Конспект лекцій по вищій математиці

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

ПОНЯТТЯ КРИВИХ НА ПЛОЩИНІ

Нехай l — крива на площині xy, параметричні рівняння якої $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Означення. Крива l називається *гладкою*, якщо (рис. 2.26):

1) функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервно диференційовні на $[\alpha; \beta]$ і $\mathbf{p} = (\varphi'(t);\ \psi'(t)) \neq (0,\ 0)$, $\forall t \in [\alpha; \beta]$;

2) l не має точок самоперетину.

Якщо l — *замкнена крива*, то $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, а також $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta)$, $\psi'(\alpha) = \psi'(\beta)$.

Вектор $\mathbf{p}(t)$ є напрямним вектором дотичної до кривої l у точці $(x(t);\ y(t)) \in l$.

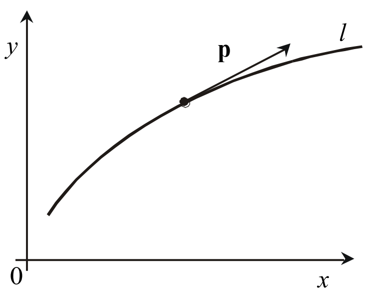

Рис. 2.26

Нехай криву l задано рівнянням $y = f(x)$, $x \in (a; b)$.

Означення. Крива називається *гладкою*, якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $f'(x)$, $\forall x \in (a; b)$. Крива, яка утворена скінченною кількістю гладких кривих і не має точок самоперетину, називається *кусково-гладкою*.

2.3.2. ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Об'єм криволінійного циліндра. Нехай $z = f(x;\ y)$ — невід'ємна, неперервна в замкненій обмеженій області D функція, тобто $f(x;\ y) \geq 0$, $\forall (x;\ y) \in D$. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x;\ y)$ визначає деяку поверхню S, проекція якої на площину xy збігається з D (рис. 2.27). Потрібно знайти об'єм V тіла T, обмеженого згори поверхнею S і знизу областю D з межею γ та циліндричною поверхнею з напрямною γ і твірними, паралельними осі z. Таке тіло називається *криволінійним циліндром.*

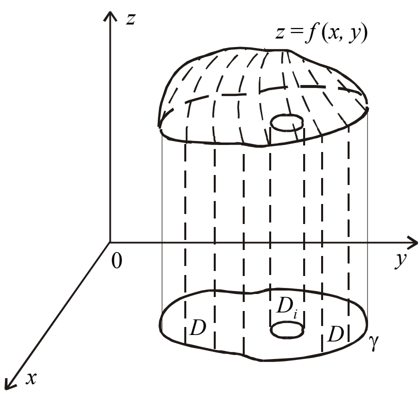

Рис. 2.27

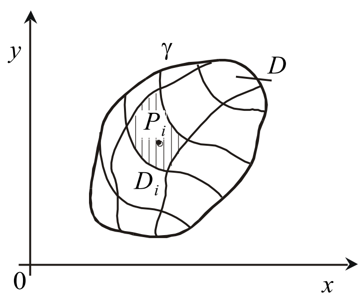

Рис. 2.28

• Розіб'ємо область D на n областей D_i з кусково-гладкими межами γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Через межу Γ_i проведемо циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі z. Ці поверхні розіб'ють тіло T на n стовпчиків T_i, об'єм кожного з яких наближено дорівнює $\Delta T_i = f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, де $(\xi_i;\ \eta_i)$ — довільна точка області D_i; ΔS_i — площа області D_i. Об'єм усього тіла T наближено подамо сумою

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i .$$

Нехай d_i — діаметр області D_i, а $\Delta = \max_i d_i$. Тоді точне значення об'єму таке:

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i . \tag{1}$$

Означення. Границя (1), якщо вона існує, позначається $\iint\limits_D f(x;\ y)dxdy$ і називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x;\ y)$ *за областю* D.

Об'єм криволінійного циліндра, обмеженого поверхнею $z = f(x;\ y) \ge 0$, $\forall (x;\ y) \in D$, *областю* D *та циліндричною поверхнею з напрямною* γ *і твірними, паралельними осі* z, *подається так:*

$$V = \iint\limits_D f(x;\ y)dxdy. \tag{2}$$

Маса плоскої пластинки. Нехай D — плоска пластинка, по поверхні якої неперервно розподілена маса з густиною $\rho = \rho(x,\ y)$. Треба знайти масу пластинки.

● Розіб'ємо пластинку D за допомогою кусково-гладких дуг довільним чином на n частин D_i (рис. 2.28).

