ВВЕДЕНИЕ

Физика – наука о наиболее общих свойствах и формах движения материи.

Физика составляет основу фундаментальной подготовки инженера любого профиля. Неслучайно возникли междисциплинарные направления: физико-технические, физико-химические, биофизика, геофизика и др.

Методы физических исследований – опыт, гипотеза, эксперимент, теория.

МЕХАНИКА

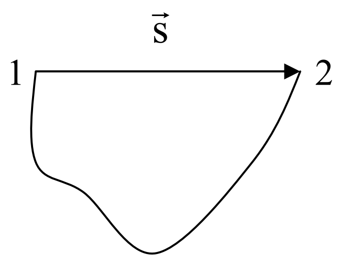
Раздел физики, изучающий движение тел в пространстве и времени, называют **механикой**. Раздел механики, рассматривающий движение тел без выяснения причин, вызывающих это движение, называют **кинематикой**. Движение, при котором любая прямая, проведенная через точки тела, переносится параллельно себе, называют **поступательным**.

Механика, изучающая движения частиц со скоростями $V << c$ (с – скорость света в вакууме) называется нерелятивистской для скоростей $V \sim c$ механика называется релятивистской.

Кинематика поступательного движения в нерелятивистской механике

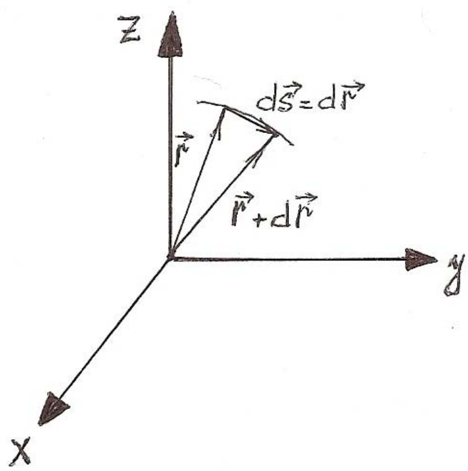
Рассмотрим основные определения кинематики поступательного движения.

1) **Материальная точка** – тело, размерами которого в условии задачи можно пренебречь.
2) **Траектория** – геометрическое место точек проходимых телом.



3) **Путь** – расстояние, проходимое вдоль траектории.
4) **Перемещение** – вектор, соединяющий начальную и конечную точки траектории.
5) **Тело отсчета** – предмет, относительно которого описывается движение.
6) **Система отсчета** – система координат, связанная с телом отсчета при наличии времени.

Пусть материальная точка за диференциально малый интервал времени dt совершила перемещение из 1 в 2.



7) **Вектор мгновенной скорости** определяется выражением $\vec{V}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{s}}{dt}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Мгновенная скорость – скорость в данный момент времени.

8) **Средней скоростью** называют скорость за конечный интервал времени: $\left\langle\vec{V}\right\rangle=\Delta\vec{S}/\Delta t$

9) **Мгновенное ускорение** : $\vec{a}=d\vec{V}/dt=d^2\vec{r}/dt^2$.

10) **Среднее ускорение**: $\left\langle\vec{a}\right\rangle=\Delta\vec{V}/\Delta t$.

В дальнейшем, при изучении курса физики мы будем пользоваться преимущественно Международной системой единиц (СИ).

Основными единицами СИ являются:

Метр (м) – единица длины,
Килограмм (кг) – единица массы,
Секунда (с) – единица времени,
Ампер (А) – единица силы электрического тока,
Кельвин (К) – единица термодинамической температуры,
Моль (моль) – единица количества вещества,
Кандела (кд) – единица силы света.
Две дополнительные единицы СИ:
Радиан (рад) – единица плоского угла,
Стерадиан (ср) – единица телесного угла.
Размерность величины *f* в системе СИ обозначается символикой: $\left[f\right]_{си}$

Найдём размерности скорости и ускорения:

$[V]_{си}=м/с$, $[a]_{си}=м/с^2$

Для равнопеременного движения $(a=const)$ мы можем получить некоторые следствия:

$a=const,\ \Rightarrow dV=adt,$

$V=\int adt=at+c_1,$

Начальное условие: $t=0 \quad V=V_0,\ \Rightarrow\ c_1=V_0,\ \Rightarrow\ V=V_0+at$

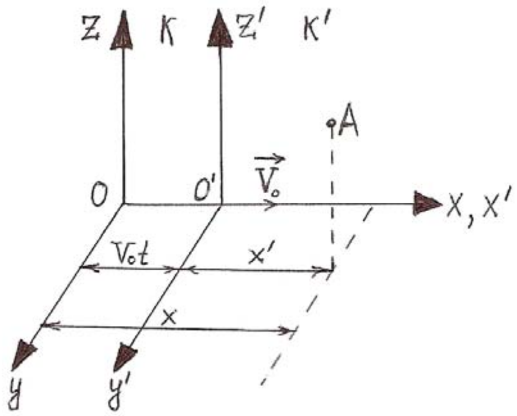
$$dS = Vdt\ ,\ \Rightarrow S = \int (V_0 + at)dt = V_0 t + \frac{at^2}{2} + c_2,$$

Начальное условие: $t = 0,\ S = 0,\ \Rightarrow\ c_2 = 0,\ \Rightarrow\ S = V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

В механике Ньютона: 1) пространство, время и материя рассматриваются как независимые друг от друга; 2) пространство и время рассматриваются как вместилище для материи; 3) пространство и время могут существовать независимо от материи; 4) пространство и время абсолютны и универсальны (время всюду течет одинаково).

Такие представления непосредственно следуют из преобразований Галилея.

Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея.



Как связаны координаты точки А в системах К и К`?

$V_0 << c$, $c = 3 \cdot 10^8\ м/с$.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + V_0 t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} V_x &= V_x' + V_0 \\ V_y &= V_y' \\ V_z &= V_z' \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \vec{V} = \vec{V}' + V_0'$$

классический закон сложения скоростей

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_x' \\ a_y &= a_y' \\ a_z &= a_z' \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \underline{\underline{\vec{a} = \vec{a}'}},\ \Rightarrow\ m\vec{a} = m\vec{a}',\ \Rightarrow\ \vec{F} = \vec{F}'.$$

Отсюда следует, что законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (ИСО).

Принцип относительности Галилея: законы механики инвариантны относительно ИСО.

Инвариантность – неизменность математической записи уравнений при переходе из одной ИСО в другую.

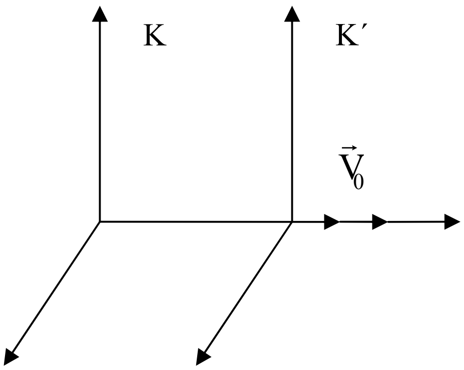
Кинематика релятивистского движения

Была построена в 1905г. Альбертом Эйнштейном в виде специальной теории относительности (СТО), постулатами которой являются:

1. Все законы физики инвариантны относительно ИСО (принцип относительности Эйнштейна);

2. Скорость света одинакова во всех ИСО и не зависит от скорости движения источника света (принцип постоянства скорости света).

Математическим следствием постулатов СТО являются **преобразования Лоренца** (правило перехода от ИСО К` к К и наоборот).



$V_0 \sim c$

$$x = \frac{x' + V_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}};\ y = y';\ z = z';\ t = \frac{t' + \frac{V_0}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - V_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}};\ y' = y;\ z' = z;\ t = \frac{t - \frac{V_0}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Следствия преобразований Лоренца:

1) $V_0 << c,\ \Rightarrow\ x = x' + V_0 t';\ y = y';\ z = z';\ t = t'$ - преобразования Галилея

2) $V_0 < c$ – в противном случае знаменатель будет мнимым, что не имеет физического смысла. Таким образом скорость света есть предельная скорости движения.

3) **Относительность одновременности**. Пусть в К` в точках x_1' и x_2' одновременно ($t_1' = t_2'$) происходят два события. Будут ли они одновременны с точки зрения наблюдателя в К?

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V_0}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}},\qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V_0}{c^2}x_2'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{V_0}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right)}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}},\quad \Rightarrow\quad \begin{cases} x_1' = x_2',\ \Rightarrow\ \text{одновременные} \\ x_1' \neq x_2',\ \Rightarrow\ \text{неодновременные} \end{cases}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}};\ \Rightarrow\ \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}},\ \Rightarrow\ \Delta t > \Delta t_0$$

4) **Относительность промежутков времени.** Пусть в К` в точке с координатой $x_1' = x_2'$ происходит событие длительностью $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$.Какой промежуток времени пройдет по часам $\Delta t = t_2 - t_1$ покоящегося наблюдателя в К`?

5) **Относительность длин**. Пусть в системе К` покоится стержень длины l_0.

Какова будет его длина l в системе К? Доказать самостоятельно, что $l = l_0\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}$ - *лоренцево сокращение длины в направлении движения тела*.

6) **Релятивистский закон сложения скоростей**.

$$dx = \frac{dx' + V_0 dt'}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}} = \frac{dt'(V_x' + V_0)}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}, \qquad dt = \frac{dt' + \frac{V_0}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}} = \frac{dt'(1+\frac{V_0 V_x'}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{V_x' + V_0}{1+\frac{V_0 V_x'}{c^2}}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{V_y'\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}{1+\frac{V_0 V_x'}{c^2}}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{V_z'\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}{1+\frac{V_0 V_x'}{c^2}}$$

Для простоты предположим, что движение происходит только вдоль оси $x(x')$.
Тогда $V_x' = V', \quad V_y' = 0, \quad V_z' = 0.$

$$V = \frac{V' + V_0}{1+\frac{V_0 V'}{c^2}}, \Rightarrow \begin{cases} V_0 << c, \Rightarrow V = V' + V_0 \\ V_0 = V' = c, \Rightarrow V = c \end{cases}$$

Таким образом, из преобразований Лоренца следует, что пространственные и временные отрезки не являются абсолютными, а зависят от выбора системы отсчета.

Динамика материальной точки в классической механике.

Основу классической динамики составляют законы Ньютона:

I закон Ньютона: Тело находится в состоянии покоя, или равномерного и прямолинейного движения, если векторная сумма всех сил, действующих на тело равна 0: $\sum_k \overline{F}_k = 0$

Система отсчёта в которой выполняется I закон Ньютона, называется **инерциальной**

Этот закон иногда называют **законом инерции**. Свойства тел сохранять состояние движения после прекращения действия внешних сил называют **инерцией**. Инерциальных систем существует бесконечное множество.

II закон Ньютона: Производная от импульса тела по времени равна результирующей внешней силе (изменение **импульса тела** происходит под действием **импульсной силы** $\vec{F}dt$) : $d\vec{p} = \vec{F}dt$

В классической (ньютоновой) механике под **импульсом** $\vec{p}$ тела понижают произведение его массы m на скорость движения $\vec{V}$: $\vec{p} = m\vec{V}$.

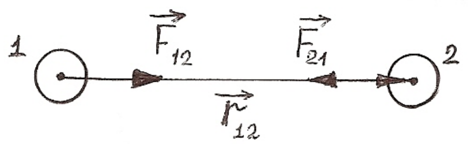
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{V}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Если $m = const \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

Масса – мера инертных и гравитационных свойств тела (это определение справедливо только в ньютоновском приближении). Сила – мера взаимодействия тел.

$$[m]_{cu} = кг,\ [a]_{cu} = м/с^2,\ \Rightarrow\ [F]_{cu} = [m][a] = \frac{кг \times м}{с^2} = Н\,(Ньютон)$$

III закон Ньютона: Два тела взаимодействуют друг с другом с силами одинаковыми по величине и противоположными по направлению.



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},\quad |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|.$$

Границы применимости законов Ньютона:

1) массы тел должны быть много больше молекулярных масс;
2) скорость тел много меньше скорости света в вакууме.

Закон сохранения импульса

Система материальных точек, для которых сумма внешних сил равна 0, называется **замкнутой**. Рассмотрим систему материальных точек, на которые действуют внешние силы. Для каждой точки запишем уравнение II закона Ньютона.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1 \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_{2_1} \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \\ \dfrac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{F}_{n1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_k \vec{p}_k = \sum_k \vec{F}_k$$

Для замкнутой системы $\sum_k \vec{F}_k = 0$, откуда $\frac{d}{dt}\sum_k \vec{p}_k = 0, \Rightarrow \sum_k \vec{p}_k = const$

Следовательно, в замкнутой системе справедлив закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Замечания: 1. Закон сохранения импульса (ЗСИ) справедлив и для незамкнутых систем, если:

1.1 вдоль какого-то направления $\Sigma_k \overline{F}_k = 0$,

1.2 внутренние силы системы много больше внешних.

2. Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства: параллельный перенос системы отсчета без изменения координаты скоростей частиц не изменяет механические свойства системы.

3. ЗСИ – векторный закон

Центр масс – точка, радиус вектор которой определяется соотношением:

$$\vec{r}_{ц.м.} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k}, \Rightarrow \vec{V}_{ц.м.} = \frac{\sum_k m_k \vec{V}_k}{\sum_k m_k}$$

Ввиду того, что для замкнутых систем импульс остается постоянным, то система отсчета, связанная с центром масс, будет инерциальной.

Механическая работа

Механической работой называется скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:

$$dA = \vec{F}d\vec{S} = |\vec{F}||d\vec{S}|\cos(\vec{F}\hat{d}\vec{S}),\ [A] = [F][S] = Нм = Дж.$$

Пусть межриальная точка совершает перемещение под действием силы $\vec{F}$:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}$$

Так как $\vec{V} = \frac{d\vec{S}}{dt}$,

имеем $\vec{V}d(m\vec{V}) = \vec{F}d\vec{S}, \Rightarrow \int d(\frac{mV^2}{2}) = \int \vec{F}d\vec{S}$

Откуда $\Delta E_k = A$

где $E_k = mV^2/2$ - кинетическая энергия тела.

Динамика релятивистского движения

Законы Ньютона инвариантны относительно преобразования Галилея, но не инвариантны относительно преобразований Лоренца. Дело в том, что импульс в классической механике определяется как

$$\vec{p} = m d\vec{r}/dt$$

Если вместо dt использовать собственное время

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},$$

то выражение для импульса примет вид:

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ - II закон Ньютона будет инвариантен относительно преобразований Лоренца при таком определении импульса.

Получим выражение для релятивистской энергии:

$$\vec{V}d\left(\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}d\vec{s}$$

$$m\vec{V}\left(\frac{d\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{\vec{V}\frac{\vec{V}}{c^2}d\vec{V}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right) = \frac{md(V^2)}{2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{m\frac{V^2}{c^2}d(V^2)}{2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{md(V^2)}{2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)$$

$$\int d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) = \int\vec{F}d\vec{s}, \;\Rightarrow\; E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + c_1,\; c_1 = 0$$

Связь между релятивистской энергией и импульсом.

$$\begin{cases} \bar{p} = \dfrac{m\bar{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \Rightarrow p^2(1-\dfrac{V^2}{c^2}) = m^2V^2, \Rightarrow p^2(c^2-V^2) = m^2c^2V^2, \Rightarrow V^2 = \dfrac{p^2c^2}{m^2c^2+p^2} \\ E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \dfrac{E\vec{V}}{c^2}, \Rightarrow p^2c^4 = E^2V^2, \Rightarrow p^2c^4 = E^2\dfrac{p^2c^2}{m^2c^2+p^2} \end{cases}$$

Следствие:

$$E = c\sqrt{m^2c^2+p^2}, \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ. m = 0, \Rightarrow V = c, \; E = cp, \Rightarrow p = \dfrac{E}{c} \\ 2^\circ. V = 0, \Rightarrow p = 0, \Rightarrow E_0 = mc^2 \; - \text{энергия покоя тела.} \end{cases}$$

В релятивистской физике кинетическая энергия определяется как разность между полной энергией и энергией покоя.

$$E_k = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$$\frac{V}{c} << 1, \Rightarrow E_k = mc^2(1+\frac{V^2}{2c^2}+0(2)-1) \approx \frac{mV^2}{2}$$

Инвариантами преобразований Лоренца являются:

1. l_0 - собственная длина.
2. τ_0 - собственное время.
3. c - скорость света.
4. m – масса тела.

Энергия и импульс не являются инвариантами преобразований Лоренца, потому что

$$p_x = \frac{p'_x + \dfrac{V}{c^2}E'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \; p_y = p'_y, \; p_z = p'_z, \; E = \frac{E' + VP_x{}'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$$

Однако строго выполняются релятивистские законы сохранения импульса и энергии.

Докажем инвариантность массы: $m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}$.

