5.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ОЗНАЧЕННЯ

Нехай задано послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$.

Означення. Вираз

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots}$$

називається **рядом**, а самі числа $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ називаються **членами ряду**. Вираз u_n як функція від n називається **загальним членом ряду**.

Означення. Скінченні суми

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1 = u_1, \\ S_2 = u_1 + u_2, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \end{array}} \qquad (1)$$

називаються **частинними сумами ряду**.

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***збіжним***, якщо існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n . \qquad (2)$$

Границя частинних сум (2) називається **сумою ряду**. Якщо границя (2) не існує, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **розбіжним**.

Дослідимо збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

- Знайдемо значення частинної суми ряду:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Шукаємо границю частинних сум ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Границя існує, отже, розглядуваний ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Розглянемо ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \qquad (3)$$

I. Якщо $q \neq 1$, можемо знайти частинну суму ряду

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

II. Якщо $|q| < 1$, $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$ і при цьому існує границя частинних сум ряду

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

ряд (3) збігається.

Якщо $|q| > 1$, границя частинних сум не існує і ряд (3) розбігається.

Якщо $q = 1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Його частинні суми

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Границя частинних сум не існує, отже, при $q = 1$ ряд (3) розбігається.

Якщо $q = -1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$$

і частинні суми

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots\ S_n = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n \text{ — непарне,} \\ 0, \text{ якщо } n \text{ — парне.} \end{cases}$$

Границя частинних сум S_n ряду не існує, і ряд (3) розбігається.

Наведемо необхідні і достатні умови збіжності числового ряду.

Теорема 5.1. **(Критерій Коші.) Для того, щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлось таке $N = N(\varepsilon)$, що при будь-якому $p > 0$, $n \geq N$ виконується нерівність**

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Іншими словами, збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, що сума будь-якої кількості членів ряду, наступних за членом ряду з достатньо великим номером, може бути скільки завгодно малою.

Означення. Ряд

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+k} + \ldots \qquad (5)$$

називається **залишком ряду** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Очевидна теорема.

Теорема 5.2. **Для того, щоб збігався ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, необхідно і достатньо, щоб збігався залишок ряду.**

Доведення. Розглянемо при фіксованому значенні n частинну суму ряду (5).

$$\sigma_p = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_p = \lim_{n\to+\infty} \left(S_{n+p} - S_n \right).$$

Існування границі $\lim\limits_{p\to+\infty} \sigma_p$ рівносильне існуванню границі $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$, що доводить правильність теореми.

З теореми 5.2 випливає, що збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не зміниться, якщо відкинути скінченну кількість перших членів.

З критерію Коші випливає, що збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, щоб усі частинні суми залишку ряду (5) були скільки завгодно малі, якщо номер n достатньо великий.

Теорема 5.3. **(Необхідна умова збіжності.) Для того щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався, необхідно, щоб загальний член ряду прямував до нуля, тобто щоб виконувалась умова**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.. \tag{6}$$

Доведення. Нехай ряд збігається, тобто існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k .$$

З рівності $u_n = S_n - S_{n-1}$ випливає, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

що і доводить правильність теореми.

Умова (6) не є достатньою для збіжності ряду, що можна бачити на прикладі так званого гармонійного ряду

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots} \tag{7}$$

Дослідити збіжність ряду (7).

- Оцінимо знизу деякі частинні суми:

$$S_1 = 1,\ \ S_2 = 1 + \frac{1}{2},\ \ S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}.$$

$$S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{3}{2}, \ \ldots$$

Аналогічним способом отримаємо оцінку

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Оскільки частинні суми не обмежені згори, то не існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ і гармонійний ряд розбігається. Хоча для гармонійного ряду (7) виконана необхідна умова збіжності (6)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$.

- Шукаємо границю загального члена ряду

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1000n+1} = \frac{1}{1000}.$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то розглядуваний ряд розбігається.

Розглянемо знову ряд геометричної прогресії (3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0).$$

При $|q| > 1$ ряд розбігається, бо загальний член ряду $u_n = aq^n$ не прямує до нуля.

Властивості дій з рядами

Теорема 5.4. **Задано числовий ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{8}$$

Якщо помножити члени ряду на один і той самий числовий множник $a \neq 0$ і дістати ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots, \tag{9}$$

то із збіжності ряду (8) випливає збіжність ряду (9), і навпаки, зі збіжності ряду (9) випливає збіжність ряду (3). При цьому для сум ряду справджується рівність:

$$\boxed{a\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} au_n, \quad a = \text{const}}$$

Отже, дії множення на число і підсумовування переставні.

