6. Поиск эмпирических формул. Аппроксимация

6.1. Понятие регрессии и корреляции

При изучении различных явлений приходится сталкиваться с функциональными связями между двумя и более переменными. Когда эти связи сложны и неизвестны, вводят гипотезу об их характере, т.е. наблюдаемую связь между переменными аппроксимируют (приближенно представляют) некоторой математической зависимостью. Это может быть линейная функция, многочлен или любая другая зависимость.

Для поиска математических зависимостей между двумя и более переменными, полученными в эксперименте, используют методы регрессионного и корреляционного анализа.

Регрессионный анализ, используя имеющиеся экспериментальные данные, строит уравнение выбранного вида, определяет численные значения всех его параметров.

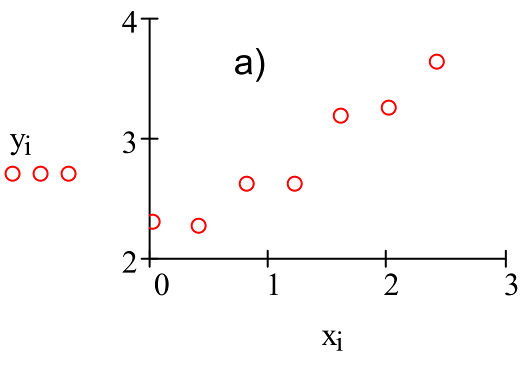
Корреляционный анализ оценивает, на сколько хорошо экспериментальные точки согласуются с выбранным уравнением, т. е. ложатся на подобранную кривую.

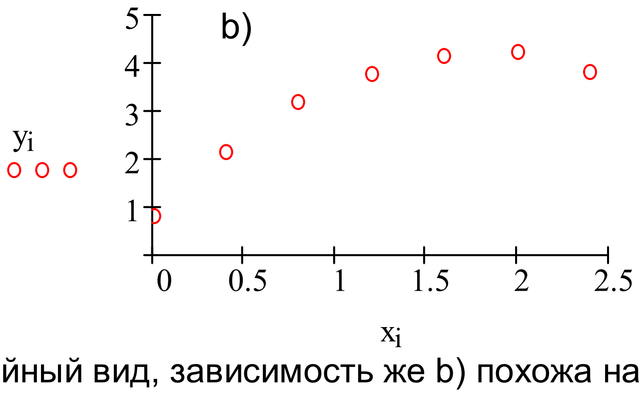
6.2. Основные этапы поиска эмпирических формул. Метод наименьших квадратов

<u>На 1-ом этапе</u> происходит сбор экспериментальных данных, отражающих соответствующие значения исследуемых переменных. Эти данные сводятся в таблицу

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

<u>На 2- ом этапе</u> экспериментальные точки наносят на координатную плоскость. Часто расположение точек подсказывает вид эмпирической функции. Например





Зависимость а) имеет явно линейный вид, зависимость же b) похожа на квадратичную.

<u>На 3-ем этапе</u> осуществляется подбор аппроксимирующей функции, связывающей экспериментальные данные. Нужно подобрать такую функцию, чтобы результаты эксперимента (наблюдаемые значения x_i и y_i, $i=1,2\ldots n$) можно было представить в виде

$$y_i = f(x_i, a_0, a_1, a_2, \ldots a_m) + \varepsilon_i,$$

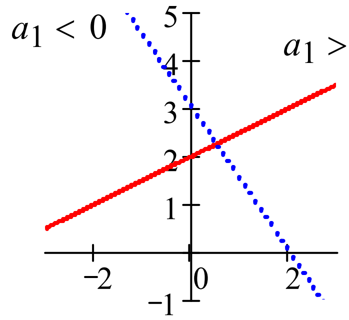
где $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ – неизвестные параметры;

ε_i – случайная погрешность i - го эксперимента.

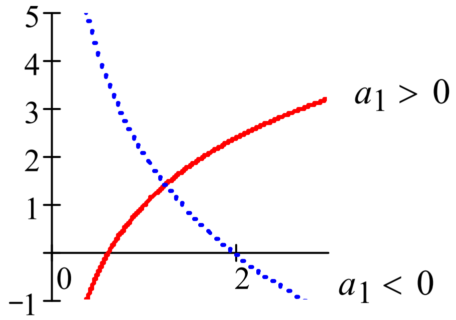
<u>Задача аппроксимации</u> состоит в подборе функции, наилучшим образом соответствующей экспериментальным данным и сглаживающей случайные погрешности эксперимента.

Ниже приведены часто используемые аппроксимирующие функции и их графики.

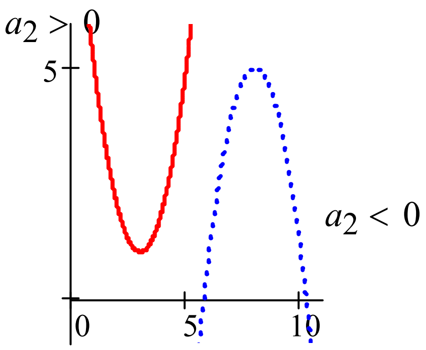
$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x$$



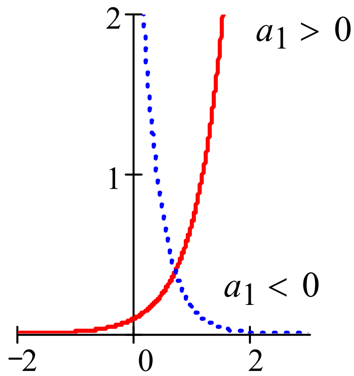
$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot ln(x)$$



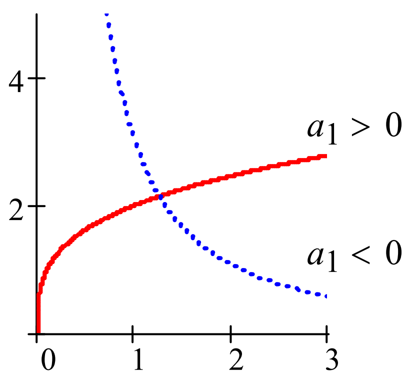
$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$



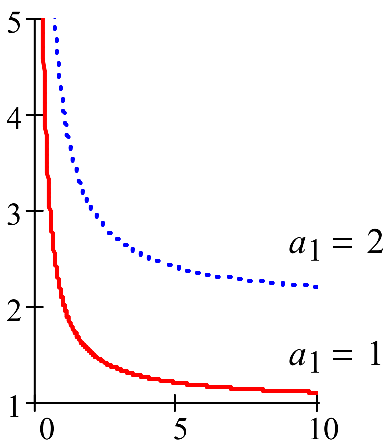
$$y(x) = a_0 \cdot e^{a_1 \cdot x}$$



$$y(x) = a_0 \cdot x^{a_1}$$



$$y(x) = a_0 + \frac{a_1}{x}$$



Каждая кривая характеризуется своими параметрами a_0, $a_1, a_2, \dots a_m$.

Числовые значения параметров определяют степень сжатия кривой, сдвиг ее вправо или влево, вверх или вниз; поворот относительно осей координат.

4-й этап. Когда общий вид аппроксимирующей функции выбран, необходимо найти числовые значения всех ее параметров. При этом в качестве критерия наилучшего приближения используют *метод наименьших квадратов (МНК).*

Метод наименьших квадратов находит такие значения параметров $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$ выбранной эмпирической зависимости

$$Ye = f(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots a_m), \qquad (1)$$

при которых отклонения экспериментальных точек от выбранной кривой (1) были бы минимальными. Точнее, параметры $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$ нужно подобрать такими, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от рассчитанных по уравнению регрессии (1), была минимальной. Сумма квадратов отклонений имеет вид.

$$S(a_0, \dots a_m) = \sum_{i=i}^{n} (y_i - Ye_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots a_m))^2 \to \min \qquad (2)$$

Величина $S(a_0, \dots a_m)$ есть функция $m+1$ переменной. Необходимым условием экстремума такой функции является равенство нулю всех ее частных производных, т. е.

$$\frac{\partial S(a_0, \dots a_m)}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S(a_0, \dots a_m)}{\partial a_1} = 0, \cdots, \frac{\partial S(a_0, \dots a_m)}{\partial a_m} = 0 \qquad (3)$$

Частные производные образуют систему $m+1$ –го алгебраического уравнения относительно $m+1$ - го неизвестного параметра $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$ эмпирической функции (1).