Для удобства введём параметр $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2} = \frac{\gamma^2}{c^4}\left(E'^2 + 2E'Vp'_x + V^2 p_x'^2\right) - \frac{1}{c^2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) =$$

$$= \frac{\gamma^2}{c^4}\left(E'^2 + 2E'Vp'_x + V^2 p_x'^2\right) - \frac{\gamma^2}{c^2}\left(p_x'^2 + 2p_x' \frac{V}{c^2}E' + \frac{V^2}{c^4}E'^2\right) -$$

$$-\frac{1}{c^2}\left(p_y'^2 + p_z'\right)^2 = \frac{\gamma^2}{c^4}E'^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^2}{c^2}p_x'^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(p_y'^2 + p_z'^2\right) = \frac{E'^2}{c^4} - \frac{p'^2}{c^2}.$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1) *масса тела не зависит от его скорости.*
2) *всегда, когда есть масса, есть и отвечающая ей энергия: энергия покоя* $E_0 = mc^2$. *Однако не всегда, когда есть энергия, есть масса. Масса фотона равна нулю, а энергия его отлична от нуля.*
3) *масса тела меняется всегда, когда меняется его внутренняя энергия. Пример: при нагревании железного (удельная теплоёмкость железа* $c_ж = 450\frac{Дж}{кг \cdot град}$*) утюга на 200° С его масса возрастает на величину*

$$\Delta m \cdot c^2 = cm\Delta t^0, \ \Rightarrow \ \frac{\Delta m}{m} = \frac{c_ж \Delta t^0}{c^2}, \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{90000}{9 \cdot 10^{16}} = 10^{-12}$$

Концепция физического поля. Потенциальная энергия

Рассмотрим движение частицы в поле стационарных и потенциальных сил. Силы, не зависящие от времени, называются **стационарными**, а силы, работа которых не зависит от формы траектории, называются **потенциальными**. Тогда работа вдоль замкнутой траектории будет равна 0.

$$A = \oint \vec{F}d\vec{s} = \oint\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = 0$$

Из математического анализа известно, что это возможно тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом.

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU(x, y, z)$$

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах, получим

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

или

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\mathrm{grad}U,\ \nabla\ -\ \text{оператор набла}$$

Градиент – это вектор, определённый в каждой точке пространства и направленный в сторону возрастания поля.
В декартовой системе координат $\vec{\nabla}$ имеет вид $\vec{\nabla} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$

Пример: Пусть гравитационное поле создаётся точкой 1 с массой m_1. Докажем, что потенциальная энергия материальной точки с массой m_2 определяется выражением 1.

1. $U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
2. $r = \sqrt{\vec{r}_{12}^{\,2}}$
3. $\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r}$
4. $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$
5. $\frac{\partial U}{\partial x} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$
6. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
7. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
8. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{r}} = \frac{x}{r}$
9. $\frac{\partial U}{\partial x} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$
10. $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

Таким образом мы показали, что для одной частицы $dA = -dU$
С другой стороны на прошлой лекции мы показали, что, работа dA есть мера изменения кинетической энергии тела: $dA = -dE_k$
Таким образом, для одной частицы в поле стационарных и потенциальных сил

$$dE_k = dU = 0,\ \Rightarrow\ d(E_k + U) = 0,\ \Rightarrow\ E_k + U = \mathrm{const.}$$

Для невзаимодействующих частиц:

$$\sum_i E_{ki} + \sum_i U_i = \mathrm{const}$$

В поле консервативных сил полная механическая энергия системы остается неизменной (закон сохранения энергии). Поле, внешние силы которого стационарны и потенциальны, а внутренние - потенциальны, называется **полем консервативных сил** (гравитационное поле, поле упругих сил, электростатическое поле).

Закон сохранения энергии является следствием **однородности времени**: замена времени t_1 на t_2 без изменения координат и скоростей частиц, не изменет механические свойства системы.

Если учесть взаимодействие между частицами, то закон сохранения энергии примет вид: $\sum_i E_{ki} + \sum_i U_i + U_{вз.} = const$. В поле неконсервативных сил (**диссипативных сил**) механическая энергии переходит в немеханические виды энергии, т.е. происходит диссипация (убыль) энергии. В этом случае:

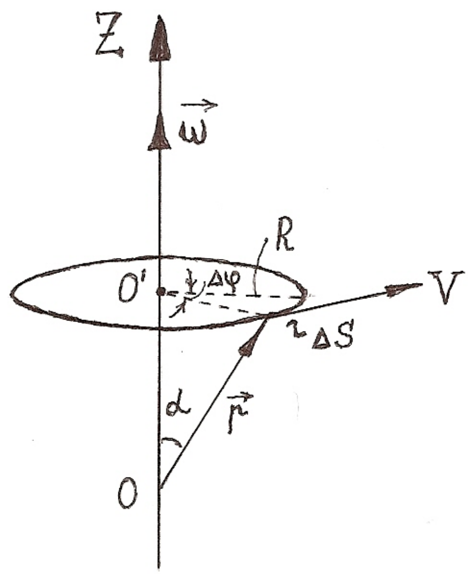
$\Delta\left(\sum_i E_{ki} + \sum_i U_i\right) = A$ (механическая работа есть мера изменения энергии).

Вращательное движение

Движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой (оси вращения) называют **вращательным.**

Кинематика вращательного движения

Поворот точки на угол $\Delta\phi$, можно представить в виде вектора, длина которого $\Delta\varphi = |\Delta\vec{\varphi}|$, а направление определено правилом правого винта (такие векторы, направление которых связано с направлением вращения, называются псевдовекторами).



Псевдовектор угловой скорости $\vec{\omega}$ определяется как

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}, \quad [\omega] = рад/с$$

Псевдовектор углового ускорения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}, \quad [\varepsilon] = рад/с^2$$

$d\omega = \varepsilon dt$; если $\varepsilon = const$, то, интегрируя получим

$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ – угловая скорость в момент времени t

$$d\phi = \omega dt, \ d\phi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt, \ \Rightarrow \ \phi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Линейная скорость V движения по окружности:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\phi}{\Delta t} = R\omega$$

Формула Эйлера: $\vec{V} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right]$, $\left|\vec{V}\right| = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{\omega}; \vec{r}}\right)$

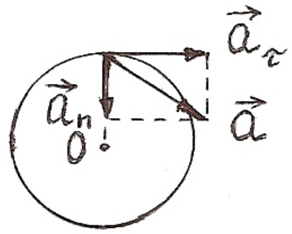
$\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ - векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для вектора $\vec{c}$ справедливо:

1° $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

2° направление вектора $\vec{c}$ определяется правилом правого винта

3° $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right)$

В общем случае при движении по окружности вектор полного ускорения $\vec{a}$ равен векторной сумме векторов тангенциального a_τ и нормального a_n ускорений.



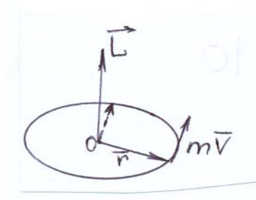
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \;\Rightarrow\; a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_\tau^{\,2}}$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega R\right) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

Нормальное ускорение $\bar{a}$ существует всегда, потому что оно обусловлено изменением вектора скорости по направлению. Тангенциальное ускорение $\bar{a}$ обусловлено изменением скорости по модулю, поэтому если $V = \text{const}, \;\Rightarrow\; a_\tau = 0$

Динамика вращательного движения

Введём определения:



1. **Моментом импульса относительно точки** называют псевдовектор $\vec{L}$, равный векторному произведению $\vec{r}$ – радиус вектора, проведенного из этой точки на вектор импульса: $\vec{L} = \left[\vec{r} m \vec{V}\right]$.

2. **Моментом силы относительно точки** называют псевдовектор $\bar{M}$, равный векторному произведению радиус вектора, проведённого из этой точки в точку приложения вектора силы: $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$

$$\left[L\right]_{си} = м \cdot кг \cdot м/с = кг \cdot м^2/с$$

$$\left[M\right]_{си} = м \cdot Н$$

Основное уравнение динамики вращательного движения

Рассмотрим систему материальных точек, на которые действуют внешние силы. Уравнение II закона Ньютона для первой точки имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum_i \vec{F}_{1i} + \vec{F}, \quad \left(\text{умножим векторно слева на радиус -вектор } \vec{r}_1\right):$$

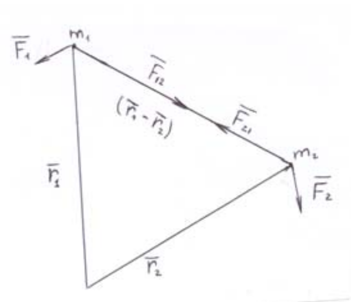
$$\left[\vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{p}_1}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1 \cdot \vec{p}_1\right] - \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt}\vec{p}_1\right], \text{ т.к. } \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt}\vec{p}_1\right] = 0, \text{ имеем}:$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1 \cdot \vec{p}_1\right] = \sum_i \left[\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{1i}\right] + \left[\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_1\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_2 \cdot \vec{p}_2\right] = \sum_i \left[\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{2i}\right] + \left[\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_2\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_n \cdot \vec{p}_n\right] = \sum_i \left[\vec{r}_n \cdot \vec{F}_{ni}\right] + \left[\vec{r}_n \cdot \vec{F}_n\right]$$

Теперь учтём, что



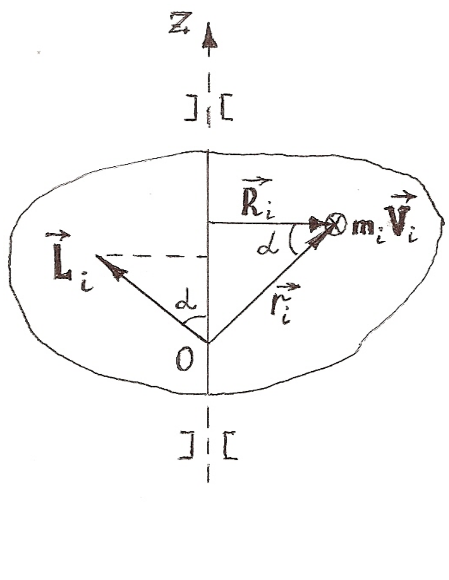
$$\left[\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{12}\right] + \left[\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{21}\right] = \left[\vec{r}_1 - \vec{r}_{21}\vec{F}_{12}\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_k \left[r_k \vec{F}_k\right], \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{вн.}$$

Производная от момента импульса системы материальных точек по времени равна результирующему моменту внешних сил, действующих на систему.

Момент импульса системы материальных точек относительно выделенной оси.

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться относительно неподвижной оси z. На оси вращения выберем точку O, из которой проведем радиус - вектор с индексом i в i – ю точку, имеющую импульс $m_i\vec{V}_i$.



$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i m_i \vec{V}_i\right], \Rightarrow L_i = r_i m_i V_i$$

$$L_{iz} = L_i \cos\alpha$$

$$L_{iz} = m_i V_i r_i \cos\alpha = m_i V_i R_i$$

$$V_i = \omega R_i, \Rightarrow L_{iz} = \omega m_i R_i^2$$

$$L_z = \omega \sum_i m_i R_i^2 = I_z \omega$$

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2$$

Сумма произведений элементарных масс точек на квадрат их расстояний до оси вращения называют **моментом инерции тела** относительно данной оси.
$[I]_{cu} = кг \cdot м^2$

Свойства момента инерции

1. Момент инерции – это свойство тела.
2. I - величина аддитивная, т.е. момент инерции $I = \sum_t I_t$
3. Так как $dm = \rho dV$, то $I = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dV.$

Для того чтобы рассчитать момент инерции, не используя интегральное представление, применяется **теорема Штейнера**: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме моментов инерции относительно оси, параллельной данной, и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями:

$$I_{0'0'} = I_{00} + ma^2$$

Ось, положение которой в пространстве остаётся неизменным при вращении вокруг неё тела в отсутствии внешних сил называется **свободной осью** тела. Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением массы существует три взаимно перпендикулярных, проходящие через центр инерции тела оси, которые могут служить свободным осям: они называются **главными осями инерции.**

Момент силы относительно оси

Возьмём проекцию основного управления динамики вращательного движения на ось z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{вн.z}, \quad \text{так как } L_z = I_z\omega, \text{ имеем}$$

$$\frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_{вн.z}, \Rightarrow I_z\frac{d\omega}{dt} = M_{вн.z}, \Rightarrow M_{вн.z} = I_z\varepsilon$$

Закон сохранения момента импульса.

Если результирующий момент внешних сил, действующих на систему равен 0, то момент импульса системы остается неизменным. Этот закон является следствием **изотропности** пространства, т.е. поворот системы отсчета без изменения координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы. **Изотропность** означает одинаковость свойств пространства вдоль разных направлений.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{вн.z}, \Rightarrow M_{вн.z} = 0, \Rightarrow I_z\omega = const$$

Сводка формул кинематики и динамики вращательного движения.

$$S \sim \phi, \quad V = V_0 + at \sim \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$t \sim t, \quad S = V_0 t + \frac{at^2}{2} \sim \phi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$m \sim I, \quad p = m \cdot V \sim L = I\omega$$

$$V \sim \omega, \quad F = ma \sim M = I \cdot \varepsilon$$

$$a \sim \varepsilon, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \sim \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$F \sim M, \quad E_k = \frac{mV^2}{2} \sim E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$p \sim L$$

$$dA = F\,ds, \sim dA = Md\phi$$

$$N = \frac{dA}{dt} = F\frac{ds}{dt} = F \cdot V, \sim N = M\omega$$

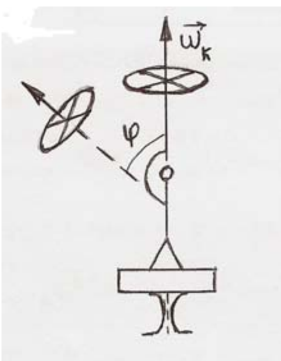
Рассмотрим примеры решения задач на вращательное движение.

Задача 1. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руке за ось велосипедное колесо, вращающееся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_k. Ось колеса расположена вертикально и совпадает с осью скамьи Жуковского. С какой скоростью ω станет вращаться скамья, если повернуть колесо вокруг горизонтальной оси на угол φ? Момент инерции человека и скамьи I, момент инерции колеса I_k.

$\omega_k, \ I$

$I_k, \ \varphi$

$\omega - ?$



Вдоль оси вращения $M_{вн.z} = 0$, поэтому справедлив закон сохранения момента импульса: $I_z\omega = const$

До поворота стержня: $L_1 = I_k\omega_k$

После поворота стержня: $L_2 = I_k\omega_k\cos\varphi + I\omega$

Так как $L_1 = L_2$, имеем

$$I_k\omega_k = I_k\omega_k\cos\varphi + I\omega, \Rightarrow \omega = \frac{I_k\omega_k(1-\cos\varphi)}{I}$$

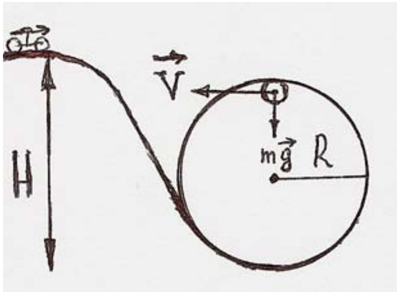
$а) \ \varphi = \pi/2, \Rightarrow \omega = (I_k/I)\omega_k,$

$б) \ \varphi = \pi, \Rightarrow \omega = 2(I_k/I)\omega_k.$

Задача 2. С какой наименьшей высоты H должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму "мёртвой петли" радиусом R, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли. Масса велосипедиста вместе с велосипедом m, причем на массу колёс приходится m_1. Колёса велосипеда считать обручами.

R
m
m_1

$H-?$



Потенциальную энергию велосипедиста будем отсчитывать от основания "мёртвой петли". По закону сохранения энергии:

$$mgH = \frac{mV^2}{2} + 2mgR + \frac{I_k \omega_k^2}{2}$$

Колёса считаются обручами, поэтому $I_k = m_1 r_k^2$.

Учитывая, что $\omega_k = V/r_k$, получим $\frac{I_k \omega_k^2}{2} = \frac{m_1 V^2}{2}$.

Тогда $mgH = \frac{m+m_1}{2} V^2 + 2mgR, \Rightarrow H = \left(1 + \frac{m_1}{m}\right)\frac{V^2}{2g} + 2R$.

Условие прохождения "мёртвой петли": $mg = \frac{mV^2}{R}, \Rightarrow V^2 = Rg$

В итоге: $H = \left[2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)\right]R$

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ (МФ) И ТЕРМОДИНАМИКИ (Т)

МФ и Т изучают тепловую форму движения материи, но используют для этого разные методы. МФ опирается на **молекулярно-кинетическую теорию строения вещества**, согласно которой:

1) все вещества состоят из молекул;

2) молекулы находятся в состоянии непрерывного хаотического движения;

3) абсолютная температура - мера средней кинетической энергии поступательного движения молекулы.

При изучении тепловых явлений МФ рассматривает не движение отдельно взятых молекул, а их большую совокупность, т.е. оперирует понятиями среднего арифметического, дисперсии и т.д., что является предметом рассмотрения **статистической физики**. В связи с этим МФ называют статистической физикой. В статической физике естественно возникают такие философские категории, как **необходимое** (Н) и **случайное** (С). Действительно, Н – это то, что обусловлено внутренней природой явления, его сущностью, а поэтому при соответствующих условиях обязательно происходит. С – это то, что обусловлено не сущностью явления, а чем-то внешним, а поэтому может как произойти, так и не произойти. Ввиду того, что любое явление в природе обусловлено как своей внутренней сущностью, так и влиянием из вне, то С проявляется через необходимость, а Н выражает случайность.

