

УДК 624.0

**С.Н. Царенко, доцент, канд. техн. наук**

ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»

ул. Артема, 58, г. Донецк, Украина, 83001

E-mail: tzarenko@rambler.ru

**УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ СТОЕК ТРУБЧАТОГО СЕЧЕНИЯ**

Решена задача устойчивости конических весоных стоек, изгибная жесткость которых изменяется по кубическому закону. Для исследования математической модели продольного изгиба использован принцип возможных перемещений. На основании численных расчетов предложена аппроксимирующая формула для нахождения критического веса. Установлено, что влияние веса конструкции на значение критической сжимающей нагрузки имеет линейную зависимость, что позволяет для практических расчетов использовать упрощенную модель невесоного стержня.

**Ключевые слова:** многогранная гнутая стойка, принцип возможных перемещений, продольный изгиб, стержень переменной жесткости, устойчивость сжатого стержня.

**Введение.** Стержни переменного сечения имеют разнообразное применение, как элементы сложных сооружений, так и отдельно взятые конструкции. Примером таких конструкций являются многогранные гнутые стойки (МГС), которые за последнее время получили широкое применение в различных отраслях промышленности: городском хозяйстве (осветительные опоры), энергетике (опоры ЛЭП, стойки ветрогенераторов), теле-радио связи (антенные опоры) и т.д. Стальные многогранные стойки представляют собой конические трубы коробчатого многогранного сечения, высота стоек достигает 80 м, толщина до 20 мм, диаметр в основании находится в пределах 250...3000 мм, – в вершине 200...500 мм [1].

В процессе работы конструкции МГС подвергаются статическому воздействию продольных нагрузок: собственный вес стоек и оснащения, вес оборудования, а также динамическому воздействию: ветровая нагрузка, нагрузки, возникающие в аварийных ситуациях и в процессе монтажных работ. В существующей практике проектирования и расчета МГС совокупное действие различных нагрузок учитывается на основе принципа суперпозиций [2]. Тем не менее, в работе [3] сделан вывод о том, что продольная нагрузка в расчетах на поперечные колебания может не учитываться только в случае, если она значительно меньше критической величины. Таким образом, расчет на устойчивость сжатых стержней необходим не только, как самостоятельная задача по определению критических нагрузок, но и для обоснования упрощений принятых в расчетных схемах.

Впервые задача об устойчивости весоного стержня постоянного сечения с двумя опертими концами была поставлена и решалась Эйлером, а в дальнейшем – Гринхиллом для свободного верхнего и защемленного нижнего конца [4]. Устойчивость стержней переменной жесткости под действием сосредоточенных нагрузок исследовал Динник А.Н., в своей работе он также рассмотрел устойчивость остrokонечных весоных стержней для различных законов изменения жесткости и веса [5]. Решение для продольно-поперечного изгиба стержня постоянного сечения при одновременном действии сосредоточенных и распределенных с использованием степенных рядов найдено Шевченко Ф.Л. [6]. Универсальная формула для расчета напряженно-деформированного состояния весоного стержня при различных внешних нагрузках и граничных условиях в функциях Бесселя и Ломмеля получена Улитыным Г.М. [7]. Задачи об устойчивости стержней переменной жесткости под действием сосредоточенных и распределенных нагрузок в литературе не рассмотрены.

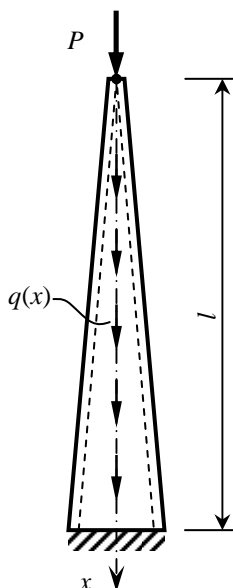


Рисунок 1 – Расчетная схема весоного стержня переменной сечения

*Цель работы* – исследование устойчивости конической стойки трубчатого сечения упругого весоного стержня длиной  $l$  (рисунок 1). Площадь поперечного сечения такой конструкции можно представить в виде  $F(x) = c(ax + h_1)$ , а осевой момент инерции  $J_z(x) = c(ax + h_1)^3$ , где  $a = \frac{h_2 - h_1}{l}$ ,  $h_1, h_2$  – радиусы инерции сечения соответственно у вершины и основании стержня,  $c$  – параметр, который зависит от формы сечения, например для круглого тонкостенного сечения  $c = 2\sqrt{2}\pi\delta$ ,  $\delta$  – толщина стенки. На верхнем конце приложена вертикальная сила  $P$  (вес оборудования), вдоль продольной оси действует распределенная нагрузка