6.3. Парная линейная регрессия

Рассмотрим случай, когда расположение экспериментальных данных на координатной плоскости Oxy указывают на линейный характер связи переменной y от одной переменной x, т. е. эмпирическая функция (1) имеет вид

$$Ye = a_0 + a_1 \cdot x \qquad (4)$$

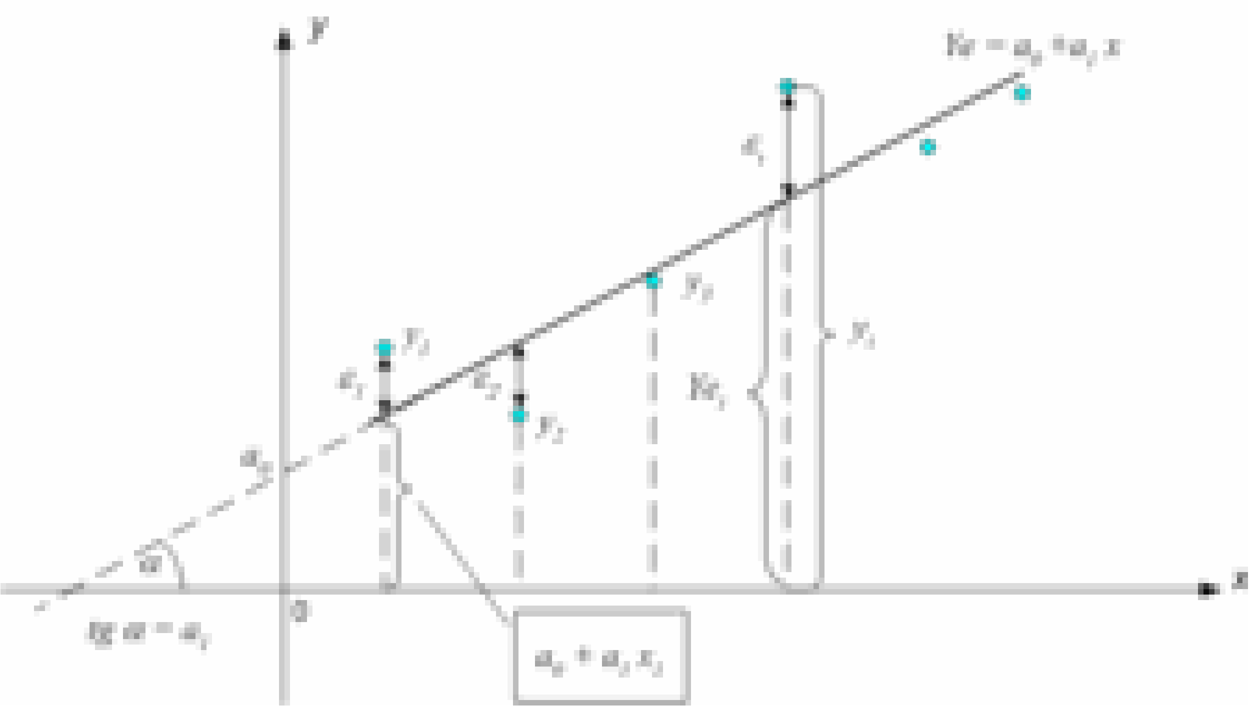
Необходимее, используя данные эксперимента, найти численные значения параметров a_0 и a_1. Воспользуемся методом наименьших квадратов, который в данном случае будет выглядеть так.

Необходимо найти такие значения параметров a_0 и a_1 уравнения (4), при которых сумма квадратов отклонений наблюдаемых в эксперименте значений y_i от рассчитанных Ye_i по уравнению регрессии (4) была минимальной, т. е.

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=i}^{n} (y_i - Ye_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i)^2 \to \min \qquad (5)$$

то есть

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 \to \min$$



Параметры a_0 и a_1 найдем из условия минимума функции (5), прировняв нулю ее частные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a_0, a_1)}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S(a_0, a_1)}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем нормальную форму 2-х линейных уравнений относительно двух неизвестных параметров регрессии a_0 и a_1.

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i \end{cases} \qquad (6)$$

Система нормальных уравнений (6) имеет единственное решение. Найдем его, используя метод обратной матрицы. Для этого запишем систему (6) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = B$$

где

A – матрица коэффициентов при неизвестных параметрах a_0 и a_1;

$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных параметров;

B – вектор-столбец свободных членов.

Умножим обе части матричного уравнения на обратную матрице A^{-1}.

$$A^{-1}A\lambda = A^{-1}B$$

Так как $AA^{-1} = E$ – единичная матрица, получим вектор решения

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

Найденные параметры регрессии a_0 и a_1 подставляют в уравнение (4) и таким образом получают эмпирическое уравнение парной линейной регрессии.

6.4. Линейная корреляция

Для оценки соответствия подобранной прямой и экспериментальных данных вводят понятие коэффициента линейной корреляции, который вычисляется по формуле

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} \qquad (7)$$

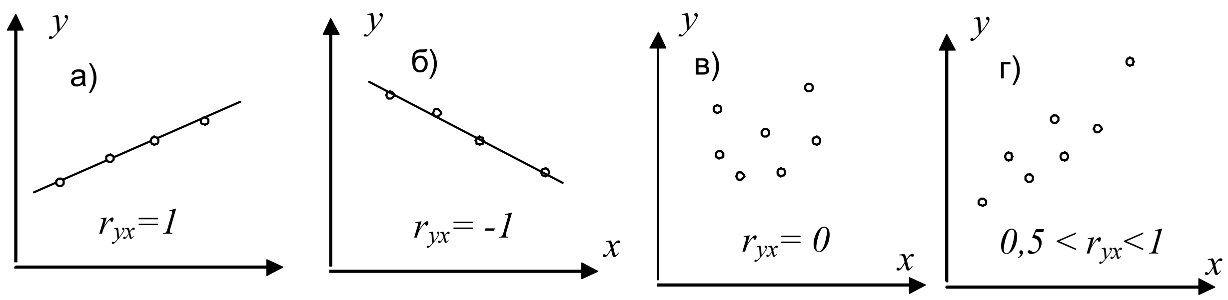
где

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$ - средние величины переменны *x* и *y*

Коэффициент корреляции характеризует тесноту линейной зависимости и принимает значения в интервале

$$-1 \le r_{yx} \le 1 .$$

Чем ближе r_{yx} к *1* или *-1,* тем тесней линейная связь между переменными *x* и *y*.



В случае а) и б) имеем соответственно максимальную положительную и максимальную отрицательную корреляцию, когда все наблюдаемые точки лежат на прямой регрессии. В случае в) имеем нулевую корреляцию, свидетельствующую об отсутствии линейной связи между переменными.

Пример. По данным наблюдений найти эмпирическую зависимость амортизационного пробега шин от скорости. Рассчитать коэффициент линейной корреляции.

x	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*	*110*
y	*100*	*84*	*72*	*60*	*50*	*30*

Здесь *x* – скорость движения автомобиля, км/ч.;
y – амортизационный пробег, %.

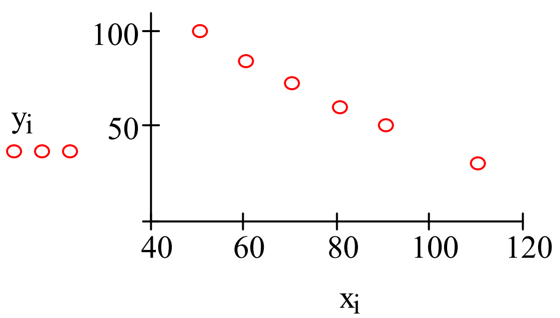
Пример решения задачи в системе Mathcad.

