

## КОЛИВАННЯ Й ХВИЛІ

Більша частина осіннього семестру в лекційному курсі фізики буде прямо або побічно пов'язана з темою «Коливання й хвилі». Важливість цієї теми обумовлена тим, що, образно говорячи, ми живемо у світі коливань і хвиль. Різноманітні прояви механічних коливань у техніці: коливання мостів, ресор автомашин, вібрація механічних частин машин і т.д. Різноманітні прояви електромагнітних коливань.

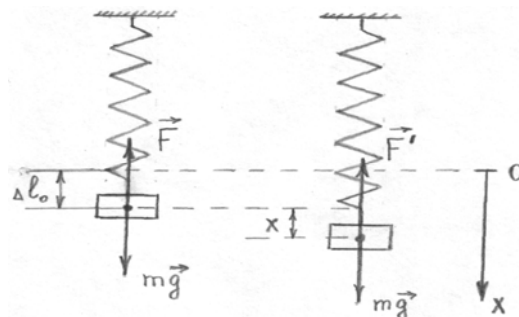
Особливість розгляду теми «Коливання й хвилі» полягає в тому, що паралельно будуть розглядатися механічні й електромагнітні коливання й хвилі, тому що вони описуються диференціальними рівняннями одного виду.

### Гармонійні коливання

Будь-які повторювані через певні проміжки часу рухи називаються **коливальними**. Коливальні рухи, що повторюються через рівні проміжки, називаються **періодичними**. Періодичні коливальні рухи, що відбуваються за законом синуса або косинуса називаються **гармонійними**. Гармонійні коливання відносяться до так званих **лінійних коливань**, коли відхилення від положення рівноваги системи невеликі.

Розглянемо гармонійні коливання на прикладі найпростіших маятників.

#### 1) Пружний маятник.



де  $\Delta l_0$  - деформація пружини під дією вантажу масою  $m$   
 $x$  - зміщення вантажу від положення рівноваги

**Умова рівноваги:**  $mg = k \Delta l_0$ .

**Умови виникнення коливань:**

- 1) вивести систему з положення рівноваги;
- 2) виникають квазіпружні сили;
- 3) система повинна володіти інерціальними властивостями.

Скористаємося II законом Ньютона, що описує поступальний рух вантажу на пружині:

$$m\vec{a} = \vec{F}_p, \Rightarrow m\ddot{x} = mg - k(\Delta l_0 + x),$$

де  $a = \ddot{x} = d^2x / dt^2$ ,  $k$  – коефіцієнт пружності.

$$m\ddot{x} = -kx, \Rightarrow \ddot{x} + (k/m)x = 0.$$

Коливання системи, виведеної з положення рівноваги й наданої самої собі, називаються **вільними**. Вільні коливання без обліку загасання називають **власними** й позначаються індексом 0. Уведемо позначення:  $\omega_0^2 = k/m$ . Тоді рівняння коливань вантажу на пружині прийме вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

З рівнянням такого типу ми неодноразово будемо мати справу далі, причому, у кожному конкретному випадку будемо використовувати одне з можливих виразів для  $x$ . Якщо брати підстановку  $x = e^{\lambda t}$ , то маємо  $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Звідси треба три можливі подання для  $x$ :

$$1) x = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t};$$

$$2) x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t;$$

$$3) x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де:  $c_1, c_2$  - постійні інтегрування;

$x$  - зміщення точки з положення рівноваги;

$A$  - амплітуда коливань (max зміщення від положення рівноваги). По визначенню  $A > 0$ ;

$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$  - фаза коливань (величина, що характеризує зміщення у даний момент часу).

$\omega_0$  - циклічна частота (число коливань за  $2\pi$  секунди),  $\omega_0 = 2\pi\nu$ ;  $\nu$  - частота коливань (число коливань за 1с).

$\varphi_0$  - початкова фаза коливань;

$T = \frac{t}{N}$  - період коливань (час одного повного коливання);

$T$  - мінімальний проміжок часу, через який повторюється фаза коливань.

Використовуючи це визначення, знайдемо період для косинусоїди:

$$\omega_0(t + T) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi, \Rightarrow T = 2\pi / \omega_0.$$

З урахуванням на уведеного позначення для  $\omega_0$ , для періоду коливань пружного маятника, одержимо:

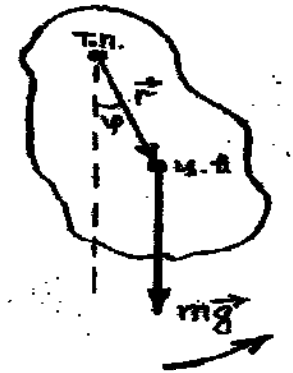
$$T_{np} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

2) **Фізичний маятник** - тверде тіло, центр ваги якого знаходиться нижче точки підвісу і здійснює коливання під дією сили ваги.

Через те, що тіло здійснює обертовий рух щодо точки підвісу, для опису руху необхідно скористатися основним рівнянням динаміки обертового руху:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{зовн.},$$

де  $\vec{L}$  - псевдовектор моменту імпульсу тіла щодо точки підвісу;  
 $\vec{M}_{зовн.}$  - псевдовектор моменту зовнішніх сил щодо точки підвісу.



Урахуємо визначення:

$$L = I\omega = I\dot{\varphi};$$

$$\vec{M}_{зовн.} = \left[ \vec{r} \cdot \vec{F}_{зовн.} \right];$$

$$\frac{dL}{dt} = -M_{зовн.}; \Rightarrow \frac{d}{dt}(I\dot{\varphi}) = -rmg \sin \varphi;$$

Тому що для малих кутів  $\sin \varphi \approx \varphi$ , то маємо:

$$I\ddot{\varphi} + rmg\varphi = 0;$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{rmg}{I}\varphi = 0.$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}},$$

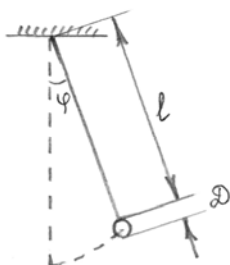
де  $I$  - момент інерції тіла щодо осі обертання;  
 $m$  - маса тіла;  
 $g$  - прискорення вільного падіння;  
 $r$  - відстань від точки підвісу до центра ваги.

Рішення диференціального рівняння для  $\varphi$  має вигляд:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0).$$

2) **Математичний маятник** – матеріальна точка, підвішена на невагомій і нерастяжній нитці. Маятник буде математичним, якщо діаметр  $D$  кульки в багато разів менше довжини нитки  $l$ .

Скористаємося формулою для періоду фізичного маятника:



$$D \ll l;$$

$$I = ml^2;$$

$$r = l.$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

## Енергетичні співвідношення.

Розпишемо вираз для кінетичної  $E_k$ , потенціальної  $E_n$  й повної енергії  $E_{повн.}$  коливальної точки.

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2} (-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0))^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0);$$

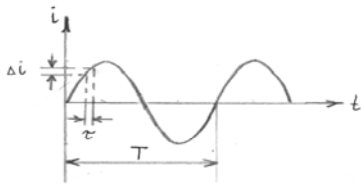
$$E_{повн.} = E_k + E_n = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2.$$

$E_{k\max} = E_{n\max} = E_{повн.}$  - це закон збереження механічної енергії при КОЛИВАННЯХ.

## Електромагнітні коливання

### Квазістаціонарні струми

Для змінного струму  $i$ , що міняється за гармонійним законом, графік залежності  $i = i(t)$ , має вигляд:



**Ідея:** якщо інтервал часу  $\tau$  багато менше  $T$ , то струм можна вважати постійним і до нього можна застосувати закони Ома.

**Числові оцінки:**  $\tau = l/c$ ,

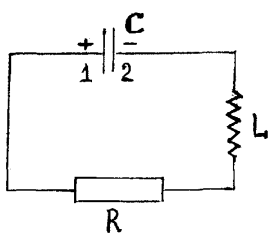
де  $l$  – довжина кола,  $c$  - швидкість світла у вакуумі.

$$\text{Для } l = 100 \text{ км} = 10^5 \text{ м}, c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \nu = 50 \text{ Гц},$$

$$\tau = 10^6 / (3 \cdot 10^8) \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ с}. \quad T = 1/\nu = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Таким чином, струм промислової частоти  $\nu = 50 \text{ Гц}$  квазістаціонарний для кіл довжиною до 100 км.

Умовимося вважати струм, що заряджає конденсатор, позитивним. Застосуємо для ділянки кола 2LR1 закон Ома:



$$IR = \varphi_2 - \varphi_1 + \varepsilon_s; \quad \varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = -L\ddot{q};$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{C}.$$

Для контура Томсона ( $R = 0$ ) маємо:

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0;$$

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0^2 = (LC)^{-1};$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

### Енергетичні співвідношення

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$$

При коливаннях у контурі Томсона відбувається перетворення максимальної енергії електричного поля, накопиченої в конденсаторі, у максимальну енергію магнітного поля в котушці.

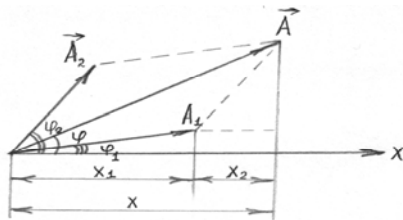
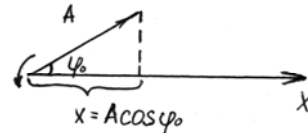
### Додавання коливань

#### 1) Одного напрямку й частоти.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1); \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{cases}$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$\Rightarrow$



$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2;$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

#### 3) Биття. Їх одержують при складанні коливань одного напрямку, однакових амплітуд й близьких частот.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega t \\ x_2 = A_2 \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}$$

$$\Delta\omega \ll \omega.$$

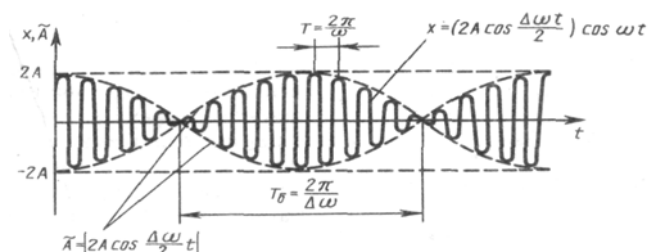
$$A_1 = A_2.$$

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos \omega t.$$

$$\text{Амплітуда биття} = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right|.$$

Визначаємо період  $T_B$  биття:

$$\frac{\Delta\omega}{2}(t + T_B) = \frac{\Delta\omega}{2}t + \pi, \Rightarrow T_B = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$



#### 4) Додавання взаємно перпендикулярних коливань

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi) = A_2 [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] \end{cases}$$

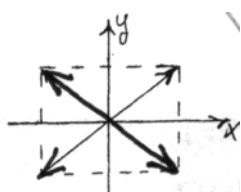
$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1}, \Rightarrow \frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi;$$

$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \varphi = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varphi + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \varphi = \left(1 - \frac{x^2}{A_1^2}\right) \sin^2 \varphi.$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varphi + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \varphi \quad \text{- рівняння еліпса з довільно орієнтованими осями.}$$

Розглянемо окремі випадки:



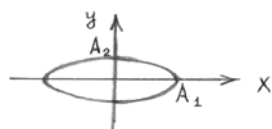
$$1) \varphi = 2n\pi (n = 0, \pm 1; \pm 2);$$

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0, \Rightarrow y = \frac{A_2}{A_1}x.$$

$$2) \varphi = (2n+1)\pi, \Rightarrow y = -\frac{A_2}{A_1}x.$$

$$3) \varphi = (2\pi+1)\frac{\pi}{2};$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 0.$$



У загальному випадку, якщо частоти коливань, що складають, відносяться як цілі числа, то виходять фігури Лиссажу.

### Загасаючі коливання

Коливання, енергія яких убуває згодом, називають **загасаючими**.

#### 1) Механічні загасаючі коливання.

Обмежимося випадком, коли сила опору середовища пропорційна першому ступеню швидкості:  $F_{\text{опр.}} = -rV$ .

Скористаємося II законом Ньютона:  $ma = F_{\text{рез.}}$

$$F_{\text{рез.}} = -kx - rV.$$

Враховуючи, що  $V = \dot{x}$ ,  $a = \ddot{x}$ , одержимо:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Уведемо позначення:  $\frac{r}{m} = 2\beta$ ,  $\Rightarrow \beta = \frac{r}{2m}$ ;  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,

де  $r$  - коефіцієнт опору;

$\beta$  - коефіцієнт загасання.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = e^{\lambda t},$$

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

#### 1.1) Не занадто велике загасання ( $\beta < \omega_0$ ).

Уведемо позначення:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega;$$

$$x = c_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + c_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t});$$

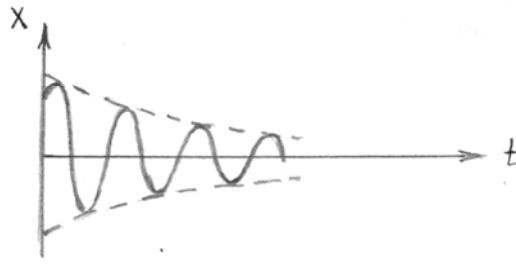
$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

*Характерні риси загасаючих коливань:*

1) загасаючі коливання можна розглядати як гармонійні із частотою  $\omega$  й періодом  $T$ :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}};$$

2) амплітуда змінюється з часом, за законом  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ ;



3) час, за який амплітуда зменшується в  $e$  раз, називається **часом релаксації**  $\tau$  :

$$\tau, \Rightarrow \frac{A_0}{e}, \text{ тому що } A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$\frac{A_0}{e} = A_0 e^{-\beta \tau}, \Rightarrow e^{-1} = e^{-\beta \tau}, \Rightarrow \beta = \tau^{-1}, \Rightarrow [\beta]_{ci} = c^{-1}.$$

Отже, коефіцієнт загасання обернено пропорційний часу релаксації.

4) **Логарифмічний декремент загасання** (логарифм відношення амплітуд, що відрізняються в часі на період).

$$\lambda = \ln \left| \frac{A(t)}{A(t+T)} \right|.$$

$$[\lambda]_{\text{р}} = 1. \quad \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}; \quad N = \frac{t}{T}.$$

$$\lambda = \beta T.$$

$$\frac{A_0}{e} = A_0 e^{-\beta \tau}, \Rightarrow e^{-1} = e^{-\beta T \frac{\tau}{T}} = e^{-\lambda N_e}, \Rightarrow \lambda = N_e^{-1}$$

Логарифмічний декремент обернено пропорційний числу коливань, за які амплітуда зменшується в  $e$  раз.