Термодинамика при исследовании тепловых явлений не привлекает молекулярно-кинетическую теорию, а использует **начала (законы) термодинамики**. Если Термодинамика при изучении тепловых явлений является первым шагом, то для строгих количественных расчетов необходимо привлекать молекулярную физику, т.е. оба метода исследования дополняют друг друга.

Параметры, с помощью которых можно описать поведение термодинамической системы, называют **термодинамическими параметрами**.

Состояния, для которых при неизменных внешних условиях термодинамические параметры системы остаются постоянными долго называются **равновесными**. Равновесное состояние можно изображать на **термодинамических диаграммах**. Вышеприведённые определения полезно проиллюстрировать на примере идеального газа.

Газ, для которого выполняются соотношения:

1) $\sum_i V_i << V_{сосуда}$ (объём молекул газа во много раз меньше объёма сосуда)

2) $\sum_i E_{ki} \geq \sum_i E_n$ (кинетическая энергия молекул газа во много раз больше потенциальной энергии взаимодействия молекул) называют **идеальным газом**. Следовательно, любой достаточно разряженный и нагретый газ будет идеальным. Уравнение, связывающее параметры идеального газа между собой называется **уравнением Менделеева-Клапейрона**.

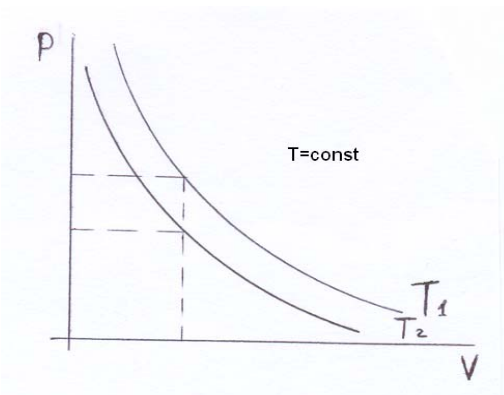
$$pV = \frac{m}{M}RT$$

где p – давление газа, V – его объём, m – масса газа, M – молярная масса,
R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, $T = t° + 237\ \text{K}$

Газовые законы.

Все газовые законы получены в предположении, что масса газа остается постоянной ($m = const$).

1) $T = const$: (*изотермический процесс*)



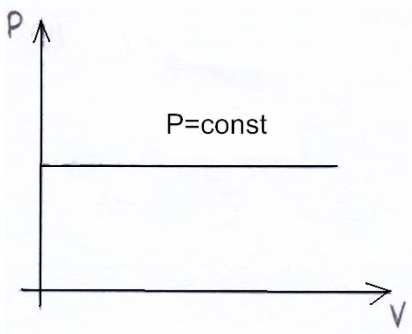
Учитывая, что $M, R, m = const$, мы имеем

$$PV = const, \Rightarrow P = \frac{const}{V}$$

$$T_1 > T_2$$

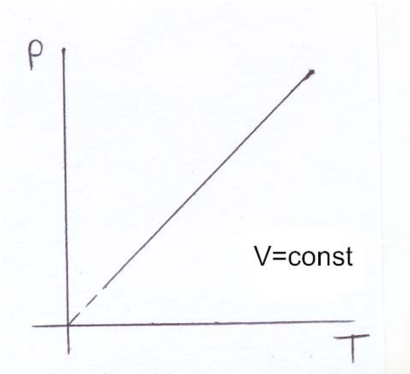
$$P_1V_1 = P_2V_2$$

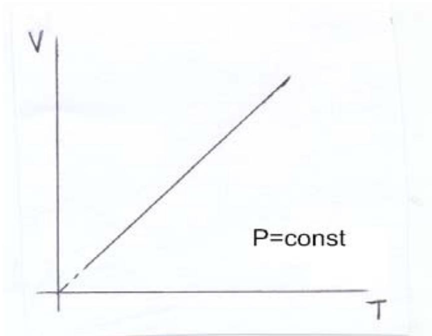
2) $P = const, \Rightarrow \dfrac{V}{T} = const$ (изобарный процесс)



$$\left.\begin{aligned} PV_1 &= \frac{m}{M}RT_1 \\ PV_2 &= \frac{m}{M}RT_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

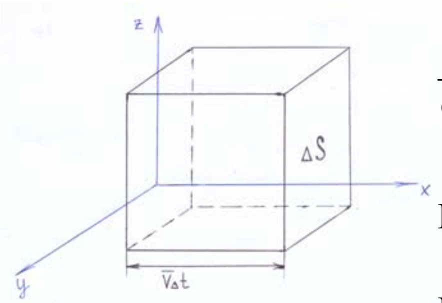
3) $V = const \Rightarrow \dfrac{P}{T} = const$ (изохорный процесс)





Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Рассмотрим идеальный газ в сосуде в форме параллелепипеда. Для простоты предположим, что все молекулы движутся с одинаковыми скоростями и имеют одинаковые массы. Найдем давление P, оказываемое молекулами газа на стенки сосуда. Поскольку газ равновесный, вдоль каждой из осей будет двигаться $\frac{1}{3}$ часть всех молекул, а вдоль положительного направления оси x $-\frac{1}{6}$ часть молекул.



$\dfrac{1}{6}\dfrac{N}{V}\bar{V}\Delta t\Delta S = N' -$ количество молекул, бомбардирующих площадку ΔS

$P = N'P_{(1)}$, где $P_{(1)} -$ давление, создаваемое одной молекулой

$$P_{(1)} = \frac{F_1}{\Delta S};\ \vec{F}_{(1)} = \frac{\Delta(m\vec{V})}{\Delta t}$$

$$\Delta(m\vec{V}) = 2m\vec{V}, P_{(1)} = \frac{2m\bar{V}}{\Delta S\Delta t}$$

$$P = \frac{1}{6}\cdot\frac{N}{V}\vec{V}\Delta t\Delta S\frac{2m\vec{V}}{\Delta S\Delta t} = \frac{1}{3}\cdot\frac{N}{V}m\vec{V}^2$$

$$P = \frac{2}{3}n\bar{\varepsilon};$$

где $n = \dfrac{N}{V}$ – концентрация молекул газа в сосуде.

$\overline{\varepsilon}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

Строгое выражение для $\overline{\varepsilon}$ имеет вид:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} m V^2_{\text{ср.кв}}$$

где $V_{\text{ср.кв}}$ – средняя квадратичная скорость молекул газа.

С другой стороны, из уравнения Менделеева - Клапейрона следует, что

$$PV = \frac{m}{M} RT, \quad m = m_1 N, \qquad R = kN_A$$

$$M = m_1 N_A \qquad PV = NkT, \; \Rightarrow \; P = nkT.$$

Сравнивая два вырожения для P, находим

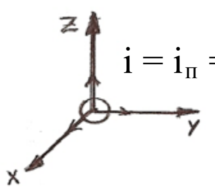
$$\overline{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$$

Следовательно, абсолютная температура T – это мера средней кинетической энергии поступательного движения одной молекулы.

Число степеней свободы молекул газа

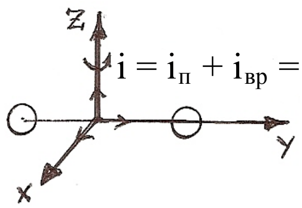
Число независимых величин, с помощью которых может быть описано движение молекулы называют **числом степеней свободы молекулы**.

1) одноатомная молекула



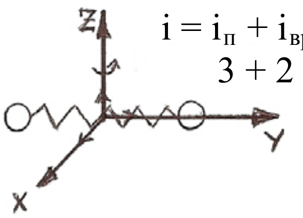
$i = i_п = 3$

2) двухатомная молекула с жёсткой связью



$i = i_п + i_{вр} = 3+2 = 6$

3) двухатомная молекула с упругой связью



$i = i_п + i_{вр} + i_к =$
$3 + 2 + 1 = 6$

4) многоатомная молекула

$i = i_п + i_{вр} = 3 + 3 = 6$

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул

На каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $(1/2)\,kT$: $\quad \overline{\varepsilon} = \frac{i}{2}kT, \quad i = i_{\text{пост.}} + i_{\text{вращ.}} + 2i_{\text{кол.}}$

Реальный газ. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Газ, для которого не выполняются ограничения, характерные для идеального газа называется **реальным газом**.

В истории физики было много попыток получить уравнение состояния реального газа. Самое удачное уравнение сконструировал Ван-дер-Ваальс. За основу он взял уравнение для 1кмоль идеального газа: $PV_{km} = RT$ и учёл поправки, связанные с реальностью газа.

В реальном газе необходимо учитывать притяжение молекул, поэтому давление должно быть больше: $P \to P + \frac{a}{V^2_{\text{КН}}}$ (a – постоянная Ван-дер-Вальса). Вследствие того, что молекулы обладают конечным объёмом, пространство, доступное для движения молекул, оказывается меньшим чем объём $V_{\text{КМ}}$: $V_{\text{КМ}} \to V_{\text{КМ}} - b$ (b – постоянная Ван-дер-Вальса).

Имеем

$$\left(P + \frac{a}{V^2_{\text{КМ}}}\right)\left(V_{\text{КМ}} - b\right) = RT$$

Умножая обе части этого уравнения на $\upsilon = m/M = V/V_{\text{КМ}}$, получим

$$\left(P + \frac{\upsilon^2 a}{V^2}\right)\left(V - \upsilon b\right) = \upsilon RT$$

Вводим новые обозначения

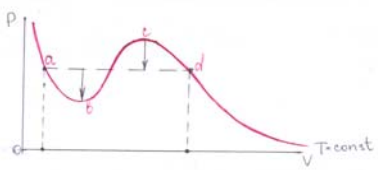
$$a' = \upsilon^2 a, \quad b' = \upsilon b$$

где a' и b' - константы Ван-дер-Вальса для υ киломолей.

В результате, получим

$$\left(P + \frac{a'}{V^2}\right)\left(V - b'\right) = \upsilon RT, \;\Rightarrow\; \left(PV^2 + a'\right)\left(V - b'\right) = \upsilon V^2 RT$$

Экспериментальная изотерма при медленном сжатии реального газа имеет вид:



вс – участок не реализуется
ав – перегретая жидкость
cd – пересыщенный пар

Отметим, что у реальных изотерм нет завитка abcd. Вместо него наблюдается горизонтальный участок ad. Следует иметь в виду, что состояние ab и cd являются метастабильными (не вполне устойчивыми), но они осуществимы на практике.

Выводы:

а) уравнение Ван-дер-Вальса хорошо описывает не только газообразное, но и жидкое состояние вещества.

б) это уравнение предсказало существование двух нестабильных состояний: пересыщенного пара и перегретой жидкости.

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения.

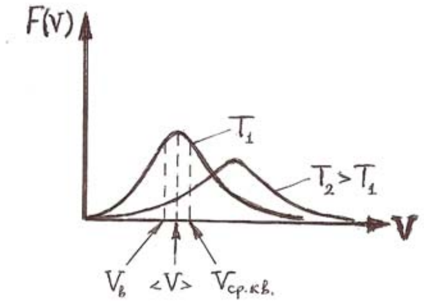
Используя методы статистической физики, английский физик Д.К.Максвелл в 1860 году показал, что в состоянии равновесия и в отсутствии внешнего силового поля число dN молекул идеального газа, обладающих при заданной температуре T скоростями, величина которых лежит в интервале от V до V+dV, равно

$$dN = NF(V)dV,$$

где функция распределения по скоростям имеет вид:

$$F(V) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} 4\pi V^2,$$

где m - масса молекулы газа, V – её скорость.



Из графика $F = F(V)$ видим, что небольшая часть молекул обладает малыми скоростями, ещё меньшая часть – большими скоростями, а бóльшая часть имеет промежуточные скорости.

Скорости молекул газа определяются через функцию распределения, причём, для идеального газа характерны следующие скорости:

1) $\langle V \rangle = \int_0^\infty VF(V)dV$ – средняя арифметическая скорость

Беря интеграл по частям, получим:

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

2) $V_{ср.кв.} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ – средняя квадратичная скорость

$$\langle V^2 \rangle = \int_0^\infty V^2 F(V)dV$$

Используя интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

находим

$$V_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

3) Наиболее вероятная: $V_{\text{в}}$

$$F'_V = 0, \;\Rightarrow\; -\frac{mV_{\text{в}}}{kT} \cdot V_{\text{в}}^2 + 2V_{\text{в}} = 0, \;\Rightarrow\; V_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Беря за основу распределение молекул по скоростям, нетрудно найти распределение молекул по значениям кинетической энергии $\varepsilon_k = \dfrac{mV^2}{2}$:

$$V = \sqrt{\frac{2\varepsilon_k}{m}}, \;\Rightarrow\; dV = d\varepsilon_k \Big/ \sqrt{2m\varepsilon_k},$$

откуда

$$dN = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\varepsilon_k/kT} 4\pi \frac{2\varepsilon_k}{m} \frac{d\varepsilon_k}{\sqrt{2m\varepsilon_k}} = N\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(kT\right)^{-3/2} e^{-\varepsilon_k/kT}\sqrt{\varepsilon_k}\, d\varepsilon_k$$

Отсюда следует, что функция распределения по значениям кинетической энергии есть

$$F\left(\varepsilon_k\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(kT\right)^{-3/2}\sqrt{\varepsilon_k}\; e^{-\varepsilon_k/kT}$$

Распределение Максвелла-Больцмана

Если учесть внешнее силовое поле, то распределение Максвелла трансформируется в распределение Максвелла-Больцмана.

$$dN = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} e^{-\frac{mgh}{kT}} dV_x dV_y dV_z dx dy dz$$

Интегрируя по пространству скоростей, получим:

$$dN = n_0 e^{-mgh/kT} dx dy dz$$

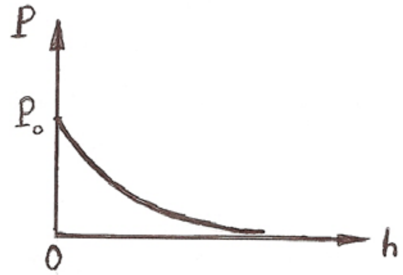
Учитывая определения плотности ρ:

$$\rho = \frac{mdN}{dxdydz},$$

получим

$$\rho = \rho_0 e^{-mgh/kT}$$

$$PV = \frac{m}{M}RT, \;\Rightarrow\; P = \rho\frac{RT}{M}, \;\Rightarrow\; P = P_0 e^{-mgh/kT}$$ – барометрическая формула



$$P = P_0 e^{-mgh/kT} = P_0 e^{-mgh/kT}; \;\; P_0 = 1.01\cdot 10^5\, \text{Н}/\text{м}^2$$

Барометрическая формула показывает изменение давления газа с высотой и получено в предположении постоянной температуры $(T = const)$.

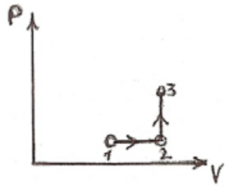
Первое начало термодинамики

Под **внутренней энергией тела** в термодинамике понимают сумму кинетической и потенциальной энергий молекул тела $U = \sum_i (E_{ki} + E_{ni})$. Существуют 2 способа изменения внутренней энергии тела: 1) за счет совершения работы над телом; 2) путём теплопередачи. Изменение внутренней энергии тела без совершения работы называют **теплопередачей**. Существуют 3 вида теплопередачи: 1)конвекция; 2) лучеиспускание; 3) теплопроводность.

$$dQ = dU + dA; \;\Rightarrow\; Q = \Delta U + A$$

Количество теплоты сообщенное системе идёт на изменение её внутренней энергии (ΔU) и на совершение работы (A) против внешних сил. (I Закон термодинамики).

