquad (2)$$

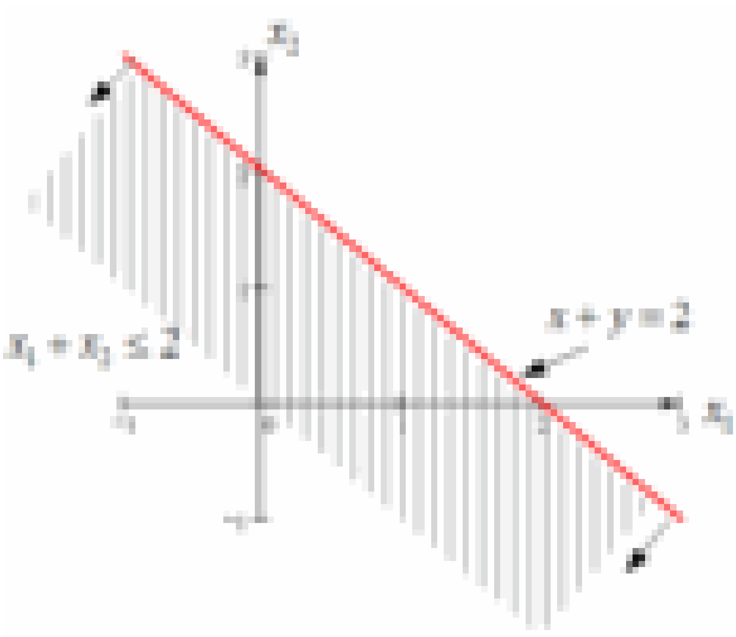
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (3)$$

Данный метод основан на возможности графического изображения области допустимых решений и нахождении среди них оптимального решения.

Областью решения линейного неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < B_i$ является одна из двух полуплоскостей, на которую прямая $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = B_i$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость.

Для того, чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью решения, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Если координаты точки удовлетворяют неравенству - значит, точка лежит в области решений. Если нет - то областью решения есть та, которая не содержит точку.

Например, неравенству $x_1 + x_2 \le 2$ удовлетворяют координаты всех точек, лежащих в левой (заштрихованной) полуплоскости. Действительно, координаты точки (0, 0) или (0, 1) удовлетворяют неравенству.



Область допустимых решений задачи строится как пересечение (общая часть) областей решения каждого из заданных ограничений (2) и (3).

Для нахождения среди допустимых решений оптимального решения используют линии уровней целевой функции и вектор нормали к ним.

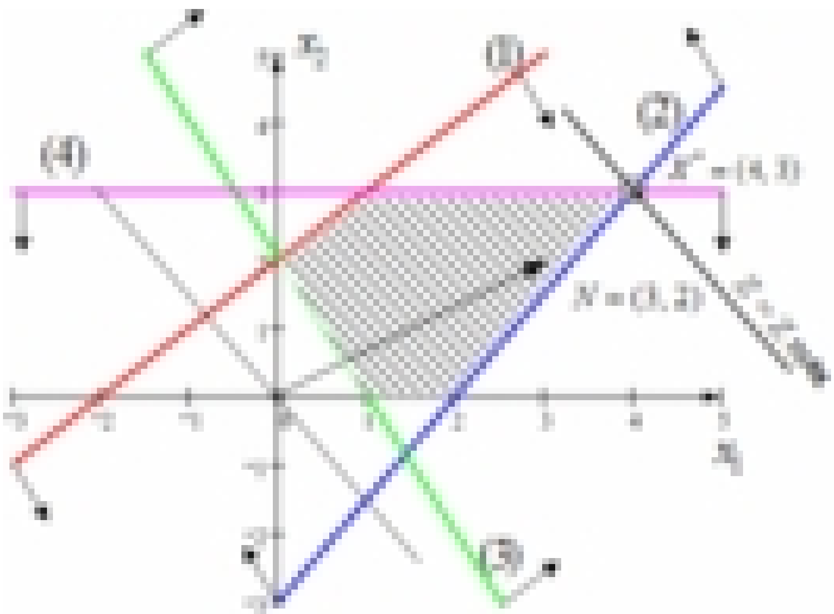
Линией уровня называется прямая, на которой целевая функция задачи принимает постоянное значение. Уравнение линии уровня в общем случае имеет вид $C_1x_1 + C_{\backslash 2}x_2 = l$, где $l = conct$. Все линии уровней параллельны между собой, и имеют единый нормальный вектор $\vec{N} = (C_1, C_2)$.

Задача 1. Дана целевая функция $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ и система ограничений.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, & (2) \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, & (3) \\ x_2 \le 3, & (4) \end{cases} \qquad x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0. \qquad (5)$$

Найти такие значения x_1 и x_2, которые удовлетворяли бы всем ограничениям задачи и придавали функции цели максимальное значение.