Закон зміни амплітуди загасаючих коливань можна представити інакше:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\beta T \frac{t}{T}} = A_0 e^{-\lambda N}.$$

5) Енергія загасаючих коливань.

$$E \sim A^2, \Rightarrow E = E_0 e^{-2\beta t}.$$

де  $E_0 = E(t=0)$

6) **Добротність** коливальної системи:  $Q = \pi \lambda^{-1}$ .

Продиференціюємо вираз для енергії:

$$dE = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} dt.$$

Припустимо, що за  $T$  зміна  $E$  невелика.

$$\Delta E = -2\beta E T, \Rightarrow \frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{Q}{2\pi}.$$



Добротність коливальної системи прямо пропорційна відношенню енергії  $E$ , запасеною системою на час  $t$  до її зменшення  $(-\Delta E)$  за час одного періоду.

**Приклад:** Скільки повних коливань повинна зробити система, щоб її енергія зменшилася на 99%, якщо рівняння коливань має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 626x = 0$$

$$E = 0.01 E_0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 626x = 0$$

$$N - ?$$

$$N = \frac{t}{T}, E = E_0 e^{-2\beta t} =$$

$$= E_0 e^{-2\beta t \frac{t}{T}} = E_0 e^{-2\lambda N}$$

$$E = 0.01 E_0 = 10^{-2} E_0;$$

$$10^{-2} E_0 = E_0 e^{-2\lambda N}; \Rightarrow 10^2 = e^{2\lambda N};$$

$$\ln e^a = a; \Rightarrow 2 \ln 10 = 2\lambda N, \Rightarrow N = \frac{\ln 10}{\lambda};$$

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}};$$

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \\ \ddot{x} + 2\dot{x} + 626x = 0; \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 1c^{-1}; \omega_0^2 = 626 \frac{\delta\dot{\alpha}\ddot{\alpha}}{\tilde{n}^2};$$

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot 1}{\sqrt{626-1}} = \frac{2\pi}{25}; N = \frac{\ln 10}{2\pi} \cdot 25 = 9.$$

## 1.2) Сильне загасання ( $\beta \geq \omega_0$ )

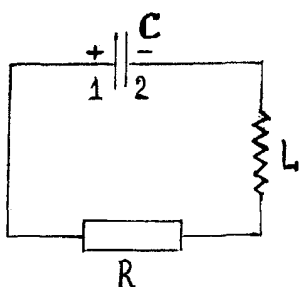
$$x = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t},$$

$$\text{де } \lambda_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \lambda_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Процес, при якому коливальна система, виведена з положення рівноваги, плавно повертається до нього, не роблячи коливань, називається **аперіодичним** (неперіодичним).

## 2) Електромагнітні загасаючі коливання

Для ділянки 2LR1 закон Ома має вигляд:  $IR = \varphi_2 - \varphi_1 + \varepsilon_s$ ;



$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C},$$

$$\varepsilon_s = -L\ddot{q}, I = \dot{q}.$$

Диференціальне рівняння для  $q$  приймає вид:

$$R \dot{q} = -\frac{q}{C} - L \ddot{q}.$$

Приводимо рівняння до канонічного виду

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q &= 0, \\ 2\beta &= \frac{R}{L}, \Rightarrow \beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \\ q &= q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Для аперіодичного процесу  $T \rightarrow \infty, \Rightarrow R_{\text{эф.}} = 2\sqrt{L/C}$ .

### **Вимушені коливання**

**Вимушені коливання** – коливання, що відбуваються під дією зовнішньої сили, що вимушує.

#### **1) Механічні вимушені коливання.**

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F(t)}{m},$$

Обмежимося випадком, коли  $F(t)$  - періодична функція  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . У цьому випадку виникають незатухаючі коливання

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

Загальне рішення  $x_{\text{заг.}} = x_{\text{одн.}} + x$ , де загальне рішення однорідного рівняння  $x_{\text{одн.}}$  нам відомо:

$$x_{\text{одн.}} = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi_0), \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

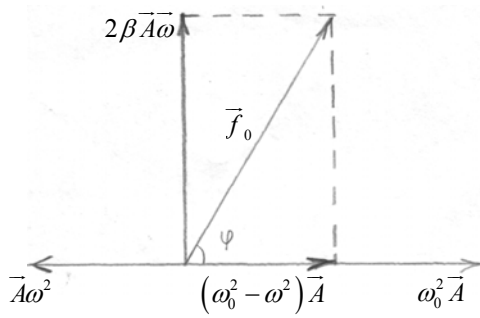
Приватне рішення  $x$  шукаємо у вигляді:  $x = A \cos(\omega t - \varphi)$ .

Підстановка приватного рішення у вихідне неоднорідне рівняння дає:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - 2\beta A\omega \sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t;$$

$$A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t.$$

Скористаємося методом векторних діаграм ( $\omega^2 < \omega_0^2$ ).



$$f_0^2 = 4\beta^2 A^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2;$$

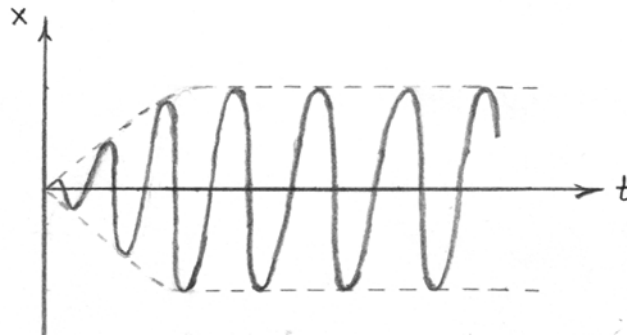
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta A \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) A} = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$x_{\text{заг.}} = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

### Аналіз рішення

1) За достатній проміжок часу  $x_{\text{одн.}}|_{t \gg 1} \sim e^{-\beta t} \rightarrow 0$ .



2)  $A = A(f_0, \beta, \omega, \omega_0)$ .

3) Вимушені коливання відбуваються із частотою зовнішньої сили, що змушує.

4) По фазі вимушені коливання відстають від зовнішньої сили, що змушує. Для  $\beta \ll \omega_0$ ,  $\varphi \rightarrow \pi / 2$ .

5) Резонанс:  $A = A(\omega)$ .

$$A(\omega = 0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}; \quad A(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 0;$$

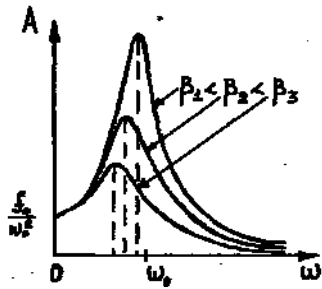
$$A'_{\omega} = 0, \Rightarrow 8\beta^2 \omega + 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) = 0;$$

$$4\omega [2\beta^2 - \omega_0^2 + \omega^2] = 0;$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_{2,3} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2};$$

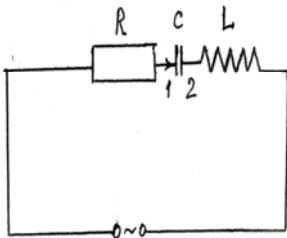
$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \text{ - резонансна частота } (\omega_p < \omega_0)$$

Якщо взяти другу похідну по  $\omega$  і підставити значення  $\omega_p$ , то  $A''_{\omega\omega}|_{\omega=\omega_p} < 0, \Rightarrow \max$ .



Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти зовнішньої сили, що змушує, до власної частоти системи називається резонансом.

## 2) Електромагнітні вимушені коливання.



$$U = U_m \cos \omega t$$

$$IR = \varphi_2 - \varphi_1 + \varepsilon_S + U;$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{C}, \quad \varepsilon_S = -L\ddot{q};$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U_m \cos \omega t;$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$

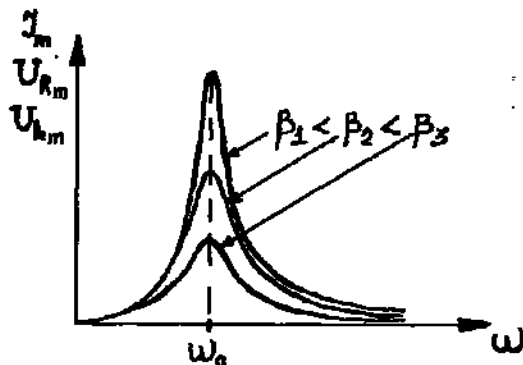
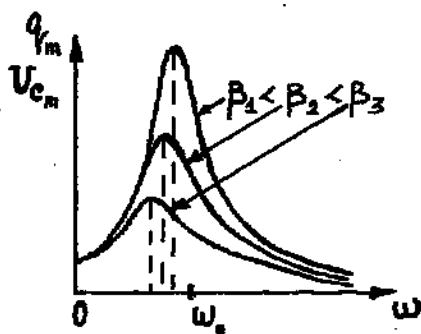
Для сталих коливань маємо:  $q = q_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

$$q = \frac{U_m / L}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2} \omega^2 + \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}} \cos \left( \omega t - \arctg \frac{\frac{R}{L} \omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} \right);$$

$$U_L + U_R + U_C = U_0 \cos \omega t; \quad 2\beta = R/L;$$

$$U_L = L\dot{q}, \quad U_R = IR = R\dot{q}; \quad U_C = \frac{q}{C};$$

$$q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 \omega^2 + \frac{1}{C^2} - 2\frac{L}{C} \omega^2 + L^2 \omega^4}} = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$



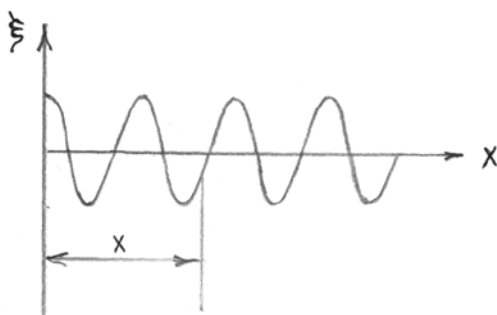
Помітимо, що для  $I_m = q_m \omega$ ,  $U_{Rm} = q_m \omega R$ ,  $U_{Lm} = L q_m \omega^2$  резонансна частота  $\omega_p$  визначається з умови:

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}, \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

## ХВИЛІ

Процес поширення коливань у просторі називається **хвилею**. У загальному випадку розрізняють пружні хвилі, що поширюються у середовищі, і електромагнітні хвилі, які можуть поширюватися й у вакуумі. Поширення пружних хвиль зв'язано як із взаємодією частинок середовища так і із зовнішнім впливом. Хвилі, що переносять енергію називають **біжучими**. У хвилі, що біжить, молекули середовища роблять коливання біля положення стійкої рівноваги. Якщо при деформаціях стиснення-розтягання в середовищі виникають пружні сили, то в таких середовищах поширюються **поздовжні хвилі** (тверде тіло, рідина, газ). Хвиля називається **поздовжньою**, якщо частинка середовища робить коливання в напрямку поширення хвилі. Якщо при деформації зсування виникають пружні сили, то в таких середовищах поширюються **поперечні хвилі** (тільки тверде тіло). Хвиля називається **поперечною**, якщо частинка середовища коливається в напрямку перпендикулярному напрямку поширення хвилі. Виключення становлять хвилі на поверхні рідини.

**Рівнянням хвилі** називають залежність зсуву частинки у хвилі від координати й часу:  $\xi = \xi(x, y, z, t)$ . Сукупність точок хвилі, що коливаються в одній фазі, утворить **хвильову поверхню**. Передня хвильова поверхня називається **фронтом хвилі**. Залежно від характеру фронту розрізняють плоску, циліндричну, сферичну й т.д. хвилі. З метою простоти розглянемо плоску



хвилю, що поширюється в позитивному напрямку осі  $x$ .

Нехай на початку координат хвиля косинусоїдальна.

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t;$$

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau).$$

$\tau$ -час, за який хвиля прийде в точку віддалену від джерела коливань на відстані  $x$ .

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{V} \right) = A \cos(\omega t - kx);$$

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{T \cdot V}; \quad \tau = \frac{x}{V},$$

де  $\lambda = VT$  - довжина хвилі;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - хвильове число;

$V$  – швидкість хвилі;  
 $\omega$  - частота хвилі;  
 $\vec{k} = k\vec{n}$  - хвильовий вектор.

Зафіксуємо фазу хвилі:

$$\omega t - kx = \text{const.}$$

Диференціюючи, одержимо:

$$\omega dt - k dx = 0, \Rightarrow V_{\text{фазу}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = V.$$

Таким чином, фазова швидкість дорівнює швидкості поширення хвилі.  
 Помітимо, що в цьому випадку  $V_{\text{ф.}} > 0$ .

$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$  - рівняння біжучої хвилі,

$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + kx)$  - рівняння хвилі, що біжить у зворотному напрямку.

Уведемо символіку:

$$\xi_{\rightarrow}(x, t) = A \cos(\omega t - kx);$$

$$\xi_{\leftarrow}(x, t) = A \cos(\omega t + kx).$$

У загальному випадку для хвилі, що поширюється в довільному напрямку:

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi);$$

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

### Стоячі хвилі

Це хвилі, що не переносять енергію. Виникають при накладенні біжучої і відбитої хвиль. При відбитті від середовища з меншою густиною справедливо:

$$\xi = \xi_{\rightarrow} + \xi_{\leftarrow} = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = 2A \cos kx \cos \omega t.$$

Амплітуда =  $|2A \cos kx|$ .

**Пучності** :  $kx = \pm m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ),

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_{\text{max}} = \pm m\pi, \Rightarrow x_{\text{max}} = \pm \frac{m\lambda}{2}.$$

**Вузли**:  $kx = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ .

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_{\min} = \pm (2m+1) \frac{\pi}{2}, \Rightarrow x_{\min} = \pm \left( \frac{2m+1}{4} \right) \lambda;$$

$$\Delta x_{\max} = \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2}; \quad x_{\max} - x_{\min} = \frac{\lambda}{4}$$

Фазова швидкість поздовжніх хвиль у пружному середовищі,  $V_{\phi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , де  $E$  - модуль Юнга. Фазова швидкість поперечних хвиль  $V_{\phi} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ,  $G$ - модуль зсуву,  $\rho$  - густина середовища.

### Диференціальне рівняння хвилі

Сконструюємо диференціальне рівняння, що описує хвилю. Знаючи вираження для зміщення у випадку гармонійних коливань:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

візьмемо дві похідні за часом:

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 \cdot x, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Зробимо аналогічно для  $\xi$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \ddot{\xi} = -\omega^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi;$$

$$\Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi, \Rightarrow -\xi = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

$$\Delta \xi = \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \Rightarrow \Delta \xi = \frac{1}{V_{\phi}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

### Електромагнітні хвилі

Запишемо рівняння Максвелла в диференціальній формі.

$$1) \quad [\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \vec{B} = 0;$$

$$2) \quad [\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \vec{D} = \rho.$$

Врахуємо зв'язки:  $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ .

Скористаємося тим, що  $\text{div rot } \vec{a} = 0$ ,  $\nabla [\nabla \vec{a}] = 0$ .

Розглянемо області простору вдалині від струмів і зарядів. Вважаємо, що густина струму  $\vec{j} = 0$  і заряд  $q = 0$ .

$$1) [\nabla \overline{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}, \quad \nabla \overline{H} = 0;$$

$$2) [\nabla \overline{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}, \quad \nabla \overline{E} = 0.$$

Візьмемо ротор від першого рівняння:

$$[\nabla [\nabla \overline{E}]] = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \overline{H}];$$

$$[\nabla [\nabla \overline{E}]] = bac - cab = \nabla (\nabla \overline{E}) - \nabla^2 \overline{E} = -\Delta \overline{E}.$$

$$\left( \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \Delta;$$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \overline{H}] = -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2};$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с} - \text{швидкість світла у вакуумі.}$$

$$\Delta \overline{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2}, \quad \Rightarrow \quad V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}; \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Таким чином, електромагнітні поля можуть існувати в просторі у вигляді електромагнітних хвиль. Електромагнітні хвилі - це поширення в просторі змінних електричного й магнітного полів.

Через те, що у вакуумі  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $\Rightarrow V_\phi = c$ . Таким чином, світло - це окремий випадок електромагнітних хвиль (ЕМХ).

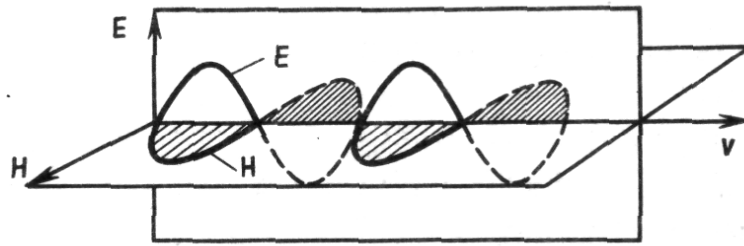
### **Шкала ЕМХ:**

- 1) довгі хвилі;
- 2) інфрачервоне випромінювання;
- 3) видиме світло:  $(3 \div 9) \cdot 10^{-7}$  м;
- 4) ультрафіолетове випромінювання;
- 5) рентгенівське випромінювання;
- 6) гама - випромінювання;

Для плоскої електромагнітної хвилі, для якої  $E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ ,  $H(x, t) = H \cos(\omega t - kx + \varphi_2)$ , рішення рівняння Максвелла дає наступний результат:

- 1) електричні й магнітні компоненти хвилі коливаються в одній фазі.
- 2) Амплітуди зв'язані співвідношенням  $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu\mu_0} H_0$ .
- 3) Плоскі хвилі поперечні  $\vec{E} \perp \vec{V}_\phi$ ,  $\vec{H} \perp \vec{V}_\phi$ ,  $\vec{E} \perp \vec{H}$ .





Енергія електричного поля конденсатора:

$$\begin{cases} W_E = \frac{C U^2}{2}, & C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}, \\ W_E = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2} d \left(\frac{U}{d}\right)^2, & E = \frac{U}{d}, \quad \vec{E} = -grad U. \end{cases}$$

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V, \Rightarrow \omega_E = \frac{W_E}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} - \text{об'ємна густина енергії електричного поля.}$$

$$[\omega_E]_{\text{н}^3} = \frac{A \cdot \text{с}}{i^3}; \quad \omega_i = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} - \text{об'ємна густина енергії магнітного поля.}$$

$$\text{Для ЭМХ: } \omega = \omega_E + \omega_i = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2};$$

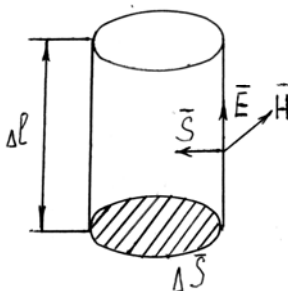
$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H, \Rightarrow \omega = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E \sqrt{\mu \mu_0} H = \frac{1}{V_\phi} E H;$$

$$\omega V_\phi = E H, \Rightarrow [\omega V_\phi]_{ci} = \frac{Дж}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{Дж}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{Вт}{\text{м}^2}.$$

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}] - \text{вектор Умова-Пойтинга}$$

**Вектор Умова-Пойтинга** вказує напрямок переносу енергії електромагнітної хвилі. Модуль вектора Пойтинга визначає **густину потоку енергії** хвилі або енергію, що переноситься через одиницю поверхні в одиницю часу.

Як додаток розглянемо наступний приклад. Нехай постійний струм тече по циліндричному провіднику розміру  $\Delta l$ .



$$I = \frac{U}{R}, \quad I = j \Delta S, \quad R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S};$$

$$j \Delta S = \frac{1}{\rho} \frac{U}{\Delta l} \Delta S, \Rightarrow j = \frac{1}{\rho} E, \Rightarrow E = \rho j.$$

Скористаємося теоремою про циркуляції вектора  $\vec{H}$ :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I_k, \Rightarrow H 2\pi r = j \Delta S;$$

$$H = \frac{j}{2\pi r} \Delta S = \frac{j}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{j r}{2};$$

$$\frac{W}{t} = \int S dS_{нов.} = \int E H dS_{нов.} = -E H S_{нов.} = -\rho j \frac{j r}{2} 2\pi r \Delta l = \pi \Delta l \rho j^2 r^2.$$

За законом Джоуля - Ленца:

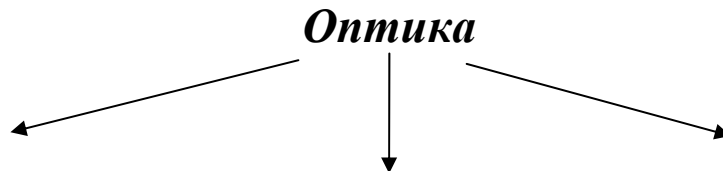
$$Q = I^2 R t, \Rightarrow \frac{Q}{t} = I^2 R;$$

$$\frac{Q}{t} = j^2 (\Delta S)^2 \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = \rho j^2 \Delta l \Delta S = \rho j^2 \Delta l \pi r^2.$$

Таким чином, тепло, що виділяється за законом Джоуля-Ленца, є не що інше, як енергія електромагнітного поля, що входить через бічну поверхню усередину провідника.

На закінчення відзначимо, що електромагнітні хвилі породжуються змінним електричним полем, електричними зарядами, що рухаються прискорено електричним коливальним контуром. Крім того, вони випромінюються й у тому випадку, якщо заряд рухається з постійною швидкістю, але швидкість заряду більше фазової швидкості світла в даному середовищі.

Після розгляду теми «Електромагнітні хвилі» ми можемо перейти до вивчення наступного розділу «Оптика». Корисно мати на увазі, що цей розділ складається із двох підрозділів «Хвильова оптика» і «Квантова оптика», які включають наступні теми:



### **Геометрическая**

1) дзеркала

2) линзи

3) опт. прилади

4) око

### **Волновая**

1) інтерференція

2) дифракція

3) поляризація

4) дисперсія

### **Квантовая оптика**

1) теплове випромінювання

2) фотоефект

3) ефект Комптона

Детально розглянемо кожну тему.

## **Основні закони геометричної оптики**

Основні закони геометричної оптики були відомі задовго до встановлення фізичної природи світла. **Закон прямолінійного поширення світла:** у оптично однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно. Дослідним доказом цього закону можуть служити різкі тіні, що відкидаються непрозорими тілами при освітленні світлом джерела досить малих розмірів («точкове джерело»).

Іншим доказом може служити відомий досвід по проходженню світла далекого джерела крізь невеликий отвір, внаслідок чого утворюється вузький світловий пучок. Цей досвід приводить до уявлення про світловий промінь як про геометричну лінію, уздовж якої поширюється світло. Слід зазначити, що закон прямолінійного поширення світла порушується і поняття світлового променя втрачає сенс, якщо світло проходить через малі отвори, розміри яких порівнянні з довжиною хвилі.

Таким чином, геометрична оптика, що спирається на уявлення про світлові промені, є граничний випадок хвилевої оптики при  $\lambda \rightarrow 0$ . Кордони застосовності геометричної оптики будуть розглянуті в розділі про **дифракцію світла**. На кордоні розділу двох прозорих середовищ світло може частково відбитися так, що частина світлової енергії поширюватиметься після віддзеркалення по новому напрямку, а частково пройти через кордон і поширюватися в другому середовищі.

**Закон віддзеркалення світла:** падаючий і відбитий промені, а також перпендикуляр до кордону розділу двох середовищ, відновлений в точці падіння світливши, лежать в одній площині (**площиність падіння**). Кут віддзеркалення  $\gamma$  дорівнює куту падіння  $\alpha$ . **Закон заломлення світла:** падаючий і заломлений промені, а також перпендикуляр до кордону розділу двох середовищ, відновлений в точці падіння світливши, лежать в одній площині. Відношення синуса кута падіння  $\alpha$  до синуса кута заломлення  $\beta$  є величина, постійна для двох даних середовищ:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Закон заломлення був експериментально встановлений голландським ученим В. Снелліусом (1621 р.). Постійну величину  $n$  називають **відносним показником заломлення** другого середовища відносно першого. Показник заломлення середовища відносно вакууму називають **абсолютним показником заломлення**. Відносний показник заломлення двох середовищ дорівнює відношенню їх абсолютних показників заломлення:

$$n = n_2 / n_1.$$

Закони віддзеркалення і заломлення знаходять пояснення в хвилевій фізиці. Згідно з хвилевими виставами, заломлення є наслідком зміни швидкості

поширення хвиль при переході з одного середовища в інше. Фізичний сенс показника заломлення – це відношення швидкості поширення хвиль в першому середовищі  $v_1$  до швидкості їх поширення в другому середовищі  $v_2$ :

$$n = v_2 / v_1$$

Абсолютний показник заломлення дорівнює відношенню швидкості світла  $c$  у вакуумі до швидкості світла  $v$  у середовищі:

$$n = c / v$$

Рис 1 ілюструє закони віддзеркалення і заломлення світла.

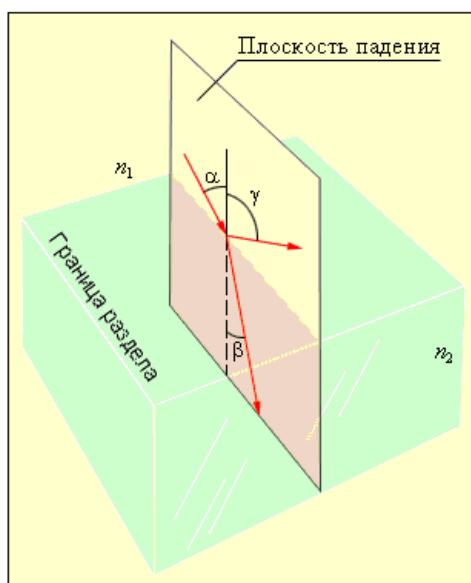


Рисунок 1. Закони віддзеркалення і заломлення:  $\gamma = \alpha$ ;  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$

Середовище з меншим абсолютним показником заломлення називають оптично менш щільним. Під час переходу світла з оптично щільнішого середовища в оптично менш щільну  $n_2 < n_1$  (наприклад, із скла в повітря) можна спостерігати явище **повного віддзеркалення**, тобто зникнення заломленого променя. Це явище спостерігається при кутах падіння, що перевищують деякий критичний кут  $\alpha_{\text{пр}}$ , який називається **граничним кутом повного внутрішнього віддзеркалення** (див. рис. 2). Для кута падіння  $\alpha = \alpha_{\text{пр}}$   $\sin \beta = 1$  значення  $\sin \alpha_{\text{пр}} = n_2 / n_1 < 1$ . Якщо другим середовищем є повітря ( $n_2 \approx 1$ ), то формулу зручно переписати у вигляді

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = 1 / n$$

де  $n = n_1 > 1$  – абсолютний показник заломлення першого середовища. Для кордону розділу скло–воздух ( $n = 1,5$ ) критичний кут рівний  $\alpha_{\text{пр}} = 42$ , для кордону вода–воздух ( $n = 1,33$ ) –  $\alpha_{\text{пр}} = 48,7$ .

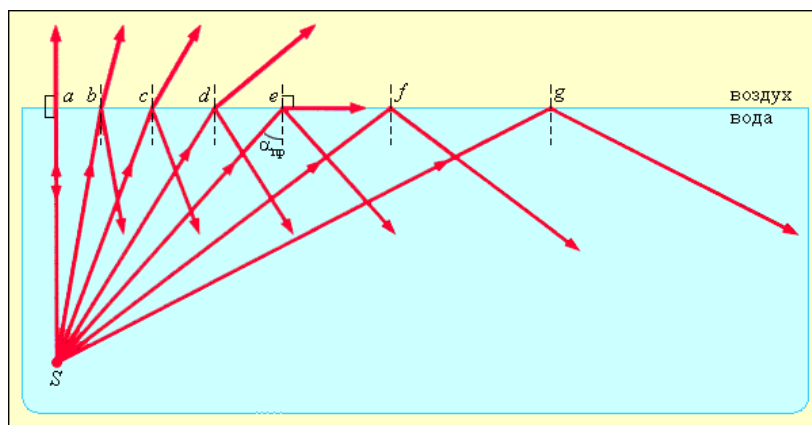


Рисунок 3. Повне внутрішнє віддзеркалення світла на кордоні вода–воздух; S – точкове джерело світла.

Явище повного внутрішнього віддзеркалення знаходить вживання в багатьох оптичних пристроях. Найцікавішим і практично важливим вживанням є створення **волоконних світлопроводів**, які є тонкими (від декількох мікрометрів до міліметрів) довільно зігнутими нитками з оптично прозорого матеріалу (стекло, кварц). Світло, що потрапляє на торець світлопровода, може поширюватися по ньому на великі відстані за рахунок повного внутрішнього віддзеркалення від бічних поверхонь (рис. 4). Науково-технічний напрям, що займається розробкою і вживанням оптичних світлопроводів, називається **волоконною оптикою**.

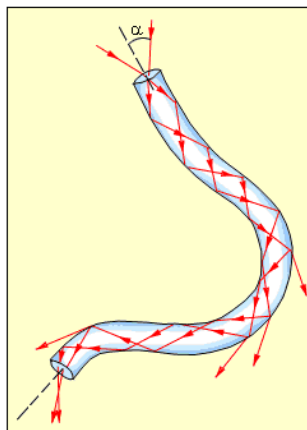


Рисунок 4. Поширення світла у волоконному світлопроводі. При сильному вигині волокна закон повного внутрішнього віддзеркалення порушується, і світло частково виходить з волокна через бічну поверхню.