интенсивностью  $q(x) = \gamma F(x) = c\gamma(ax + h_1)$  (рисунок 1), где  $\gamma$  – удельный вес материала.

Из условий равновесия элемента такого стержня следует система уравнений

$$\begin{aligned} Ec(ax + h_1)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} &= M(x); \\ \frac{dM}{dx} &= Q(x) - \left( P + \frac{c\gamma}{2a} \left( (ax + h_1)^2 - h_1^2 \right) \right) \frac{dy}{dx}; \\ \frac{dQ}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $y(x)$  – уравнение изогнутой оси стержня;  $E$  – модуль упругости;  $M(x)$  – изгибающий момент;  $Q(x)$  – поперечная сила.

Исключая из уравнений (1-3)  $M(x)$  и  $Q(x)$ , приходим к уравнению изогнутой оси

$$Ec \frac{d^2}{dx^2} \left( (ax + h_1)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \left( P + \frac{c\gamma}{2a} \left( (ax + h_1)^2 - h_1^2 \right) \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + c\gamma(ax + h_1) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2)$$

Для уравнения (2) выполним замену переменных  $z = \frac{ax + h_1}{al}$ . Тогда

$$z^3 \frac{d^4 y}{dz^4} + 6z^2 \frac{d^3 y}{dz^3} + \left( 6z + \tilde{P}(1+k)^3 + \frac{\tilde{q}}{2}(1+k)^2(z^2 - k^2) \right) \frac{d^2 y}{dz^2} + \tilde{q}(1+k)^2 z \frac{dy}{dz} = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{P} = \frac{Pl^2}{EJ_2}$ ;  $\tilde{q} = \frac{q_{\max} l^3}{EJ_2}$ , здесь  $q_{\max} = h_2 c\gamma$  – интенсивность нагрузки у основания стержня  $J_2 = ch_2^3$  –

осевой момент инерции основания стержня,  $k = \frac{h_1}{h_2 - h_1}$ .

Не существует аналитических решений уравнения (3), поэтому воспользуемся принципом возможных перемещений [8]. Для консольной стойки аппроксимируем форму изгиба многочленами вида

$$\varphi_n(z) = (1+k-z)^{n+3} + a_n(1+k-z)^{n+2} + b_n(1+k-z)^{n+1} + (z-k)^{n-1}(1+k-z)^2. \quad (4)$$

Функции вида (5) удовлетворяют условию жесткого закрепления  $\varphi_n(z_2) = \varphi_n(1+k) = 0$ ;  $\varphi'_n(z_2) = \varphi'_n(1+k) = 0$ , а коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  находятся из условий для свободного конца стержня

$$\varphi''_n(z_1) = \varphi''_n(k) = 0; \quad \varphi'''_n(z_1) = \varphi'''_n(k) = 0. \quad (5)$$

Форма изгиба примет вид

$$y(z) = \sum_{n=1}^r \varphi_n(z) \delta f_n. \quad (6)$$

Из условий (5) найдены значения коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  для первых четырех членов ряда (6):  $a_1 = -4$ ,  $b_1 = 5$ ;  $a_2 = -3,1(6)$ ,  $b_2 = 3, (6)$ ;  $a_3 = -3,4$ ,  $b_3 = 3$ ;  $a_4 = -2,6$ ,  $b_4 = 1,8$ .