Теорема 5.5. **Якщо два ряди збігаються, то їх можна почленно додавати і віднімати, тобто**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n).} \qquad (10)$$

Теорема 5.6. **Збіжність числового ряду не зміниться, якщо для нього приписати або відкинути скінченну кількість членів.**

Розглянемо збіжний ряд з нульовими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-n) = (1-1)+(2-2)+(3-3)+\ldots+(n-n)+\ldots$$

Розкривши дужки, дістанемо збіжний ряд

$$1-1+2-2+3-3+\ldots+n-n+\ldots,$$

загальний член якого не прямує до нуля.

5.2. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Найбільш часто використовуються ознаки збіжності рядів з додатними членами.

5.2.1. НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Розглядається ряд з додатними членами

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \;\; u_n>0 \;\; (u=1,2,\ldots,n,\ldots). \qquad (11)$$

Частинні суми ряду монотонно зростають, бо

$$S_2-S_1=u_2>0, \; S_3-S_2=u_3>0, \ldots, S_n-S_{n-1}=u_n>0, \ldots$$

Звідси випливає правильність такої теореми.

Теорема 5.7. **Для того, щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмежені зверху.**

Доведення. Якщо ряд (11) збігається, то існує границя послідовності частинних сум. Відомо, що збіжна послідовність обмежена.

Нехай послідовність частинних сум ряду обмежена зверху. За теоремою Вейєрштрасса монотонно зростаюча обмежена послідовність має границю. Отже, послідовність частинних сум ряду має границю і ряд збігається.

5.2.2. ОЗНАКИ ПОРІВНЯННЯ

Розглядаємо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{13}$$

Теорема 5.8. **Нехай з деякого номера *n* виконується нерівність $u_n \le v_n$. Тоді із збіжності ряду (13) випливає збіжність ряду (12), а із розбіжності ряду (12) випливає розбіжність ряду (13).**

Доведення. Оскільки відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність, то можна вважати, що нерівність $u_n \le v_n$ виконується для всіх членів рядів. Якщо збігається ряд (13), то всі його частинні суми обмежені зверху. З огляду на це всі частинні суми ряду (12) теж обмежені зверху і, отже, ряд (12) збігається.

Якщо ряд (12) розбігається, то ряд (13) не може збігатися, бо за доведеним вище із збіжності ряду (13) випливає збіжність ряду (12). Теорему доведено.

При виконанні нерівності $u_n \le v_n$ кажуть, що ряд (13) *мажорує* ряд (12).

Дослідимо збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{14}$$

- Візьмемо збіжний ряд порівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{15}$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}, \ \ldots, \ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \ \ldots,$$

то за теоремою 2 ряд (4) збігається.

На практиці найбільш зручна ознака порівняння у граничній формі.

Теорема 5.9. **Нехай для членів рядів (12), (13) існує границя**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 < l < \infty).}$$

Тоді обидва ряди (12), (13) збігаються або розбігаються одночасно. Якщо $l = 0$, то зі збіжності ряду (12) випливає збіжність ряду (13). Якщо $l = +\infty$, то з розбіжності ряду (13) випливає розбіжність ряду (12).

Доведення. Нехай $0 < l < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < l$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$, такий що при $n > N$ виконуватимуться нерівності:

$$0 < l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon.$$

З нерівностей $(l - \varepsilon)v_n < u_n < (l + \varepsilon)v_n$ і збіжності ряду (12) випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)v_n = (l-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. З розбіжності ряду (12) $\sum_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)v_n = (l+\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, що остаточно доводить правильність теореми.

Порівняємо збіжність рядів (14), (15), що мають загальні члени $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

• Шукаємо границю відношення загальних членів

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1.$$

Згідно з теоремою 5.9 обидва ряди (14), (15) збігаються або розбігаються одночасно. Оскільки ряд (15) збігається, то й ряд (14) збігається.

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ порівнюючи з розбіжним гармонійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Оскільки існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}=1,$$

то досліджуваний ряд також розбігається.

5.2.3. ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА

***Теорема 5.10.* Якщо для ряду з додатними членами**

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{16}$$

починаючи з деякого номера $n\geq N$ виконується нерівність

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q<1,} \tag{17}$$

то ряд (16) збігається. Якщо починаючи з деякого номера $n\geq N$ виконується нерівність

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1,} \tag{18}$$

то ряд розбігається.