### *Дзеркала*

Простим оптичним пристроєм, здатним створювати зображення предмету, є **плоске дзеркало**. Зображення предмету, що дається плоским дзеркалом, формується за рахунок променів, відбитих від дзеркальної поверхні. Це зображення є **уявним**, оскільки воно утворюється пересіченням не самих відбитих променів, а їх продовжень в «задзеркаллі» (рис 1).

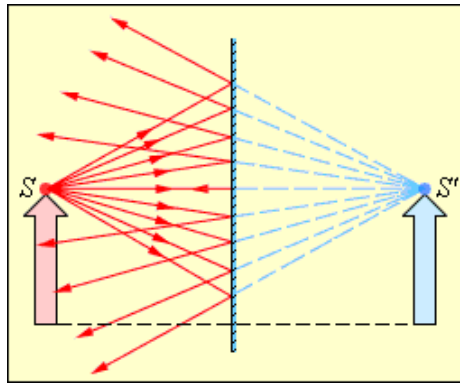


Рисунок 1. Хід променів при віддзеркаленні від плоского дзеркала. Точка  $S'$  є уявним зображенням точки  $S$ .

Унаслідок закону віддзеркалення світла уявне зображення предмету розташовується симетрично відносно дзеркальної поверхні. Розмір зображення дорівнює розміру самого предмету. **Сферичним дзеркалом** називають дзеркально відзеркалювальну поверхню, що має форму сферичного сегменту. Центр сфери, з якої вирізаний сегмент, називають **оптичним центром дзеркала**. Вершину сферичного сегменту називають **полюсом**.

Пряма, що проходить через оптичний центр і полюс дзеркала, називається **головною оптичною віссю** сферичного дзеркала. Головна оптична вісь виділена зі всіх інших прямих, що проходять через оптичний центр, лише тим, що вона є віссю симетрії дзеркала. Сферичні дзеркала бувають **увігнутими** і **опуклими**. Якщо на увігнуте сферичне дзеркало падає пучок променів, паралельний головній оптичній осі, то після віддзеркалення від дзеркала промені перетнуться в крапці, яка називається **головним фокусом** дзеркала  $F$ . Відстань від фокусу до полюса дзеркала називають **фокусною відстанню** і позначають тією ж буквою  $F$ . В увігнутого сферичного дзеркала головний фокус дійсний. Він розташований посередині між центром і полюсом дзеркала (рис. 2).

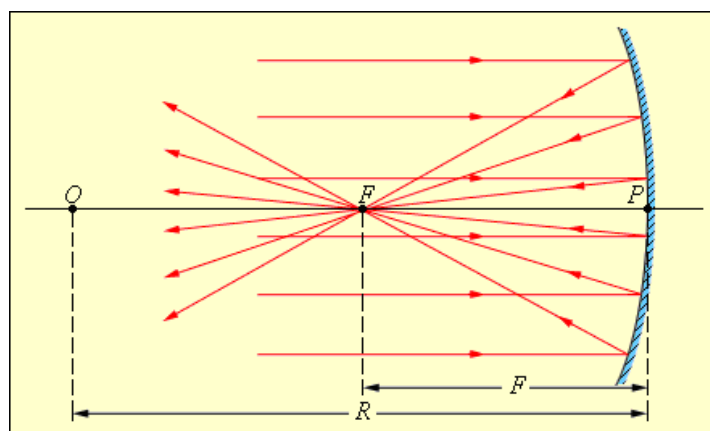


Рисунок 2. Віддзеркалення паралельного пучка променів від увігнутого сферичного дзеркала. Точки  $O$  – оптичний центр,  $P$  – полюс,  $F$  – головний фокус дзеркала;  $OP$  – головна оптична вісь,  $R$  – радіус кривизни дзеркала

Слід мати на увазі, що відбиті промені перетинаються приблизно в одній крапці лише в тому випадку, якщо падаючий паралельний пучок був досить вузьким (так званий **параксіальний пучок**). Головний фокус опуклого дзеркала є уявним. Якщо на опукле дзеркало падає пучок променів, паралельних головній оптичній осі, то після віддзеркалення у фокусі перетнуться не самі промені, а їх продовження (рис. 3)

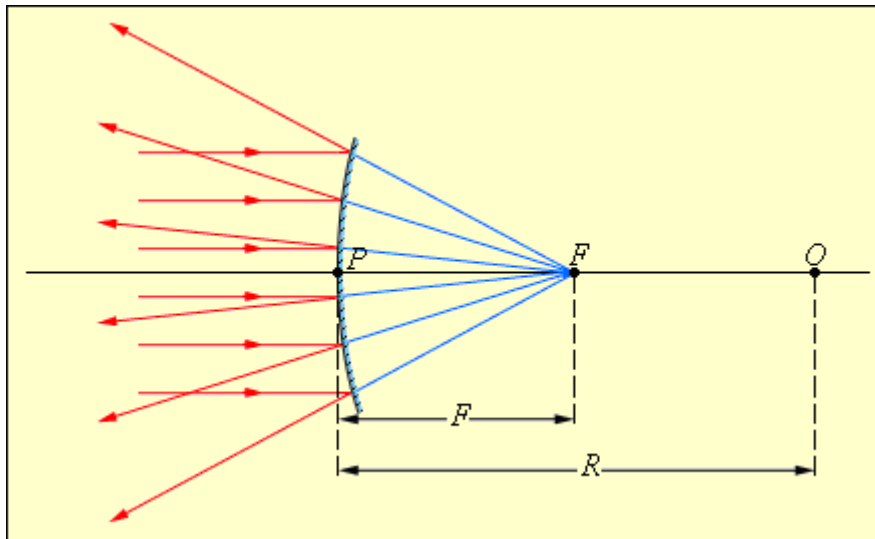


Рисунок 3. Віддзеркалення паралельного пучка променів від опуклого дзеркала.  $F$  – уявний фокус дзеркала,  $O$  – оптичний центр;  $OP$  – головна оптична вісь

Фокусним відстаням сферичних дзеркал приписується певний знак: для увігнутого дзеркала  $F = R / 2$  для опуклого  $F = -R / 2$  де  $R$  – радіус кривини дзеркала. Зображення якої-небудь точки  $A$  предмету в сферичному дзеркалі можна побудувати за допомогою будь-якої пари стандартних променів:

- промінь  $AOC$ , що проходить через оптичний центр дзеркала; відбитий промінь  $COA$  йде по тій же прямій;
- промінь  $AFD$ , що йде через фокус дзеркала; відбитий промінь йде паралельно головній оптичній осі;
- промінь  $AP$ , падаючий на дзеркало в його полюсі; відбитий промінь симетричний з падаючим відносно головної оптичної осі.
- промінь  $AE$ , паралельний головній оптичній осі; відбитий промінь  $Efa_1$  проходить через фокус дзеркала.

На рис. 4 перераховані вище стандартні промені змальовані для випадку увігнутого дзеркала. Всі ці промені проходять через точку  $A'$ , яка є зображенням точки  $A$ . Всі останні відбиті промені також проходять через точку

A'. Хід променів, при якому всі промені, що вийшли з однієї крапки, збираються в іншій крапці, називається **стигматичним**. Відрізок A'B' є зображенням предмету AB. Аналогічні побудови для випадку опуклого дзеркала.

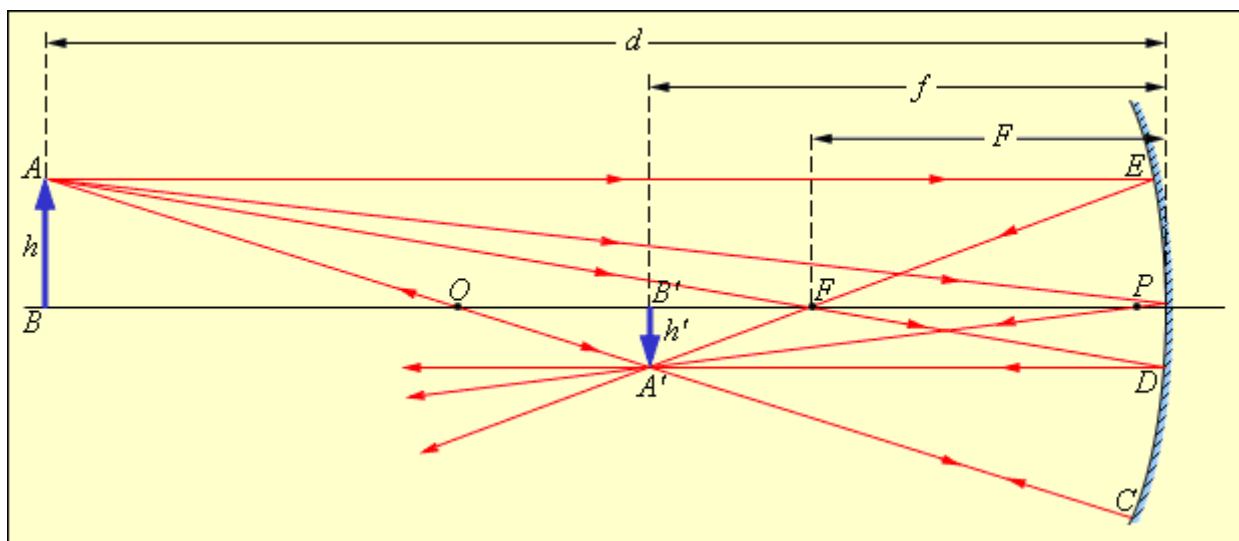


Рисунок 4. Побудова зображення в увігнутому сферичному дзеркалі

Положення зображення і його розмір можна також визначити за допомогою **формули сферичного дзеркала**:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

Тут  $d$  – відстань від предмету до дзеркала,  $f$  – відстань від дзеркала до зображення. Величини  $d$  і  $f$  підкоряються певному правилу знаків:  $d > 0$  і  $f > 0$  – для дійсних предметів і зображень;  $d < 0$  і  $f < 0$  – для уявних предметів і зображень. Для випадку, змальованого на рис. 4, маємо:  $F > 0$  (дзеркало увігнуте);  $d = 3f > 0$  (дійсний предмет). По формулі сферичного дзеркала отримуємо, отже, зображення дійсне. Якби на місці увігнутого дзеркала стояло опукле дзеркало з тим же по модулю фокусною відстанню, ми отримали б наступний результат:  $F < 0$ ,  $d = -3F > 0$ , – зображення уявне. Лінійне збільшення сферичного дзеркала  $\Gamma$  визначається як відношення лінійних розмірів зображення  $h'$  і предмету  $h$ . Величині  $h'$  зручно приписувати певний знак залежно від того, є зображення прямим ( $h' > 0$ ) або перевернутим ( $h' < 0$ ). Величина  $h$  завжди вважається позитивною. При такому визначенні лінійне збільшення сферичного дзеркала виражається формулою, яку можна легко отримати з рис. 4:

$$\Gamma = h' / h = -f / d,$$



У першому з розглянутих вище прикладів  $\Gamma = -1/2 < 0$  – отже, зображення перевернуте, зменшене в 2 рази. У другому прикладі  $\Gamma = 1/4 > 0$  – зображення пряме, зменшене в 4 рази.

### Тонкі лінзи

**Лінзою** називається прозоре тіло, обмежене двома сферичними поверхнями. Якщо товщина самої лінзи мала в порівнянні з радіусами кривизни сферичних поверхонь, то лінзу називають **тонкою**. Лінзи входять до складу практично всіх оптичних приладів. Лінзи бувають такими, що збирають і розсіюють. **Збираюча** лінза в середині товще, ніж в країв, **розсіююча** лінза, навпаки, в середній частині тонше (рис. 1).

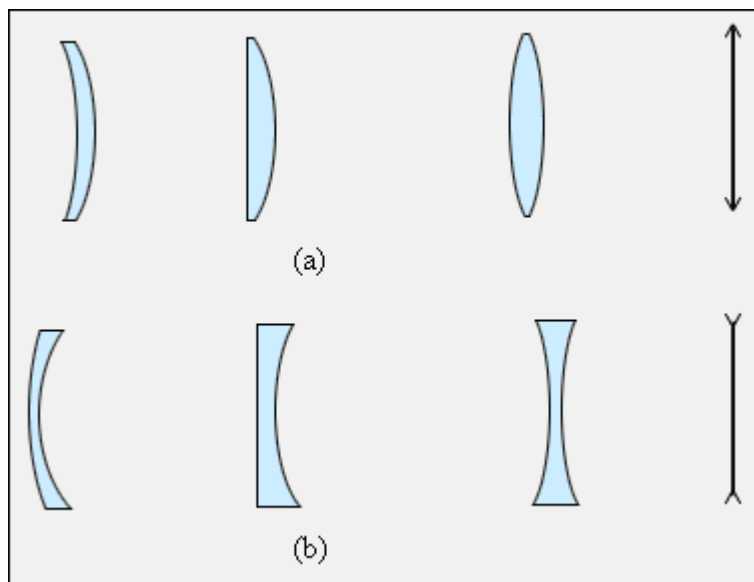


Рисунок 1. Збираючі (а) і розсіюючі (б) лінзи і їх умовні позначення

Пряма, що проходить через центри кривизни  $O_1$  і  $O_2$  сферичних поверхонь, називається **головною оптичною віссю лінзи**. В разі тонких лінз можна приблизно вважати, що головна оптична вісь перетинається з лінзою в одній крапці, яку прийнято називати оптичним центром лінзи  $O$ . Промінь світла проходить через оптичний центр лінзи, не відхиляючись від первинного напрямку. Всі прямі, що проходять через оптичний центр, називаються **побічними оптичними осями**. Якщо на лінзу направити пучок променів, паралельних головній оптичній осі, то після проходження через лінзу промені (або їх продовження) зберуться в одній точці  $F$ , яка називається **головним фокусом** лінзи.

В тонкій лінзі є два головні фокуси, симетрично розташованих відносно лінзи на головній оптичній осі. В збираючих лінз фокуси дійсні, в розсіюючих – уявні. Пучки променів, паралельних одній з побічних оптичних осей, також фокусуються після проходження через лінзу в точку  $F'$ , яка розташована при пересіченні побічної осі з **фокальною плоскістю**  $\Phi$ , тобто плоскістю перпендикулярної головній оптичній осі і що проходить через головний фокус (рис. 2). Відстань між оптичним центром лінзи  $O$  і головним фокусом  $F$  називається фокусною відстанню. Воно позначається тією ж буквою  $F$ .