Поиск линейной зависимости $Ye(x) = a_0 + a_1 \cdot x$
амортизационного пробега шин от скорости автомобиля

1. Исходные эмирические данные:

$n := 6 \quad i := 1..n$

$x_i := \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \\ 90 \\ 110 \end{pmatrix} \quad y_i := \begin{pmatrix} 100 \\ 84 \\ 72 \\ 60 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$

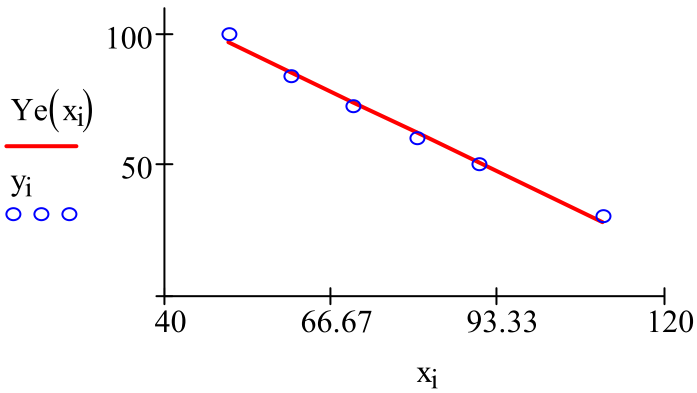


2. Поиск параметров линейной зависимости

$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i (x_i)^2 \end{bmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i \cdot y_i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 154.057 \\ -1.149 \end{pmatrix}$$

$Ye(x) := a_0 + a_1 \cdot x$ - Уравнение регрессии



Относительная погрешность

$$\frac{Ye(x_i) - y_i}{y_i} \cdot 100 =$$

-3.371
1.361
2.302
3.619
1.371
-7.619

3 . Коэффициент линейной корреляции

$$R_{yx} := \frac{n \cdot \left(\sum_i x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right) \cdot \sum_i y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_i (x_i)^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum_i (y_i)^2 - \left(\sum_i y_i\right)^2\right]}} \qquad R_{yx} = -0.996$$

6.5. Поиск параметров эмпирической зависимости в виде полинома

При выборе кривой парной регрессии часто используют полином (многочлен), который в общем виде выглядит так

$$Ye = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = \sum_{j=1}^{m} a_j x^j$$ - полином степени *m;*

Поиск параметров a_j $j=0,1,2...m$ осуществляется с помощью МНК. Ищутся такие значения параметров a_i , при которых

$$S(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot x^j \right)^2 \to \min$$

принимает минимальное значение.

Условие экстремума функции $S(a_0, a_1, ... a_m)$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \dots , \qquad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0$$

приводит к нормальной системе $m+1$-го линейного уравнения относительно $m+1$ неизвестных параметров регрессии a_j $j=0,1,2...m$.

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \cdots a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + \cdots a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+2} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \cdots a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^m \end{cases} \tag{8}$$

В частном случае, когда аппроксимирующей функцией является полином 2-ой степени

$$Ye(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

Поиск его параметров a, b, c осуществляется с помощью МНК, который приводит к нормальной системе уравнений вида:

$$\begin{cases} a \cdot n + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \end{cases} \tag{9}$$

Это система 3-х уравнений относительно 3-х неизвестных параметров a, b, c. В системе MathCAD ее решение мы будем находить методом обратной матрицы.

6.5. Нелинейная парная регрессия

Многие технические процессы наилучшим образом описываются нелинейными соотношениями. Нелинейной являются связь степени сжатия рабочего объема и давления в ДВС, вольтамперные характеристики электросварочных приборов и т.д.

Нелинейную регрессию по методам оценок параметров делят на два вида:

1. Нелинейные по факторам *X* и *Y*, но линейные относительно параметров регрессии. Такую регрессию называют квазилинейной. Вот ее примеры:

$$Ye = a + \frac{b}{x}$$ - обратная зависимость;

$$Ye = a + b \cdot \ln(x)$$ - логарифмическая зависимость.

$$Ye = a + b \cdot e^x$$ - экспоненциальная зависимость

$$Ye = a\sqrt{x} + b$$

2. Нелинейные и по факторам *X* и *Y*, и по параметрам регрессии. Например:

$$Ye = a \cdot x^b$$ - степенная функция;

$$Ye = a \cdot b^x$$ - показательная функция;

$$Ye = \frac{1}{a \cdot x + b}$$ - обратная зависимость

Парную квазилинейную регрессию можно записать в общем виде так

$$Ye = a + b \cdot \varphi(x)$$

Если выполнить замену переменных и преобразовать исходные данные

$$z_i = \varphi(x_i) \quad i = 1 \ldots n,$$

то нелинейная парная регрессия приводится к линейной вида

$$Ye = a + b \cdot z$$

Для приведенных выше квазилинейных регрессий преобразование исходных данных осуществляется следующим образом:

1). $Ye = a + \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{1}{x_i}$

2). $Ye = a + b \cdot \ln(x) \Rightarrow z_i = \ln(x_i)$

3). $Ye = a + b \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad z_i = e^x$

4). $Ye = a\sqrt{x} + b \quad \Rightarrow \quad z_i = \sqrt{x_i}$

Поиск неизвестных параметров *a* и *b* уравнений регрессии осуществляется с помощью метода наименьших квадратов, при этом остаются в силе все свойства оценок параметров, регрессии, аналогично строятся доверительные интервалы.

Нормальная система уравнений в этом случае выглядит так

$$\begin{cases} n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} z_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot z_i \end{cases}$$

Второй вид нелинейных уравнений регрессии не допускает применение обычного метода наименьших квадратов, ибо приходится решать систему нелинейных уравнений. Однако с помощью подходящих преобразований нелинейную функции регрессию можно свести к линейной и применить к преобразованным параметрам статистические критерии линейной регрессии.

Рассмотрим способы преобразований нелинейных регрессий 2-го вида в линейные.

1). $y = \dfrac{1}{a \cdot x + b}$

Преобразуем исходные данные следующим образом, $Y_i = \dfrac{1}{y_i}$ и тем самым нелинейную регрессию приведем к линейной $Y = a \cdot x + b$

Оценка параметров *a* и *b* выполняется по формулам линейной регрессии, в которых значения фактора y_i заменены Y_i.

2). $y = a \cdot x^b$ Прологарифмируем обе части уравнение регрессии, получим

$$\ln(y) = \ln(a) + b \cdot \ln(x)$$

Сделаем замену переменных преобразовав исходные данные, так

$$Y_i = \ln(y_i), \quad \alpha = \ln(a), \qquad X_i = \ln(x_i)$$

при этом нелинейная регрессия преобразуется в линейную

$$Y = \alpha \cdot x + b$$

Оценка параметров α и *b* выполняется по формулам линейной регрессии, в которых значения фактора y_i и x_i заменены Y_i.и X_i.

Для оценки параметра *a* выполняют обратное преобразование $a = e^{\alpha}$

3). $y = a \cdot b^x$ Прологарифмируем обе части уравнение регрессии, получим

$$\ln(y) = \ln(a) + x \cdot \ln(b)$$

Сделаем замену переменных преобразовав исходные данные

$$Y_i = \ln(y_i), \quad \alpha = \ln(a), \qquad \beta = \ln(b)$$

и нелинейная регрессия преобразуется в линейную $Y = \alpha \cdot x + \beta$

Для оценки параметра *a* и *b* выполняют обратное преобразование

$$a = e^{\alpha}, \qquad b = e^{\beta}$$

6.8 Вопросы для самопроверки

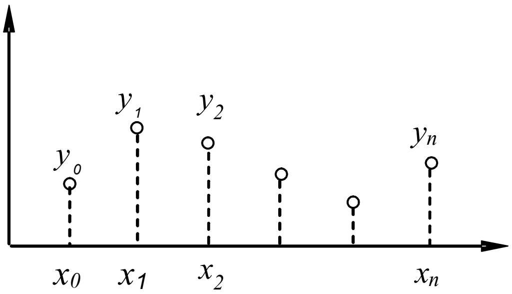
1. Сформулируйте основную задачу регрессионного анализа.
2. Каковы задачи регрессионного и корреляционного анализа?
3. Перечислите основные этапы поиска эмпирических формул.
4. В чем состоит задача аппроксимации эмпирических зависимостей?
5. Поясните в чем суть метода наименьших квадратов. Что с его помощью вычисляется?
6. Сформулируйте метода наименьших квадратов для линейной регрессии.
7. Что характеризует коэффициента линейной корреляции, в каких пределах изменяется?
8. Сформулируйте метода наименьших квадратов для эмпирической зависимости в виде полинома
9. Какую нелинейную регрессию называют квазилинейной?
10. Каков механизм преобразования квазилинейной и нелинейной регрессии в линейную.