Доведення. З нерівності (17) випливає, що справджуються нерівності

$$u_{N+1}\leq qu_N,\ u_{N+2}\leq qu_{N+1}\leq q^2u_N,\ u_{N+3}\leq qu_{N+2}\leq q^3u_N,\ldots,u_{N+p}\leq q^pu_N,\ \ldots$$

Отже, члени ряду

$$u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots+u_{N+p}+\ldots \tag{19}$$

мажоруються членами збіжного ряду

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \ldots + q^p u_n + \ldots, \ |q| < 1.$$

Звідси випливає збіжність ряду (19) і, отже, збіжність ряду (16).

Якщо виконується нерівність (18), то справджується нерівність

$$u_{N+1} \geq u_N, \ u_{N+2} \geq u_{N+1} \geq u_N, \ \ldots, \ u_{N+p} \geq u_{N+p-1} \geq u_N, \ \ldots$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд (16) розбігається. Теорему доведено.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=v}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots, \ u_n = \frac{1}{n!}.$$

- Дамо оцінку відношення членів ряду при $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)}}{\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

З теореми 5.10 випливає збіжність ряду, який розглядається.

Теорема 5.11. **(Ознака Даламбера у граничній формі.) Якщо для ряду (16) з додатними членами існує границя**

$$\boxed{\boldsymbol{q = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},}}$$

то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, при $q = 1$ ряд може збігатися і розбігатися.

Доведення. Якщо $q < 1$, то при достатньо великих значеннях n буде виконуватись нерівність $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q_1 < 1 \ (q < q_1)$ і, отже, з огляду на теорему 5.10 ряд (16) збігається.

При $q > 1$ достатньо великих значеннях і буде виконуватися нерівність $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ і, отже, ряд (16) буде розбіжним.

При $q = 1$ ряд (6) може збігатися або розбігатися.

Розглянемо чисельний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}+\ldots$$

Знайдемо границю відношення членів ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\,2^n}{2^{n+1}\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

З теореми 5.11 випливає збіжність ряду.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{na^n}=\frac{2}{1\cdot a}+\frac{2^2}{2a^2}+\frac{2^3}{3a^3}+\ldots+\frac{2^n}{na^n}+\ldots,\ u_n=\frac{2^n}{na^n},$$

де a — параметр ($a > 0$).

- Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n\cdot a^n}{(n+1)a^{n+1}\cdot 2^n}=\frac{2}{a}.$$

Отже, при $a < 2$ ряд розбігається, а при $a < 2$ ряд збігається.

Дослідимо за ознакою Даламбера розбіжний гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

- Для першого ряду знаходимо

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$$

Для другого ряду маємо

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(u+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1.$$

Отже, при $q = 1$ ряди можуть розбігатися або збігатися.

5.2.4. РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ КОШІ

Теорема 5.12. **Якщо для ряду з додатними членами**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{20}$$

починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність

$$\boxed{\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1,}$$

то ряд збігається. Якщо починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність $\boxed{\sqrt[n]{u_n} \geq 1}$, то ряд розбігається.

Доведення. Якщо при $n \geq N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{u_n} \leq q,$ то $u_n \leq q^n$ і ряд (20) збігається, бо мажорується членами збіжної геометричної прогресії. Якщо $\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$ то $u_n \geq 1$ і розбігається, бо загальний член ряду не прямує до нуля.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} + \ldots$$

- Оскільки виконується нерівність

$$\sqrt[n]{(3+(-1)^n)^{-n}} \leq \frac{1}{3+(-1)^n} \leq \frac{1}{2},$$

то ряд, що досліджується, збігається.

Теорема 5.13. **(Радикальна ознака Коші у граничній формі.) Якщо для ряду (20) з додатними членами існує границя**

$$\boxed{q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}\,.}$$

то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, а при $q = 1$ ряди можуть збігатися або розбігатися.

Доведення. Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+\left(\frac{3}{7}\right)^{3}+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}+\ldots$$

• Знаходимо границю

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

При $q=\frac{1}{2}<1$ ряд збігається.

Дослідимо збіжність ряду з параметром *a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{a}{1}\right)+\left(1+\frac{a}{2}\right)^{2^2}+\left(1+\frac{4}{3}\right)^{3^2}+\ldots+\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

• Знаходимо границю

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}=e^{a}.$$

При $a>0$ ряд розбігається, при $a<0$ ряд збігається.

Дослідимо за допомогою радикальної ознаки збіжність розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

• Знаходимо границі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{n}}=e^{0}=1 \text{ і}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

Отже, при $q=1$ ряд може бути розбіжним або збіжним.

Зауваження. Значення границі q в ознаці Даламбера збігається зі значенням границі q в радикальній ознаці Коші. При $q=1$ доцільно застосувати наведену далі інтегральну ознаку Коші.

5.2.5. ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ КОШІ

Інтегральна ознака збіжності заснована на порівнянні ряду з невласним інтегралом.