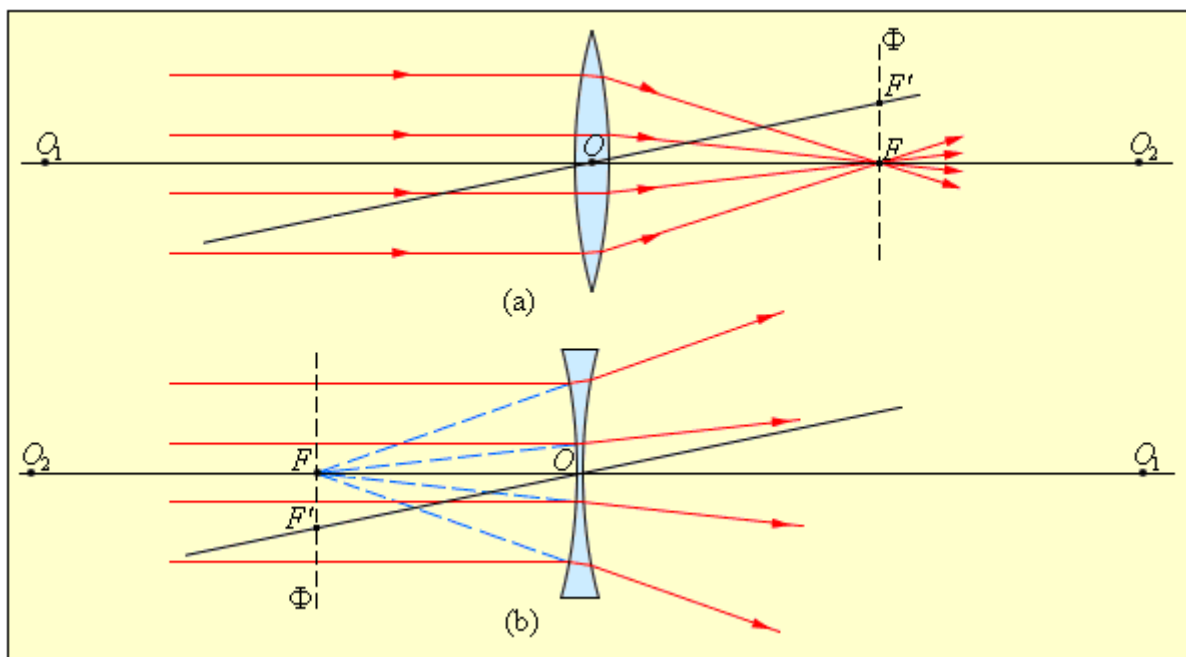


Рисунок 2. Заломлення паралельного пучка променів в збираючій (a) і розсіюючій (b) лінзах. Точки  $O_1$  і  $O_2$  – центри сферичних поверхонь,  $O_1 O_2$  – головна оптична вісь,  $O$  – оптичний центр,  $F$  – головний фокус,  $F'$  – побічний фокус,  $OF'$  – побічна оптична вісь,  $\Phi$  – фокальна плоскість.

Основна властивість лінз – здатність давати **зображення предметів**. Зображення бувають **прямими і перевернутими, дійсними і уявними, збільшеними і зменшеними**. Положення зображення і його характер можна визначити за допомогою геометричних побудов. Для цього використовують властивості деяких стандартних променів, хід яких відомий. Це промені, що проходять через оптичний центр або один з фокусів лінзи, а також промені, паралельні головній або одній з побічних оптичних осей. Приклади таких побудов представлені на рис. 3 і 4.

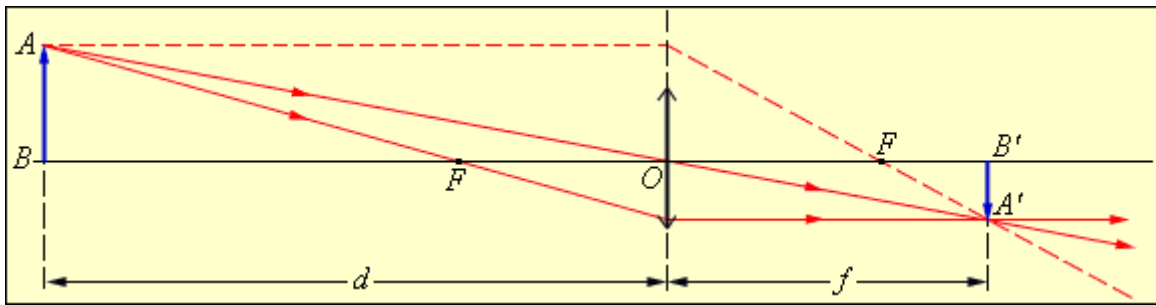


Рисунок 3. Побудова зображення в збираючій лінзі.

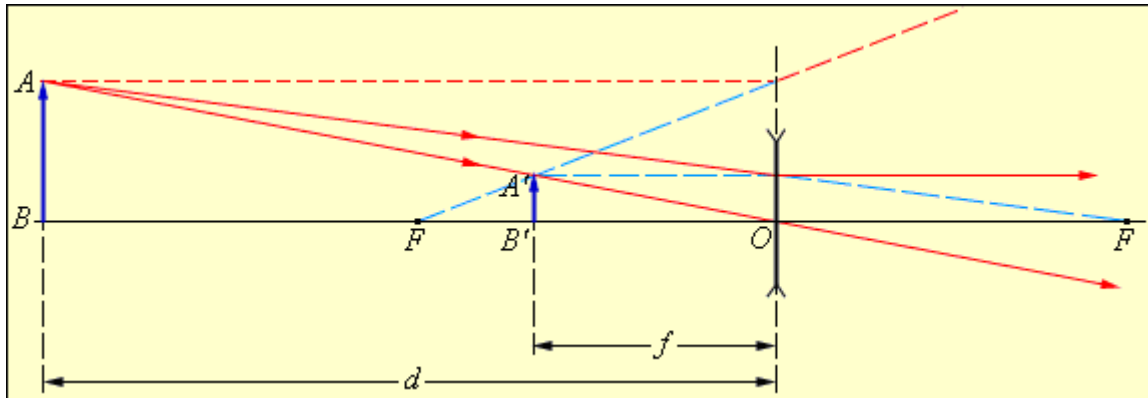


Рисунок 4. Побудова зображення в розсіюючій лінзі.

Слід звернути увагу на те, що деякі із стандартних променів, використаних на рис. 3 і 4 для побудови зображень, не проходять через лінзу. Ці промені реально не беруть участь в утворенні зображення, але вони можуть бути використані для побудов. Зображення можна також розрахувати за допомогою **формули тонкої лінзи**. Якщо відстань від предмету до лінзи позначити через  $d$ , а відстань від лінзи до зображення через  $f$ , то формулу тонкої лінзи можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D.$$

Величину  $D$ , зворотну фокусній відстані, називають **оптичною силою лінзи**. Одиниця виміру оптичної сили є 1 **діоптрія** (дптр). Діоптрія – оптична сила лінзи з фокусною відстанню 1 м-коду:  $1 \text{ дптр} = \text{м}^{-1}$

Формула тонкої лінзи аналогічна **формулі сферичного дзеркала**. Її можна отримати для параксіальних променів з подібності трикутників на рис. 3 або рис. 4. Фокусним відстаням лінз прийнято приписувати певні знаки: для збираючої лінзи  $F > 0$ , для розсіюючої  $F < 0$ . Величини  $d$  і  $f$  також підкоряються певному правилу знаків:  $d > 0$  і  $f > 0$  – для дійсних предметів (тобто реальних джерел світла, а не продовжень променів, що сходяться за лінзою) і зображень;  $d < 0$  і  $f < 0$  – для уявних джерел і зображень. Для випадку, змальованого на рис. 3, маємо:  $F > 0$  (лінза збирає),  $d = 3f > 0$  (дійсний предмет). По формулі тонкої лінзи отримаємо:  $f = 3F / 2 > 0$ , отже, зображення дійсне. У випадку,

змальованому на рис. 4,  $F < 0$  (лінза розсіююча),  $d = 2|f| > 0$  (дійсний предмет),  $f = -3F/2 < 0$ , тобто зображення уявне. Залежно від положення предмету по відношенню до лінзи змінюються лінійні розміри зображення. **Лінійним збільшенням лінзи**  $\Gamma$  називають відношення лінійних розмірів зображення  $h'$  і предмету  $h$ . Величині  $h'$ , як і в разі сферичного дзеркала, зручно приписувати знаки плюс або мінус залежно від того, є зображення прямим або перевернутим. Величина  $h$  завжди вважається позитивною. Тому для прямих зображень  $\Gamma > 0$ , для перевернутих  $\Gamma < 0$ . З подібності трикутників на рис. 3 і 4 легко отримати формулу для лінійного збільшення тонкої лінзи:

$$\Gamma = h' / h = -f / d.$$

У розглянутому прикладі із збираючою лінзою (рис. 3):  $d = 3f > 0$ , отже,  $f = 3F/2 > 0$ , – зображення перевернуте і зменшене в 2 рази. У прикладі з розсіюючою лінзою (рис. 4):  $d = 2|f| > 0$ ,  $f = -2F/3 < 0$ , ; отже,  $\Gamma = 1/3 > 0$  – зображення пряме і зменшене в 3 рази. Оптична сила  $D$  лінзи залежить як від радіусів кривизни  $R_1$  і  $R_2$  її сферичних поверхонь, так і від показника заломлення  $n$  матеріалу, з якого виготовлена лінза. У курсах оптики доводиться наступна формула:

$$D = \frac{1}{F} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Радіус кривизни опуклої поверхні вважається позитивним, увігнутою – негативним. Ця формула використовується при виготовленні лінз із заданою оптичною силою. У багатьох оптичних приладах світло послідовно-тілний проходить через дві або декілька лінз. Зображення предмету, дає-моє першою лінзою, служить предметом (дійсним або уявним) для другої лінзи, яка будує друге зображення предмету. Це друге зображення також може бути дійсним або уявним.

Розрахунок оптичної системи з двох тонких лінз зводиться до двократного вживання формули лінзи, при цьому відстань  $d_2$  від першого зображення до другої лінзи слід покласти рівним величині  $l - f_1$ , де  $l$  – відстань між лінзами. Розрахована по формулі лінзи величина  $f_2$  визначає положення другого зображення і його характер ( $f_2 > 0$  – дійсне зображення,  $f_2 < 0$  – уявне зображення). Загальне лінійне збільшення  $\Gamma$  системи з двох лінз дорівнює твору лінійних збільшень обох лінз:  $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ . Якщо предмет або його зображення знаходяться в нескінченності, то лінійне збільшення втрачає сенс. Окремим випадком є телескопічний хід променів в системі з двох лінз, коли і предмет, і друге зображення знаходяться на нескінченно великих відстанях. Телескопічний хід променів реалізується в зорових трубах – **астрономічній трубі Кеплера** і **земній трубі Галілея**. Тонкі лінзи володіють рядом недоліків, що не дозволяють отримувати високоякісні зображення. Спотворення, що виникають при формуванні зображення, називаються **аберацією**.

Головні з них – **сферична і хроматична аберація**. Сферична аберація виявляється в тому, що в разі широких світлових пучків промені, далекі від оптичної осі, пересікають її не у фокусі. Формула тонкої лінзи справедлива лише для променів, близьких до оптичної осі. Зображення видаленого точкового джерела, що створюється широким пучком променів, заломлених лінзою, виявляється розмитим. Хроматична аберація виникає унаслідок того, що показник заломлення матеріалу лінзи залежить від довжини хвилі світла  $\lambda$ . Це властивість прозорих середовищ називається **дисперсією**.

Фокусна відстань лінзи виявляється різною для світла з різними довжинами хвиль, що приводить до розмиття зображення при використанні немонохроматичного світла. Тому в сучасних оптичних приладах застосовуються не тонкі лінзи, а складні багатолінзові системи, в яких удається приблизно усунути різну аберацію. Формування збираючою лінзою дійсного зображення предмету використовується в багатьох оптичних приладах, таких як фотоапарат, проектор і так далі.

**Фотоапарат** є замкнутою світлонепроникною камерою. Зображення фотографованих предметів створюється на фотоплівці системою лінз, яка називається **об'єктивом**. Спеціальний затвор дозволяє відкривати об'єктив на час експозиції. Особливістю роботи фотоапарата є те, що на плоскій фотоплівці повинні виходити досить різкими зображення предметів, що знаходяться на різних відстанях.

У плоскості фотоплівки виходять різкими лише зображення предметів, що знаходяться на певній відстані. Наведення на різкість досягається переміщенням об'єктиву відносно плівки. Зображення крапок, не лежачих в плоскості різкого наведення, виходять нерізкими у вигляді кружків розсіяння. Розмір  $d$  цих кружків може бути зменшений шляхом діафрагмування об'єктиву, тобто зменшення **відносного отвору**  $a / F$  (рис. 5). Це приводить до збільшення глибини різкості.

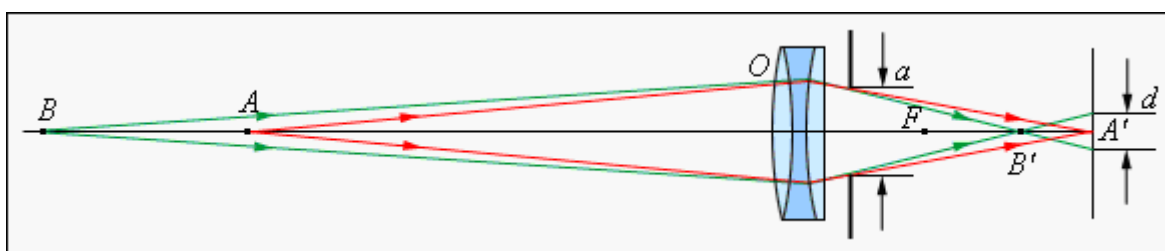


Рисунок 5. Фотоапарат

**Проекційний апарат** призначений для здобуття крупномасштаб-них зображень. Об'єктив  $O$  проектора фокусує зображення плоского предмету (діапозитив  $D$ ) на видаленому екрані  $E$  (рис. 6). Система лінз  $K$ , звана **конденсором**, призначена для того, щоб сконцентрувати світло джерела  $S$  на діапозитиві. На екрані  $E$  створюється дійсне збільшене перевернуте

зображення. Збільшення проєкційного апарату можна міняти, наближаючи або видаляючи екран Е з одночасною зміною відстані між діапозитивом D і об'єктивом О.