Искомые величины  $\tilde{P}$  и  $\tilde{q}$  будем находить из условия, что для произвольной вариации формы изгиба должно выполняться равенство

$$\delta W + \delta A = 0, \quad (7)$$

где  $\delta W$ ,  $\delta A$  – работа внешних и внутренних сил соответственно. Работа внешних сил определяется зависимостью [8]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_0^l N \delta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx, \quad (8)$$

где  $N = P + \frac{c\gamma}{2a} \left( (ax + h_1)^2 - h_1^2 \right)$ . Интегрируя по частям выражение (8), с учетом теоремы о взаимности работ получим

$$\delta W = N \frac{dy}{dx} \delta y \Big|_0^l - \int_0^l N \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx - \int_0^l \frac{dN}{dx} \frac{dy}{dx} \delta y dx. \quad (9)$$

Работу внутренних сил можно представить выражением [8]

$$\delta A = - \int_0^l M \delta \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx. \quad (10)$$

Проинтегрировав по частям уравнение (10), с учетом  $M(x) = Ec(ax + h_1)^3 \frac{d^2 y}{dx^2}$  получим

$$\delta A = -M \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) \Big|_0^l + Ec \frac{d}{dx} \left( (ax + h_1)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \delta y \Big|_0^l - \int_0^l Ec \frac{d^2}{dx^2} \left( (ax + h_1)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \delta y dx. \quad (11)$$

Подставив найденные выражения (9) и (11) в уравнение (7), с учетом граничных условий для функций  $\varphi_n$ , а также введя принятые ранее замены, получаем однородную систему  $r$  уравнений относительно коэффициентов  $\delta f_n$  в виде

$$\tilde{P}(1+k)^3 \frac{dy}{dz} \Big|_{z=k} \varphi_n(k) + \int_k^{k+1} \left( z^3 \frac{d^4 y}{dz^4} + 6z^2 \frac{d^3 y}{dz^3} + \left( 6z + \tilde{P}(1+k)^3 + \frac{\tilde{q}}{2}(1+k)^2(z^2 - k^2) \right) \frac{d^2 y}{dz^2} + \tilde{q}(1+k)^2 z \frac{dy}{dz} \right) \varphi_n dz = 0, \quad (12)$$

$n = 1, 2, \dots, r$ . Приравнявая к нулю определитель этой системы, получаем для определения  $\tilde{q}$  и  $\tilde{P}$  граничной задачи уравнение вида

$$\det \|\alpha_{im} + \tilde{P}\beta_{im} + \tilde{q}\gamma_{im}\| = 0, \quad (i, m = 1, 2, \dots, r), \quad (13)$$

где коэффициенты в уравнении (13) выражаются через соотношения функций  $\varphi_n(z)$ .

Вначале рассмотрим случай потери устойчивости от собственного веса ( $\tilde{P} = 0$ ). На рисунке 2 показан график изменения критической величины  $\tilde{q}_{кр}$  в зависимости от параметра  $k$ . Из графика (рисунок 2) следует, что значения критической величины изменяется в пределах от 13,18 - соответствует конструкции остроконечного стержня [5], до 7,834 - для стержня постоянного сечения [5].

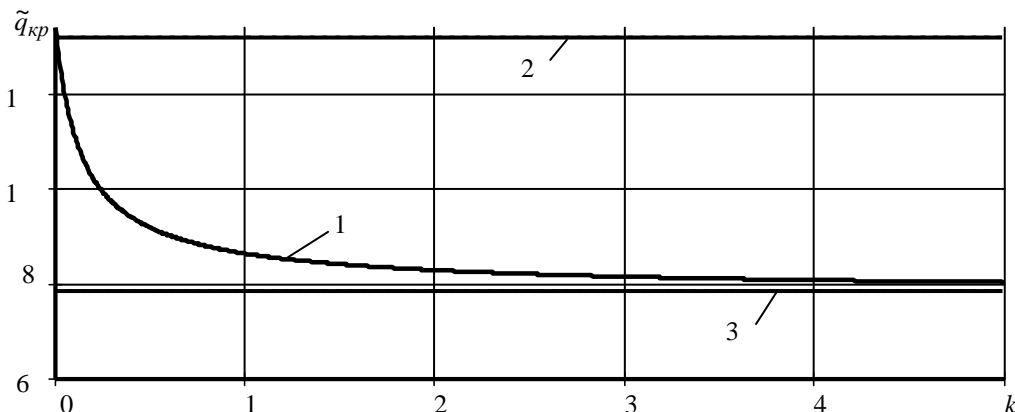


Рисунок 2 – Зависимость  $q_{кр}$  от величины параметра относительного поперечного размера  $k$ :

