5.6. РЯДИ ФУР'Є

Функціональні ряди необхідні для наближеного завдання довільних функцій сумою відомих елементарних функцій.

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ... + a_n\varphi_n(x) + ...$$

При застосуванні ПЕОМ, щоб запам'ятати функцію $f(x)$, слід запам'ятати числовий вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, якщо функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, φ_n, … є в програмах ЕОМ.

Степеневі ряди дають змогу подавати функції, які неперервні і безліч разів диференційовні. Щоб наближено з будь-яким степенем точності представляти розривні функції або функції з розривами похідних, слід використати інші функціональні ряди. Частіше використовуються ряди з ортогональними функціями.

5.6.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Означення. Система функцій

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \qquad (1)$$

що задані на відрізку $[a, b]$, називається **ортогональною з вагою** $h(x)$ $\left(h(x) \ge 0,\ 0 < \int_a^b h(x)dx < \infty\right)$, якщо для будь-яких двох функцій виконана **умова ортогональності**

$$\boxed{\int_a^b h(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad (k \ne m;\ k, m = 0, 1, 2, \ldots, n).} \qquad (2)$$

Система функцій (1) називається **ортонормованою**, якщо виконується умова

$$\boxed{\|\varphi_k\| \equiv \left(\int_a^b h(x)\varphi_k^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \ \ (k = 0, 1, \ldots, n, \ldots).} \qquad (3)$$

Для ортонормованої системи функцій $\varphi_k(x)$ числа

$$a_k = \int_a^b h(x) f(x)\varphi_k(x)dx \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

називаються *коефіцієнтом Фур'є* для функції $f(x)$.

Наближене подання функції $f(x)$

$$f(x) \approx f_n(x) \equiv a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

є в деякому випадку найкращим. Справді, розглянемо довільну функцію

$$P_n(x) \equiv c_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

і виберемо коефіцієнти $c_0, c_1, \ldots, c_n$ так, щоб різниця $\|f - P_n\|$ була найменшою. З формули (3) знаходимо рівність

$$\|f - P_n\|^2 = \int_a^b h(x)\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right)^2 dx =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k a_k + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (c_k - a_k)^2.$$

Звідси випливає, що значення $\|f - P_n\|^2$ буде найменшим, якщо $c_k = a_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). При цьому справедлива рівність

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{4}$$

Оскільки ліва частина рівності (4) невід’ємна, то буде справедлива *нерівність Бесселя*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \le \|f\|^2. \tag{5}$$

Для нескінченної ортонормованої системи функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

називається *рядом Фур’є*. З нерівності Бесселя

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \le \|f\|^2}$$

випливає збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ і відношення для коефіцієнта Фур’є

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0.$$

За функції $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) часто використовуються многочлени. При $h(x) \equiv 1$ на відрізку $[-1; 1]$ можна використовувати ортогональні многочлени Лагранжа

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для перших многочленів маємо вирази

$$\varphi_0(x) = 1,$$
$$\varphi_1(x) = x,$$
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$\varphi_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$\varphi_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \ldots .$$

Розкладемо за поліномами Лежандра функцію $y = |x|$; $x \in [-1, 1]$. Оскільки функція $y = |x|$ парна, то розклад міститиме лише парні поліноми Лежандра. Дістанемо

$$|x| \approx a + b(3x^2 - 1) + (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

знаходимо з рівнянь

$$\int_0^1 x dx = a\int_0^1 1dx, \ \int_0^1 x(3x^2 - 1)dx = b\int_0^1 (3x^2 - 1)^2 dx;$$
$$\int_0^1 x(35x^4 - 30x^2 + 3)dx = c\int_0^1 (35x^4 - 30x^2 + 3)^2 dx$$

коефіцієнти $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = -\frac{3}{128}$. Маємо наближену рівність

$$|x| \approx y = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}(3x^2 - 1) - \frac{3}{128}(35x^4 - 30x^2 + 3) =$$
$$= \frac{15}{128} + \frac{105}{64}x^2 - \frac{105}{128}x^4.$$

Наведемо значення многочлена при різних значеннях аргументу.

Таблиця 5.1

x	y	x	y
0	0,1172	± 0,6	0,6015
± 0,2	0,1815	± 0,8	0,8312
± 0,4	0,3587	± 1,0	0,9375

Графік функції $y(x)$ представлено на рис. 5.2

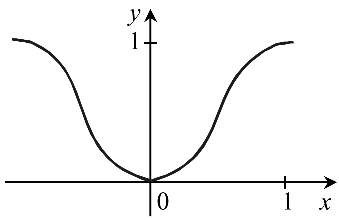

Рис. 5.2

При $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на відрізку [– 1; 1] ортогональну систему функцій утворює система **многочленів Чебишова першого роду**

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

яка задовольняє рівняння

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Для перших многочленів маємо явний вираз

$$T_0(x) = 1,$$
$$T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ldots \ .$$

Ці многочлени часто використовуються в наближених обчисленнях.

5.6.2. ТРИГОНОМЕТРИЧНА СИСТЕМА ФУНКЦІЙ

Розглядається
основна система тригонометричних функції

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots \qquad (6)$$

Покажемо, що ця система функцій є ортогональною на відрізку $[-\pi, \pi]$. Справді, маємо рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (m \neq n,\ m, n = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \ldots).$$

які доводять ортогональні системи функції (6).

Використовуючи рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

можна віднормувати систему функції (6) і привести її до виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots .$$

Означення. **Рядом Фур'є** для функції $f(x)$, заданою на відрізку $[-\pi, \pi]$, називається ряд

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),} \qquad (7)$$

де коефіцієнти a_n, b_n визначаються за формулами

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots).} \qquad (8)$$

Числа a_n, b_n називаються *коефіцієнтами Фур'є.*

5.6.3. УМОВИ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ФУР'Є

Зазначимо без доведення ряд умов, у разі виконання яких збігається ряд Фур'є (7).