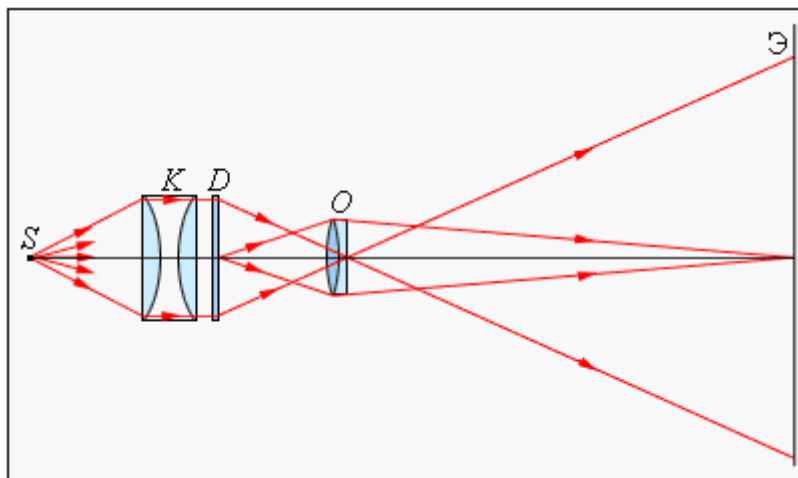


Рисунок 6. Проєкційний апарат

### ***Оптичні прилади для візуальних спостережень***

Для необзороного ока найменша точка зору приблизно рівна 1'. Цей кут визначається мозаїчною будовою сітківки, а також хвилевими властивостями світла. Існує ряд приладів, призначених для збільшення точки зору, – лупа, мікроскоп, зорова труба. При візуальних спостереженнях око є невід'ємною частиною оптичної системи, тому хід променів в приладах, що озброюють око, залежить від акомодатії ока.

При аналізі роботи оптичних приладів для візуальних спостережень найзручніше вважати, що око спостерігача акомодоване на нескінченність. Це означає, що промені від кожної точки предмету, пройшовши через прилад, потрапляють в око у вигляді паралельного пучка. У цих умовах поняття лінійного збільшення втрачає сенс. Відношення точки зору  $\varphi$  при спостереженні предмету через оптичний прилад до точки зору  $\psi$  при спостереженні необзороеним оком називається **кутовим збільшенням**:

$$\gamma = \frac{\varphi}{\psi}.$$

Кутове збільшення є важливою характеристикою оптичних приладів для візуальних спостережень. Слід зазначити, що в деяких підручниках вважається, що око спостерігача акомодоване на відстань найкращого зору нормального ока  $d_0$ . В цьому випадку хід променів в приладах декілька ускладнюється, але кутове збільшення приладу приблизно залишається таким же, як і при акомодатії на нескінченність. **Лупа.** Простим приладом для візуальних спостережень є лупа. Лупой називають збираючу лінзу з малою фокусною

відстанню ( $F \approx 10$  см). Лупу розташовують близько до ока, а даний предмет – в її фокальній плоскості. Предмет видно через лупу під кутом

$$\varphi = \frac{h}{F},$$

де  $h$  – розмір предмету. При розгляді цього ж предмету неозброєним оком його слід розташувати на відстані  $d_0 = 25$  см найкращого зору нормального ока. Предмет буде видний під кутом

$$\psi = \frac{h}{d_0}.$$

Звідси витікає, що кутове збільшення лупи рівне

$$\gamma = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{d_0}{F}.$$

Лінза з фокусною відстанню 10 см дає збільшення в 2,5 разу. Роботу лупи ілюструє рис. 1.

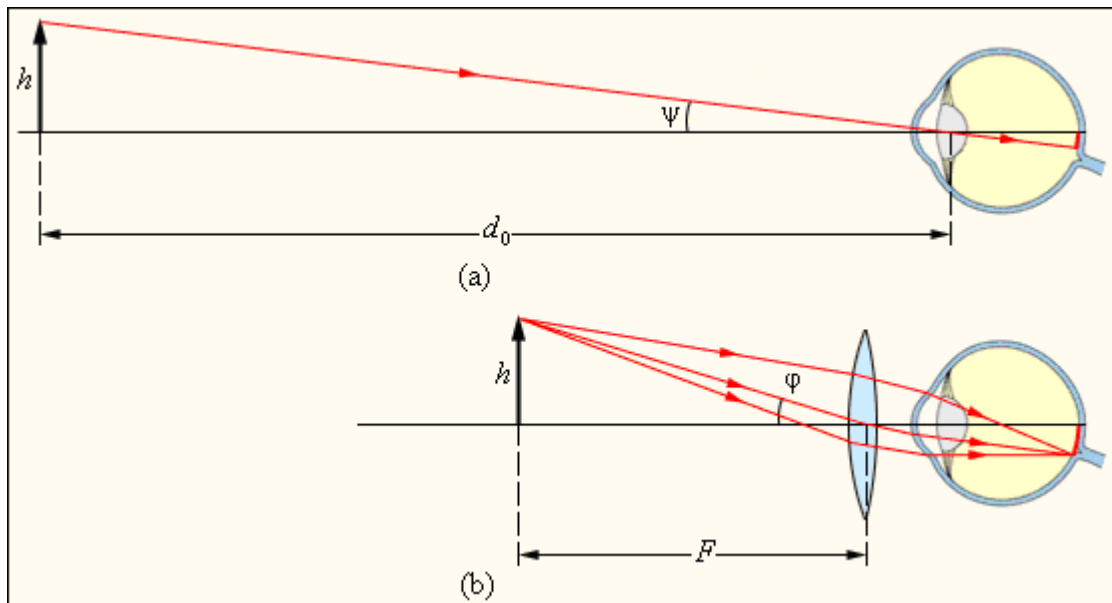


Рисунок. 1. Дія лупи: а – предмет розглядається неозброєним оком з відстані найкращого зору  $d_0 = 25$  см; ; б – предмет розглядається через лупу з фокусною відстанню  $F$ .

**Мікроскоп.** Мікроскоп застосовують для здобуття великих збільшень при спостереженні дрібних предметів. Збільшене зображення предмету в мікроскопі виходить за допомогою оптичної системи, що складається з двох короткофокусних лінз – об'єктиву  $O_1$  і окуляра  $O_2$  (рис. 2). Об'єктив дасть дійсне перевернуте збільшене зображення предмету. Це проміжне зображення розглядається оком через окуляр, дія якого аналогічно дії лупи. Окуляр

розташовують так, щоб проміжне зображення знаходилося в його фокальній плоскості; в цьому випадку промені від кожної точки предмету поширюються після окуляра паралельним пучком.

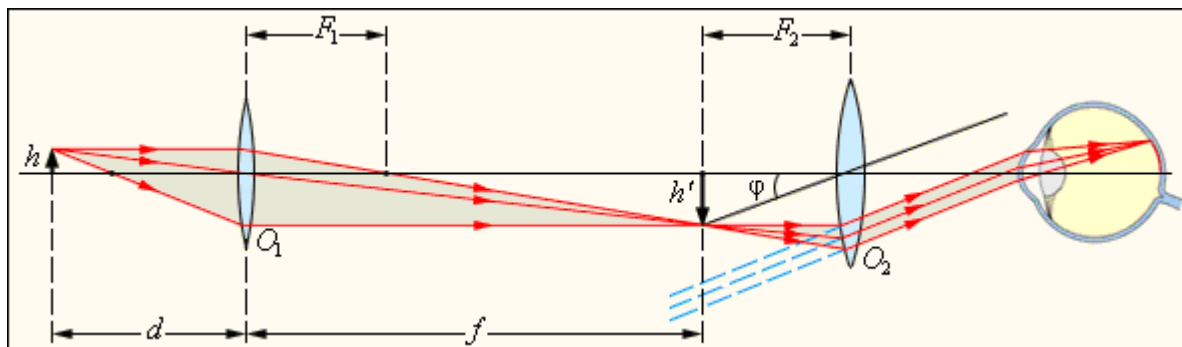


Рисунок 2. Хід променів в мікроскопі

Уявне зображення предмету, що розглядається через окуляр, завжди перевернуте. Якщо ж це виявляється незручним (наприклад, при прочитанні дрібного шрифту), можна перевернути сам предмет перед об'єктивом. Тому кутове збільшення мікроскопа прийнято вважати позитивним величиною. Як впливає з рис. 2, точка зору  $\varphi$  предмету, що розглядається через окуляр в наближенні малих кутів

$$\varphi = \frac{h'}{F_2} = \frac{f \cdot h}{d \cdot F_2}.$$

Приблизно можна покласти  $d \approx F_1$  і  $f \approx l$ , де  $l$  – відстань між об'єктивом і окуляром мікроскопа («довжина тубуса»). При розгляді того ж предмету неозброєним оком

$$\psi = \frac{h}{d_0}.$$

В результаті формула для кутового збільшення  $\gamma$  мікроскопа набуває вигляду

$$\gamma = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{l \cdot d_0}{F_1 \cdot F_2}.$$

Хороший мікроскоп може давати збільшення в декілька сотень разів. При великих збільшеннях починають виявлятися дифракційні явища. В реальних мікроскопів об'єктивом і окуляром є складні оптичні системи, в яких усунена різна аберація. **Телескоп.** Телескопи (зорові труби) призначені для спостереження видалених об'єктів. Вони складаються з двох лінз – зверненої до предмету збираючої лінзи з великою фокусною відстанню (об'єктив) і лінзи з малою фокусною відстанню (окуляр), зверненої до спостерігача. Зорові труби бувають двох типів:



- **Зорова труба Кеплера**, призначена для астрономічних спостережень. Одна дає збільшені **перевернуті** зображення видалених предметів і тому незручна для земних спостережень.
- **Зорова труба Галілея**, призначена для земних спостережень, дає збільшені прямі зображення. Окуляром в трубі Галілея служить розсіююча лінза.

На рис. 3 змальований хід променів в астрономічному телескопі. Передбачається, що око спостерігача акомодоване на нескінченність, тому промені від кожної точки видаленого предмету виходять з окуляра паралельним пучком. Такий хід променів називається **телескопічним**. У астрономічній трубі телескопічний хід променів досягається за умови, що відстань між об'єктивом і окуляром дорівнює сумі їх фокусних відстаней  $l = F_1 + F_2$ . Зорова труба (телескоп) прийнято характеризувати **кутовим збільшенням**  $\gamma$ . На відміну від мікроскопа, предмети, спостережувані в телескоп, завжди видалені від спостерігача. Якщо видалений предмет видно неозброєним оком під кутом  $\psi$ , а при спостереженні через телескоп під кутом  $\phi$ , то кутовим збільшенням називають відношення

$$\gamma = \frac{\phi}{\psi}.$$

Кутовому збільшенню  $\gamma$ , як і лінійному збільшенню  $\Gamma$ , можна приписати знаки плюс або мінус залежно від того, є зображення прямим або перевернутим. Кутове збільшення астрономічної труби Кеплера негативне, а земної труби Галілея позитивно. Кутове збільшення зорових труб виражається через фокусні відстані:

$$\gamma = \frac{F_1}{F_2}.$$

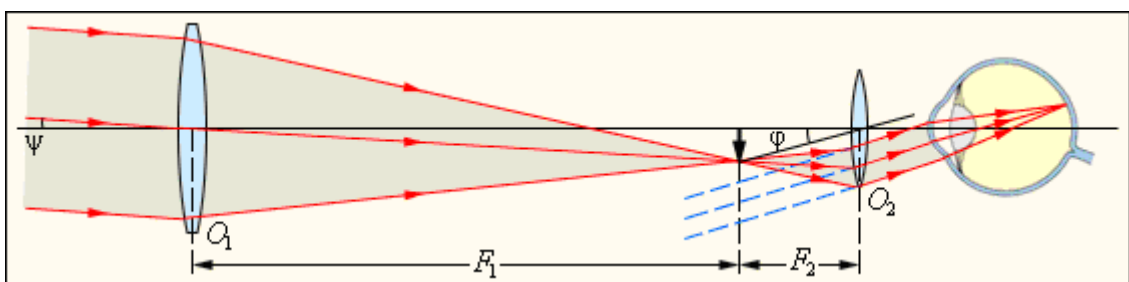


Рисунок 3. Телескопічний хід променів.

Як об'єктив у великих астрономічних телескопах застосовуються не лінзи, а сферичні дзеркала. Такі телескопи називаються **рефлекторами**. Хороше дзеркало простіше виготовити, крім того, дзеркала на відміну від лінз не володіють хроматичною аберациєю. У нас в країні побудований найбільший в світі телескоп з діаметром дзеркала 6 м. Слід мати на увазі, що великі

астрономічні телескопи призначені не лише для того, щоб збільшувати кутові відстані між спостережуваними космічними об'єктами, але і для збільшення потоку світлової енергії від слабосвітних об'єктів.

### ***Око як оптичний інструмент***

Око людини є складною оптичною системою, яка по своїй дії аналогічна оптичній системі фотоапарата. Схематичний пристрій ока представлений на мал. 1. Око має майже кулясту форму і діаметр близько 2,5 см. Зовні він покритий захисною оболонкою 1 білого кольору – **склерою**. Передня прозора частина 2 склери називається **рогівкою**. На деякій відстані від неї розташована **веселкова оболонка** 3, забарвлена пігментом. Отвір у веселковій оболонці є зіницею. Залежно від інтенсивності падаючого світла зіниця рефлекторно змінює свій діаметр приблизний від 2 до 8 мм, тобто діє подібно до діафрагми фотоапарата. Між рогівкою і веселковою оболонкою знаходиться прозора рідина. За зіницею знаходиться **кришталік** 4 – еластичне лінзоподобне тіло. Особливий м'яз 5 може змінювати в деяких межах форму кришталіка, змінюючи тим самим його оптичну силу. Остання частина ока заповнена склоподібним тілом. Задня частина ока – очне дно, воно покрите **сітчастою оболонкою** 6, що є складним розгалуженням зорового нерва 7 з нервовими закінченнями – **паличками і колбами**, які є світлочутливими елементами.

