2. Випадок криволінійної області. Нехай область D обмежена двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, і вертикальними відрізками $x=a$ і $x=b$ (рис. 2.32). Нехай будь-яка пряма, паралельна осі y, перетинає межу області D не більш ніж у двох точках. Тоді справджується формула:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy.} \tag{19}$$

У (19) спочатку функцію $f(x,\ y)$ інтегруємо за змінною y від $y=\varphi_1(x)$ до $y=\varphi_2(x)$, вважаючи x сталою, а потім результат інтегруємо за x на відрізку $[a,\ b]$.

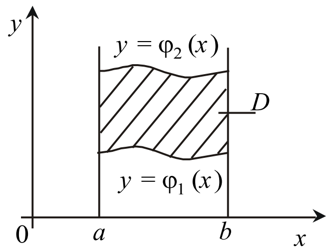

Рис. 2.32

Якщо область D (рис. 2.33) визначається нерівностями $c\le y\le d$, $g_1(y)\le x\le g_2(y)$, де $g_1(y)$ і $g_2(y)$ — неперервні на відрізку $[c;\ d]$, і будь-яка пряма, паралельна осі x, перетинає межу області не більш ніж у двох точках, то

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,\ y)\,dx.} \tag{20}$$

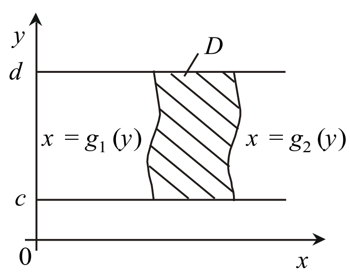

Рис. 2.33

Обчислити інтеграл

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy,$$

якщо D обмежена прямими $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$. (Рис. 2.34.)

● За формулою (19) маємо:

$$\iint\limits_{\substack{y=x,\ y=2x\\ x=2,\ x=3}} (x+2y)\,dxdy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y)\,dy = \int_2^3 dx\left(xy + y^2\right)\Big|_x^{2x} =$$

$$= \int_2^3 \left(2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2\right)dx = \int_2^3 \left(4x^2\right)dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{4}{3}(27-8) = \frac{4\cdot 19}{3} = \frac{76}{3}.$$

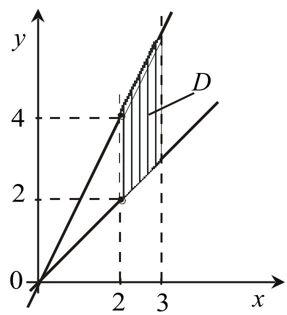

Рис. 2.34

Обчислити інтеграл

$$\iint_D \sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy,$$

якщо D обмежена прямими $y = 1$, $y = x$, $y = -x$ (рис. 2.35).

● За формулою (20) дістаємо:

$$\iint\limits_{\substack{y=x,\ y=-x\\ y=1}} \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} \sqrt{y^2-x^2}\,dx = \int_0^1 dy\left(\frac{1}{2}x\sqrt{y^2-x^2} + \frac{1}{2}y^2\arcsin\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{-y}^{y} =$$

$$= \int_0^1 dy\left(\frac{1}{2}y\cdot 0 + \frac{1}{2}y^2\arcsin\frac{y}{y} - \frac{1}{2}(-y)\cdot 0 - \frac{1}{3}y^2\cdot\arcsin\left(\frac{-y}{y}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^2\cdot\frac{\pi}{2} + y^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dy = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1 y^2 dy = \frac{\pi}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

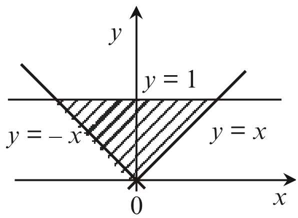

Рис. 2.35

Зауваження. Довільну область з кусково-гладкою межею можна розбити на скінченну кількість областей, кожна з яких має вигляд, показаний на рис. 2.33. Тому обчислення подвійного інтеграла завжди зводиться до обчислення повторних інтегралів.

Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_D (1+x+y)^{-2}\,dxdy,$$

якщо D — область, обмежена прямими $x = y$, $y = 2x$, $y = 6 - x$ (рис. 2.36).