Нехай для ряду з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

вдалося знайти неперервну, монотонно спадну при $x \geq 1$ функцію $y = f(x)$ таку, що $u_n = f(n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (див. рис. 5.1).

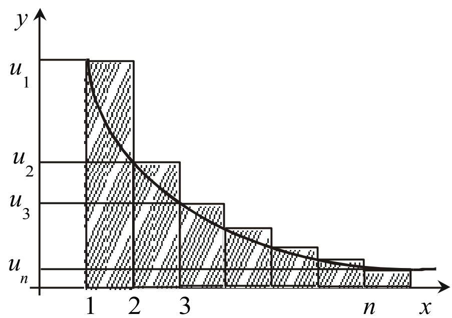

Рис. 5.1

Теорема 5.14. **Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і монотонно спадає при $x \geq 1$, то невласний інтеграл**

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx \qquad (21)$$

і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (22)$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. З огляду на монотонне спадання функції виконується нерівність

$$f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \quad (n = 1, 2, \ldots, k).$$

Підсумовуючи ці нерівності, дістаємо

$$\sum_{n=2}^{k+1} f(n) \leq \int_{1}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{k} f(n).$$

Якщо збігається невласний інтеграл, то з обмеженості частинних сум ряду $\sum_{n=2}^{k+1} f(n)$ випливає збіжність ряду (21). Якщо збігається ряд, то з обмеженості інтеграла $\int_{1}^{k+1} f(x)dx$ випливає збіжність невласного інтеграла (21). Теорему доведено.

Дослідимо збіжність гармонійного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

• Оскільки $u_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то можемо скористатися функцією $f(x) = \frac{1}{x}$.

Це неперервна, монотонно спадна при $x \geq 1$ функція. Отже, збіжність гармонійного ряду рівносильна збіжності невласного інтеграла

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln|x| \Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b \to +\infty} \ln|b| = +\infty.$$

Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то ряд також розбіжний.

Дослідимо збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \quad (s > 0). \qquad (23)$$

• Використаємо функцію $y = \frac{1}{x^s}$, яка при $x \geq 1$ неперервна і монотонно спадає. Тому збіжність ряду рівносильна збіжності невласного інтеграла

$$I_s = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{при } s > 1 \\ \infty & \text{при } s \leq 1. \end{cases}$$

Отже, ряд (23) збігається при $s > 1$ і розбігається при $s \leq 1$.

Наведемо окремі випадки ряду (23). Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

розбігається, бо $s = \frac{1}{2} < 1$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

збігається, бо $s = 2 > 1$.

5.2.6. ЕКОНОМІЧНИЙ ПРИКЛАД

Якщо $100i$ — відсоток нарахування на вкладену суму, то $\rho = \frac{1}{1+i}$ називається **множником дисконту**. Через k років вкладена сума $\rho^k b_k$ набуває значення b_k. Загальна сума вкладень за n років становить:

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \rho^k b_k.$$

Якщо прибуток від кожного вкладу буде сталим, тобто $b_k = b$, то маємо

$$K_n = b\sum_{k=1}^{n} \rho^k = b\frac{\rho - \rho^{n+1}}{1-\rho} = b\frac{1}{1+i}\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{b}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \frac{b}{i}.$$

Якщо прибуток b_k змінюється за лінійним законом

$$b_k = a + bk_1,$$

то для загальної суми вкладень знаходимо вираз

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \rho^k = a\sum_{k=1}^{n} \rho^k + b\sum_{k=1}^{n} k\rho^k.$$

Обчислимо значення сум

$$\sum_{k=1}^{n} \rho^k = \frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}, \quad \sum_{k=1}^{n} k\rho^k = \rho\sum_{k=1}^{n} k\rho^{k-1} = \rho\frac{d}{d\rho}\frac{\rho-\rho^{n+1}}{1-\rho} = \frac{\rho - (n+1)\rho^{n+1} + n\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2}.$$

Звідси випливає, що

$$K_n = a\rho\frac{(1-\rho^n)}{1-\rho} + b\frac{\rho - (n+1)\rho^{n+1} + n\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2} =$$

$$= a\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + b\frac{n - (n+1)(1+i) + (1+i)^{n+1}}{i^2(1+i)^n}.$$

У границі при $n \to +\infty$ дістаємо пропорційний вираз

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{a}{i} + \frac{b(1+i)}{i^2}.$$

Якщо прибуток зростає за законом

$$b_k = b(1+g)^k,$$

то маємо вираз

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \rho^k = b\sum_{k=1}^{n} \rho^k (1+g)^k = b\rho(1+g)\frac{1-\rho^n(1+g)^n}{1-\rho(1+g)} =$$

$$= b\frac{1+g-(1+g)^{n+1}(1+i)^{-n}}{i-g}.$$

Аналогічно можна знайти значення K_n у разі інших законів отримання прибутку від кожного річного вкладу.