Замечание: следует иметь в виду, что при решении задач необходимо учитывать, что только внутренняя энергия U является функцией состояния системы.



$$Q = Q_{12} + Q_{23} \qquad \Delta U = U_3 - U_1$$

$$A = A_{12} + A_{23}$$

Теплоёмкость

Теплоёмкость тела численно равна количеству теплоты, которое надо сообщить телу, чтобы изменить его температуру на 1К.

$$C = \frac{dQ}{dT}\ , \quad \Rightarrow \quad [C]_{си} = \frac{Дж}{К}$$

Молярная теплоёмкость C_M определяется как

$$C_M = \frac{C}{\upsilon},\ \Rightarrow\ [C_м] = \frac{Дж}{моль \cdot К}$$

Удельная теплоёмкость определяется выражением

$$c_{уд.} = \frac{C}{m};\ \Rightarrow\ [c_{уд.}] = \frac{Дж}{кг \cdot К}$$

Для газов различают 2 теплоёмкости:

$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{|V=const}$ – **теплоёмкость при постоянном объёме**,

$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{|p=const}$ – **теплоёмкость при постоянном давлении**

В термодинамике работа определяется как

$$dA = PdV$$

$$V = const,\ \Rightarrow\ dV = 0,\ \Rightarrow\ dA = 0,\ \Rightarrow\ dQ = dU$$

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{|V=const} = \frac{dU}{dT},\ \Rightarrow\ dU = C_V dT$$

$$dQ = C_p dT,\ (P = const)$$

Для идеального газа при $P = const$:

$$PV = \frac{m}{M}RT,\ dQ = dU + dA$$

$$dQ = \frac{m}{M}C_{pM}dT,\ dU = \frac{m}{M}C_{VM}dT,\ dA = PdV = \frac{m}{M}RdT,\ \ (P = const)$$

Тогда из I начала получим:

$$\frac{m}{M}C_{pM}dT = \frac{m}{M}C_{VM}dT + \frac{m}{M}RdT,\ \Rightarrow\ (C_{pM} = C_{Vm} + R) - \text{формула Майера},\ \Rightarrow\ C_{PM} > C_{VM}$$

Для идеального газа внутренняя энергия равна сумме кинетических энергий молекул:

$$U=\sum_i E_{ki},\ \overline{\varepsilon}=\frac{i}{2}kT,\ U_M=N_A\cdot\overline{\varepsilon},\ U_M=\frac{i}{2}kN_AT$$

$$U_M=\frac{i}{2}kN_AT=\frac{i}{2}RT,\ U_M=C_{VM}T$$

Отсюда следуют соотношения:

$$C_{VM}=\frac{i}{2}R;\ C_{pM}=\frac{i+2}{2}R$$

Полезно выписать рабочие формулы для приложений:

$$dQ=dU+dA$$

$$dQ=\frac{i+2}{2}\cdot\frac{m}{M}\cdot R\cdot dT,\ (P=\mathrm{const})$$

$$dU=\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{M}\cdot R\cdot dT$$

$$dA=PdV$$

Применение I начала термодинамики к изопроцессам идеального газа.

$$1)T=\mathrm{const}\ (\text{изотермический}),\ \Rightarrow\ \Delta U=0,\ \Rightarrow\ Q=A$$

$$Q=A=\int_{V_1}^{V_2}PdV;\ P=\frac{m}{M}RT\cdot\frac{1}{V}$$

$$Q=A=\frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=\frac{m}{M}RT_1\ln V\,|_{V_1}^{V_2}=\frac{m}{M}RT_1(\ln V_2-\ln V_1)=\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}\equiv P_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1}\equiv P_1V_1\ln\frac{P_1}{P_2}$$

$$2)V=\mathrm{const}\ (\text{изохорный}),\ \Rightarrow\ A=Q,\ \Rightarrow\ Q=\Delta U$$

$$Q=\Delta U=\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{M}R\int_{T_1}^{T_2}dT=\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{M}R(T_2-T_1)\equiv\frac{i}{2}(P_2-P_1)V$$

$$3)P=\mathrm{const}\ (\text{изобарный})$$

$$A=\int_{V_1}^{V_2}PdV=\int_{V_1}^{V_2}PdV=P(V_2-V_1)$$

$$\Delta U=\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{M}R(T_2-T_1)\equiv\frac{i}{2}(V_2-V_1)P,$$

$$Q=\Delta U+A=\frac{i+2}{2}P(V_2-V_1)$$

Адиабатный процесс.

Процессы, протекающие без теплообмена с внешней средой, называют адиабатными. Все быстрее процессы, происходящие с газом, можно считать адиабатными. В дизельном двигателе за счёт адиабатного сжатия горючая смесь самовоспламеняется. Звук распространяется в воздухе по адиабатному закону.

$$dQ = 0, \;\Rightarrow\; dU + dA = 0, \;\Rightarrow\; \frac{m}{M} C_{VM} dT + PdV = 0$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона находим P:

$$P = \frac{m}{M} RT \frac{1}{V}, \;\Rightarrow\; \frac{m}{M} C_{VM} dT + \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = 0, \quad \left(\frac{1}{C_{VM} T} \right)$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{RdV}{C_{VM} V} = 0$$

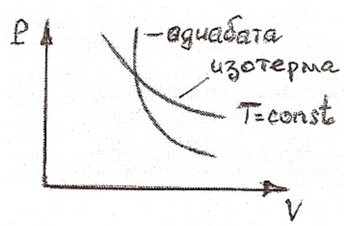
Интегрируя, получим

$$\ln T + \frac{R}{C_{VM}} \ln V = \ln T + \ln V^{R/C_{VM}} = \ln C_1$$

$$\ln TV^{R/C_{VM}} = \ln C_1, \;\Rightarrow\; TV^{R/C_{VM}} = C_1 = \text{const}$$

Показателем адиабаты называют $\gamma = \frac{C_{PM}}{C_{VM}}$

$$C_{PM} = C_{VM} + R, \;\Rightarrow\; \gamma = 1 + \frac{R}{C_{VM}}; \;\Rightarrow\; \frac{R}{C_{VM}} = \gamma - 1$$



$$TV^{\gamma - 1} = \text{const}$$

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

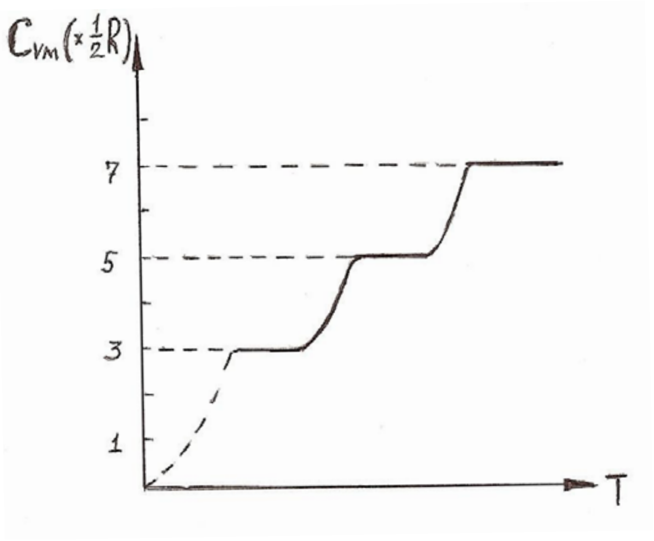
$$T \sim PV, \;\Rightarrow\; PV^{\gamma} = \text{const}$$

$$V = TP^{-1}, \;\Rightarrow\; T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{const}$$

Трудности классической теории теплоёмкости идеальных газов.

Из определения молярной теплоёмкости идеального газа $C_{VM} = \frac{i}{2} R$, следует, что теплоёмкость должна быть кратка $\frac{R}{2}$, так как число степеней свободы i может быть только целым.

Однако между теорией и экспериментом наблюдается значительное расхождение. В этом нетрудно убедиться, проанализировав ход экспериментальной зависимости C_{VM} от температуры для водорода:



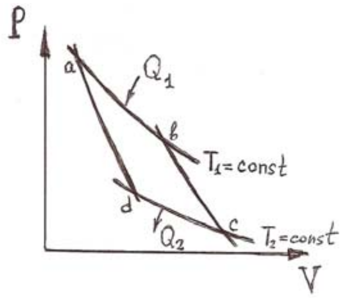
1) $i = i(T)$

При низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул. С ростом T сначала у отдельных молекул появляются вращательные степени свободы. Затем при достижении определенной температуры все молекулы будут вовлечены во вращательное движение. Такая закономерность характерна и для колебательного движения молекул.

2) Выражение $C_{VM} = \frac{i}{2}R$ справедливо только для выделенного интервала температур.
3) Все закономерности экспериментальной кривой объясняет квантовая механика

Равновесные процессы. Обратимые процессы. Циклы

Процессы, состоящие из непрерывной последовательности равновесных состояний, называют **равновесными**. Равновесный процесс, который можно провести как в прямом так и в обратном направлениях, без каких-либо изменений в системе, называют **обратимым**. Вообще говоря, в природе нет обратимых процессов, но в некоторых случаях степень необратимости достаточно мала, чтобы процесс можно было считать обратимым. К числу таких процессов относится адиабатный и изотермический. Процессы, при которых термодинамическая система возвращается в исходное состояние, называются **круговыми** или **циклами**. Машины, рабочие процессы в которых осуществляются циклически, называют **тепловыми машинами**. В качестве примера рассмотрим идеальную тепловую машину работающую по циклу Карно. **В двигателе Карно**, в котором рабочий процесс осуществляется по часовой стрелке, отбирается теплота от нагревателя (Q_1) и отдаётся теплота (Q_2) холодильнику.



ab и dc – изотермы
bc и ad – адиабаты

КПД (η) тепловой машины называют отношение работы А, произведённой за цикл, к количеству теплоты, полученной от нагревателя (Q_1).

КПД цикла Карно: $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$,

$$\left.\begin{aligned} Q_1 = A_1 = \int_{V_a}^{V_b} PdV = \frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_b}{V_a} \\ Q_2 = A_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{V_c}{V_d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{T_1 \ln(V_b/V_a)}{T_2 \ln(V_e/V_d)}$$

$$\left.\begin{aligned} bc: T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1} \\ ad: T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1}; \ \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Теорема Карно. КПД всех обратимых тепловых машин, работающих в идеальных условиях (при одних и тех же температурах T_1 и T_2), одинаков и определяется только температурами нагревателя (T_1) и холодильника (T_2).

Для необратимых процессов холодильнику отдаётся дополнительная теплота ΔQ т.е. $Q_2' = Q_2 + \Delta Q$. Поэтому КПД необратимого процесса меньше, чем обратимого:

$$\eta_{необр} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2 + \Delta Q}{Q_1} < \eta_{обр}$$

Например, для ДВС $T_1 = 1100K$, $T_2 = 27^oC = 300K$, $\eta_{обр} = 72\%$. Реальный же КПД равен $\eta_{необр} = 36\%$

Если провести цикл Карно в обратном направлении, мы получаем **холодильную машину**. Её КПД называют **холодильным коэффициентом**

$$X.k. = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Например, пусть $T_2 = -30^oC = 243K$, $T_1 = 27^oC = 300K$. Тогда $X.k. = 4{,}3$. Таким образом, затрачивая 1Дж энергии, мы отнимаем 4,3Дж у охлаждаемого тела.

Второе начало термодинамики

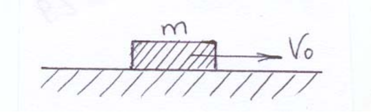
Первое начало термодинамики ничего не говорит о направлении протекания тепловых процессов. Первый закон термодинамики запрещает существование вечных двигателей 1-рода (A>Q), но разрешает существование вечных двигателей 2-рода (A=Q).

Полезно привести разные формулировки вторзого закона термодинамики:

I. Невозможны процессы, единственным результатом которых было бы отнятие тепла от тела и полное превращение его в работу без каких либо изменений в системе (Кельвин).

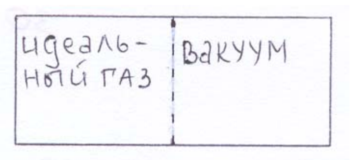
II. Невозможны вечные двигатели 2-рода (Планк), т.е. A должно быть меньше Q. Понять второе начало термодинамики можно лишь уяснив смысл необратимости тепловых процессов. Обратимся к примерам.

1) Деревянный брусок скользит по поверхности и останавливается.



$\frac{mV_0^2}{2}$ – кинетическая энергия как целого переходит бесчисленным числом способов в кинетическую энергию молекул тела и плоскости. Однако обратный переход : кинетическая энергия хаотического молекул тела и плоскости в поступательное движение тела крайне маловероятен.

2)



Если открыть перегородку, молекулы идеального газа начнут переходить в правую половину сосуда. Вероятность того, что одна молекула будет в правой половине равна:

$$P_{(1)} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$P_{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$P_{(N)} = 2^{-N}$$

$$N = N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$$

$$P_{(N)} = 2^{-6{,}02 \cdot 10^{23}} \to 0$$

Приведенные примеры показывают, что необратимость тепловых процессов имеет вероятностный характер. В качестве меры необратимости выступает энтропия:

$$S = k \ln \Omega,$$

где k- постоянная Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, Ω- статистический вес.

Свойства энтропии:

1) величина аддитивная:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = S_1 + S_2 + ... + S_n$$

2) энтропия равновесного состояния максимальна
3) энтропия является функцией состояния системы $(\oint dS = 0)$

Для практических расчётов пользуются выражениями

$$\begin{cases} dS = \dfrac{dQ}{T} \text{ (обратимый процесс)} \\ dS > \dfrac{dQ}{T} \text{ (необратимый процесс)} \end{cases}$$

Для цикла Карно:

$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_1} \cdot Q_1 - \frac{1}{T_2} \cdot Q_2 \equiv 0$$

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \Rightarrow \eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \equiv 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

4) При всех необратимых процессах, происходящих в замкнутой (изолированной) системе, энтропия может только возрастать. $\Delta S \geq 0$ (третья формулировка начала термодинамики)

Примеры расчета энтропии.

1) Плавление (затвердевание):

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T_{пл}} = \frac{\lambda m}{T_{пл}}; \quad \lambda - \text{удельная теплота плавления}$$

2) Конденсация (испарение):

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T_k} = \frac{rm}{T_k}; \quad r - \text{удельная теплота парообразования}$$

3) Нагревание:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = cm \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1}$$

4) Для идеального газа:

$$dQ = \frac{m}{M} C_{VM} dT + PdV$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}; \quad dQ = \frac{m}{M} C_{PM} dT \quad (P = const)$$

a) $\underline{T = const}, \Rightarrow dQ = PdV, \quad PV = \frac{m}{M} RT, \quad \Rightarrow P = \frac{mRT}{MV}$

$$\Delta S = \int \frac{\Delta Q}{T} = \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{m}{M} R \left(\ln V_2 - \ln V_1 \right) = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{P_1}{P_2}; \quad P_1 V_1 = P_2 V_2$$

b) $\underline{V = const}, \Rightarrow dQ = \frac{m}{M} C_{VM} dT$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{m}{M} C_{VM} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_{VM} \ln \frac{T_2}{T_1}; \quad C_{VM} = \frac{i}{2} R$$

$$\Delta S = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

c) $\underline{P = const}; \Rightarrow dQ = \frac{m}{M} C_{PM} dT$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{m}{M} C_{PM} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_{PM} \ln \frac{T_2}{T_1} \equiv \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1} \equiv \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} =$$
$$= \frac{i+2}{2} \cdot \frac{P_1 V_1}{T_1} \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

d) <u>адиабатный</u>: $dQ = 0, \Rightarrow \Delta S = 0$

Третье начало термодинамики (Теорема Нернста)

Энтропия всех систем при T=OK постоянна и её можно считать равной нулю:

$$\lim_{T \to 0} S = 0$$

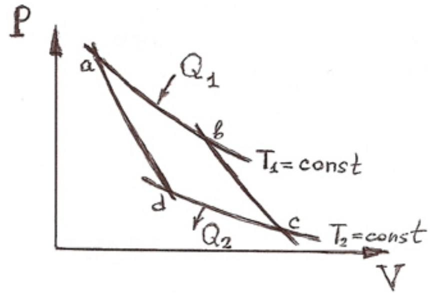
Следствие 1:

$$S(V,T) = \int_0^T \frac{dQ}{T} = \int_0^T \frac{C_V dT}{T}, \quad S(P,T) = \int_0^T \frac{C_P dT}{T},$$

$$T \to 0, \Rightarrow C_P \to 0, \quad C_V \to 0$$

Следствие 2: абсолютный 0 температуры не достижим.

Доказательство от противного: Пусть $T_2 = 0, \Rightarrow Q_2 = 0$



$$A = Q_1 - Q_2 = Q_1$$
$$\text{Но}: A < Q_1 \left(\text{II закон термодинамики}\right)$$

т.е. получим противоречие.

Границы применимости II начала термодинамики:

а) Применимо для объёмов много больше объёмов молекул; т.е. в микромире II начало термодинамики применять нельзя.
б) для объемов много меньше объема Вселенной: $V << V_{\text{Вселенной}}$

Некритическое перенесение земного опыта на Вселенную привело Клаузиуса к так называемой теории «тепловой смерти Вселенной». Поскольку, как полагал Клаузиус, Вселенная замкнута, то по II закону термодинамики рано или поздно, но за конечный промежуток времени, Вселенная должна прийти к термодинамическому состоянию равновесия, при котором наступит полный покой, т.е. «тепловая смерть». Как показал К.П. Станюкович, согласно общей теории относительности, для Вселенной не существует понятия максимальной энтропии. Кроме того, на сегодняшний день нет доказательств, что Вселенная замкнута.

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.

Электростатика

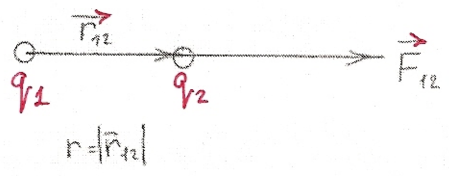
Раздел электромагнетизма, изучающий взаимодействие и поля покоящихся относительно избранной ИСО электрических зарядов, называется **электростатикой**.

В природе существует два рода электрических зарядов, условно подразделяющихся на положительные и отрицательные. До недавнего времени считалось, что все заряды в природе кратны (т.е. составляют целое число) заряду одного электрона: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. О современном состоянии проблемы поговорим в конце общего курса физики. Экспериментальным путём был установлен **закон сохранения электрического заряда**: **в изолированной системе зарядов, суммарный заряд сохраняется**: $\sum_i q_i = \text{const}$

Замечание: Электрический заряд является релятивистски-инвариантной величиной.

Взаимодействие покоящихся **относительно выбранной ИСО** точечных зарядов в вакууме описывается законом Кулона:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r}$$



$$[k]_{си} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}$$

$$[\varepsilon_0]_{си} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$$

Если точечные заряды находятся в однородном и безграничном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε, то сила их электрического взаимодействия определяется выражением:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

где ε - показывает, во сколько раз сила взаимодействия заряда в вакууме больше чем в данной среде.