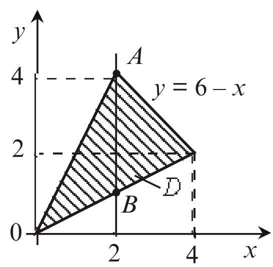

Рис. 2.36

Відрізком AB поділимо D на два трикутники D_1 і D_2. Тоді

$$\iint\limits_D (1+x+y)^{-2}\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (1+x+y)^{-2}\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (1+x+y)^{-2}\,dxdy.$$

За формулою (19) маємо:

$$\iint\limits_{D_1} (1+x+y)^{-2}\,dxdy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \int_0^2 \left(-\frac{1}{1+x+y} \right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{2x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} \right) dx = -\frac{1}{3}\ln 7 + \frac{2}{3}\ln 4;$$

$$\iint\limits_{D_2}(1+x+y)^{-2}\,dxdy=\int\limits_2^4 dx\int\limits_{x/2}^{6-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_2^4\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{7}+\frac{2}{3}(\ln 7-\ln 4).$$

Отже,

$$\iint\limits_{D}(1+x+y)^{-2}\,dx=\boxed{\frac{1}{3}\ln 7-\frac{2}{7}}.$$

Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_0^{2\sin x} f(x,\ y)dy.$$

• Область $D=\{(x,\ y)|0\le x\le\pi,\quad 0\le y\le 2\sin x\}$ зображено на рис. 2.37.

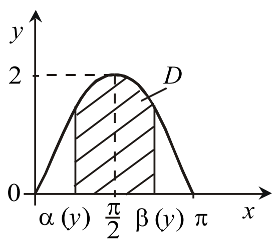

Рис. 2.37

Проекцією множини D на вісь y є відрізок [0; 2]. Кожна пряма $y=\text{const}\in[0;\ 2]$ перетинає множину D по відрізках з кінцями $\alpha(y)$ і $\beta(y)$, які знаходимо як розв'язок рівняння $y=2\sin x$ на відрізку $[0;\ \pi]$; $\alpha(y)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\beta(y)=\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$. Таким чином, множина D задається нерівностями:

$$0\le y\le 2,\quad \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)<x\le\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right).$$

За формулою (19) маємо:

$$\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_0^{2\sin x} f(x,\ y)dy=\int\limits_0^{2} dy\int\limits_{\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)} f(x,\ y)dx.$$

Зауваження. Зміна порядку інтегрування в повторному інтегралі іноді істотно спрощує його обчислення.

2.3.7. ПОНЯТТЯ *n*-КРАТНОГО ІНТЕГРАЛА

***Означення*: *n*-вимірним паралелепіпедом V_n у просторі R_n** називається множина точок $x = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, що задовольняють співвідношення

$$V_n = \{(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) | a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2 \le x_2 \le b_2,\ ...,\ a_n \le x_n \le b_n\},$$

де $a_i,\ b_i \in R,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$

Правило. Об’єм *n*-вимірного паралелепіпеда визначається рівністю

$$V = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\,.$$

Нехай G — обмежена замкнена область у просторі R^n і функція $u = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ неперервна в цій області. Гіперплощинами $x_i = \text{const}$ розбиваємо область G на *n*-вимірні паралелепіпеди, об’єм яких V_i. У кожному такому паралелепіпеді візьмемо довільну точку $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0\right)$ і утворимо інтегральну суму

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k}...\sum_{i=1}^{N_i} f\left(x_1^0,\ x_2^0,\ ...x_n^0\right)V_i\,. \tag{21}$$

Означення. Границя інтегральних сум (21) при $\max\Delta x_{1j} \to 0$, $\max\Delta x_{2k} \to 0$, $\max\Delta x_{nl} \to 0$ називається ***n*-кратним інтегралом від функції *f*** за областю G і позначається

$$\iint\limits_{G}...\int f(x_1,\ x_2,\ ...x_n)\,dx_1 dx_2\ ...\ dx_n.$$

Для *n*-кратних інтегралів справджуються всі властивості подвійних інтегралів.

Інтеграл від функції $f(x_1,\ ...,\ x_n)$ за *n*-вимірним паралелепіпедом дістаємо послідовним інтегруванням функції f за кожною зі змінних x_i від a_i до b_i в будь-якому порядку.

Для криволінійної області *n*-вимірний інтеграл обчислюється за формулами, аналогічними (19) і (20).

Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_{G}\iint x\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

де G — область, обмежена прямими $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 4$, $5 \le z \le t^2$, $5 \le t \le 6$.