7. Інтерполювання і наближення функцій. Наближене обчислення функції, заданої таблицею.

Пусть некоторая функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений на множестве равноотстоящих значений аргумента x

x	x_0	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_0	y_1	y_2	. . .	y_n

На графике это выглядит так



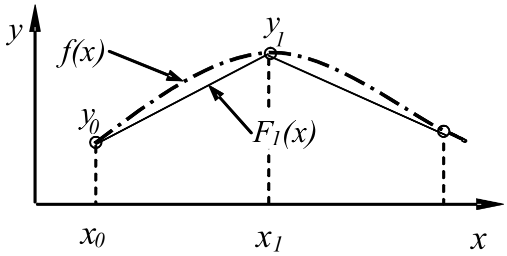
Возникает вопрос, как найти значения этой неизвестной нам функции вне узлов таблицы. Чтобы найти значение функции при любом значении аргумента x, необходимо построить аналитическую функцию $F(x)$, которая совпадала бы с неизвестной функцией $f(x)$ в узлах таблицы и приближалась бы к ней вне узлов. Тем самым мы как бы восстановим неизвестную функцию $f(x)$, заменив ее известной $F(x)$. Степень погрешности интерполяции, т.е. разность $f(x) - F(x)$ при заданном значении x зависит от ширины интервала $h = x_{i+1} - x_i$ и от вида интерполирующей функции $F(x)$.

7.1. Линейная интерполяция.

Значение функции вне узлов таблицы проще всего вычислить, заменяя неизвестную функцию на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ линейной функцией

$$F_1(x) = b_0 + b_1 x, \qquad (1)$$

т. е. отрезком прямой, соединяющим узловые точки таблицы.



Неизвестные коэффициенты b_0, b_1 определяются из решения системы уравнений, полученной из предположения, что значение неизвестной функции $f(x)$ и значение функции $F_1(x)$ совпадают в узлах x_0 и x_1.

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \cdot x_0 = y_0 \\ b_0 + b_1 \cdot x_1 = y_1 \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему (2) относительно неизвестных b_0, b_1, получим

$$b_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, \quad b_0 = y_0 - \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot x_0 . \qquad (3)$$

Подставим формулы (3) в функцию (1) и после преобразования получим формулу линейной интерполяции неизвестной функции $f(x)$ на интервале *[x_0, x_1].*

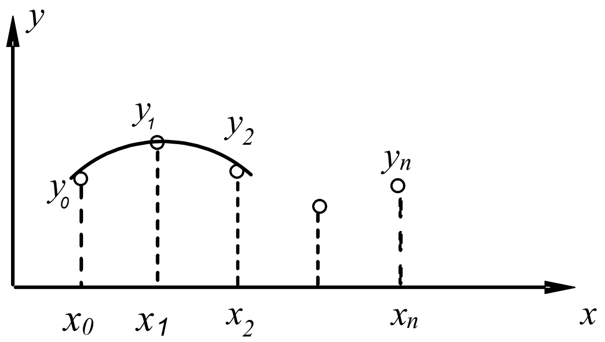
$$f(x) \approx F_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1 \qquad (4)$$

7.2. Квадратичная интерполяция

Линейная интерполяция, как это видно из рисунка имеет большую погрешность, чтобы уменьшить погрешность, неизвестную функцию $f(x)$ интерполируют полиномом второй степени.

$$F_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \qquad (5)$$

То есть через три точки (y_0, x_0); (y_1 , x_1); (y_2 , x_2) поводят параболу (5).



Значения коэффициентов b_0, b_1 и b_2 находят решения систему уже трех уравнений, полученных из предположения, что значение неизвестной функции $f(x)$ и значение полинома $F_2(x)$ совпадают в узлах x_0, x_1 и x_2.

$$\begin{cases} b_0 + b_1 x_0 + b_2 x_0^2 = y_0, \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 = y_1, \\ b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2 = y_2. \end{cases} \qquad (6)$$

Если решение системы (6) – значения b_0, b_1 и b_2 подставить в квадратичную функцию (5), то после преобразования получим формулу квадратичной интерполяции

$$f(x) \approx F_2(x) = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)} \cdot y_2 \qquad (7)$$

Можно построить интерполяционный полином любой n-ой степени, имея $n+1$ узел таблично заданной функции. Эти полиномы $F_n(x)$ называются интерполяционными полиномами Лагранжа n-ой степени. Система уравнений для определения коэффициентов полинома b_i $(i=1,2,\dots n)$ будет выглядеть так.

$$\begin{cases} b_0 + b_1x_0 + b_2x_0^2 + \ldots + b_nx_0^n = y_0, \\ b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + \ldots + b_nx_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \ldots + b_nx_n^n = y_n. \end{cases}$$ или в матричном виде $b \cdot X = Y$,

где

X - матрица, элементы которой рассчитываются по формуле $X_{i,j} = x_i^j$,

Y- вектор-столбец значений интерполируемой функции y_i.

Выполним в среде Mathcad интерполяцию функции $y = cos(x)$, используя интерполяционные полиномы Лагранжа разной степени.

$n := 1$ - степень интерполяционного полинома

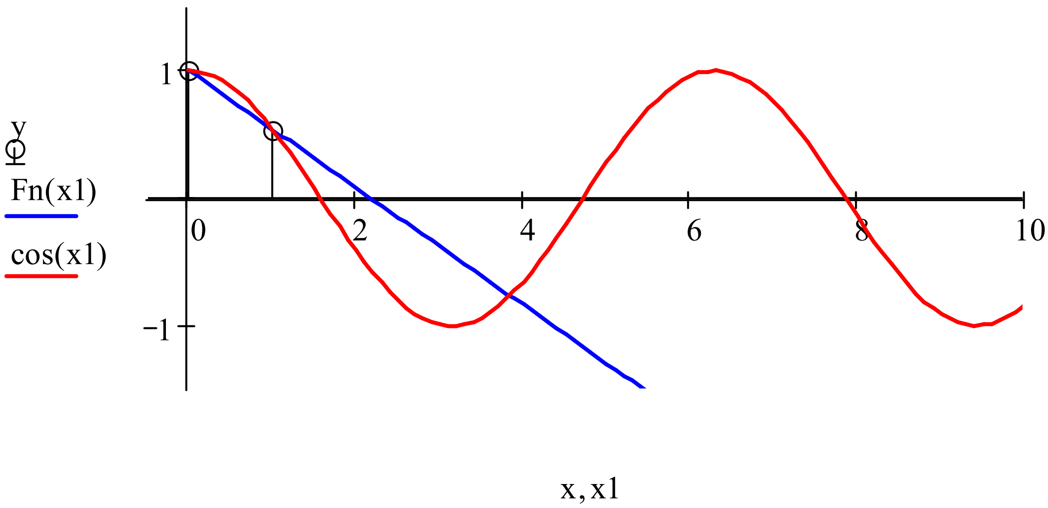
$i := 0 .. n$ $\quad$ $j := 0 .. n$

$x_i := i$ $\quad$ $y_i := \cos(x_i)$ $\quad$ $X_{i,j} := (x_i)^j$

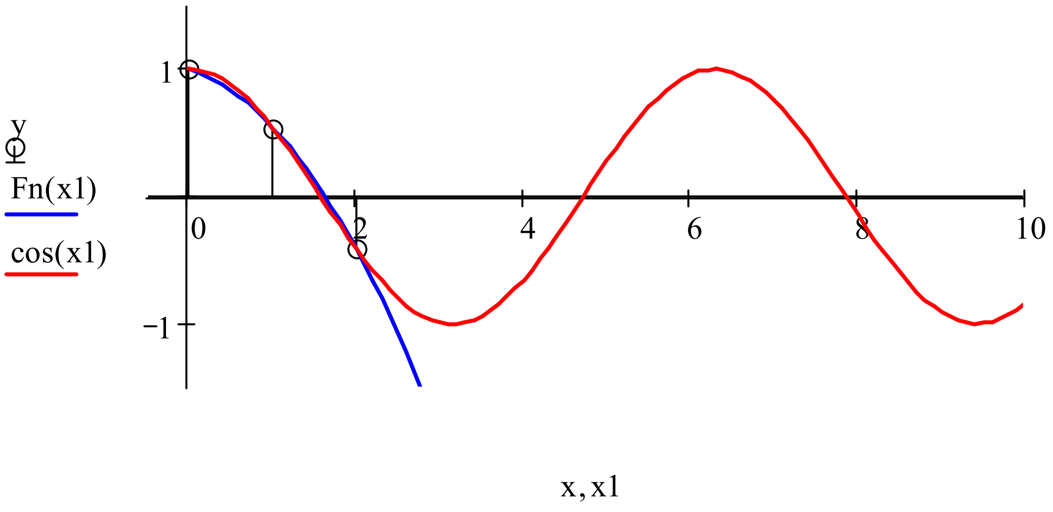
$b := X^{-1} \cdot y$ - коэффициенты полинома

$$Fn(x) := \sum_{k=0}^{n} \left(b_k \cdot x^k\right)$$ - интерполяционный полином n -ой степени