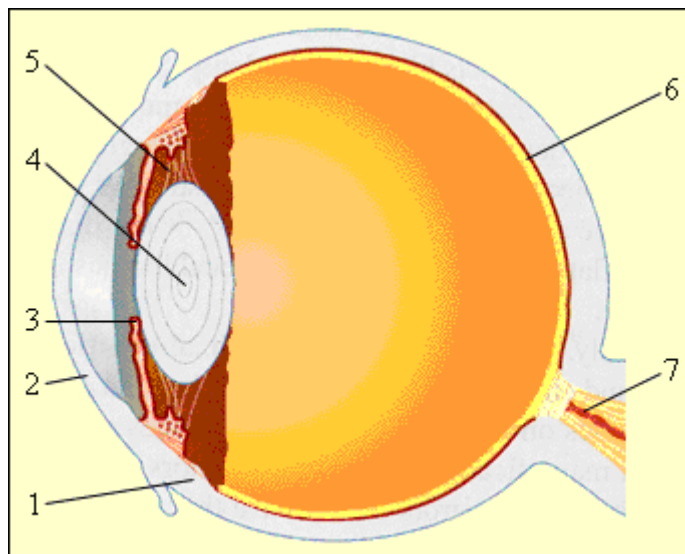


Рисунок 1. Око людини

Промені світла від предмету, заломлюючись на кордоні воздух–роговіца, проходять далі через кришталік (лінзу з оптичною силою, що змінюється) і створюють зображення на сітківці. Рогівка, прозора рідина, кришталік і склоподібне тіло утворюють оптичну систему, оптичний центр якої розташований на відстані близько 5 мм від рогівки. При розслабленому очному м'язі оптична сила ока приблизно рівна 59 дптр, при максимальній напрузі м'яза– 70 дптр. Основна особливість ока як оптичного інструменту полягає в здатності рефлекторно змінювати оптичну силу очної оптики залежно від

положення предмету. Таке пристосування ока до зміни положення спостережуваного предмету називається акомодацією. Область **акомодації** ока можна визначити положенням двох крапок:

- далека точка акомодації визначається положенням предмету, зображення якого виходить на сітківці при розслабленому очному м'язі. В нормального ока далека точка акомодації знаходиться в нескінченності.
- ближня точка акомодації – відстань від даного предмету до ока при максимальній напрузі очного м'яза. Ближня точка нормального ока розташовується на відстані 10–20 см від ока. З віком ця відстань збільшується.

Окрім цих двох крапок, що визначають кордони області акомодації, в ока існує відстань найкращого зору, тобто відстань від предмету до ока, при якому найзручніше (без надмірної напруги) розглядати деталі предмету (наприклад, читати дрібний текст). Це відстань в нормального ока умовно вважають рівними 25 см. При порушенні зору зображення видалених предметів в разі ненапруженого ока можуть виявитися або перед сітківкою (**короткозорість**), або за сітківкою (**далекозорість**) (рис. 2).

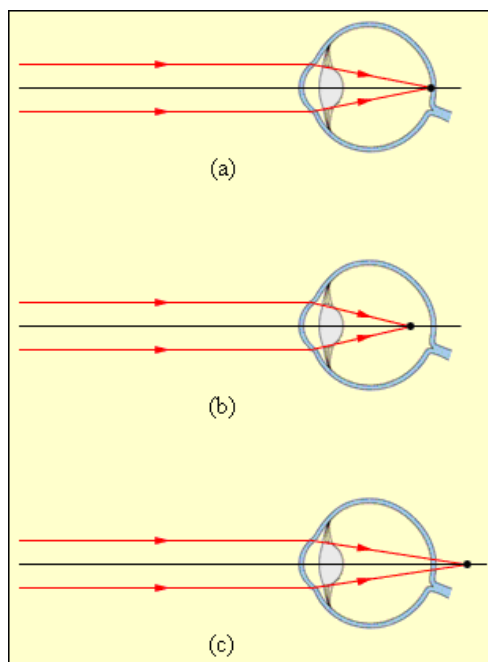


Рисунок 2. Зображення видаленого предмету в оці: а – нормальне око; б – короткозоре око; з – далекозоре око.

Відстань найкращого зору в короткозорого ока менша, а в далекозорого більше, ніж в нормального ока. Для виправлення дефекту зору служать окуляри. Для далекозорого ока необхідні окуляри з позитивною оптичною силою (збираючі лінзи), для короткозорого – з негативною оптичною силою (розсіюючі лінзи). Для спостереження видалених предметів оптична сила лінз має бути такою, щоб паралельні пучки фокусувалися на сітківці ока. Око повинне бачити через окуляри уявне пряме зображення видаленого предмету, що знаходиться в далекій точці акомодації даного ока. Якщо, наприклад, далека

точка акомодациі короткозорого ока знаходиться на відстані 80 см, то застосовуючи формулу тонкої лінзи отримаємо:  $d = \infty$ ,  $f = -0,8$  м, отже,

$$D = \frac{1}{F} = -\frac{1}{0,8} = -1,25 \text{ дптр.}$$

Слід зазначити, що в далекозорого ока далека точка

акомодациі уявна, тобто ненапружене око фокусує на сітківці пучок променів, що сходиться. Тому при розгляді видалених предметів окуляри для далекозорого ока повинні перетворювати паралельний пучок променів на той, що сходиться, тобто володіти позитивною оптичною силою. Окуляри для «ближнього зору» (наприклад, для читання) повинні створювати уявне зображення предмету, що знаходиться на відстані  $d_0 = 25$  см (тобто на відстані найкращого зору нормального ока), на відстані найкращого зору даного ока. Хай, наприклад, короткозоре око має відстань найкращого зору 16 див. По формулі тонкої лінзи отримаємо:  $d = d_0 = 0,25$  см,  $f = -0,16$  м, отже,

$$D = \frac{1}{F} = -2,25 \text{ дптр.}$$

Унаслідок звуження області акомодациі у багатьох людей

окуляри для ближнього зору повинні володіти більшою (по модулю) оптичною силою в порівнянні з окулярами для розгляду видалених предметів. Рис. 3 ілюструє корекцію далекозорого і короткозорого ока за допомогою окулярів.

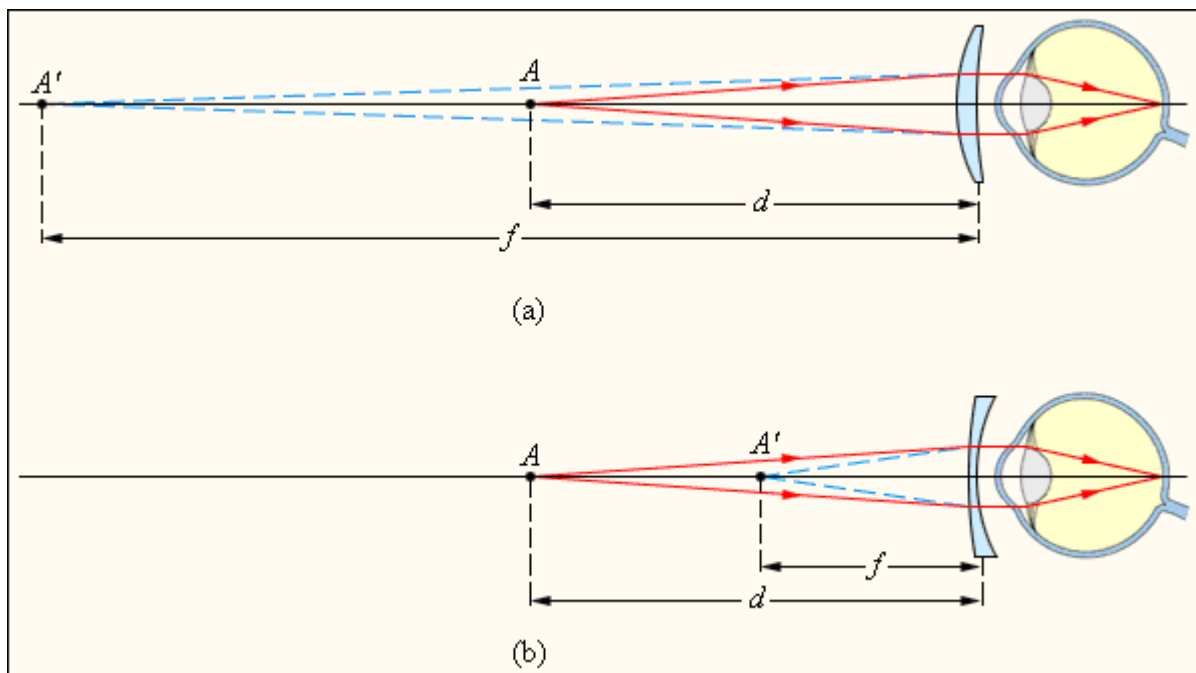


Рисунок 3. Підбір окулярів для читання для далекозорого (а) і короткозорого (б) ока. Предмет А розташовується на відстані  $d = d_0 = 25$  см найкращого зору нормального ока. Уявне зображення А' розташовується на відстані  $f$ , рівному відстані найкращого зору даного

5) дисперсія

# ХВИЛЬОВА ОПТИКА

## Інтерференція світла

Нехай дві світлові хвилі однакової частоти, накладаючись одна на одну, збуджують у деякій точці простору коливання однакового напрямку.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1);$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Тут під  $x$  мається на увазі напруженість електричного поля  $E$ , або магнітного  $H$ , а під  $\varphi_i = kx_i + \alpha_i$  характерні величини для рівняння хвилі.

У результаті накладення одержимо коливання з результуючою амплітудою:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

У курсі оптики працюють не з амплітудами, а з інтенсивністю  $I$  світлових хвиль. Під  $I$  розуміють модуль середнього за часом значення вектора Умова - Пойтинга:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = |\langle [\vec{E}\vec{H}] \rangle|.$$

Використовуючи зв'язок амплітуд  $E_m$  і  $H_m$  в ЕМХ:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_m = \sqrt{\mu\mu_0} H_m$$

неважко бачити, що:

$$I \sim E_m^2 \sim \langle A^2 \rangle.$$

Тоді, усереднюючи за часом формулу для амплітуд, одержимо:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle.$$

Інтенсивність  $I$  залежить від значення  $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle$ :

- 1) Якщо  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  не залишається константою, те такі хвилі називають **некогерентними**, а середнє значення  $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$ , отже,  $I = I_1 + I_2$ .
- 2) Якщо  $(\varphi_2 - \varphi_1) = const$  (але своє значення для кожної точки простору), то такі хвилі називаються **когерентними**.

А) якщо  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$ , то  $I > I_1 + I_2$ ;

Б) якщо  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$ , то  $I < I_1 + I_2$ .

Для конкретних випадків маємо ( $I_1 = I_2 = \tilde{I}$ ):

$$2.1) \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \text{ де } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \Rightarrow I = 2\tilde{I};$$

$$2.2) \Delta\varphi = (2m+1)\pi, \Rightarrow I = 0;$$

$$2.3) \Delta\varphi = 2m\pi, \Rightarrow I = 4\tilde{I}.$$

Таким чином, при накладенні когерентних світлових хвиль ( $\omega_1 = \omega_2, \Delta\varphi = const$ ) відбувається перерозподіл інтенсивності світлової хвилі в просторі, у результаті чого в одних місцях виникає *max*, і в інших місцях *min* інтенсивності світла.

Явище посилення або ослаблення інтенсивності світла залежно від співвідношення фаз когерентних хвиль, що складають, **називають інтерференцією** світла. Результат накладення когерентних хвиль, спостережуваний на екрані, називають **інтерференційною картиною**.

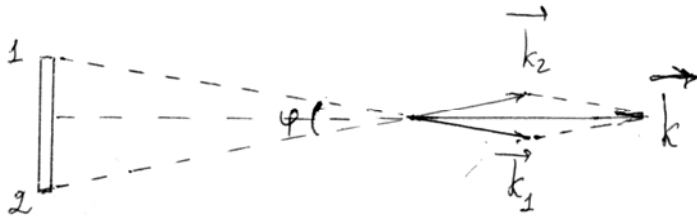
Тому що поняття **когерентності** є визначальним для інтерференції, розглянемо його більш докладно. Виникає питання: «Чому світлові хвилі від двох електричних лампочок не дають інтерференційну картину?». Виявляється справа в тому, що атоми випромінюють ЕМХ незалежно один від одного в перебігу часу  $\sim 10^{-8} \text{ с}$ . Пакет хвиль, що випускається атомом за цей час, називається **цугом**. Випромінювання атомів відбуваються з різними фазами. Тому тільки за час  $\sim 10^{-8} \text{ с}$  хвилі випущені атомами можна вважати когерентними.

У загальному випадку розрізняють **тимчасову й просторову когерентність**. Як показується в курсі оптики, **тимчасова когерентність** пов'язана зі зміною хвильового вектора по модулю ( $k = \frac{\omega}{V}, \Rightarrow \Delta k \sim \Delta\omega$ ), а **просторова когерентність** - зі зміною хвильового вектора за напрямком. Окремо розглянемо кожний вид:

а) **Тимчасова когерентність**. Середня тривалість одного цугу  $\tau_{\text{ког}}$ , обумовлена, як час за який випадкова зміна фази хвилі досягає  $\sim \pi$ , називається **часом когерентності**. Відстань, на яку хвиля переміщається за  $\tau_{\text{ког}}$ , називається **довжиною когерентності** (довжиною цугу)  $l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$ . У курсі оптики доказується, що:

$$\tau_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}, \quad l_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

б) **Просторова когерентність**. Обумовлена протяжністю (неточечністю) джерела світла. Допустимо джерело має форму диска, який видно з даної точки під кутом  $\varphi$ .

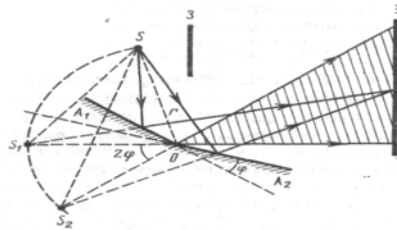


**Довжиною просторової когерентності** (радіусом когерентності) називається тах поперечна до поширення хвилі відстань, на якій можливий прояв інтерференції (тобто відстань між точками, між якими випадкова зміна різниці фаз досягає значення  $\sim \pi$ ).

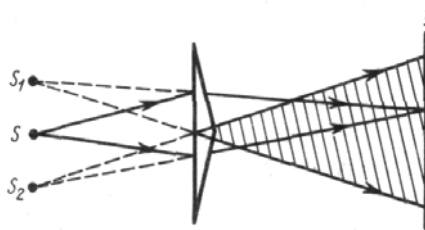
Як приклад знайдемо радіус когерентності світлових хвиль, що приходять від Сонця: кутовий розмір Сонця на Землі  $\sim 10^{-2}$  рад і  $\lambda \sim 0.5$  мкм  $\Rightarrow \tau_{\text{ког}} \approx 50$  мкм = 0,05 мм. Тому що роздільна здатність людського ока на відстані найкращого зору  $\sim 0.1$  мм, то безпосередньо спостерігати інтерференцію сонячних променів неможливо. Ці труднощі подолав Т. Юнг (1807р.): він пропускав сонячні промені в темну кімнату через малий отвір, зроблений тонкою голкою (при цьому на кілька порядків зменшувався кутовий розмір джерела світла й тим самим різко збільшується  $r_{\text{ког}}$ ).

Джерелом когерентних хвиль є лазер. Раніше до 1961 р. когерентні джерела одержували методом відбиття й заломлення світла:

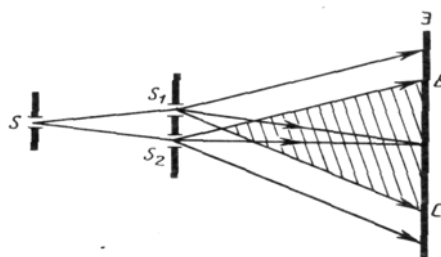
### 1. Дзеркала Френеля.