Решение. 1). Строим область допустимых решений задачи. В плоскости *Ox_1x_2* строим прямую $-x_1 + x_2 = 2$ соответствующую ограничению (1). Чтобы выбрать полуплоскость, точки которой удовлетворяют неравенству (1), подставим координаты точки *O(0,0),* не лежащей на прямой. Получим верное неравенство *0 < 2.* Следовательно точка *O(0,0)* лежит в области решений и стрелки на концах прямой направлены в полуплоскость, содержащую точку *O.*



Аналогично строятся прямые $3x_1 - 2x_2 = 6$ (2), $2x_1 + x_2 = 2$ (3), $x_2 = 3$ (4) и выбираются области решений ограничений (2) – (5). Область возможных решений задачи (заштрихованный многоугольник) получают как результат пересечения всех полуплоскостей. Любая точка заштрихованной области удовлетворяет всем ограничениям задачи.

2). Чтобы найти точку в области допустимых решений, в которой функция цели достигает максимального значения, строим нормаль к линиям уровней $\vec{N} = (3{,}2)$ и одну из этих линий, например $3x_1 + 2x_2 = 0$. Поскольку ищется максимум функции цели, то линия уровня перемещается в направлении нормали. Крайнее положение линии уровня, содержащей одну точку области возможных решений *X**, соответствует максимальному значению целевой функции. Точка *X** лежит на пересечении двух прямых (2) и (4). Для определения координат точки *X** решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6, \\ \quad x_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, $X^* = (3{,}4)$ - оптимальный план решения задачи, при котором функция цели $Z(X^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$ принимает максимальное значение.

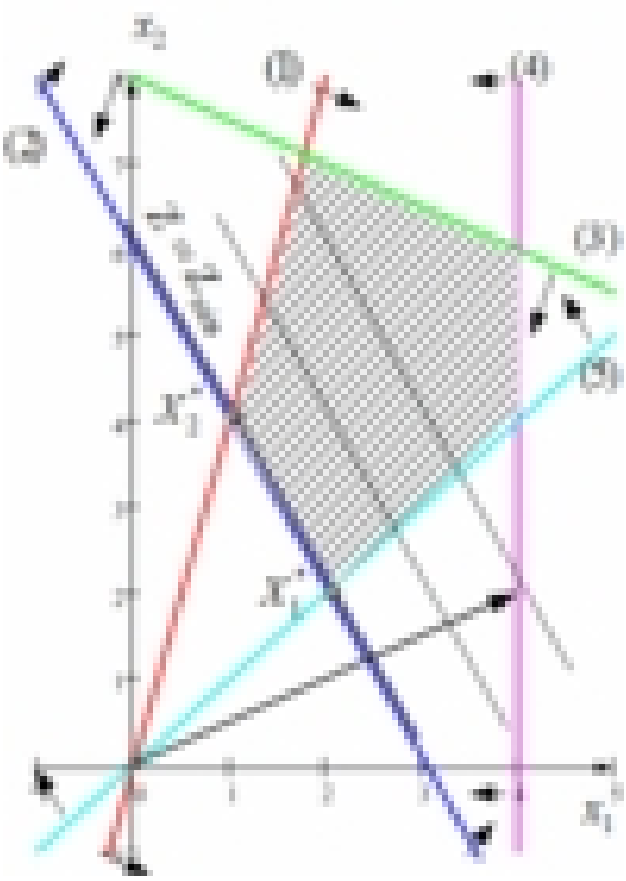
Ответ: *Z(X) = 18* при X^* *= (4, 3).*

Задача 2. Дана целевая функция $Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \min$ и система ограничений.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \le 16, & (3) \\ x_1 \le 4, & (4) \\ x_1 - x_2 \le 0. & (5) \end{cases}$$

Найти такие значения x_1 и x_2, которые удовлетворяли бы всем ограничениям задачи и придавали функции цели минимальное значение

Решение. Строим область допустимых решений задачи и нормаль к линиям уровней *N = (4, 2).* Перпендикулярно вектору нормали проводим линию уровня и перемещаем ее в направлении противоположном направлению нормали, поскольку ищем минимальное значение функции цели.



Функция цели достигает минимального значения на границе области допустимых решений, на прямой, проходящей через точки X_1^*, X_2^*. Задача имеет бесконечное множество оптимальных решений, являющихся точками отрезка $[X_1^*, X_2^*]$. Координаты точек X_1^* и X_2^* находим, решая системы уравнений

$$+\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (2) \\ x_1 - x_2 = 0. & (5) \end{cases} \qquad +\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 6. & (2) \end{cases}$$

$$3x_1 = 6 \qquad\qquad 6x_1 = 6$$

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2; \qquad\qquad x_1^* = 1, \quad x_2^* = 4;$$

$$X_1^* = (2, 2) \qquad\qquad X_2^* = (1, 4)$$

Вычислим $Z(X_1^*) = Z(X_2^*) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12$