● Маємо

$$\iint\limits_G\iint xdxdydzdt=\int_0^1 dx\int_x^4 dy\int_5^6 dt\int_5^{t^2} xdz=\int_0^1 dx\int_x^4 dy\int_5^6 xz\Big|_5^{t^2} dt=$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^4 dy\int_5^6 \left(xt^2-5x\right)dt=\int_0^1 dx\int_x^4 \left(\frac{xt^3}{3}-5xt\right)\Bigg|_5^6 dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^4 \left(x\frac{6^3}{3}-5x\cdot 6-\frac{x}{3}5^3+25x\right)dy=\int_0^1 dx\int_x^4 \left(\frac{91}{3}x-5x\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^4 \frac{76}{3}xdy=\int_0^1 \frac{76}{3}\cdot xy\Big|_x^4 dx=\frac{76}{3}\int_0^1 x(4-x)dx=$$

$$=\frac{76}{3}\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{76}{3}\left(2-\frac{1}{3}\right)=\frac{76}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{380}{9}.$$

2.3.8. ЗАМІНА ЗМІННИХ У ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛАХ

Нехай $f(x,\ y)$ — неперервна функція, визначена в замкненій обмеженій області D з кусково-гладкою межею Γ (рис. 2.38).

Область D відображається взаємнооднозначно на область G (рис. 2.39) площини uv за допомогою функцій $x=x(u,\ v)$, $y=y(u,\ v)$.

Потрібно перетворити інтеграл $\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy$ на інтеграл за новими змінними $(u,\ v)\in G$. Область G розіб'ємо прямими $u=u_1=\text{const}$ і $v=v_j=\text{const}$ на прямокутники P_{ij}, площі яких дорівнюють $S_{P_{ij}}$ (див. рис. 2.39).

Тоді сім'ї кривих $u(x;\ y)=u_i$ і $v(x;\ y)=v_j$ розбивають область D на відповідні криволінійні паралелограми Π_{ij} з площами $S_{\Pi_{ij}}$ (див. рис. 2.38).

При цьому точці $(u_i,\ v_j)\in G$ відповідає точка $(x_i,\ y_j)=\left(x(u_i,\ v_j),\ y(u_i,\ v_j)\right)\in D$. Звідси

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(x_i,\ y_i)S_{\Pi_{ij}}=\lim_{\substack{\max\Delta u_i\to 0\\ \max\Delta v_j\to 0}}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f\left(x(u_i,\ v_j),\ y(u_i,\ v_j)\right).$$

$$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ y)}\right|_{\substack{u=u_i\\ v=v_j}} S_{P_{ij}}=\iint\limits_G f(x(u,\ v),\ \ u(u,\ v))\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| dudv.$$

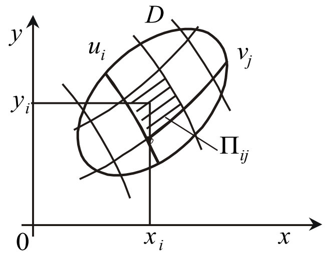

Рис. 2.38

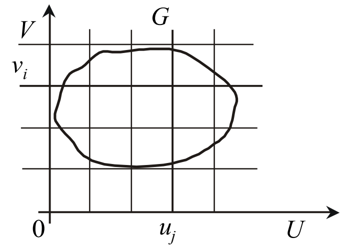

Рис. 2.39

Таким чином, якщо функції $x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$ здійснюють взаємно однозначно відображення області G площини uy на області D площини xy, то справджується рівність:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,\ v);\quad y(u,\ v))\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| dudv,} \qquad (22)$$

яка називається **формулою заміни змінних у подвійному інтегралі**.

2.3.9. ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Найпоширенішим перетворенням на площині є *полярні координати u, v* точок області D.

Вони пов'язані з декартовими координатами x і y рівностями $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, де $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (або $-\pi \le \varphi \le \pi$).

Беручи $u = \rho$, $v = \varphi$, дістаємо

$$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді згідно з формулою (22) подвійний інтеграл з переходом до полярної системи координат перетворюється так:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho\ \cos\varphi,\quad \rho\ \sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.} \qquad (23)$$

Площа області D в полярних координатах визначається формулою

$$\boxed{S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_G \rho d\rho d\varphi.} \qquad (24)$$

Обчислити площу замкненої фігури, обмеженої кривою

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right),\; a>0. \tag{25}$$

- Переходячи до полярних координат, із рівняння кривої дістаємо

$$\rho^4=2a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Із рівняння (25) бачимо, що фігура, обмежена даною кривою, симетрична відносно координатних осей і початку координат. Отже, достатньо обчислити площу частини фігури, розміщеної в першій координатній чверті, де $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, $0\le\rho\le a\sqrt{2\cos 2y}$, і результат помножити на 4.