5.3. ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ЗІ ЗНАКОЗМІННИМИ ЧЛЕНАМИ

5.3.1. ЗНАКОПОЧЕРГОВІ РЯДИ. ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ЛЕЙБНІЦА

Означення. Ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots, \qquad (24)$$

де $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), називається **знакопочерговим** рядом.

Лейбніц указав достатню умову збіжності ряду (24).

Теорема 5.15. **Нехай у знакопочерговому ряді (24) послідовність a_n(n = 1, 2, 3, …) монотонно спадає. Якщо**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0,}$$

ряд (24) збігається і його сума не перевищує a_1.

Доведення. Розглянемо послідовність парних частинних сум ряду (24). Згідно з нерівностями

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$$

Послідовність частинних сум

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_n)$$

монотонно зростає. Суми S_n можна подати у вигляді

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

звідси випливає, що $S_{2n} \le a_1$ (n = 1, 2, 3, …). Монотонно зростаюча, обмежена послідовність S_{2n} збігається, тобто існує границя

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}.$$

Розглянемо послідовність непарних частинних сум.

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}, \;\; \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Оскільки послідовності парних і непарних частинних сум прямують до однієї й тієї самої границі, то ряд (24) збігається. Теорему доведено.

Дослідимо збіжність знакопочергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

Усі умови теореми 5.15 виконані, і тому ряд збігається.

5.3.2. АБСОЛЮТНА Й УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ

Розглянемо довільний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (25)$$

Означення. Ряд (25) називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (26)$$

Збіжний ряд (25) називається **умовно збіжним**, якщо ряд (26) розбіжний.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є умовно збіжним, бо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний.

Очевидно, що із збіжності ряду (26) випливає збіжність ряду (25), бо члени ряду (25) можуть мати різні знаки.

Теорема 5.16. **Абсолютно збіжний ряд збігається.**

Доведення. Нехай збігається ряд (26). Для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $N = N(\varepsilon)$ таке, що при $n \ge N$, $p > 0$ буде виконана нерівність

$$\left\| u_{n+1} \right| + \left| u_{n+2} \right| + \left| u_{n+3} \right| + \ldots + \left| u_{n+p} \right\| < \varepsilon.$$

При цьому буде також виконана нерівність

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon,$$

тобто ряд (25) також збігатиметься.

Оскільки для рядів з додатними членами відомі достатні ознаки збіжності, то їх можна використовувати для дослідження збіжності рядів за знакопочерговими членами.

Теорема 5.17. **Якщо для знакопочергового ряду**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

існують границі

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|, \quad q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| u_n \right|},$$

то при $q < 1$ ряд абсолютно збіжний, а при $q > 1$ — розбіжний.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} + \ldots$$

- Знаходимо границю

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} \right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд, що розглядається, збігається абсолютно.

Раніше відмічалося, що в довільному ряді не можна переставляти члени ряду. Наведемо без доведення такі твердження.

Теорема 5.18. **Якщо ряд збігається абсолютно, то за будь-якої перестановки членів ряд буде збігатися і сума його не змінюватиметься.**

Теорема 5.19. **(Теорема Рімана.) Якщо ряд збігається умовно і *s* — будь-яке наперед задане число, то завжди можна переставити члени ряду так, щоб сума отриманого ряду дорівнювала *s*.**

Дамо пояснення до теореми Рімана. Умовна збіжність ряду виконується завдяки тому, що додатні і від'ємні члени взаємно знищуються. Якщо скласти ряд лише із додатних членів і ряд лише із від'ємних членів, то ці ряди розбігаються. Отже, можна почергово обирати лише додатні або від'ємні числа так, щоб значення частинних сум було як можна ближче до значення s. При цьому сума ряду дорівнюватиме s.

Розглянемо ряд Лейбніца

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots, \quad \frac{1}{2} < S < 1.$$

Переставимо члени ряду так, щоб після додатного члена стояли два від'ємні.

При цьому дістанемо ряд

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

За такого переставлення членів ряду сума ряду зменшилась удвічі.

5.4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Означення. Якщо членами ряду є функції $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots} \qquad (1)$$

називається ***функціональним***.

При кожному фіксованому значенні x ряд (1) є числовим рядом. Для дослідження збіжності функціональних рядів можна застосовувати викладені раніше ознаки збіжності для числових рядів.