Область применимости закона Кулона: $r \geq 10^{-15}$ м

Заряды наделяют окружающее пространство особым свойством, они создают электрическое поле.

Существуют две **характеристики электрического поля**:

а) **Силовая** : $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ - **напряженность**, численно равная силе, действующей со стороны электрического поля на единичный точечный положительный заряд, помещённый в данную точку поля.

$$[E]_{си} = \frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}$$

б) **Энергетическая** : **потенциал** $\phi = \dfrac{\vec{E}_p}{q}$ - , численно равен потенциальной энергии единичного точечного положительного заряда в данной точке поля.

Из определения потенциала следует $E_p = q\phi$. Тогда работа электрического поля по перемещению заряда q из точки с потенциалом ϕ_1 в точку с потенциалом ϕ_2 , равна

$$A = q\left(\phi_1 - \phi_2\right) \ .$$

Условились потенциал на бесконечности (∞) считать равным нулю: $\phi_\infty = 0$. Поэтому, если заряд переносится из данной точки в ∞, соответствующая работа равна: $A_\infty = q\phi$. Откуда $\phi = A_\infty / q$, т. е потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность. В силу этого физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов.

Так как $\vec{E}$ и ϕ описывают одно поле, между ними должна быть связь.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \ , \quad \left.\begin{aligned} \vec{F} &= q \cdot \vec{E} \\ E_p &= q \cdot \phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi ,$$

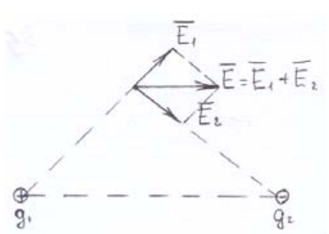
т. е зная φ можно восстановить $\vec{E}$.

С другой стороны, по известному полю $\vec{E}$ можно найти разность потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} A &= q\left(\phi_1 - \phi_2\right) \\ A &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

Принцип суперпозиции электрических полей

Если электрическое поле создаётся системой электрических зарядов, то:
результирующий вектор напряжённостей электрического поля равен векторной сумме напряженности, создаваемый отдельными зарядами, а результирующий потенциал – алгебраической сумме:



$$1) \vec{E}_{рез.} = \sum_i \vec{E}_i \ , \quad 2) \phi_{рез.} = \sum_i \phi_i$$

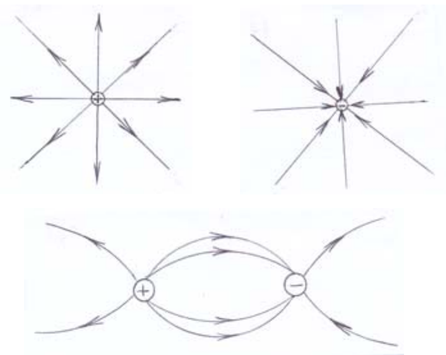
$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} \ , \quad \alpha = \left(\vec{E}_1; \vec{E}_2\right)$$

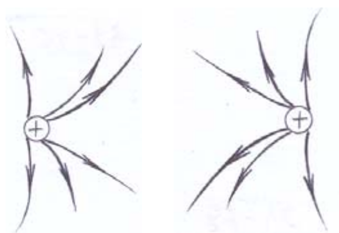
Для точечного заряда в системе СИ:

$$E = kq/r^2, \qquad \phi = kq/r.$$

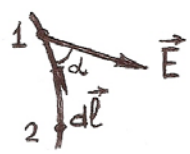
Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Линия, касательная к которой совпадает с вектором напряженности электрического поля, называется **силовой линией** электрического поля.
Условились вектор напряженности электрического поля направлять от положительного и к отрицательному заряду.





Поверхности, в каждой точке которых потенциалы одинаковы, называют **эквипотенциальными**. Выясним, как ориентирован вектор $\vec{E}$ к эквипотенциальной поверхности.



$$\phi_1 = \phi_2$$

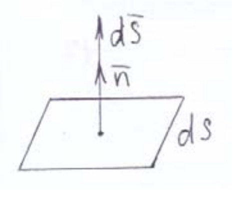
$$\left.\begin{array}{l} A = q(\phi_1 - \phi_2) = 0 \\ A = q\int \vec{E}d\vec{l} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E}d\vec{l} = Edl\cos\alpha = 0, \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ.$$

Силовые линии перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Математическая теорема Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{a}d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{a}dV$$

Поток вектора $\vec{a}$ через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, заключенному внутри этой поверхности.



$$d\vec{S} = dS\vec{n}$$

Дивергенция вектора есть скаляр, определенный по правилу:
$\mathrm{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\vec{a}$

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$ (в декартовой системе координат)

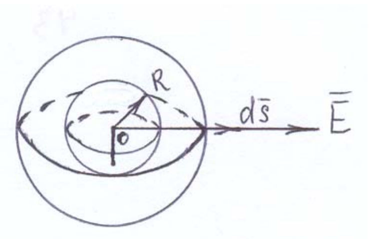
Если дивергенция некоторого векторного поля отлична от нуля, то у этого поля есть заряд.

Физическая теорема Остроградского-Гаусса для потока вектора $\vec{E}$

Теорема. Поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри поверхности, деленной на ε_0 .

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

Пример: рассчитаем электростатическое поле, созданное полым металлическим шаром с равномерно распределенным зарядом q на расстоянии от его центра.



$$d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{E}, \quad \Rightarrow \quad \vec{E}\hat{\ }d\vec{S} = 0, \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\vec{E}\hat{\ }d\vec{S}\right) = 1$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E4\pi r^2,$$

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}q, \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad \Rightarrow \quad E_{r\geq R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Нетрудно сообразить, что напряженность $E_{r<R}$ электрического поля внутри полой металической заряженной сферы равна 0.
Если заряд распределён по объему, то мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \oint_S \vec{E}d\vec{S} &= \int_V \vec{\nabla}\vec{E}dV \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,$$

т.е источником поля $\vec{E}$ есть заряд с плотностью ρ

Электрический ток. Законы Ома.

Электрическим током называется всякое упорядоченное движение электрических зарядов в пространстве.

Упорядоченное движение свободных зарядов, возникающее в проводнике под действием электрического поля, называется **током проводимости**.

За направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов (электроны движутся в направлении обратном току).

Силой тока сквозь некоторую поверхность S называется скалярная величина I, равная первой производной по времени от заряда q, проходящего через эту поверхность:

$$\mathrm{I} = dq/dt, \qquad [\mathrm{I}]_{си} = Кл/с = А.$$

Ток называется **постоянным**, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени.

Для поддержания в цепи постоянного тока необходимо иметь специальное устройство, внутри которого происходило бы непрерывное разделение разноименных разрядов и их перенос против сил электростатического поля. Такие устройства получили название **источников тока**.

Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называют **сторонними**. Физическая величина, численно равная работе сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС) ε:

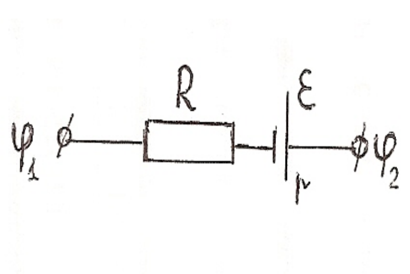
$$\varepsilon = A_{ст}/q \ .$$

Следует иметь в виду, что эта работа зависит не только от начальной и конечной точек участка цепи, но и от пути интегрирования.

Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы называется **неоднородным**. Сила тока на таком участке

$$\mathrm{I} = \frac{(\phi_1 - \phi_2) + \varepsilon}{R + r},$$



где R - сопротивление нагрузки, r- внутреннее сопротивление источника тока.

Из этого закона следует два частных случая:

а) **для однородного участка цепи** $(\varepsilon = 0)$: $I = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} = \frac{U}{R}$,

где U - напряжение на концах участка; $[I]_{си} = В/Ом = А$.

б) **для замкнутой цепи** $(\phi_1 = \phi_2)$: $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$

Произведение сопротивления участка на силу тока, текущему на участке называют **падением напряжения на участке** U: $U = I(R + r)$. Выше мы прояснили физический смысл ЭДС ε. Теперь выясним физический смысл разности потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ и падения напряжения U.

Под **разностью потенциалов** понимают величину численно равную удельной работе кулоновских сил: $\phi_1 - \phi_2 = A_k / q$. Эта работа не зависит от пути интегрирования, а определяется начальной и конечной точками участка цепи.

Удельную работу результирующего поля - кулоновского и стороннего называют **напряжением**. Эта работа должна зависеть от пути интегрирования.

Проанализируем закон Ома для замкнутой цепи и его следствия:

$$\begin{cases} I = \dfrac{\varepsilon}{R + r} \\ U_1 = IR = \varepsilon - Ir = \varepsilon\left(1 - \dfrac{r}{R + r}\right), \end{cases}$$

где U_1- падение напряжения во внешней цепи.

1)если $R \to \infty$, $\Rightarrow$ $U_1 \to \varepsilon$, $I \to 0$. Бесконечно большое сопротивление будет при разомкнутой цепи, тогда предельное значение напряжения на зажимах источника равно ε.

2)если $R \to 0$, $\Rightarrow$ $U_1 \to 0$, $I \to I_{max} = \frac{\varepsilon}{r}$ (ток короткого замыкания).

При уменьшении внешнего сопротивления до нуля происходит резкое увеличение тока в цепи, напряжение на зажимах будет падать и может упасть до нуля. Такой случай получил название **короткого замыкания**.

Закон Джоуля – Ленца.

Если проводник неподвижен и в нем не происходит химических превращений, то работа электрического тока затрачивается на увеличение внутренней энергии проводника. Количество теплоты Q, выделяемое при этом

$Q = I^2Rt$ (постоянный ток); $Q = \int_0^t I^2Rdt$ (переменный ток).

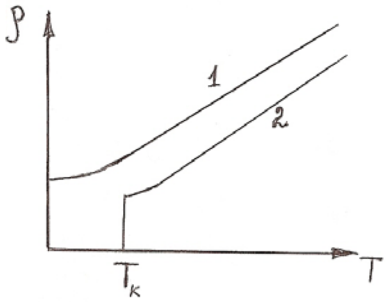
Из этого закона, в частности, видно, что проводники нагреваются ввиду наличия электрического сопротивления R.

Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho l/S,$$

где l - длина проводника, S - площадь его поперечного сечения, ρ - удельное электрическое сопротивление вещества.

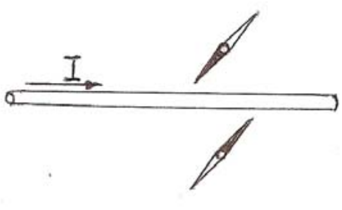
Для большинства металлов $\rho \sim T$, а при низких температурах наблюдается отступление от этой закономерности (кривая 1).



У группы металлов и сплавов при температуре порядка несколько Кельвин сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2). Это явление получило название **сверхпроводимости**. Оно было обнаружено в 1911 г. голландским физиком Камерлинг-Оннесом для ртути. Достаточно долгое время не удавалось получить материалы в сверхпроводящем состоянии при более высоких температурах. Прорыв был осуществлен в 1986 – 1987гг.: наивысшая температура $T_к = 135K$ была достигнута для $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{x+8}$ без давления; под довольно большим давлением для этого купрата уже $T_к = 164K$. Интенсивные работы по получению **высокотемпературной сверхпроводимости** (за последние 10 лет на эту тему появилось около 50 000 публикаций) продолжаются.

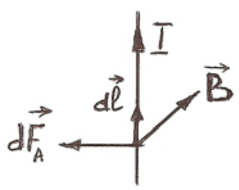
Магнитное поле в вакууме.

В 1820 г датский физик Эрстед открыл магнитное поле электрического тока. Схема его опыта имеет вид:



При пропускании тока по проводнику магнитная стрелка ориентировалась перпендикулярно проводу. Изменение направления тока приводило к повороту стрелки в противоположную сторону.

В том же году французский физик Ампер открыл закон (**закон Ампера**), определяющий величину и направление вектора силы $d\vec{F}_A$, действующего в магнитном поле с индукцией B на элемент длине dl провода с током I:



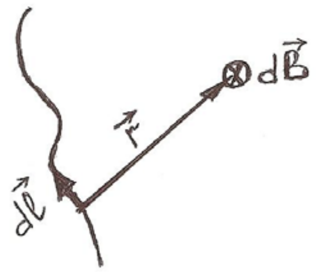
$$d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l}\vec{B}\right]$$

$$dF_A = IdlB\sin\left(d\vec{l}\,\hat{}\,\vec{B}\right).$$

$$B = \frac{F_{max}}{Il}, \quad \Rightarrow \quad [B]_{си} = \frac{Н}{А \cdot м} = Тл \text{ (Тесла)}$$

Дальнейшее изучение магнитных полей, создаваемых тонкими проводниками с токами проводили французские ученые Био и Савар. Теоретическое обобщение их исследований было дано Лапласом в 1820г.

Закон Био-Савара-Лапласа (БСЛ): элемент длины проводника $d\vec{l}$ с током I на расстоянии r от dl создает магнитную индукцию $d\vec{B}$, величина и направление которой определяется выражением:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left[d\vec{l}\vec{r}\right]$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\left(d\vec{l}\,\hat{}\,\vec{r}\right),$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м (магнитная постоянная).

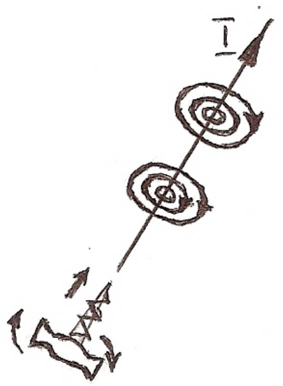
Следует иметь в виду, что закон справедлив только для **линейных токов**, т. е для проводников, поперечные размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием от проводника до заданной точки поля.

Приложения закона БСЛ.

1) ***Линии индукции магнитного поля***.

Графически магнитное поле изображается с помощью **линий индукции** – линий, касательные к которым каждой точке указывают направление магнитного поля в этой точке.

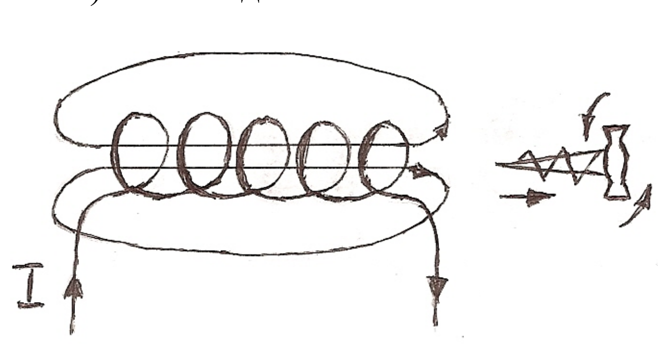
1.1) прямолинейного проводника с током.



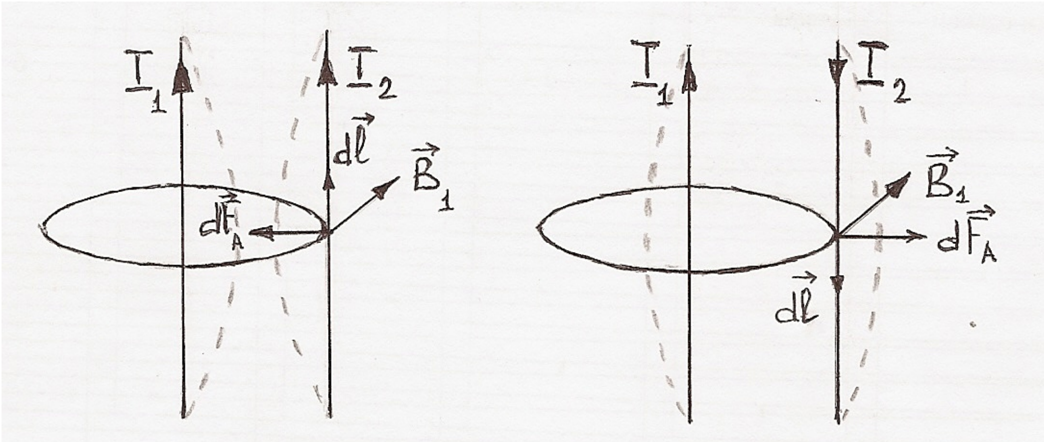
Иначе направление линий индукции можно определить с помощью «**прямого правила буравчика**»: если ввинчивать или вывинчивать буравчик, двигая его по направлению тока, то направление вращения рукоятки буравчика покажет направление линий индукции магнитного поля.

1.2) соленоида.

Как работает «**обратное правило буравчика**» должно быть понятно из приведенного рисунка.



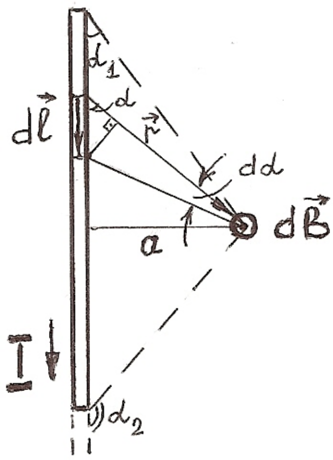
2) **Взаимодействие проводов с токами.**



Таким образом, токи одного направления притягиваются, а противоположного – отталкиваются.