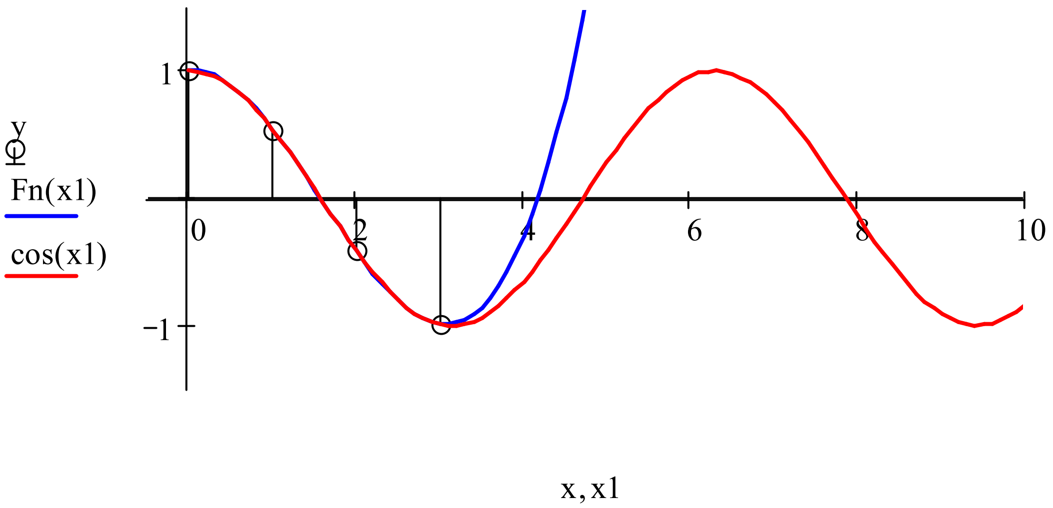
$x1 := 0, 0.1 .. 10$



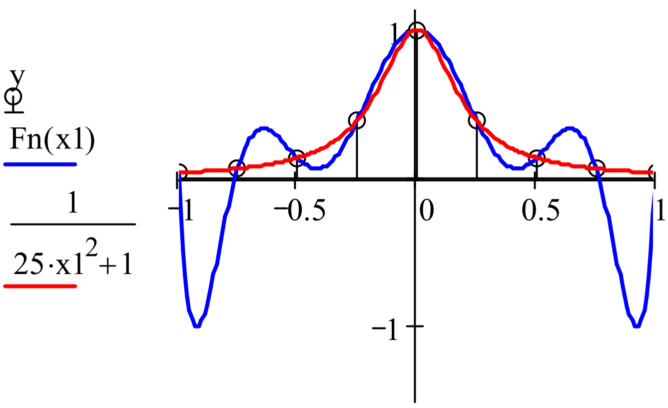
$n = 2$ - степень интерполяционного полинома

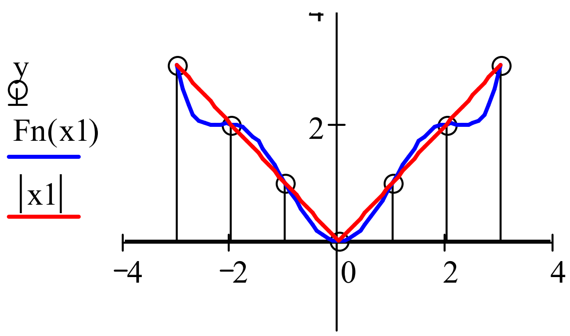


$n = 3$ - степень интерполяционного полинома



Полиномы Лагранжа дают хорошее качество интерполяции при большом количестве узлов и высокой степени полинома. Однако есть функции при интерполяции, которых полиномами Лагранжа, увеличение степени полинома не дает хорошего приближения. К таким функциям относится, например следующие $f(x) = \dfrac{1}{25x^2 + 1}$, $f(x) = |x|$

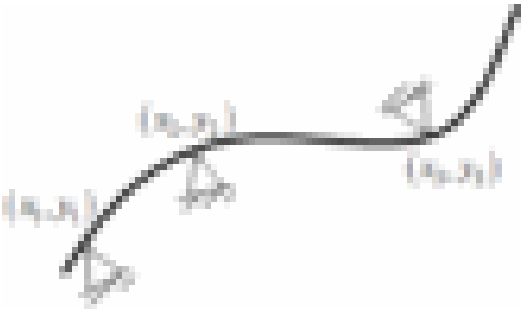




7.3. Интерполяция сплайном.

Для проведения гладкой кривой через узловые точки (y_1, x_1); (y_2 x_2); . . (y_n x_n) чертежники используют гибкую стальную линейку. Ее ставят на ребро и закрепляют в узлах. Ось линейки описывает при этом гладкую кривую, которая и будет интерполировать заданную таблицей функцию.

Полученная таким образом интерполяционная функция называется сплайном. Сплайн функция не имеет недостатков полиномов Лагранжа. У нее нет изломов, и гибкая кривая легко принимает на одном участке вид прямой, а на соседнем вид параболы.



Из курса сопротивления материалов известно, что изогнутая ось ненагруженного упругого стержня описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0$$

Следовательно, на каждом участке между парой соседних узлов интерполяционную кривую можно описать с помощью полинома степени не более 3-ей.

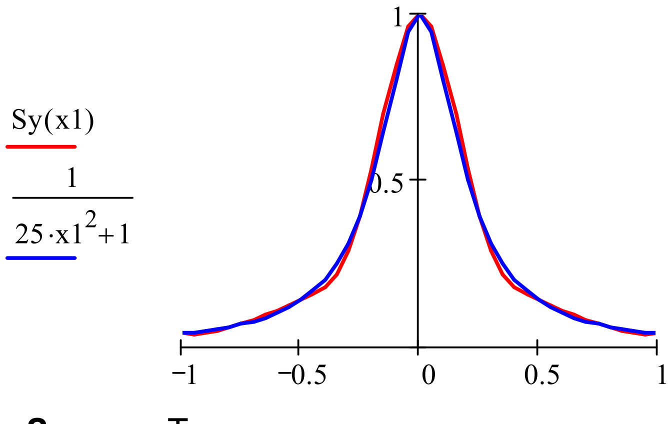
Численные значения коэффициентов сплайн полиномов определяют из следующих условий:

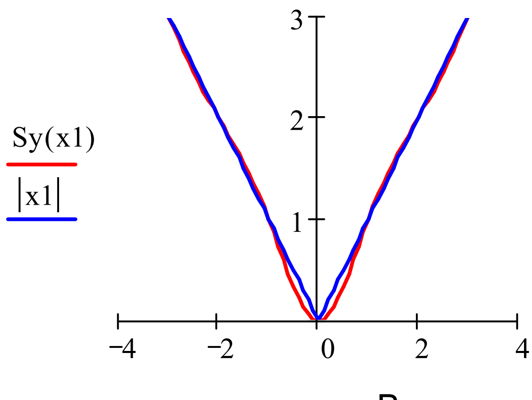
- Значение полинома равно значению искомой функции в узлах таблицы.
- 1-я и 2-я производные сплайн полиномов слева и справа от любого узла таблицы равны друг другу.