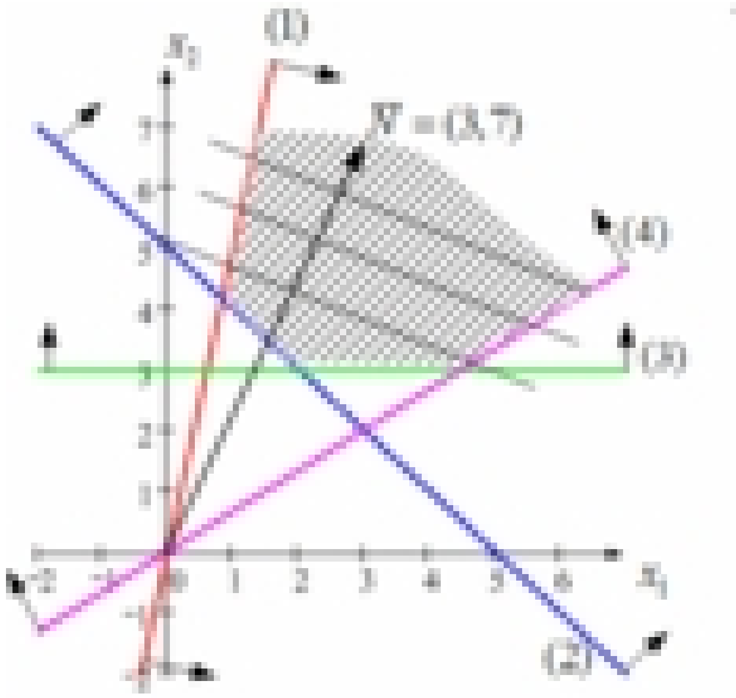
Ответ: *Z(X) = 12 при* $X^* = (1 - t) \cdot X_1^* + t \cdot X_2^*$, $0 \le t \le 1$.

Задача 3. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 0, & (1) \\ x_1 + x_2 \geq 5, & (2) \\ x_2 \geq 3 & (3) \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0 & (4) \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений, нормаль к линиям уровней *N = (3, 7)* и одну из линий уровней.



В данной задаче необходимо найти максимум целевой функции, поэтому линию уровней перемещаем в направлении нормали. В виду того, что в этом направлении область допустимых решений не ограничена, линия уровней уходит в бесконечность. Задача не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции.

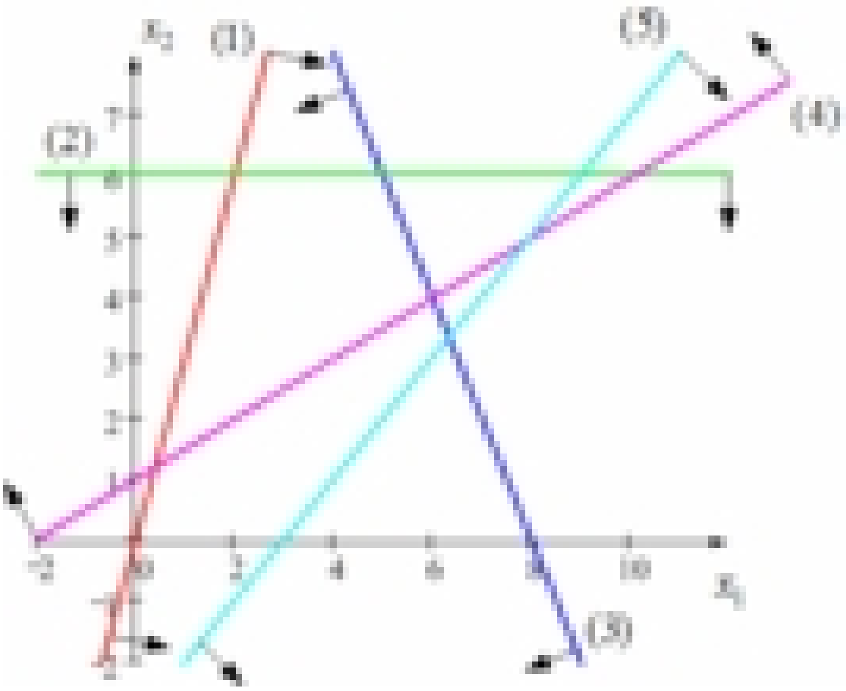
Ответ: $Z(X) \to \infty$.

Задача 4. Решить задачу линейного программирования

$$Z(X) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0, & (1) \\ x_2 \leq 6, & (2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, & (3) \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, & (4) \\ x_1 - x_2 \geq 3. & (5) \end{cases}$$

Решение. Строим прямые, соответствующие неравенствам системы ограничений и находим полуплоскости, являющиеся областью решений этих неравенств.



Область допустимых решений задачи является пустым множеством. На плоскости Ox_1x_2 нет ни одной точки, координаты которой (x_1, x_2) удовлетворяли бы сразу всем пяти неравенствам. Задача не имеет решений ввиду несовместности системы ограничений.

***Ответ**:* система ограничений несовместна.