3) **Магнитное поле прямолинейного проводника с током.**

Найдем индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямого провода с током.



Согласно закона БСЛ $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$

Из рисунка видно, что

$$\left.\begin{aligned} rd\alpha &= dl\sin\alpha \\ r\sin\alpha &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dl\sin\alpha}{r^2} = \frac{d\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{a}d\alpha$$

Следовательно, $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\alpha d\alpha$

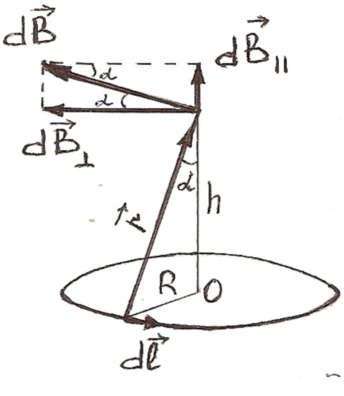
Интегрируя, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

Это выражение можно обобщить на случай **бесконечно длинного проводника**. Для этого нужно сделать предельный переход: $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to \pi$, $\Rightarrow$ $B_\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.

4) **Магнитное поле кругового тока.**

Рассчитаем индукцию магнитного поля на оси витка радиуса R с током I на расстоянии h от центра витка.



Очевидно, что $\sum_k \left(d\vec{B}_\perp\right)_k = 0$, т. е. суммируются лишь компоненты dB_{11}.

$$B = \int dB_{11} = \int dB\sin\alpha$$

Учтем, что

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}, \quad \sin\alpha = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{R^2 + h^2}$$

В результате интегрирования, получим

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{r^3}\int_0^{2\pi R}dl=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot 2\pi R^2}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}.$$

Таким образом, на расстоянии h от плоскости кольца, индукция магнитного поля определяется как

$$B_h=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}$$

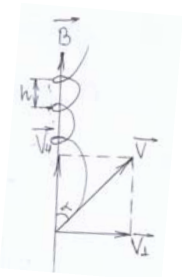
Как частый случай, отсюда следует выражение для индукции магнитного поля в центре кругового тока:

$$B_0=B(h=0)=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

Движение заряженных частиц в магнитных полях

Сила Лоренца

На частицу с зарядом q, которая движется со скоростью $\vec{V}$ в магнитном поле



действует сила Лоренца

.

$$\vec{F}_A=q\left[\vec{V}\cdot\vec{B}\right]$$

В общем случае, если заряженная частица влетает под углом к линиям магнитной индукции, то она будет двигаться по винтовой линии. Период движения частицы равен:

$$T=\frac{2\pi R}{V_\perp}$$

$$\vec{F}_\lambda\perp\vec{V}\,,\quad\Rightarrow\quad F_л=F_{ц\cdot с}\equiv\frac{mV_\perp^2}{R}$$

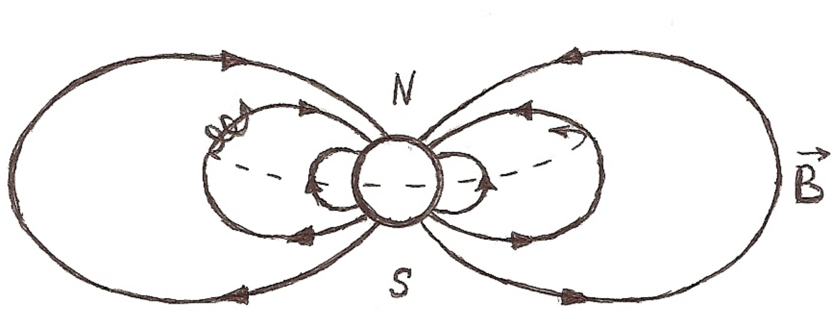
$$qV_\perp B=\frac{mV_\perp{}^2}{R}\,,\quad\Rightarrow\quad V_\perp=\frac{qBR}{m}\,,\quad\Rightarrow\quad T=\frac{2\pi m}{qB}.$$

Таким образом, в однородном магнитном поле период вращения заряженной частицы не зависит от ее скорости. Шаг винтовой линии:

$$h=V_{11}T=\left(2\pi mV/qB\right)\cos\alpha\,.$$

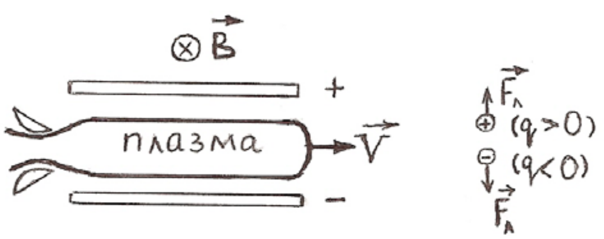
Движение заряженной частицы в магнитном поле Земли.

Магнитное поле Земли захватывает заряженные частицы, в основном приходящие от Солнца (солнечный ветер), и, таким образом, защищает нас от этого потока частиц. Заряженные частицы медленно дрейфуют вокруг Земли в широком направлении.



МГД – преобразование энергии

Для генерации электричества используется магнитогидродинамическое (МГД) преобразование энергии плотной плазменной струи (плазма – это квазинейтральный газ заряженных и нейтральных частиц, который проявляет коллективные свойства), движущейся поперек внешнего магнитного поля

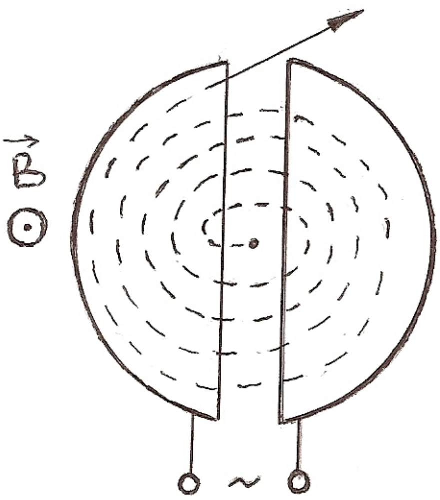


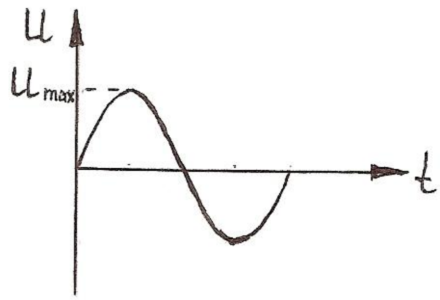
Под действием силы Лоренца $\vec{F}_{\text{л}} = q\left[\vec{V}\vec{B}\right]$, где $\vec{V}$ - вектор скорости струи, положительно заряженные ионы движутся вверх, а электроны – вниз, что создает разность потенциалов между двумя электродами. При этом с электродов можно снимать электрический ток, минуя неэффективный тепловой цикл.

Циклотрон.

Ускорители – устройства, с помощью которых получают частицы высокой энергии. Разберем принцип работы **циклотрона** – циклического резонансного ускорителя тяжелых частиц (протонов, ионов).

В основу этого ускорителя положена независимость периода T вращения заряженной частицы в однородном магнитном поле от ее скорости. Прибор состоит из двух полых металлических полуцилиндров (дуантов), которые помещены в откачиваемый корпус. Дуанты размещены между полюсами большого электромагнита, поле которого однородно и перпендикулярно плоскости дуантов. На дуанты подается переменное напряжение, возбуждаемое генератором высокой частоты. Заряженная частица вводится между дуантами в момент, когда напряжение между ними достигнет максимальной величины U_{max}:





Частица подхватывается электрическим полем и втягивается внутрь одного из дуантов. Пространство внутри дуанта является эквипотенциальным, поэтому частица будет находиться под воздействием только магнитного поля. Под действием силы Лоренца частица будет двигаться по окружности радиуса $R = mV/qB$.

Условие резонанса состоит в том, что когда частица, пройдя половину окружности, подойдет к зазору между дуантами, напряжение между дуантами изменило знак и достигло амплитудного значения U_{max}, т. е. период вращения частицы T в магнитном поле и колебаний электрического поля $T_{\approx}$ равны.

При первом прохождении через зазор между дуантами частица приобретает энергию

$$qU_{max} = \frac{mV_1^2}{2}.$$

При втором прохождении зазора энергия не должна меняться:

$$qU_{max} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}.$$

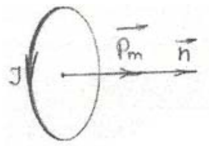
Отсюда следует, что

$$\frac{mV_2^2}{2} = 2qU_{max}, \quad \Rightarrow \quad V_2 > V_1, \quad \Rightarrow \quad R_2 > R_1.$$

Таким образом, частица будет двигаться по раскручивающейся спирали. На последнем витке, когда энергия частицы и радиус орбиты доведены до максимально допустимых размеров, частица посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона.

Контур с током в магнитном поле.

Контур с током I обладает магнитным моментом $\vec{P}_m$.



$$\vec{P}_m = IS\vec{n}\ , \quad \Rightarrow \quad \left[P_m\right]_{си} = А \cdot м^2$$

Магнитный момент – это вектор, численно равный произведению силы тока на площадь фигуры, ограниченной контуром с током, и направленной вдоль единичной нормали к плоскости контура.

С помощью вектора магнитного момента можно объяснить поведение контура с током в моментных полях.

Контур с током в однородном магнитном поле.

В однородном магнитном поле на плоский контур с током действует механический момент

$$\vec{M} = \left[\vec{P}_m\vec{B}\right]\ , \ \ M = P_m B\sin\left(\vec{P}_m\,{}^\wedge\vec{B}\right)\ , \ \ \left[M\right]_{си} = Н \cdot м\ ,$$

который стремиться сориентировать вектор $\vec{P}_m$ вдоль вектора $\vec{B}$. На самом деле, контур должен ориентироваться так, чтобы его потенциальная энергия E_p была минимальной:

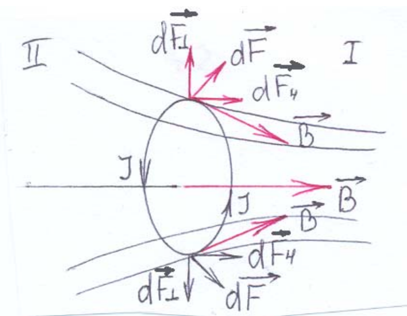
$$E_p = \int M d\phi = \int P_m B\sin\phi d\phi = -P_m B\cos\phi.$$

$$E_{p_{max}} = E_p\left(\phi = 180^\circ\right) = P_m B\ ,$$

$$E_{p_{min}} = E_p\left(\phi = 0\right) = -P_m B.$$

Таким образом, в однородном магнитном поле контур стремится повернуться так, чтобы его плоскость была перпендикулярна линиям магнитной индукции.

Контур с током в неоднородном магнитном поле.



В неоднородном магнитном поле контур с током будет вести себя следующим образом: 1) под действием вращательного момента он будет разворачиваться так, чтобы его плоскость стала перпендикулярна вектору $\vec{B}$; 2) он будет втягиваться в область сильного магнитного поля I, если вектор $\vec{p}_m$ составляет острый угол с $\vec{B}$ или выталкиваться в область слабого магнитного поля II, если $\vec{p}_m$ составляет тупой угол с вектором $\vec{B}$. Это происходит под действием силы, возникающей вследствие неоднородности магнитного поля, величина которого определяется выражением:

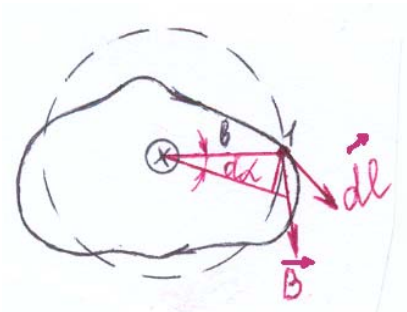
$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos\phi ,$$

где $\partial B / \partial x$ - градиент магнитного поля вдоль оси x.

Циркуляция вектора $\vec{B}$ для магнитного поля в вакууме (закон полного тока для магнитного поля в вакууме).

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad \text{(закон полного тока в интегральной форме)}$$

Циркуляция вектора индукции магнитного поля постоянного электрического тока в вакууме вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на μ_0.



Докажем для прямолинейного проводника с постоянным током:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B \cdot dl_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{b d\alpha}{b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha , \quad dl_B = b d\alpha$$

$\int d\alpha = 2\pi$, *откуда получим*

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$ - *для однородного проводника.*

Если контур интегрирования охватывает несколько проводников, имеем

$$\oint \sum_i \vec{B}_i d\vec{l} = \oint \sum_i \vec{B}_i d\vec{l}_B = \sum_i \oint B_i dl_B = \sum_i \mu_0 I_i = \mu_0 \sum_i I_i .$$

Для токов, текущих во всем пространстве, где расположен контур, справедливо представление:

$$\sum_i I_i = \int_S \vec{j} d\vec{S} ,$$

где $\vec{j}$ - плотность тока в той точке, где расположена площадка dS.

Тогда правая часть выражения для закона полного тока примет вид:

$$\mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Левую часть выражения для закона полного тока преобразуем, используя теорему Стокса:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \int_S \left[\vec{\nabla}\vec{B}\right]d\vec{S}$$

В результате имеем:

$$\int_S \left[\vec{\nabla}\vec{B}\right]d\vec{S} = \int_S \vec{j}d\vec{S}\ , \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{\nabla}\vec{B}\right] = \vec{j}$$ - закон полного тока в дифференциальной форме.

Из последнего выражения следует, что **магнитное поле постоянного тока является вихревым** (линии индукции магнитного поля замкнуты).

Приложения закона полного тока.

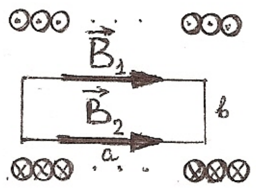
1) **Магнитное поле бесконечно длинного соленоида.**

Если диаметр соленоида намного меньше его длины, то его можно считать бесконечно длинным.

Прежде, чем воспользоваться теоремой о циркуляции, предварительно выяснили отдельные детали.

а) При рассмотрении следствий закона БСЛ мы выяснили, что для соленоида направления векторов индукции магнитного поля внутри соленоида $\left(\vec{B}\right)$ и вне его $\left(\vec{B}'\right)$ противоположны, а вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси соленоида.

б) Возьмем плоскость, в которой лежит ось соленоида. В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник со сторонами a и b.

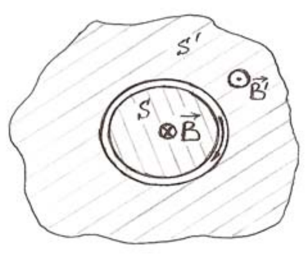


$$\left.\begin{aligned} &\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \left(B_1 - B_2\right)a \\ &\mu_0 \sum_i I_i = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B_1 = B_2$$

Таким образом, магнитное поле внутри соленоида **однородно**, т. е. одинаково во всех точках по величине и направлению.

Аналогично доказывается однородность магнитного поля вне соленоида.

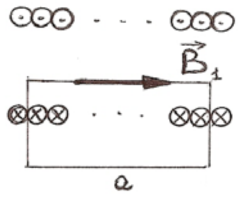
в) Возьмем плоскость, перпендикулярную к оси соленоида.



Вследствие замкнутости линий индукции магнитного поля магнитные потоки через внутреннюю часть S этой плоскости и через внешнюю часть S' должны быть одинаковы. Поскольку поля однородны и перпендикулярны к плоскости, получим $BS = B'S'$. Так как BS - конечно, а $S' \to \infty$, $\Rightarrow$ $B' \to 0$.

Таким образом, для бесконечно длинного соленоида магнитной индукцией вне соленоида по сравнению с магнитной индукцией внутри соленоида можно пренебречь.

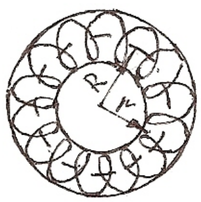
Теперь можно применить теорему о циркуляции для расчета магнитного поля бесконечно длинного соленоида.



$$\left.\begin{aligned}&\oint_l \vec{B}_l d\vec{l} = B_l a = Ba\\ &\mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 n I a\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B = \mu_0 n I \ ,$$

где $n = N/l$ - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

2) Магнитное поле тороида.

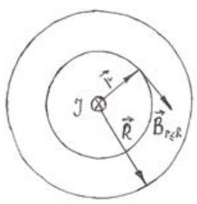


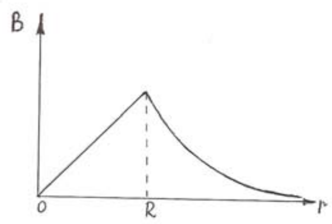
$$\left.\begin{aligned}&\oint_l \vec{B} d\vec{l} = B 2\pi r\\ &\mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 n I 2\pi R\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B = \mu_0 n I \frac{R}{r} \ ,$$

где R - радиус тороида, n - число витков на единицу длины.

3) Магнитное поле цилиндрического проводника с током.

По однородному прямолинейному цилиндрическому проводнику радиуса R идет ток I. Найти индукцию магнитного поля B внутри и вне проводника на расстоянии r от оси. Построить график $B = B(r)$.