Теорема 5.29. **Якщо ряди** $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ **збігаються, то ряд Фур'є (7) збігається рівномірно і його сума $f(x)$ є неперервною функцією.**

Теорема 5.30. **Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-\pi, \pi]$, має неперервну похідну $f'(x)$ на $[-\pi, \pi]$ і $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фур'є для $f(x)$ збігається в усіх точках до $f(x)$, тобто при $x \in [-\pi, \pi]$ буде справедлива рівність**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (9)$$

Теорема 5.31. **Якщо функція $f(x)$ і її похідні є кусково-неперервними на $[-\pi; \pi]$, то ряд Фур'є збігається до $f(x)$ в усіх точках неперервності і в точці розриву $x = x_0$ збігається до значення**

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)).$$

Нагадаємо, що функція називається **кусково-неперервною**, якщо вона всюди неперервна за винятком, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду.

Теорема 5.32. **Нехай функція $f(x)$ і є похідна $f'(x)$ — кусково-неперервна на відрізку $[-\pi, \pi]$.**

Тоді ряд Фур'є збіжний у кожній точці. У точках неперервності $f(x)$ ряд Фур'є збігається до значення

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right].$$

Якщо $f(-\pi) = f(x)$, то в точці $x = \pi$ ряд Фур'є збіжний зі значенням $\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]$.

Отже, у ряд Фур'є можна розкладати функції достатньо загального виду. Оскільки всі функції основної системи тригонометричних функцій є періодичними зі спільним періодом 2π, то сума ряду Фур'є буде періодичною з періодом 2π.

5.6.4. ОБЧИСЛЕННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ РЯДІВ ФУР'Є

Коефіцієнти ряду Фур'є можна знайти за формулою (8). Зауважимо, що для парної функції $f(x)$ усі коефіцієнти $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Отже, парні функції розкладаються тільки за $\cos nx$. Аналогічно, непарні функції розкладаються лише за $\sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Розкладемо в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \frac{\pi}{4},\ 0 \le x \le \pi,\quad f(x) = -\frac{\pi}{4},\ -\pi \le x < 0.$$

- Функція непарна, тому знаходимо лише коефіцієнти b_n

$$b_n = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{1}{5}, \ldots .$$

Остаточно маємо ряд Фур'є

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)}{2k-1}.$$

На рис. 5.3 подано $f(x)$ і частинні суми ряду

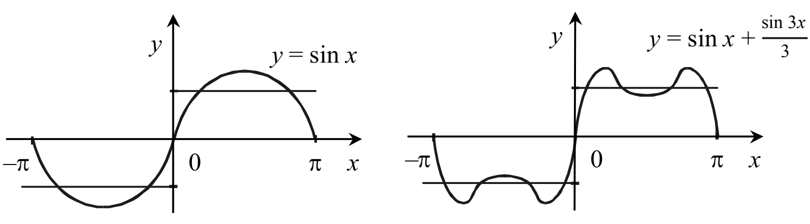

Рис. 5.3

При $x = \frac{\pi}{2}$ маємо рівності

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}.$$

Розкласти в ряд Фур'є парну функцію $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$. Знаходимо коефіцієнти a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nxd = -\frac{2}{\pi n^2}(1 + (-1)^{n+1}).$$

● Знаходимо розклад в ряд Фур'є

$$|x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x - \frac{4}{\pi 5^2}\cos 5x - \frac{4}{\pi 7^2}\cos 7x - \ldots\ .$$

При $x = 0$ дістанемо рівність

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Виходячи з цієї рівності можна обчислити значення ряду

$$\overline{\overline{S}} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\overline{\overline{S}}.$$

Звідси дістаємо значення суми ряду, яку знайшов Ейлер:

$$\overline{\overline{S}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{10}$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, \pi]$, то її можна довільним чином задати на інтервалі $[-\pi, 0)$ і потім розкласти в ряд Фур'є, який використовуємо лише при $x \in [0, \pi]$. Якщо функцію $f(x)$ продовжимо парним способом, то функція $f(x)$ буде розкладатися за $\cos nx$, якщо продовжити непарним способом, то функція $f(x)$ буде розкладатися за $\sin nx$.

Розкладемо функцію $f(x) = \sin x$ на відрізку $[0, \pi]$ в ряд Фур'є за косинусами.

● Матимемо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1} - \frac{1+(-1)^n}{n-1}\right) = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{-2}{n^2-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Остаточно знаходимо розклад у ряд Фур'є при $x \in [0, \pi]$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi(2^2-1)}\cos 2x - \frac{4}{\pi(4^2-1)}\cos 4x -$$

$$- \frac{4}{\pi(6^2-1)}\cos 6x - \frac{4}{\pi(8^2-1)}\cos 8x - \ldots .$$

5.6.5. КОМПЛЕКСНА ФОРМА РЯДУ ФУР'Є

Згідно з формулами Ейлера

$$\cos nx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin nx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ряд Фур'є (9) можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{11}$$

де позначено

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Для дійсної функції $f(x)$ коефіцієнти c_n, c_{-n} — комплексно спряжені.

Коефіцієнти c_n можна знаходити за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{12}$$

Зауважимо, що система тригонометричних функцій e^{inx} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) є ортогональною на відрізку $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{imx} dx = 0 \ \ (n \neq m;\ n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Розкладемо в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

- Знаходимо коефіцієнти Фур'є c_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(x \frac{e^{-inx}}{(-in)^2} \right) \Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{i(-1)^n}{n} \ (n \neq 0),$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot dx = 0.$$

Отримаємо розклад функції в комплексний ряд Фур'є

$$x = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$