Это значит, что сплайн функция не имеет в узлах таблицы не только изломов, но и смены радиусов кривизны.

Интерполяция «неудобных» функций сплайном выглядит так

$$f(x) = \frac{1}{25x^2+1}, \quad f(x) = |x|$$





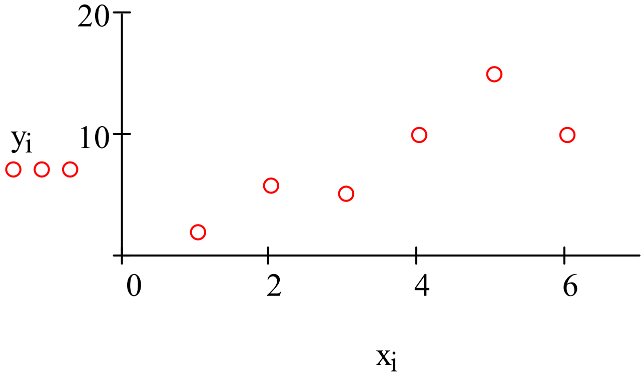
Задача. Трасса задана на карте местности своими отметками. В среде Mathcad построить эскизную линию трассы двумя методами: линейной интерполяции и сплайн интерполяции. Найти длину линии трассы.

Решение в среде Mathcad.

Отметки трассы

$n := 5 \quad i := 0..n$

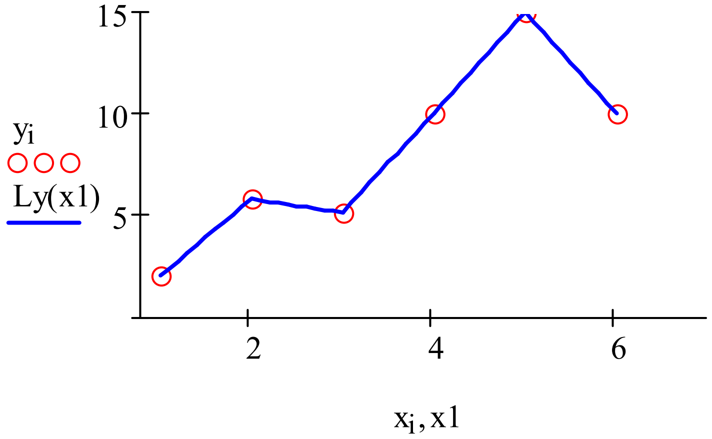
$x_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad y_i := \begin{pmatrix} 2 \\ 5.8 \\ 5.1 \\ 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$



Линейная интерполяция

$x1 := 1, 1.1..6$

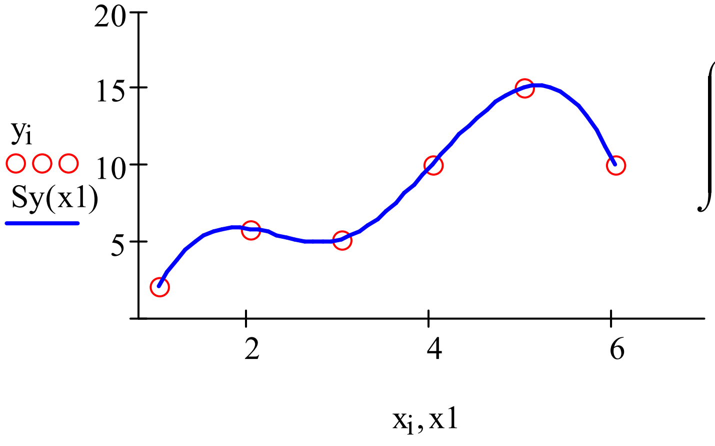
$Ly(x1) := \mathrm{linterp}(x, y, x1)$



Интерполяция кубическим сплайном

$Ky := \mathrm{cspline}(x, y)$ - коэффициенты кубического сплайна

$Sy(x1) := \mathrm{interp}(Ky, x, y, x1)$



Расчет длины линии трассы

$$\int_1^6 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} Sy(x)\right)^2}\, dx = 21.304$$

7.5 Вопросы для самопроверки

1. В чем суть интерполяции функции? Когда она применяется, какие задачи решает? Чем определяется точность интерполяции?
2. Как осуществляется линейная интерполяция функции?
3. В чем суть квадратичной интерполяции, из каких условий определяются ее коэффициенты?
4. Как построить интерполяционный полином Лагранжа n – ой степени?
5. В каких случаях интерполяционные полиномы Лагранжа не дают хороший результат?
6. В чем идея сплайн интерполяции?
7. Из каких условий определяют численные значения коэффициентов сплайн полиномов?
8. Чем отличается процесс аппроксимации эмпирических формул от интерполяции функции, заданной таблично?

8. Чисельне диференціювання функцій.

Пусть имеется функция $f(x)$, которую необходимо продифференцировать несколько раз и найти эту производную в некоторой точке.

Если задан явный вид функции, то выражение для производной часто оказывается достаточно сложным и желательно его заменить более простым. Если же функция задана только в некоторых точках (таблично), то получить явный вид ее производных вообще невозможно. В этих ситуациях возникает необходимость приближенного (численного) дифференцирования.

Простейшая идея численного дифференцирования состоит в том, что функция заменяется интерполяционным многочленом (Лагранжа, Ньютона) и производная функции приближенного заменяется соответствующей производной интерполяционного многочлена

$$f^{(m)}(x) \approx L_n^{(m)}(x),$$

$$f^{(m)}(x) \approx l_n^{(m)}(x), \quad 0 \le m \le n.$$

Рассмотрим простейшие формулы численного дифференцирования, которые получаются указанным способом.

Будем предполагать, что функция задана в равностоящих узлах

$$x_i = x_0 + ih, \quad h > 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Ее значения и значения производных в узлах будем обозначать

$$f(x_i) = f_i, \quad f'(x_i) = f_i', \quad f''(x_i) = f_i''.$$

Пусть функция задана в двух точках x_0 и $x_1 = x_0 + h$, ее значения f_0, f_1.

Посстроим интерполяционный многочлен первой степени

$$l_1(x) = f_0 + (x - x_0) f(x_0; x_1).$$

Производная $l_1'(x)$ равна

$$l_1'(x) = f(x_0; x_1) = \frac{f_1 - f_0}{h}.$$

Производную функцию $f(x)$ в точке x_0 приближенно заменяем производной интерполяционного многочлена

$$f_0'(x) \approx \frac{f_1 - f_0}{h}. \qquad (1)$$

Величина $\dfrac{f_1 - f_0}{h}$ называется первой разностной производной.

Пусть $f(x)$ задана в трех точках x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_{-1} = x_0 - h$.

Интерполяционный многочлен Ньютона второй степени имеет вид

$$l_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_{-1}).$$

Берем производную

$$l_2'(x) = f(x_0; x_1) + (2x - x_0 - x_1) f(x_0; x_1; x_{-1}).$$

В точке x_0 она равна

$$l_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + (x_0 - x_1) \times$$

$$\times \left[\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})} + \frac{f_{-1}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \right] =$$

$$= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Получаем приближенную формулу

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}. \qquad (2)$$

Величина $\dfrac{f_1 - f_{-1}}{2h}$ называется центральной разностной производной.

Наконец, если взять вторую производную

$$l_2''(x) = 2 f(x_0; x_1; x_{-1}) =$$

$$= 2 \left[\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})} + \frac{f_{-1}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \right] =$$

$$= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2},$$

получаем приближенную формулу.

$$f_0'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \qquad (3)$$

Величина $\dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$ называется <u>второй разностной производной.</u>

Формулы (1)-(3) называются <u>формулами численного дифференцирования</u>.

Предполагая функцию f достаточное число раз непрерывно дифференцируемой, получим погрешности приближенных формул (1)-(3).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

<u>**Лемма 1.**</u> Пусть $f \in C[a,b]$, $\xi_i \in [a,b]-$ произвольные точки, $i = \overline{1,n}$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n} = f(\xi).$$

<u>**Доказательство.**</u> Очевидно неравенство

$$\min_{[a,b]} f(x) \le \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n} \le \max_{[a,b]} f(x).$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на замкнутом отрезке она принимает все значения между $\min\limits_{[a,b]} f(x)$ и $\max\limits_{[a,b]} f(x)$. Значит существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что выполняет указанное в лемме равенство.