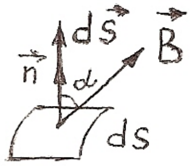


$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = B 2\pi R \ , \qquad \mu_0 \sum_i I_i = \begin{cases} \mu_0 j \pi r^2 \ (\text{для } r \le R) \ , \quad j = I/\pi R^2 \\ \mu_0 I \ (\text{для } r \ge R) \end{cases}$$

$$B_{r\le R} 2\pi R = \mu_0 j \pi r^2 \ , \quad \Rightarrow \quad B_{r\le R} 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \ , \quad \text{откуда}$$

$$B_{r\le R} = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi R^2} \ , \quad B_{r=R} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \ ; \qquad B_{r\ge R} 2\pi r = \mu_0 I \ , \quad \Rightarrow \quad B_{r\ge R} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \ .$$

Поток вектора магнитной индукции.
Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$.



$$d\vec{S} = \vec{n}dS$$

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS\cos\alpha$$

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется скалярная физическая величина, равная скалярному произведению вектора $\vec{B}$ на вектор площади $d\vec{S}$.

Поток вектора $\vec{B}$ через произвольную поверхность равен:

$$\Phi_B = \int\limits_S \vec{B}d\vec{S}$$

Для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору $\vec{B}$.

$$\Phi_B = BS\ , \qquad [\Phi]_{си} = Тл \cdot м^2 = Вб\ (Вебер)$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$.

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Этот вывод является обобщением земного опыта.

$$\Phi_B = \oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

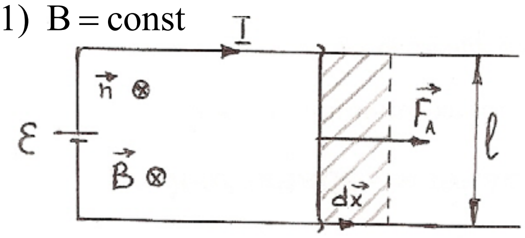
Используя математическую теорему Остроградского – Гаусса, имеем

$$\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = \int\limits_V \vec{\nabla}\vec{B}dV = 0\ , \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{B} = 0.$$

Последнее выражение указывает на то, что магнитных зарядов (монополей) в земных условиях не существует.

Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.

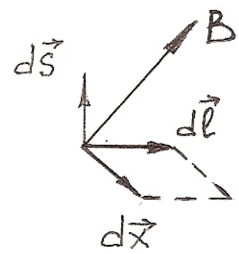
1) $B = const$



Контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длины l, находится в однородном магнитном поле.

$$A = \int \vec{F}_A d\vec{x} = \int F_A dx = IB\int_{S_1}^{S_2} l dx = IB(S_2 - S_1) = IB\Delta S = I\Delta\Phi$$

2) $B \neq const$



Рассмотрим контур с током любой формы, находящийся в произвольном магнитном поле. Пусть элемент контура dl перемещается на $d\vec{x}$.

$$A = \int \vec{F}_A dx = I\int \left[d\vec{l}\vec{B} \right] d\vec{x} = I\int \vec{B}\left[d\vec{x} d\vec{l} \right] =$$

$$= I\int \vec{B} d\vec{S} = I\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi.$$

Следует отметить, что работа A совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля, а за счет источника, поддерживающего неизменным ток в контуре.

Явление электромагнитной индукции

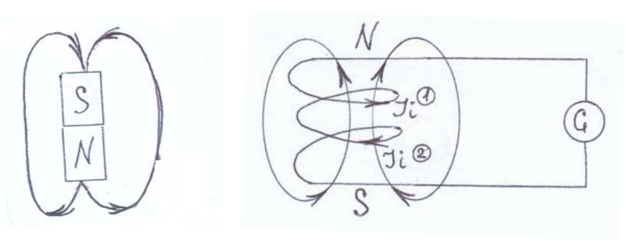
В 1831 г. англичанин Фарадей открыл явление электромагнитной индукции.

Явление возникновения тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром называется **явлением электромагнитной индукции**.

ЭДС индукционного тока определяется законом Фарадея, согласно которому она пропорциональна скорости изменения магнитного потока со временем. Знак минус берется в соответствии с правилом Ленца.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad d\Phi = BdS\cos\alpha$$

Согласно **правилу Ленца**, индукционный ток имеет такое направление, чтобы своим собственным магнитным полем препятствовать изменениям магнитного поля, его породившего.



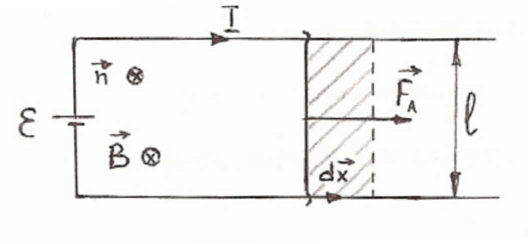
Направление индукционного тока I_i связано с направлением движения постоянного магнита:

1 – магнит вдвигается в соленоид

2 – магнит выдвигается из соленоида

1)**Вывод закона Фарадея из закона сохранения энергии**.

Работа источника тока расходуется на выделение джоуль – ленцовского тепла и на работу перемещения проводника с током.

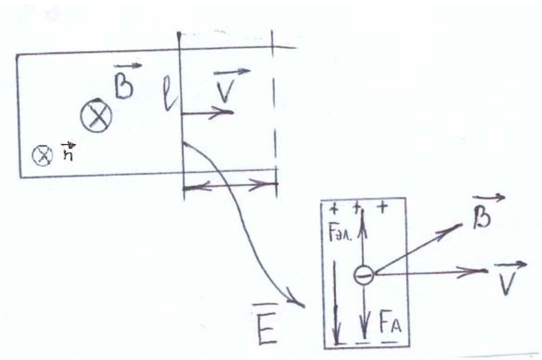


$$I\varepsilon dt = I^2 R dt + dA\ , \quad dA = I d\Phi$$

$$I = \frac{\varepsilon + \left(-\dfrac{d\Phi}{dt}\right)}{R}\ , \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

2) **Вывод закона электромагнитной индукций на основе электронных представлений.**

В предыдущем случае перемещение проволочки происходило за счет источника тока. В этом случае мы сами перемещаем проволочку со скоростью $V = \mathrm{const}$. Вместе с проволочкой перемещаются электроны, на которые начинает действовать сила Лоренца. Действие силы Лоренца приводит к появлению на концах проволочки избыточных зарядов противоположного знака и созданию электрического поля напряженностью $\vec{E}$.



$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U\ , \quad \Rightarrow \quad E = -U/l\ , \quad \Rightarrow U = -El$$

$$\varepsilon_i = U = -El\ ; \qquad \vec{F}_{эл} = q \cdot \vec{E};$$

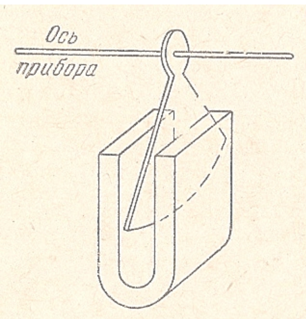
Условие прекращения перемещения зарядов:

$$F_{эл} = F_{л}\ ; \quad \Rightarrow \quad qE = qVB\ , \quad \Rightarrow \quad E = VB$$

$$\varepsilon_i = -BlV = -Bl\frac{dx}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Токи Фуко

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае они называются **токами Фуко или вихревыми токами**. Поскольку электрическое сопротивление массивного проводника мало, вихревые токи могут достигать очень большой силы.



Токи Фуко подчиняются правилу Ленца – они выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которой они вызваны. Поэтому движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этим пользуются для успокоения (демпфирования) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. На подвижной части прибора укрепляется проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора , которая вводится в зазор между полюсами сильного постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают вихревые токи, вызывающие торможение системы. Преимущества такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и отсутствует, когда пластинка неподвижна. Поэтому электромагнитный успокоитель совершенно не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Тепловое действие токов Фуко используется в **индукционных печах**. Такая печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нём возникнут интенсивные **вихревые токи**, которые могут разогреть тело до плавления. Таким способом осуществляют плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

С помощью токов Фуко осуществляется также прогрев внутренних металлических частей вакуумных установок для их обезгаживания.

В многих случаях токи Фуко бывают нежелательными и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание вихревыми токами сердечников трансформаторов, эти сердечники набираются из Тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками. Пластинки располагаются так, чтобы возможные направления ,токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление **ферритов** (магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников сплошными.

Вихревые токи, возникающие в проводах, по которым текут переменные токи, направлены так, что ослабляют ток внутри провода и усиливают вблизи поверхности. В результате быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно - он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление называется **скин - эффектом** (от английского skin - кожа) или ***поверхностным эффектом.*** Из-за скин-эффекта внутренняя часть проводников в высокочастотных цепях оказывается бесполезной. Поэтому в высокочастотных цепях применяют, проводники в виде трубок.

Явление самоиндукции

Явление возникновения индукционного тока в цепи при изменении силы тока в ней самой называется явлением **самоиндукции**. Поток, сцепленный с N витками проводника называется потокосцеплением Ψ.

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Psi}{dt}; \qquad \Psi = N\Phi$$

$$\Phi \sim B \sim I, \quad \Rightarrow \quad \Psi = LI, \quad \text{где } L - \text{индуктивность}$$

$$\varepsilon_S = -I\frac{dL}{dt} - L\frac{dI}{dt}, \quad \Rightarrow \quad L = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt}$$

$$[L]_{cu} = \frac{\text{Тл}}{\text{А}} = \text{Гн (Генри)}$$

Получим выражение для индуктивности бесконечно длинного соленоида

$$\psi = N\Phi = NBS \equiv LI,$$

так как

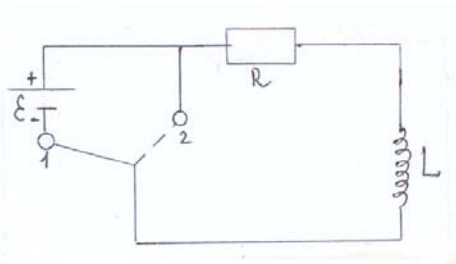
$$B = \mu_0 nI\ , \quad n = N/l\ , \quad V = Sl\ ,$$

получим

$$L = \mu_0 nNS = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} S \cdot l = \mu_0 n^2 V$$

Экстратоки замыкания и размыкания цепи

1) размыкание цепи



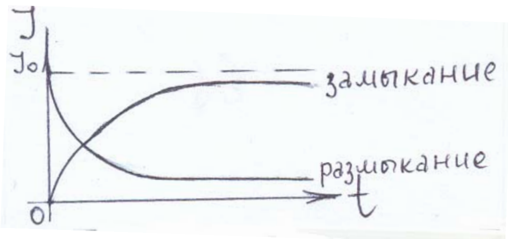
$$1 \to 2 \quad \Rightarrow \quad IR = \varepsilon_S\ ,$$

$$IR = -L\frac{dI}{dt}\ , \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\ln I = \ln c_1 - \frac{R}{L}t\ , \quad \Rightarrow \quad I = c_1 e^{-\left(R/L\right)\cdot t}$$

$$\text{Н.у}: t = 0\ , \quad I = I_0\ , \quad \Rightarrow \quad c_1 = I_0$$

$$I = I_0 e^{-Rt/L}$$



2) замыкание цепи

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_S\ , \quad IR = \varepsilon - L\frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad L\frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon$$

$$I = I_{одн} + I_{неодн}\ ; \quad I_{одн} = c_2 e^{-\left(R/L\right)t}\ , \quad I_{неодн} = \frac{\varepsilon}{R}$$

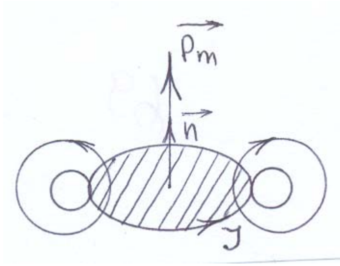
$$I = c_2 e^{-\left(R/L\right)t} + \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\text{Н.у}: t = 0\ , \quad I = 0\ , \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\varepsilon}{R}$$

$$I = I_0\left(1 - e^{-\left(R/L\right)t}\right)\ , \quad I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

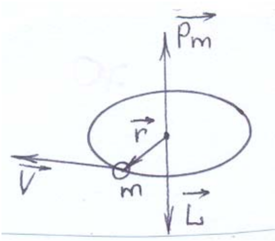
Магнитные свойства вещества

До сих пор мы рассматривали магнитное поле в вакууме. В присутствии вещества магнитное поле изменяется ввиду того, что вещество намагничивается в магнитном поле. Для объяснения намагничивания французский физик Ампер выдвинул



гипотезу молекулярных токов, которые обладают магнитными моментами: $\vec{p}_m = I\vec{S}$; $\vec{S} = \vec{n}S$

Природа молекулярных токов стала понятной после построения Резерфордом модели атома. Несмотря на то, что, как мы выясним в дальнейшем, движение электронов в атомах подчиняется квантовым законам, некоторые магнитные явления удается объяснить с использованием модели, в которой электроны в атомах движутся по стационарным круговым орбитам.



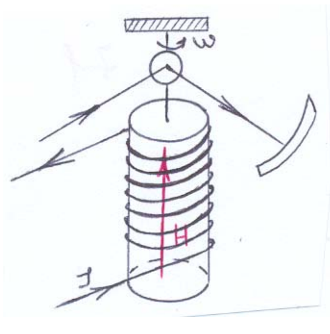
$$p_m = IS = \frac{e}{T}\pi r^2 = e\frac{2\pi r}{T}\cdot\frac{r}{2} = \frac{eVr}{2}$$

$$\vec{L} = \left[\vec{r}m\vec{V}\right] ; \quad \Rightarrow \quad L = rmV$$

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}$$ – гидромагнитное отношение.

Таким образом, электрон должен вести себя подобно волчку, т.е. намагничивание магнитика должно приводить к его вращению и наоборот.

Опыт Эйнштейна и де-Гааза



$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m\vec{B}\right], \quad M = p_m B\sin\phi , \quad E_p = \int \vec{M}d\vec{\phi} ,$$

$$E_{p_{min}} \text{ для } \phi = 0 , \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B},$$

$$\sum_i \vec{L}_i \neq 0 , \quad \Rightarrow \quad \sum_i L_{ei} - L_{ст} = 0 , \quad \Rightarrow \quad L_{ст} = \sum_i L_{ei}$$

Эксперимент показал, что $\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{m}$

Тонкий железный стержень подвешивался на упругой нити и помещался внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничивании стержня постоянным магнитным полем получалось малым. Для усиления эффекта был использован резонанс – соленоид питался переменным током, частота подбиралась равной собственной частоте механических колебаний системы. При этих условиях амплитуда колебаний достигла значений, которые можно было измерить, наблюдая смещения светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити.
В дальнейшем выяснилось, что электрон помимо орбитального обладает собственным моментом импульса (спином) и связанным с ним собственным магнитным моментом.

Магнитный момент электрона равен векторной сумме орбитального и спинового момента электрона.

$$\vec{p}_{me} = \vec{p}_{ml} + \vec{p}_{mS}.$$

Магнитный момент атома складывается из векторной суммы магнитных моментов электронов и магнитного момента ядра.

$$\vec{p}_{ma} = \sum_i \vec{p}_{mei} + \vec{p}_{mя}$$

$$\vec{p}_{ma} = \sum_i \vec{p}_{mei}, \quad \text{т. к. } \left[\vec{p}_{тя}\right] \ll \left[\sum_i \vec{p}_{mei}\right].$$

Вещества, способные намагничиваться в магнитном поле называются **магнетиками**.

Для характеристики намагничивания вводят **вектор намагниченности**:

$$\vec{J} = \lim_{V \to 0} \frac{\sum_i \vec{P}_{mai}}{V}$$

$$\vec{J} = \chi \vec{H} \quad (\text{ для изотропных сред })$$

Намагниченность – это магнитный момент единицы объема магнетика.
Для классификации магнетиков удобно ввести киломольную **магнитную восприимчивость**.

$\chi_{кмоль} = \chi V_{кмоль}$, где χ – магнитная восприимчивость вещества

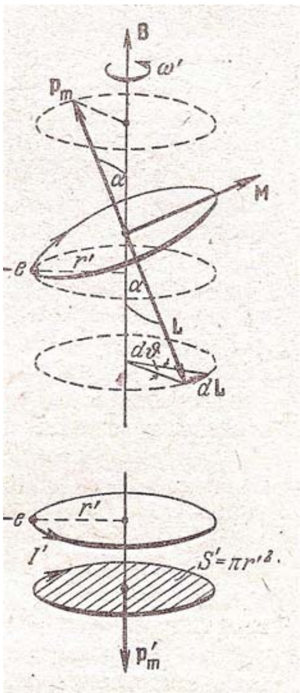
1) $\chi_{кмоль} \sim -(10^{-8} \div 10^{-7}) \dfrac{м^3}{кмоль}$ – диамагнетики (инертные газы, Zn, Au, Bi, Si, P, Ga, Sb, C, Cu и т.д.).

2) $\chi_{кмоль} \sim +(10^{-7} \div 10^{-6}) \dfrac{м^3}{кмоль}$ – парамагнетики (O_2, NO, Li, Na, K, Rb, Cs)

3) $\chi_{кмоль} \sim 10^3 \dfrac{м^3}{кмоль}$ (Fe, Ni, Co, Cd, их сплавы и соединения).