- 1 – для стержня переменного сечения;
- 2 – для остроконечного стержня ( $q_{кр} = 13,18$ )
- 3 – для стержня постоянного сечения ( $q_{кр} = 7,834$ )

Как видно из графика (рисунок 2), полученную кривую можно с достаточной точностью аппроксимировать экспоненциальной функцией

$$\tilde{q}_{кр}(k) = 5,356e^{-2,26k} + 7,834, \quad (14)$$

В которой значение коэффициента в степени экспоненты получено с использованием встроенной процедуры аппроксимации в MathCAD.

Теперь рассмотрим случай совместного воздействия распределенной и сосредоточенной нагрузки. На графиках (рисунок 3) показана зависимость величины  $\tilde{P}_{кр}$  от значения  $\tilde{q}$  в пределах изменения от 0 до  $\tilde{q}_{кр}$  для различных значений параметра  $k$ .

Из графиков (рисунок 3) очевидно, что зависимость величины  $\tilde{P}_{кр}$  от  $\tilde{q}$  является практически линейной и может быть представлена уравнением

$$\tilde{P}_{кр} = \tilde{P}_{0кр} - \frac{\tilde{P}_{0кр}}{\tilde{q}_{кр}} \tilde{q}, \quad (15)$$

где  $\tilde{P}_{0кр}$  – значение критической величины для невесомого стержня. Следует отметить, что если в формулу (15) подставить значения  $\tilde{P}_{0кр} = \pi^2/4$ ;  $\tilde{q}_{кр} = 7,834$ , то с учетом принятых обозначений получим

$$P_{кр} = P_{0кр} - 0,315ql,$$

что практически соответствует значению коэффициента для учета веса для консольного стержня постоянного сечения, полученного в работе [8].

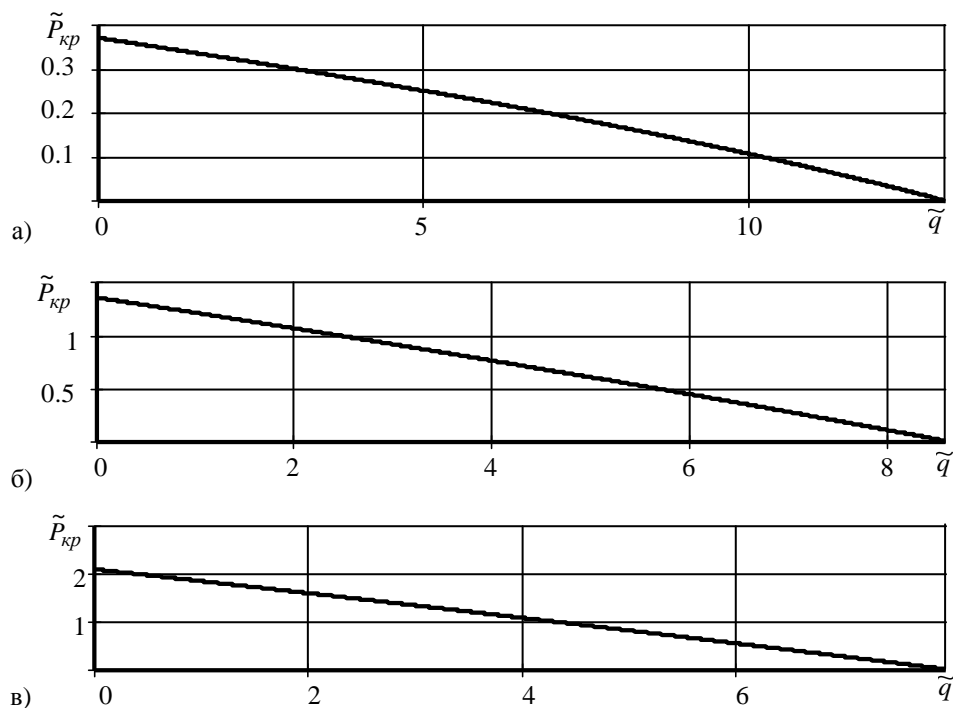


Рисунок 3 – Зависимость критической силы  $\tilde{P}_{кр}$  от веса  $\tilde{q}$  при значениях параметра  $k$ :  
а)  $k=0,1$ ; б)  $k=1$ ; в)  $k=5$ .