Припускаючи що густина ρ в кожній частині D_i стала і дорівнює $\rho(\xi_i;\ \eta_i)$, де $P_i(\xi_i;\ \eta_i)$ — довільна точка D_i, дістаємо наближену масу частини D_i:

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i\,,$$

де ΔS_i — площа D_i. Тоді маса всієї пластинки D наближено дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$. Точна маса m всієї пластинки виражається граничним переходом при $\Delta = \max d_i \to 0$:

$$\boxed{m = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i = \iint\limits_D \rho(x;\ y)dxdy.}$$

2.3.3. ОЗНАЧЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Нехай в області D з кусково-гладкою межею γ задано неперервну функцію $f(x,\ y)$. Розіб'ємо область D кусково-гладкими дугами на n частинних областей D_i, площа яких ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

У кожній частинній області D_i виберемо довільну точку $(\xi_i;\ \eta_i)$ й утворимо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

яка називається *інтегральною сумою Рімана.*

Позначимо через Δ найбільший з діаметрів області D_i і назвемо його *діаметром розбиття.*

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i\to 1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i, \tag{3}$$

яка не залежить ні від способу розбиття області D на частини D_i, ні від вибору точок $(\xi_i;\ \eta_i)\in D_i$, то функція $f(x;\ y)$ називається *інтегровною за Ріманом в області D,* а сама границя називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x;\ y)$ за областю D і позначається

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

Зауважимо, що інтеграл від функції $f(x;\ y)$ за областю D є деяке число. Крім того, виконується рівність

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \iint_D f(u;\ v)dudv,$$

тобто для інтеграла не має значення, якими символами позначено аргументи функції $f(x)$.

Границя (3) не залежить від способу розбиття області D на D_i і вибору точок $(\xi_i;\ \eta_i)\in D_i$. Отже, якщо границя (3) існує, можна область D розбивати на частини D_i прямими, які паралельні осям координат (рис. 29).

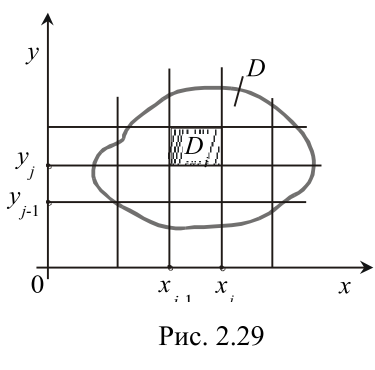

Рис. 2.29

Нехай D_{ij} — прямокутник зі сторонами

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\quad i=\overline{1,\ m};$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1},\quad j=\overline{1,\ n},$$

$D_{ij}\subset D_1$. Його площа S_{ij} дорівнює $\Delta x_i \Delta y_j$.

Інтегральна сума, що відповідає такому розбиттю області D, має вигляд

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i;\ \eta_j\right)\Delta x_i \Delta y_j\,,\ x_{i-1}\le \xi_i \le x_i\,,\ y_{y-1}\le \eta_j \le y_j\,.$$

Тоді, згідно з рівністю (4), дістаємо:

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0\\ \max \Delta y_j \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_i;\ \eta_j\right)\Delta x_i \Delta y_j\right) \qquad (5)$$

2.3.4. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

***Теорема 2.19*. Для того щоб функція *f*(*x, y*) була інтегровна в області *D*, необхідно, щоб *f*(*x, y*) була обмежена на *D*.**

***Теорема 2.20*. Якщо функція *f*(*x, y*) неперервна в обмеженій області *D*, то подвійний інтеграл існує.**

***Теорема 2.21*. Нехай *D* — обмежена замкнена область і *f*(*x, y*) — функція, визначена і неперервна в усіх точках цієї області, за винятком, можливо, точок, що належать скінченній кількості кусково-гладких ліній із області *D*. Тоді інтеграл (4) існує.**

Властивості подвійного інтеграла:

1. $\iint_D 1dxdy = \iint_D dxdy = S,\quad S$ — площа області D. (6)

• Беручи в (4) $f\left(x;\ y\right)=1$, дістаємо:

$$\iint_D dxdy = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = S.$$

2. $\boxed{\iint_D (\alpha f(x,\ y)+\beta f(x,\ y))dxdy = \alpha\iint_D f(x,\ y)dxdy + \beta\iint_D f(x,\ y)dxdy,\ \alpha,\ \beta = \text{const}.}$

• За означенням,

$$\iint_D (\alpha\, f(x,\ y)+\beta\, g(x,\ y))dxdy = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\alpha\, f(\xi_i,\ \eta_i)+\beta g(\xi_i,\ \eta_i))\Delta S_i =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha\, f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i + \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \beta\, g(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i = \alpha \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha\, f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i +$$

$$+ \beta \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i = \alpha \iint_D f(x,\ y)dxdy + \beta g(x,\ y)dxdy.$$

3. Нехай $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ (рис. 2.30).