Элементы теории диа- и парамагнетизма

При включении внешнего магнитного поля с индукцией $\vec{B}$, если угол между $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ отличен от 0, возникает прецессия электронной орбиты, благодаря чему наводится дополнительный магнитный момент, $\vec{p}_m$ направленный против поля $\vec{B}$.
Получим выражение для угловой скорости прецессии:



$\omega_L = d\Theta/dt$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \vec{B}\right], \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} = \vec{M}dt, \quad \Rightarrow \quad dL \uparrow\uparrow \vec{M}$$

$$\left.\begin{array}{l} dL = p_m B \sin\alpha \; dt \\ dL = L\sin\alpha \; d\Theta \end{array}\right\} \Rightarrow p_m B dt = L d\Theta$$

$$\omega_L = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{p_m B}{L},$$

так как

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m},$$

имеем

$\omega_L = eB/2m$ – ларморова частота

ω_L одинакова для всех электронов атома, так как она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона.

Таким образом, **диамагнитный эффект** присущ всем веществам, но проявляется тогда, когда $\sum \vec{p}_{ma} = 0$. Для парамагнетиков, в отличии от диамагнетиков, сумма $\sum \vec{p}_{ma} \neq 0$, поэтому при включении внешнего магнитного поля происходит преимущественная ориентация магнитных моментов вдоль поля и диамагнитные эффекты подавляются, т.к. $\left|\sum \vec{p}_{ma}\right| >> \left|\vec{p}'_m\right|$

Магнитные свойства вещества

Обобщим ранее найденные формулы для магнитного поля в вакууме:

1) $\vec{\nabla}\vec{B}_0 = 0$, $\Rightarrow$ $\oint\limits_S \vec{B}_0 d\vec{S} = 0$

При наличии магнетика результирующее магнитное поле $\vec{B}$ равно векторной сумме магнитных индукций внешнего поля $\vec{B}_0$ (намагничивающего) и внутреннего поля $\vec{B}'$ (поля молекулярных токов).

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{B}_0 + \vec{B}'\right) = \vec{\nabla}\vec{B}' = 0$$

2) $\left[\vec{\nabla}\vec{B}_0\right] = \mu_0 \vec{j}_0$, $\Rightarrow$ $\oint\limits_l \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 \sum\limits_k I_k$

$$\left[\vec{\nabla}\left(\vec{B}_0 + \vec{B}'\right)\right] = \mu_0\left(\vec{j}_0 + \vec{j}_{мол}\right)$$

В курсе электродинамики доказывается, что плотность молекулярных токов равен ротору вектора намагниченности:

$$\vec{j}_{мол} = \left[\vec{\nabla}\vec{J}\right]$$

$$\left[\vec{\nabla}\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right] = \vec{j}_0 + \left[\vec{\nabla}\vec{J}\right], \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right) = \vec{j}_0, \quad \Rightarrow \quad \left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \vec{j}_0$$

$\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ – **напряженность магнитного поля**, $\quad \left[H\right]_{си} = \dfrac{A \cdot м^2}{м^3} = \dfrac{A}{м}$

$$\vec{J} = \chi\vec{H}, \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi\vec{H}, \quad \vec{B} = (1 + \chi)\mu_0\vec{H}, \quad \Rightarrow \quad B = \mu\mu_0 H$$

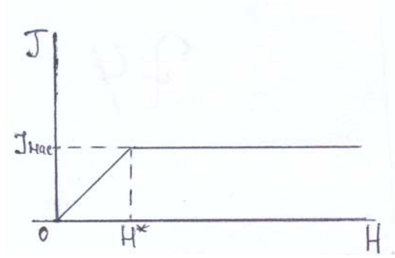
$\mu = 1 + \chi$ – **магнитная проницаемость среды**

$$\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \vec{j}_0, \quad \Rightarrow \quad \int\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right]d\vec{S} = \int\vec{j}_0 d\vec{S}, \quad \Rightarrow \quad \oint_l \vec{H}d\vec{l} = \sum_k I_k$$

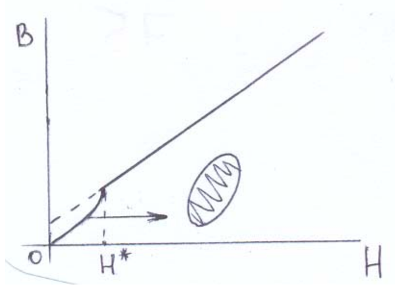
Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром.

Ферромагнетизм

Экспериментальная кривая зависимости намагничения от H имеет вид:



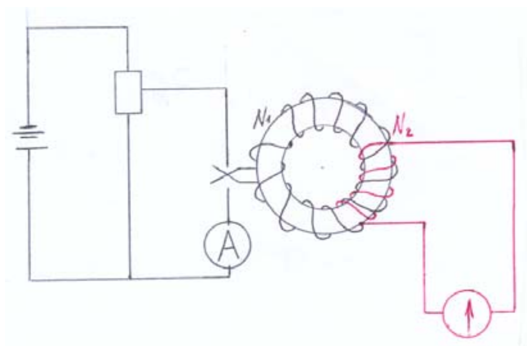
При $H > H^*$ имеем насыщение: $J = J_{нас} = const$
Кривая получена для основной кривой намагничения, т.е. когда $\sum \vec{p}_m = 0$.



$$H = \frac{B}{\mu_0} - J, \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 H + \mu_0 J$$

При $H > H^*$, $B = \mu_0 H + const$

Экспериментальная зависимость B от H исследовал Столетов, схема установки которого имела вид:



$$I = \frac{dq}{dt}\ ; \quad \Rightarrow \quad dq = Idt\ , \quad I = I_i,$$

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}\ , \quad \varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}\ , \quad \text{(по закону Фарадея)}$$

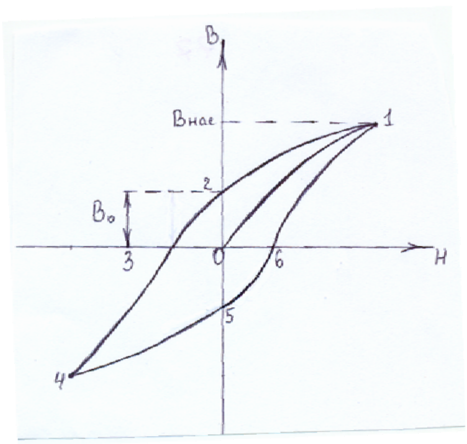
$$\int_0^q dq = -\frac{1}{R}\int_1^2 d\psi = \frac{1}{R}\left(\psi_1 - \psi_2\right).$$

Так как $\psi_1 - \psi_2 = 2N_2BS$, имеем

$$q = \frac{2N_2BS}{R}\ ; \quad \Rightarrow \quad B = \frac{qR}{2N_2S}\ , \quad H = nI = \frac{N_1}{l}I$$

Таким образом, постоянные параметры R - сопротивление цепи с числом витков N_2, S - сечение железного тороида, l - длина тороида по средней части и N_1 - число витков в первичной цепи известны. Меняя силу тока I в первичной цепи, получаем заряд q во вторичной, т. е. определяем зависимость $B = B(H)$.

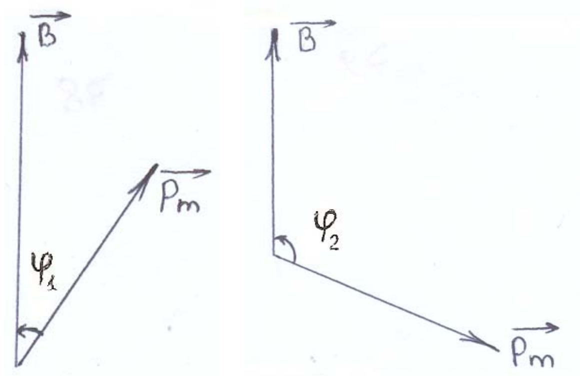
Магнитный гистерезис



Экспериментальная зависимость магнитной индукции ферромагнетика от напряжённости магнитного поля показана на рисунке: Кривая 01 получена для $\sum_i \vec{p}_{mi} = 0$. B_r - остаточная индукция, которой соответствует остаточная намагниченность (J_r). Существование J_r делает возможным изготовление постоянных магнитов. Намагниченность обращается в нуль под действием поля H_c - коэрцитивной силы. Если H_c велика – **жесткий ферромагнетик**, если H_c мало – **мягкий ферромагнетик**. (1- 2 - 3 - 4 - 5 -1) – **петля гистерезиса**. Если максимальные значения H таковы, что намагниченность достигает насыщения, получается так называемая **максимальная петля гистерезиса**.

Отставание B от H или зависимость намагничения ферромагнетика от его предыстории называется **магнитным гистерезисом**.

Для того, чтобы выяснить образование петли гистерезиса необходимо разобраться с особенностью намагничения ферромагнетиков. Как доказывается в квантовой механике, за счет специфического обменного взаимодействия между соседними электронами происходит выстраивание параллельно друг другу их спиновых магнитных моментов с образованием, так называемых **доменов** – областей спонтанного намагничения до насыщения.



$$\vec{M} = \left[p_m \vec{B} \right], \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

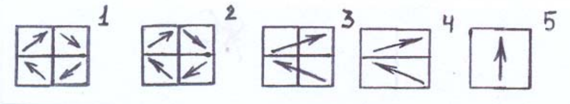
$$M = p_m B \sin(\phi)$$

$$E_p = \int M d\phi = \int p_m B \sin\phi d\phi =$$

$$= - p_m B \cos\phi$$

Таким образом, потенциальная энергия 1-го домена меньше потенциальной энергии 2-го домена. Следовательно, он будет расти за счёт 2-го домена. Рост сопровождается смещением и деформацией границ домена. Ввиду того, что этот процесс необратим, начиная с некоторого значения H внешнего поля наблюдается **гистерезис**. В результате 1-й домен целиком поглощает второй.

В дальнейшем в пределах каждого домена происходит вращение вектора магнитного момента до совмещения его направления с направлением вектора внешнего намагничивающего поля.



Основы теории Максвелла
Вихревое электрическое поле

В электростатике работа A определяется выражением

$$A = q\left(\phi_1 - \phi_2\right).$$

Для замкнутой траектории $\phi_1 = \phi_2, \Rightarrow A = 0.$
С другой стороны

$$A = \oint_l \vec{F} d\vec{l} = 0, \quad \vec{F} = q\vec{E}_q, \quad \Rightarrow \oint_l \vec{E}_q d\vec{l} = \int_S \left[\vec{\nabla}\vec{E}_q\right] d\vec{S} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\left[\vec{\nabla}\vec{E}_q\right] = 0.$$

Таким образом электростатическое поле является безвихревым (силовые линии поля $\vec{E}_q$ начинаются и заканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность).

Всегда ли электрическое поле является безвихревым? Вспомним явление электромагнитной индукции. В проволочном неподвижном контуре при изменении магнитного потока Φ через поверхность, ограниченную контуром, возникла ЭДС $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$.

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \;, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \,.$$

По определению ЭДС ε_i имеем:

$$\varepsilon_i \overset{def}{=} \oint_l \vec{E}_B d\vec{l} \;,$$

где $\vec{E}_B$ - электрическое поле сторонних сил, вызывающих появление индукционного тока. Тогда из закона Фарадея получим:

$$\oint_l \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \,,$$

откуда, применяя теорему Стокса

$$\int_S \left[\vec{\nabla}\vec{E}_B\right] d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \;,$$

приходим к выражению

$$\left[\vec{\nabla}\vec{E}_B\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;,$$

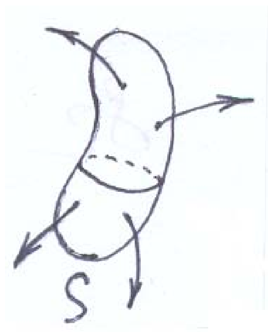
из которого следует, что переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Для напряженности суммарного поля имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B \;; \qquad \left[\vec{\nabla}\vec{E}\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,.$$

Из последнего выражения можно сделать вывод, что раздельное рассмотрение чисто электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл.

Уравнение непрерывности

Пусть из некоторой замкнутой поверхности вытекает электрический заряд. Тогда очевидно, что ток через поверхность равен убыли заряда за некоторый промежуток времени внутри поверхности.



$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \,. \qquad j = \frac{dI}{dS} \;, \quad \Rightarrow \quad dI = jdS \;, \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$\oint_V \vec{\nabla}\vec{j} dV = -\frac{d}{dt}\int \rho dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \;,$$

$\rho -$ объемная плотность заряда

$\vec{\nabla}\vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ – уравнение непрерывности

Математическое дополнение

Докажем, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Пусть $\quad b = \operatorname{rot}\vec{a}\ , \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} b = \dfrac{\partial b_x}{\partial x} + \dfrac{\partial b_y}{\partial y} + \dfrac{\partial b_z}{\partial z} = 0$

$$\vec{b} = \operatorname{rot}\vec{a} = \left[\vec{\nabla}\vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\vec{a}\right] = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$$

Ток смещения

Для стационарного поля в веществе ранее мы получили

$$\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \vec{j} \quad (\text{справедливо для } \left|\vec{j}\right| = \text{const})$$

Если взять дивергенцию, то мы получим

$$0 = \vec{\nabla}\vec{j}$$

а) если $\left|\vec{j}\right| = \text{const}\ , \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{j} = 0\ , \quad -$ совместимо с уравнением непрерывности ,

б) если $\left|\vec{j}\right| \neq \text{const}\ , \ \Rightarrow \ \vec{\nabla}\vec{j} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t} \quad -$ несовместимо с уравнением непрерывности .

Для того, чтобы избежать противоречия в случае переменного тока, Максвелл ввёл в рассмотрение так называемый **ток смещения**.

$$\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \vec{j} + \vec{j}_{см}\ , \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \vec{\nabla}\vec{j} + \vec{\nabla}\vec{j}_{ксм}$$

$$0 = \vec{\nabla}\vec{j} + \vec{\nabla}\vec{j}_{см} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j}_{см}\ , \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{j}_{см} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

В курсе электродинамики доказывается, что

$$\rho = \vec{\nabla}\vec{D}\ ,$$

где $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\ -$ вектор электрического смещения

$$\vec{\nabla}\vec{j}_{см} = \vec{\nabla}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_{см} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

т.е. ток смещения-это изменяющееся со временем электрическое поле

$$\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Уравнения Максвелла

а) в **дифференциальной форме**:

$$\begin{cases} 1)\ \left[\vec{\nabla}\vec{E}\right] = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \text{закон Фарадея для электро-магнитной индукции в диффе-} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ренциальной форме} \\ 2)\ \vec{\nabla}\vec{B} = 0 - \text{Теорема Гаусса для потока вектора } \vec{B} \text{ в дифференциальной форме.} \end{cases}$$

1) **Физический смысл**: изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле
2) **Физический смысл**: в теории Максвелла магнитных зарядов не существует

$$\begin{cases} 3)\ \left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \text{закон полного тока} \\ 4)\ \vec{\nabla}\vec{D} = \rho - \text{теорема Гаусса для потока вектора } \vec{D} \text{ в дифференциальной форме} \end{cases}$$

3) **Физический смысл**: вихревое магнитное поле порождается током проводимости и переменным электрическим током.
4) **Физический смысл**: плотность сторонних зарядов является источником вектора электрического смещения.

б) в **интегральной форме**:

$$1. \begin{cases} \oint\limits_{l}\vec{E}d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int\limits_{S}\vec{B}d\vec{S}, \\ \oint\limits_{S}\vec{B}d\vec{S} = 0, \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} \oint\limits_{l}\vec{H}d\vec{l} = \int\limits_{S}\vec{j}d\vec{S} + \dfrac{d}{dt}\int\limits_{S}\vec{D}d\vec{S}, \\ \oint\limits_{S}\vec{D}d\vec{S} = \int\limits_{V}\rho dV. \end{cases}$$

Неизвестные: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H} \Rightarrow 12$ неизвестных на 8-уравнений.Чтобы система была алгебраически разрешимой, накладывают связи:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}\ , \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\ , \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}\ .$$

$\vec{H}$, $\vec{E}$ $\Rightarrow$ 6 неизвестных на 8 уравнений.

На самом деле независимых уравнений Максвелла всего 6., т.к. вторые уравнения являются следствием первых в силу того, что дивергенция от ротора равна 0. Таким образом система алгебраически разрешима.

Общая характеристика уравнений Максвелла

1. Являются **феноменологическими**, т.к. величины ε , μ , σ определяются не из теории, а вводятся извне (берутся из эксперимента).
2. Являются **макроскопическими**, т.е. применяются для объемов во много раз больше молекулярных
3. Являются **лоренц-инвариантными**.
4. Являются **линейными дифференциальными уравнениями**. Поэтому в электродинамике Максвелла справедлив **принцип суперпозиции**, т.е. независимое наложение полей:

$$\vec{E} = \sum_K \vec{E}_K\ , \quad \phi = \sum_K \phi_K\ .$$

5. Существует **симметрия** между электричеством и магнетизмом, но **полной симметрии нет**, т.к. нет магнитных зарядов, а электрические есть.
6. Уравнения Максвелла имеют такой же статус в электродинамике, как уравнения Ньютона в механике.