Погрешности формул численного дифференцирования дает следующая лемма.

<u>**Лемма 2.**</u>

1.Предположим, что $f \in C_2[x_0, x_1]$. Тогда существует такая точка ξ, что

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_1. \tag{4}$$

2. Если $f \in C_3[x_{-1}, x_1]$, то существует такая точка ξ, что

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \tag{5}$$

3. Когда $f \in C_4[x_{-1}, x_1]$, то существует ξ такая, что

$$f_0'' = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \qquad (6)$$

<u>**Доказательство.**</u> По формуле Тейлора

$$f_1 = f_0 + hf_0' + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1),$$

откуда следует (4).

Если $f \in C_4[x_{-1}, x_1]$, то по формуле Тейлора

$$f_{\pm 1} = f_0 \pm hf_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' \pm \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_{\pm}),$$

(7)

где $x_{-1} < \xi_- < \xi_+ < x_1$.

Подставим (7) в $\dfrac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$. Получаем

$$\frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} = f_0'' + \frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+)\right].$$

Заменяя в соответствии с леммою 1

$$f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+) = 2f^{(4)}(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1,$$

получаем

$$\frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} = f_0'' + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Откуда и следует (6).

Равенство (5) доказывается аналогично (доказательство провести самостоятельно).

Формулы (4)-(6) называются <u>формулами численного дифференцирования с остаточными членами.</u>

Погрешности формул (1)-(3) оцениваются с помощью следующих неравенств, которые вытекают из соотношений (4)-(6):

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \le \frac{h}{2} \max_{[x_0, x_1]} \left| f''(x) \right|,$$

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} \left| f'''(x) \right|,$$

$$\left| f_0'' - \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \max_{[x_{-1}, x_1]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Говорят, что погрешность формулы (1) имеет первый порядок относительно h (или порядка h), а погрешность формул (2) и (3) имеет второй порядок относительно h (или порядка h^2). Также говорят, что формула численного дифференцирования (1) первого порядка точности (относительно h), а формулы (2) и (3) имеют второй порядок точности.

Указанным способом можно получать формулы численного дифференцирования для более старших производных и для большего количества узлов интерполирования.

Выбор оптимального шага. Допустим, что граница абсолютной погрешности при вычислении функции f в каждой точке удовлетворяет неравенству

$$\Delta f_i \le \overline{\Delta}. \tag{8}$$

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 производные, через которые выражаются остаточные члены в формулах (5), (6), непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$\left| f'''(x) \right| \le \overline{M}_3, \quad \left| f^{(4)}(x) \right| \le \overline{M}_4, \tag{9}$$

где $\overline{M}_3$, $\overline{M}_4$ - некоторые числа. Тогда полная погрешность формул (2), (3) (без учета погрешностей округления) в соответствии с (5), (6), (8), (9)не превосходит соответственно величин

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{\Delta} + \overline{\Delta}}{2h} + \frac{h^2}{6} \overline{M}_3, \tag{10}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\overline{\Delta} + 2\overline{\Delta} + \overline{\Delta}}{h^2} + \frac{h^2}{12} \overline{M}_4. \tag{11}$$

Минимизация по h этих величин приводит к следующим значениям h:

$$h_1 = \left(\frac{3\Delta}{\overline{M}_3} \right)^{1/3}, \quad h_2 = 2\left(\frac{3\Delta}{\overline{M}_4} \right)^{1/4}, \tag{12}$$

при этом

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{\overline{M}_3 \Delta^{-2}}{3} \right)^{1/3}, \quad \varepsilon_2 = 2\left(\frac{\overline{M}_4 \overline{\Delta}}{3} \right)^{1/2}. \tag{13}$$

Если при выбранном для какой-либо из формул (2), (3) значении h отрезок $\left[x_{-1}, x_1\right]$ не выходит за пределы окрестности точки x_0, в которой выполняется соответствующее неравенство (9), то найденное h есть <u>оптимальным</u> и полная погрешность численного дифференцирования оценивается соответствующей величиной (13).

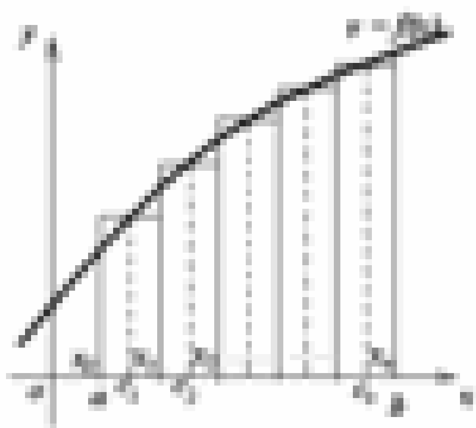
9. Чисельне інтегрування функцій. Метод прямокутників метод трапецій

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции *f(x)*. Если можно найти первообразную *F(x)* функции *f(x)*, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница. Но не всегда первообразная функции выражается через элементарные функции. В этих и других случаях используют приближенные формулы, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Наиболее употребимые формулы – формула прямоугольников, формула трапеции и формула парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

§1. Метод прямоугольников.

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *n* равных частей длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$. В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции *y* = *f(x)*. Приняв эту ординату за высоту построим прямоугольник с площадью



$S_i = h \cdot \tilde{y}_i$. Тогда сумма площадей всех *n* прямоугольников (при достаточно большом *n*) дает площадь приближенно равную площади трапеции, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h \cdot \left(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + ...\tilde{y}_n\right) = h \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(C_i)$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \pm \left|R_n(f)\right|$$

- формула прямоугольников (1)

Абсолютная погрешность метода определяется неравенством:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2}$$

(2)

где $M_2 = \max\limits_{[a;\, b]} \left|f''(x)\right|$

(3)

Пример 3.1: Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 x^3 dx$ при $n = 4$, используя метод прямоугольников.

Решение.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm \left|R_n(f)\right| \Rightarrow \int\limits_0^2 x^3 dx \approx \frac{2-0}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm \left|R_n(f)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + \left|R_n(f)\right| = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x4}{2}\right)\right) \pm \left|R_n(f)\right|$$

т.к. $x_i = x_0 + i \cdot h$ и $h = \dfrac{1}{2}$:

$x_0 = 0$	$f\left(\dfrac{x_0+x_1}{2}\right) = f\left(\dfrac{0+1/2}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$
$x_1 = x_0 + 1 \cdot h = 0 + 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$	$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) = f\left(\dfrac{1/2+1}{2}\right) = f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$
$x_2 = x_0 + 2 \cdot h = 0 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$	$f\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}\right) = f\left(\dfrac{1+3/2}{2}\right) = f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \left(\dfrac{5}{4}\right)^3 = \dfrac{125}{64}$
$x_3 = x_0 + 3 \cdot h = 0 + 3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$	$f\left(\dfrac{x_3+x_4}{2}\right) = f\left(\dfrac{3/2+2}{2}\right) = f\left(\dfrac{7}{4}\right) = \left(\dfrac{7}{4}\right)^3 = \dfrac{343}{64}$
$x_4 = x_0 + 4 \cdot h = 0 + 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$	

$\left|R_n(f)\right| \le \dfrac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2}$ где $M_2 = \max\limits_{[a;\, b]} \left|f''(x)\right|$

$f''(x) = 6x$, $M_2 = \max\limits_{[0;\, 2]} |6x| = 12$, $\left|R_4(f)\right| \le \dfrac{(2-0)^3 \cdot 12}{24 \cdot 16} = \dfrac{96}{384} \approx 0{,}25$

Следовательно: $\int\limits_0^2 x^3 dx \approx \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{64} + \dfrac{27}{64} + \dfrac{125}{64} + \dfrac{343}{64}\right) \pm 0{,}25 \approx 3{,}875 \pm 0{,}25$

Пример 3.2:

Зная, что погрешность метода прямоугольников при вычислении интеграла $\int_0^2 x^3 dx$ составляет 0,125, определить число разбиений *n*.