Тоді

$$\boxed{\iint_D f(x;\ y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;\ y)dxdy + \iint_{D_2} f(x;\ y)dxdy.} \qquad (7)$$

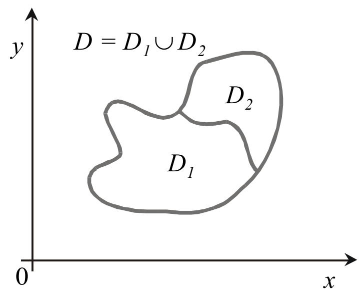

Рис. 2.30

• Нехай D_i — клітинки розбиття $D = D_1 \cup D_2$. Позначимо через D_{i1} — клітинки розбиття, що належать D_1, а через D_{i2} — клітинки, що належать D_2.

Тоді

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \sum_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_i,\ y_i)\Delta S_i = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_{i1} +$$

$$+ \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_{i2} = \iint_{D_1} f(x,\ y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,\ y)dxdy$$

($n = n_1 + n_2$).

4. Якщо $f(x,\ y) \ge 0$, $\forall (x,\ y) \in D$, то

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy \ge 0.} \qquad (8)$$

5. Якщо $f(x,\ y) \ge g(x,\ y)$, $\forall (x,\ y) \in D$, то

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy \ge \iint_D g(x,\ y)dxdy.} \tag{9}$$

6.
$$\left|\iint_D f(x,\ y)dxdy\right| \le \iint_D |g(x,\ y)|\,dxdy. \tag{10}$$

• Очевидно, виконується нерівність

$$-|f(x,\ y)| \le f(x,\ y) \le |f(x,\ y)|.$$

Отже, за властивістю 5

$$-\iint_D |f(x,\ y)|\,dxdy \le \iint_D f(x,\ y)\,dxdy \le \iint_D |f(x,\ y)|\,dxdy.$$

Звідси маємо нерівність (10).

7. Нехай $M = \max\ \ f(x,\ y)$, $m = \max\ \ f(x,\ y)$,

$$(x,\ y) \in D.$$

Тоді

$$\boxed{mS \le \iint_D f(x,\ y)dxdy \le MS,} \tag{11}$$

S — площа області D.

• Справді, виконується нерівність

$$m \le f(x,\ y) \le M.$$

Отже,

$$\iint_D m\,dxdy \le \iint_D f(x;\ y)dxdy \le \iint_D Mdxdy$$

і за властивостями 1 і 2 маємо нерівність (11).

8. Нехай D — прямокутник $a \le x \le b$, $c \le x \le d$ (рис. 2.31). $f(x,\ y) = f(x)g(y)$. Тоді

$$\boxed{\iint_D f(x)\,g(y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d g(y)dy.} \tag{12}$$

• Прямими, паралельними осям координат, розбиваємо прямокутник D на прямокутники D_{ij}, площі яких дорівнюють $\Delta x_i \Delta y_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Згідно з рівністю (5) дістаємо:

$$\iint_D \varphi(x)g(y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_i)\, g(\eta_i) \Delta x_i \Delta y_j \right) =$$

$$=\left(\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \varphi(\xi_i)\Delta x_i\right)\left(\lim_{\max \Delta y_j \to 0} \sum_{y=1}^{n} g(\eta_j)\Delta y_j\right) = \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d g(y)dy.$$

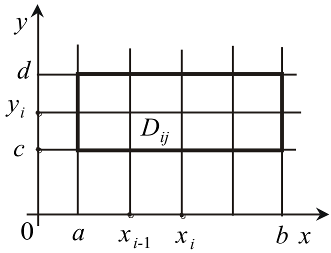

Рис. 2.31

9. ***Теорема 2.22. (Про середнє.)*** **Нехай $f(x,\ y)$ — функція, неперервна в обмеженій замкненій зв'язній області *D*. Тоді існує точка $(\xi,\ \eta)$, така що**

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = f(\xi,\ \eta)S, \tag{13}$$

де S — площа області D.

• З нерівності (11) випливає:

$$m \le \frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy \le M. \tag{14}$$

Нехай точки $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1) \in D$, причому

$$f(x_0,\ y_0) = M = \max f(x,\ y),$$
$$f(x_1,\ y_1) = m = \min f(x,\ y).$$

Сполучимо точки A і B неперервною кривою $x = x(t)$ і $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ так, щоб $x(\alpha) = x_0$, $y(\alpha) = y_0$, $x(\beta) = x_1$, $y(\beta) = y_1$.