Дістанемо:

$$S=4\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\rho d\rho=2\int_0^{\pi/4}\left(p^2\Big|_0^{a\sqrt{2\cos^2\varphi}}\right)d\varphi=4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi=2a^2.$$

2.3.10. ЗАМІНА ЗМІННИХ У *n*-КРАТНИХ ІНТЕГРАЛАХ

Сформулюємо правило заміни змінних у n-кратних інтегралах. Нехай взаємно однозначне перетворення

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\\ x_2&=x_2(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=x_n(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)\end{aligned}$$

відображає область $\Omega_n\subset R^n$ змінних $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ на область $\gamma_n\subset R^n$ змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ і якобіан

$$\left|\frac{D(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тоді n-кратний інтеграл перетворюється за формулою:

$$\iint\limits_{V_n}\ldots\int f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)dx_1dx_2\ \ldots\ dx_n =$$
$$=\iint\limits_{\Omega_n}\ldots\int f(x_1(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\ x_2(u_1,\ u_2,\ldots,u_n),\ \ldots,\ x_n(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n))\times$$
$$\times\left|\frac{D(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)}\right|du_1du_2\ \ldots\ du_n.$$

2.3.11. ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПОВЕРХНІ

1. *Параметричне задання поверхні*

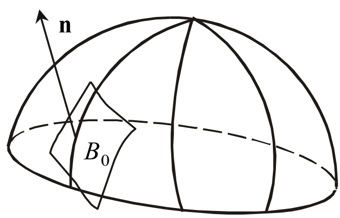

Рис. 2.40

Нехай на декартовій площині uv вибрано область G, в якій визначено функції:

$$\begin{aligned} &x = x(u,\ v),\\ &y = y(u,\ v),\\ &z = z(u,\ v),\ \ (u,\ v)\in G. \end{aligned} \qquad (26)$$

Ці функції неперервно диференційовні в G, причому їх якобіани мають такий вигляд:

$$\left|\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\ \left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},\ \left|\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

і не дорівнюють одночасно нулеві для кожної точки $(u,\ v)\in G$.

Для всіх $(u;\ v)\in G$, згідно з (26) існує єдина відповідна точка $(x,\ y,\ z)\in R^3$. Образом області G при такому відображенні є де-яка поверхня S в R^3, яка називається **поверхнею, заданою параметрично** з параметрами $u,\ v \in G$.

Площа поверхні обчислюється за формулою

$$\boxed{S = \iint_G |n| du dv,} \qquad (27)$$

де $\mathrm{n} = \left(\left| \frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)},\ \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)},\ \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} \right| \right)$ — вектор перпендикулярний до площини, дотичної до поверхні S у точці $B_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ рис. 2.40. Вектор **n** називається **нормаллю до поверхні *S*.**

Величина $|\mathbf{n}| du v$ називається **диференціалом площі поверхні *ds***:

$$ds = |\mathbf{n}| du dv.$$

Формулу (27) можна записати у вигляді:

$$\boxed{S = \iint_G \sqrt{\left| \frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)} \right|^2 + \left| \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)} \right|^2 + \left| \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} \right|^2}\, du dv.}$$

2. *Явне задання поверхні.*

Нехай D — область на площині xy. Коли

$$z = f(x,\ y),\ x,\ y \in D, \qquad (28)$$

є функція, що має на D неперервні частинні похідні f'_x і f'_y, то графік цієї функції називається **гладкою поверхнею**. Говорять, що поверхня задана явно рівнянням (28).