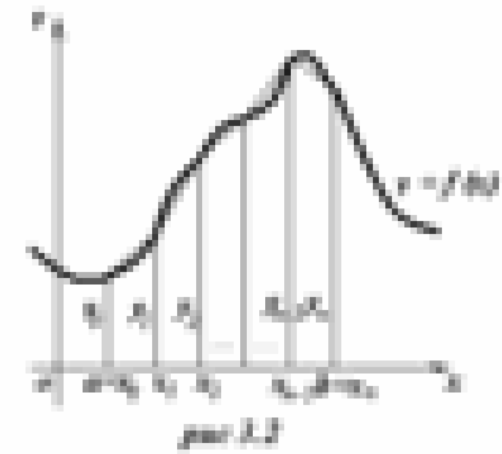
Решение. Используя формулу **(2)** получим $0{,}125 \le \frac{2^3 \cdot 12}{24 \cdot n^2}$

Умножим правую и левую части неравенства на дробь $\frac{n^2}{0{,}125}$, тогда $n^2 \le \frac{96}{24 \cdot 0{,}125} = \frac{96}{3} = 32$.

т.е $n \le \sqrt{32}$ или $n \le 5$

§2. Метод трапеций.

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.



Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *n* равных частей длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$, $y_i = f(x_i)$.

Так как площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей трапеций S_i, высота каждой из которых равна h, то:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + ... + h \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2} =$$

$$= h \cdot \left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{i-1} + 2y_i + ...2y_{n-1} + y_n}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right)$$

Абсолютная погрешность метода (аналогично методу прямоугольников) составляет:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2} \qquad \text{где} \qquad M_2 = \max_{[a;\,b]} |f''(x)|$$

(4)

тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+......+y_{n-1}\right)\pm\left|R_n(f)\right|$ **- формула трапеций. (5)**

Пример 3.3: Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 x^3dx$ при $n = 4$, используя метод трапеций.

Решение. По формуле трапеций:

$\int\limits_0^2 x^3dx \approx \frac{2-0}{4}\cdot\left(\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right)\pm\left|R_n(f)\right|$, т.к. $x_i = x_0 + i\cdot h$, $h=\frac{1}{2}$, то

$x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + 1\cdot h = 0+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $x_2 = x_0+2\cdot h = 0+2\cdot\frac{1}{2}=1$, $x_3 = x_0+3\cdot h = 0+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $x_4 = x_0+4\cdot h = 0+4\cdot\frac{1}{2}=2$.

Тогда $y_0 = f(0) = 0^3 = 0$, $y_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, $y_2 = f(1) = 1^3 = 1$, $y_3 = f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$, $y_4 = f(2) = 2^3 = 8$.

Найдем погрешность:

$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12n^2}$ где $M_2 = \max\limits_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$

$f''(x) = 6x$, $M_2 = \max\limits_{[0;\,2]}|6x| = 12$, $\left|R_4(f)\right| \le \frac{(2-0)^3\cdot 12}{12\cdot 16} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

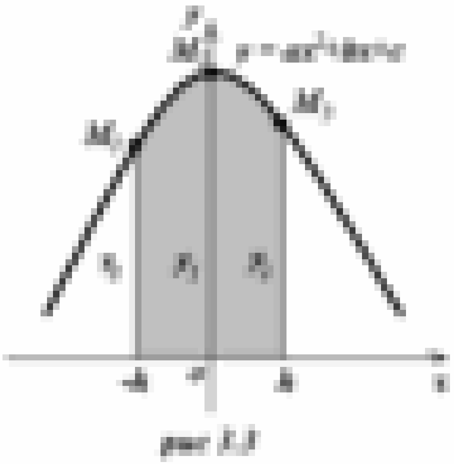
Следовательно

$\int\limits_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0+8}{2}+\frac{1}{8}+1+\frac{27}{8}\right)\pm 0{,}5 = 4{,}25 \pm 0{,}5$

10 Чисельне інтегрування. Метод парабол (Метод Сімпсона)

<u>§3. Метод парабол (Метод Симпсона).</u>

Если заменить график функции на каждом отрезке $\left[x_{i-1}; x_i\right]$не отрезками прямых, как в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного значения интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.



Предварительно найдем вспомогательную площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y = ax^2 + bx + c$, прямыми $x = -h$, $x = h$ и отрезком $[-h; h]$.

Пусть парабола проходит через точки $M_1(-h; y_0)$, $M_2(0; y_1)$ и $M_3(h; y_2)$.

$$\begin{cases} y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c = ah^2 - bh + c \\ y_1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases}$$

(6)

тогда полученная площадь:

$$S = \int\limits_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h}$$

$$= a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch - \left(a\frac{(-h)^3}{3} + b\frac{(-h)^2}{2} + c(-h)\right) = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch \quad \textbf{(7)}$$

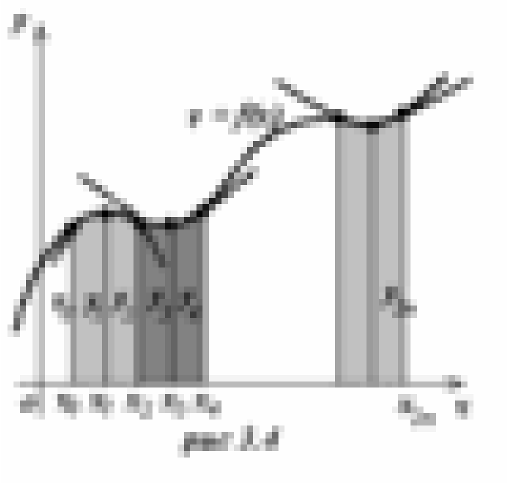
Выразим полученное значение через y_0, y_1 и y_2. Используя формулы (6) получим $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}\left(y_0 - 2y_1 + y_2\right)$. Подставляя полученные значения в (7) получим:

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

(8)

<u>Вывод формулы парабол (Симпсона).</u>

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная функциями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.



1. **1.** Разобьем отрезок [a ; b] на *2n* равных частей. Получим отрезки длиной $h = \dfrac{b-a}{2n}$ **(9)**
2. **2.** В точках деления вычислим значения функции $y = f(x)$: $y_0, \ y_1, \ y_2, \ \ldots\ldots, y_{2n-2}, \ y_{2n-1}, \ y_{2n}$.
3. **3.** Заменим каждую пару соседних криволинейных трапеций параболическими трапециями с основаниями, равными *2h*.

На отрезке $[x_0; \ x_2]$ парабола проходит через точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$.

Используя формулу (8) получим $S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \dfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Аналогично на отрезке $[x_2; \ x_4]$: $S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \dfrac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ и т. д. до

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Следовательно:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + \ldots. + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots.. + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots. + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n})\right]$$

Учитывая погрешность вычислений $|R_n|$ и $h = \dfrac{b-a}{2n}$, получим формулу Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots. + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n})\right] \pm |R_n|$$

(10)

Абсолютная погрешность метода оценивается соотношением:

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$$

(11)

Пример 3.4:

Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3 dx$, используя метод парабол при $n = 4$.

Решение.

Количество разбиений $2n = 8$, $h = \frac{2-0}{2\cdot 4} = \frac{1}{4}$, $f(x) = x^3$

Составим таблицу:

x	y_0, y_8	$y_{четное}$	$y_{нечетное}$
$x_0 = 0$	$y_0 = f(0) = 0^3 = 0$		
$x_1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$			$y_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
$x_2 = 0 + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$		$y_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	
$x_3 = 0 + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$			$y_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$
$x_4 = 0 + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$		$y_4 = f(1) = 1^3 = 1$	
$x_5 = 0 + 5\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$			$y_5 = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$
$x_6 = 0 + 6\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$		$y_6 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	
$x_7 = 0 + 7\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$			$y_7 = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$
$x_8 = 2$	$y_8 = f(2) = 2^3 = 8$		

Рассмотрим погрешность метода:

$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180\cdot(2n)^4} = 0$ (Доказать самостоятельно).

По формуле Симпсона получаем:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{2-0}{6\cdot 4}\left[(0+8) + 4\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) + 2\left(\frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{27}{8}\right)\right] \pm 0 = \frac{48}{12} = 4$$