У точках цієї кривої значення функції $f(x(t),\ y(t)) = F(t)$ однієї змінної t утворюють відрізок $[m;\ M]$. За теоремою Вейєрштрасса вона набуває й усіх проміжних значень між m і M. Згідно з нерівністю (14) число

$$\iint_D \frac{1}{S} f(x,\ y)dxdy \in [m;\ M].$$

Тоді знайдеться таке t_0, що

$$F(t_0) = f(x(t_0),\ y(t_0)) = f(\xi,\ \eta) = \frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy,$$

де $\xi = x(t_0)$, $\eta = y(t_0)$.

Число

$$f(\xi,\ \eta) = \frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy \tag{15}$$

називається **середнім значенням функції** $f(x,\ y)$ **в області** *D*.

2.3.5. ПОХІДНА ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПО ОБЛАСТІ ІНТЕГРУВАННЯ

Нехай *S* — площа області *D*, а $m = \iint_D f(x,\ y)dxdt$ — її маса. Тоді середня щільність речовини в *D* дорівнює $\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy$.

Згідно з (15) маємо

$$\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy = f(\xi,\ \eta),$$

де $(\xi,\ \eta) \in D$.

У разі стягування області *D* в точку $P_0(x_0,\ y_0)(d \to 0)$ внаслідок неперервності функції $f(x,\ y)$ дістаємо співвідношення:

$$\lim_{d\to 0}\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy = \lim_{(\xi,\ \eta)\to(x_0,\ y_0)} f(\xi,\ \eta) = f(x_0,\ y_0).$$

Ця границя називається **похідною подвійного інтеграла за областю *D* в точці $P_0(x_0,\ y_0)$.**

Якщо f(x, y) — неперервна в області D функція, то похідна подвійного інтеграла за областю інтегрування дорівнює підінтегральній функції.

2.3.6. ЗВЕДЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ПОВТОРНОГО

I. Випадок прямокутної області. Нехай область інтегрування є прямокутник

$$D = \{(x,\ y) |\ a \le x \le b,\quad c \le y \le d\}$$

зі сторонами, паралельними координатним осям (див. рис. 2.31) і $f(x,\ y)$ — неперервна в цій області функція. Якщо зафіксувати $y \in [c,\ d]$, то $f(x,\ y)$ буде неперервною функцією змінної x. Тому існує інтеграл $F(y) = \int\limits_a^b f(x,\ y)dx,$ який є неперервною функцією змінної $y \in [c,\ d]$. Таким чином, функцію $F(y)$ можна інтегрувати на відрізку $[c,\ d]$. Отже, дістаємо повторний інтеграл

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,\ y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\ y)dx. \tag{16}$$

Цей процес можна здійснити в оберненому порядку: спочатку обчислити функцію від x, визначену рівністю $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,\ y)dy$, а потім функцію Φ зінтегрувати за x від a до b. У результаті дістанемо повторний інтеграл:

$$\int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^b (f(x,\ y)dy)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy. \tag{17}$$

***Теорема 2.23*. Нехай функція $f(x,\ y)$ неперервна в замкненому прямокутнику *D*. Тоді виконується рівність**

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\ y)dx. \tag{18}$$

Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_D \left(5x^3 y + 6xy^3\right)dxdy,$$

$$D = \{(x;\ y) |\ 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4\}.$$

Маємо:

$$\iint\limits_{\substack{1\le x\le 2\\ 3\le y\le 4}} \left(5x^3y+6xy^3\right)dxdy=\int\limits_3^4\left(\int\limits_1^2\left(5x^3y+6xy^3\right)dx\right)dy=$$

$=\Bigg\|$ У внутрішньому інтегралі інтегрування виконуємо за змінною x, вважаючи y сталою. $\Bigg\|$ $\displaystyle =\int\limits_3^4\left(\left(\frac{5}{4}x^4y+3x^2y^3\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}\right)dy=$

$$=\int\limits_3^4\left(\frac{5}{4}\cdot 2^4y+3\cdot 2^2y^3-\frac{5}{4}y-3y^3\right)dy=\int\limits_3^4\left(\frac{75}{4}y+9y^3\right)dy=$$

$$=\left(\frac{75}{8}y^2+\frac{9}{4}y^4\right)\Bigg|_3^4=\frac{75}{8}\cdot 16+\frac{9}{4}\cdot 256-\frac{75}{8}9-\frac{9}{4}\cdot 81=\frac{75}{8}5\cdot 7+\frac{175}{4}\cdot 9=\frac{3675}{8}$$