У такому разі вектор нормалі до поверхні набирає вигляду:

$$\mathbf{n} = \left(-f'_x,\ -f'_y,\ 1 \right).$$

Площу поверхні S, що задана явно рівнянням $z = f(x,\ y)$, $(x,\ y) \in D$, згідно з (27) можна подати формулою:

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dx dy.} \qquad (29)$$

3. *Неявне завдання поверхні.*

Нехай в області $V \in R^3$ задано функцію $F = F(x,\ y,\ z)$, неперервну разом з частинними похідними F'_x, F'_y, F'_z. Припустимо, що $\mathbf{gradF} = \left(F'_x,\ F'_y,\ F'_z\right) \neq 0$, $\forall (x,\ y,\ z) \in V$. Тоді множина точок, що задовольняє рівняння

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \tag{30}$$

називається поверхнею, **заданою неявно**. Функція $z = f(x,\ y)$, що визначається рівнянням (30), має частинні похідні:

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ \ f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Звідси та з рівності (29) дістаємо **площу поверхні S, заданої неявно рівнянням** (30):

$$S = \iint\limits_D \frac{1}{|F'_z|}\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\,dxdy, \tag{31}$$

де D — проекція поверхні S на площину xy.

Знайти площу поверхні

$z = 5 + \sqrt{8\left(x^2 + y^2\right)}$, де $y \geq x^2$, $y \leq 1$ (рис. 2.41).

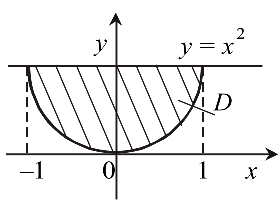

Рис. 2.41

● Поверхня задана явно. Знаходимо

$$z'_x = \sqrt{8}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \ z'_y = \sqrt{8}\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тоді

$$\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} = \sqrt{1 + \frac{8x^2}{x^2 + y^2} + \frac{8y^2}{x^2 + y^2}} = 3.$$

Отже, за формулою (29) шукана площа

$$S = 3\iint\limits_D dxdy = 3\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} dy = 3\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx =$$

$$= 3\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 3\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

2.3.12. КРАТНІ НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Означення. Кратний інтеграл називається *невласним*, якщо або область інтегрування, або підінтегральна функція, або як область, так і функція необмежена.

1. Невласні інтеграли 1-го роду

Нехай область D — необмежена. Візьмемо послідовність монотонних обмежених областей інтегрування $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$ — $D_n \subset D_{n+1}$, $\forall n$ і $D_n \to D$ при $n \to \infty$.

Наприклад, якщо область інтегрування збігається з площиною xy, то за послідовність D_n можна взяти сукупність кругів $x^2 + y^2 \le {a_n}^2$, $a_n < a_{n+1}$, із центром у початку координат.

Означення. **Невласним інтегралом за необмеженою областю інтегрування**, або **невласним інтегралом 1-го роду**, називається границя

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,\ y)dxdy, \qquad (32)$$

яка не залежить від вибору послідовності D_n. Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,\ y)dxdy.$$

Якщо границя (32) існує і скінченна, то невласний інтеграл за необмеженою областю називається **збіжним**, у противному разі — **розбіжним**.

Дослідити на збіжність інтеграл

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)}, \quad D:\ -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

● Область D збігається з площиною xy, тому за області інтегрування D_n беремо круги $x^2+y^2\le n^2$ радіусом n. Переходячи до полярних координат, маємо:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^n\frac{\rho d\varphi}{\left(1+\rho^2\right)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^n\frac{d\left(\rho^2+1\right)}{\left(1+\rho^2\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\rho^2+1}\right)\Bigg|_0^n d\varphi=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{n^2+1}+1\right)d\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2+1}+1\right)\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\pi\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)=\pi.$$

Інтеграл збіжний.

2. Невласні інтеграли 2-го роду

Нехай функцію $f(x,\ y)$ задано в замкненій області D.

Означення. Точка $\left(x_0,\ y_0\right)$ називається **особливою точкою** функції f, якщо в будь-якому околі U_δ точки $\left(x_0,\ y_0\right)$ радіусом δ функція f необмежена або невизначена.

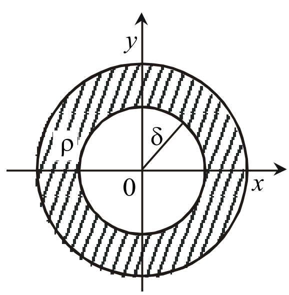

Рис. 2.42

Означення. Якщо функція $f\left(x,\ y\right)$ має в області D єдину особливу точку і неперервна в області $D\setminus U_\delta$, то ***невласним подвійним інтегралом 2-го роду*** від функції $f\left(x,\ y\right)$ за областю D називається границя

$$\lim_{\delta\to 0}\iint_{D\setminus U_\delta} f(x,\ y)\,dxdy. \tag{33}$$