### Выводы

1. Существующая методика расчета МГС базируется на допущении, что продольные нагрузки значительно меньше критических величин; это приводит к необходимости исследования таких конструкций на устойчивость.

2. Математическая модель продольного изгиба конической стойки трубчатого сечения не имеет точного аналитического решения, поэтому для расчета граничной задачи был использован принцип возможных перемещений.

3. На основании исследования зависимости критического веса  $\tilde{q}_{кр}$  от параметра относительного поперечного размера  $k$ , получена аппроксимирующая функция  $\tilde{q}_{кр}(k) = 5,356e^{-2,26k} + 7,834$ , которая дает необходимую точность для инженерных расчетов.

4. Зависимость величины критической силы  $\tilde{P}_{кр}$  от веса  $\tilde{q}$  является фактически линейной; поэтому предложена упрощенная формула для определения критической нагрузки на весомый стержень

$$\tilde{P}_{кр} = \tilde{P}_{0кр} - \frac{\tilde{P}_{0кр}}{\tilde{q}_{кр}} \tilde{q}.$$

#### **Библиографический список использованной литературы**

1. Гаранжа И.М. Методика определения геометрических параметров конструкций многогранных стоек с учетом регулирования собственных и вынужденных колебаний / И.М. Гаранжа // Сучасне промислове та цивільне будівництво. — 2013. — Том 9, № 2. — С. 105–114.
2. ДБН В.1.22:2006. Державні будівельні норми. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування. — Замість СНиП2.01.0785; надано чинності 20070101. — К.: Мінбуд України, 2006. — 61 с.
3. Clough Ray W. Dynamics of structures // Ray W. Clough and Joseph Penzien. — McGraw-Hill, 1975. — 634 p.
4. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем // Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. — М.: Недра, 1979. — 384 с.
5. Динник А.Н. Продольный изгиб, кручение // А.Н. Динник. — М.: Изд. АН СССР, 1955. — 392 с.
6. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Ч. 1. Напряженно-деформированное состояние стержней // Ф.Л. Шевченко. — Донецк: ДГТУ, 2006. — 293 с.
7. Улитин Г.М. Устойчивость буровой установки роторного типа / Г.М. Улитин // Проблемы прочности. — 2002. — № 1. — С. 130–135.
8. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем // А.С. Вольмир. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 983 с.

*Поступила в редакцию 4.03.2014 г.*

#### **Царенко С.М. Стійкість конічних стояків трубчатого перерізу**

Вирішена задача стійкості конічних вагомих стояків, жорсткість на згин яких змінюється за кубічним законом. Для дослідження математичної моделі повздовжнього згину було використано принцип можливих переміщень. На підставі числових розрахунків по отриманій моделі, запропонована апроксимуюча формула для знаходження критичної ваги. Встановлено, що вплив ваги конструкції на величину критичного стискуючого навантаження має лінійну залежність, що дозволяє для практичних розрахунків використати спрощену модель невагомого стержня.

**Ключові слова:** багатогранний гнучий стояк, принцип можливих переміщень, повздовжній згин, стержень змінної жорсткості, стійкість стиснутого стержня.

#### **Tsarenko S.N. Stability of conical rod of hollow section**

The problem of stability of weighty conical rods, the transverse stiffness of which changes at cubic-law, is considered in this article. The principle of virtual displacements is used to study the mathematical model of longitudinal bending. The approximating formula to find the critical weight on the basis of numerical calculations is proposed. It is found that the effect on the weight of the construction value of the critical force is a linear function that allows to use a simplified model of a weightless rod for practical calculations.

**Keywords:** curved multifaceted support, the principle of virtual displacements, longitudinal bending, rod of variable stiffness, stability of rod.