### 2. Біпризма Френеля.

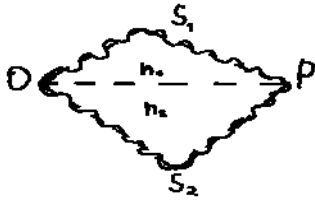


### 3. Щілини Юнга.



## *Розрахунок інтерференційної картини від двох джерел*

Нехай до точки Р перша хвиля проходить шлях  $S_1$  у середовищі з показником переломлення  $n_1$ . Друга хвиля проходить шлях  $S_2$  у середовищі з  $n_2$ . У точці О фаза коливань  $\omega t$ . У точці Р хвилі збуджують коливання



$$A_1 \cos \omega \left( t - \frac{S_1}{V_1} \right);$$

$$A_2 \cos \omega \left( t - \frac{S_2}{V_2} \right).$$

Різниця фаз коливань, що

складають:

$$\Delta \varphi = \left[ \omega \left( t - \frac{S_1}{V_1} \right) \right] - \left[ \omega \left( t - \frac{S_2}{V_2} \right) \right] = \omega \left( \frac{S_2}{V_2} - \frac{S_1}{V_1} \right).$$

Враховуючи, що  $V_1 = c/n_1$ ,  $V_2 = c/n_2$ , одержимо:

$$\Delta \varphi = \omega \left( \frac{S_2 n_2}{c} - \frac{S_1 n_1}{c} \right) = \frac{\omega}{c} (S_2 n_2 - S_1 n_1) =$$

$$= \frac{2\pi \nu}{c} (S_2 n_2 - S_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_2 n_2 - S_1 n_1),$$

де  $\lambda_0 = c/\nu$  - довжина хвилі у вакуумі;

$S_1, S_2$  - геометричний шлях кожного променя у відповідному середовищі;

$S \cdot n$  - **оптична довжина шляху**;

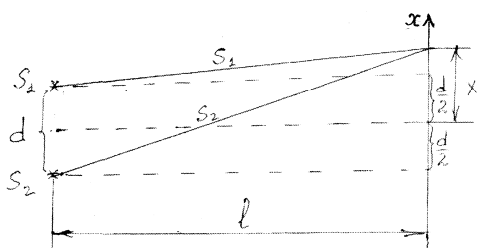
$(S_2 n_2 - S_1 n_1) = \Delta$  - називається **оптичною різницею ходу** світлових променів.

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta.$$

1) Якщо  $\Delta = \pm k \lambda_0$ , ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), то  $\Delta$  кратно  $2\pi$ , тобто  $\Delta \varphi = \pm 2k\pi$  - **умова max** (хвилі одна одну підсилюють);

2) Якщо  $\Delta = \pm \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 = \pm (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2}$ ,  $\Rightarrow \Delta \varphi = \pm (2k + 1)\pi$  - **умова min** (хвилі одна одну послаблюють).

Розглянемо дві циліндричні когерентні світлові хвилі, що виходять від джерел  $S_1$  і  $S_2$ :



$$\Delta = n(S_2 - S_1);$$

$$\begin{cases} S_2^2 = l^2 + \left( x + \frac{d}{2} \right)^2 \\ S_1^2 = l^2 + \left( x - \frac{d}{2} \right)^2 \end{cases};$$



$$\begin{cases} S_2^2 - S_1^2 = (S_2 - S_1)(S_2 + S_1); \\ S_2^2 - S_1^2 = 2xd \end{cases};$$

Тому що  $d \ll l, x \ll l, \Rightarrow S_2 + S_1 \approx 2l, \Rightarrow S_2 - S_1 = \frac{xd}{l}, \Rightarrow \Delta = \frac{xdn}{l};$

Для max:  $k\lambda_0 = \frac{dnx_{\max}}{l}, \Rightarrow x_{\max} = \frac{kl\lambda_0}{dn} = \frac{k\lambda l}{d}, \Rightarrow \Delta x_{\max} = \frac{l\lambda}{d};$

Для min:  $(2k+1)\frac{\lambda_0}{2} = \frac{dnx_{\min}}{l}, \Rightarrow x_{\min} = \frac{(2k+1)l\lambda}{2d}, \Rightarrow \Delta x_{\min} = \frac{l\lambda}{d}.$

Якщо  $d \sim l, \Rightarrow \Delta x \sim \lambda, \Rightarrow d \ll l.$

**3 умови тимчасової когерентності:**

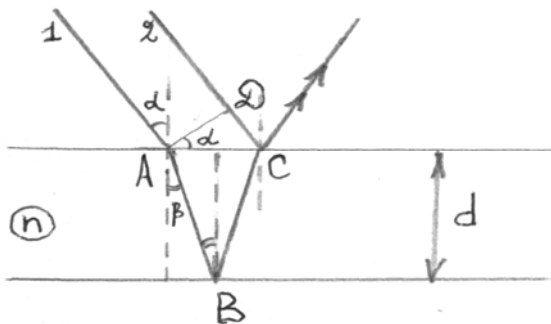
$$\Delta < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, \Rightarrow k\lambda_0 < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, \Rightarrow k < \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}.$$

Таким чином, інтерференційних max спостерігається тим більше, чим більше ступінь монохроматичності випромінювання.

**3 умови просторової когерентності:**  $d < 0.05 \text{ мм}.$

### *Інтерференція світла в тонких плівках*

**1. Інтерференційні смуги рівного нахилу.** Вони утворюються, коли паралельний пучок світла падає на плоскопаралельную пластинку.



Оптична різниця ходу променів 1 і 2:

$$\Delta = (AB + BC)n - DC,$$

$$AB + BC = \frac{2d}{\cos \beta}, \quad DC = 2d \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha.$$

$$\Delta = \frac{2d}{\cos \beta} (n - \sin \beta \cdot \sin \alpha), \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}},$$

$$\Delta = \frac{2d}{n \cos \beta} (n^2 - \sin^2 \alpha) = \frac{2d (n^2 - \sin^2 \alpha)}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

При відбитті луча від середовища з більшою густиною (т. С) відбувається зміна фази коливань на  $\pi \left( \frac{\lambda_0}{2} \right)$ . Її враховують, додаючи або віднімаючи в правій частині  $\frac{\lambda_0}{2}$ . Тоді:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

З умови тимчасової когерентності маємо:

$$\Delta \ll \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}, \Rightarrow d \ll \frac{\lambda_0 \left( \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0} - \frac{1}{2} \right)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}},$$

звідки для  $n=1,5$ ,  $i_1 = 45^\circ$ ,  $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-7}$  м,  $\Delta\lambda_0 = 2 \cdot 10^{-9}$  м,  $\Rightarrow d \ll 0.06$  мм.

З умови просторової когерентності,

$$AB = 2d \operatorname{tg} i_2 \cos i_1 = d \sin 2i_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}, \Rightarrow AB \approx 0.8d, \Rightarrow d \ll 0.06 \text{ мм.}$$

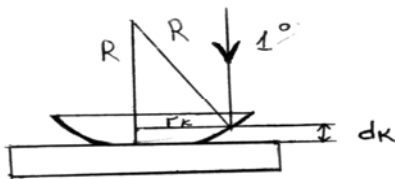
Кожна інтерференційна смуга утвориться променями, що падають на пластину під однаковими кутами. Тому, одержані інтерференційні смуги, називають **смугами рівного нахилу**.

## 2. Смуги рівної товщини.

Якщо паралельний пучок світла відбивається від поверхні пластини, товщина якої міняється від місця до місця, то виникають інтерференційні **смуги рівної товщини**.

Як приклад смуг рівної товщини розглянемо прилад для спостереження **кілець Ньютона**.

Розглянемо інтерференцію у відбитому світлі.



З рисунка маємо:

$$R^2 = (R - d_k)^2 + r_k^2;$$

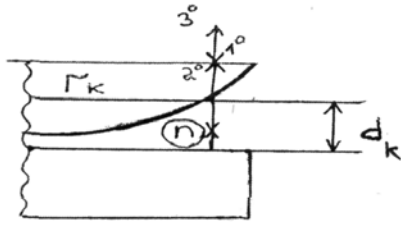
$$R^2 = R^2 - 2Rd_k + d_k^2 + r_k^2;$$

$$d_k^2 \ll 2Rd_k, \Rightarrow 2Rd_k = r_k^2.$$

Умова існування світлих кілець має вигляд:

$$\begin{cases} \Delta = 2d_k n + \frac{\lambda_0}{2} \\ \Delta_{\max} = k \lambda_0 \end{cases} \Rightarrow 2d_k n + \frac{\lambda_0}{2} = k \lambda_0;$$

$$2d_k n = \left( k - \frac{1}{2} \right) \lambda_0.$$



Тоді для світлих кілець маємо:

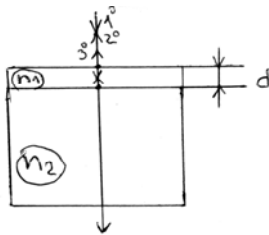
$$r_k = \sqrt{2d_k R} = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda_0}{n}}$$

Для темних кілець:

$$\Delta_{\min} = (2k+1) \frac{\lambda_0}{2}, \Rightarrow 2d_k n + \frac{\lambda_0}{2} = (2k+1) \frac{\lambda_0}{2}, \Rightarrow 2d_k n = k\lambda_0, \text{ звідки:}$$

$$r_k = \sqrt{2d_k R} = \sqrt{\frac{k\lambda_0 R}{n}}$$

### «Просвітління» оптики



$$\Delta = 2dn_1 + \frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2};$$

$$\begin{cases} \Delta = 2dn_1 \\ \Delta_{\min} = (2k+1) \frac{\lambda_0}{2} \end{cases}$$

$$2dn_1 = (2k+1) \frac{\lambda_0}{2}, \Rightarrow d = \frac{(2k+1)\lambda_0}{4n_1}$$

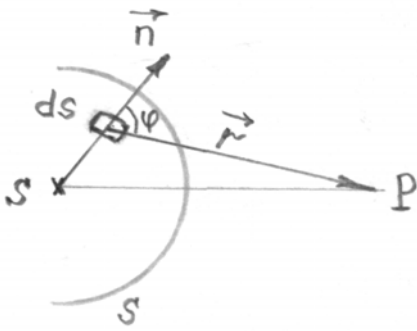
$d_{\min} (k=0) = \frac{\lambda_0}{4n_1}$  - мінімальна товщина плівки, при якій більша частина світла, що падає на об'єктив фотоапарата проходить через лінзу, а відбиті промені гасять один одного.

### ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

У широкому понятті під дифракцією світла розуміють сукупність явищ пов'язаних з поширенням світла в середовищах з різко вираженими неоднородностями, а у вузькому понятті під дифракцією розуміють обгинання хвилею перешкод, розміри яких порівняні з довжиною хвилі.

У загальному випадку розрізняють дифракцію в розбіжних променях (дифракція Френеля) і дифракцію в паралельних променях світла (дифракція Фраунгофера). Для якісного пояснення явища дифракції використовується принцип Гюйгенса – Френеля:

- 1) Кожна точка хвильової поверхні є джерелом вторинних сферичних хвиль.
- 2) Вторинні хвилі інтерферують між собою.



Світлове коливання, створюване ділянкою світлової поверхні на відстані  $r$  від точки  $P$ , є:

$$dE = K(\varphi) \frac{A_0 ds}{r} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де  $A_0$  - амплітуда сферичної хвилі для площадки  $ds$ ;  
 $(\omega t + \varphi_0)$  - фаза коливань для  $ds$ ;  
 $k$  - хвильове число;

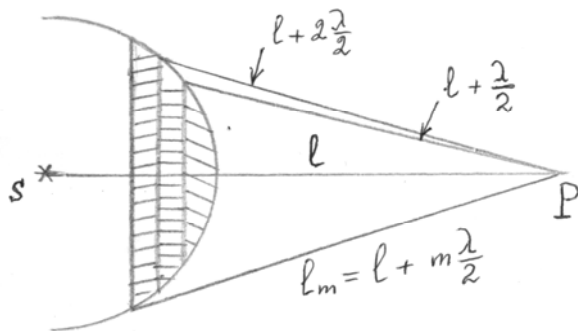
$$K(\varphi) = \begin{cases} K_{\max}, & \varphi = 0; \\ 0, & \varphi = 90^\circ \end{cases}$$

Результуюче світлове коливання в точці  $P$  являє собою суперпозицію коливань, узятих для всієї хвильової поверхні.

$$E = \int_s K(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) dS.$$

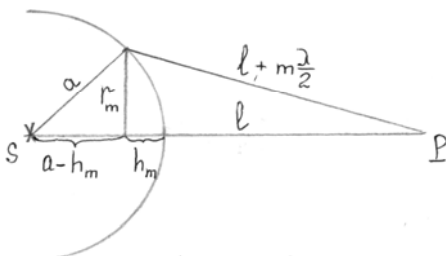
### Метод зон Френеля

Щоб не брати громіздкий інтеграл, французький учений Френель для випадків, що відрізняються симетрією запропонував метод зон. Розбивка хвильової поверхні на зони відбувається таким чином, щоб відстані від країв сусідніх зон до точки  $P$  відрізнялася на  $\lambda/2$ .



$$l_m = l + m \frac{\lambda}{2}, \text{ де } m - \text{ номер зон Френеля.}$$

Розрахуємо радіуси й площі зон Френеля.



$$r_m - ?$$

$$\Delta S - ?$$

Великий трикутник:

$$r_m^2 = \left( l + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - (l + h_m)^2;$$

$$r_m^2 = l^2 + 2lm \frac{\lambda}{2} + m^2 \frac{\lambda^2}{4} - l^2 - 2lh_m - h_m^2;$$

$$\frac{m^2 \lambda^2}{4} \ll m\lambda l, \quad h_m^2 \ll 2lh_m.$$

Маленький трикутник:

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2;$$

$$r_m^2 = a^2 - a^2 + 2ah_m - h_m^2;$$

$$h_m^2 \ll 2ah_m;$$

$$r_m^2 = 2h_m a.$$

(для  $m$  - невеликого):

$$r_m^2 = m\lambda l - 2lh_m, \quad 2ah_m = m\lambda l - 2lh_m, \quad \Rightarrow \quad h_m = \frac{m\lambda l}{2(a+l)}.$$

Звідки для радіуса  $m$ -ї зони одержимо:

$$r_m = \sqrt{\frac{am\lambda l}{a+l}}, \quad \Rightarrow \quad r_m \sim \sqrt{m}.$$

Площа сферичного сегмента:

$$S_m = 2\pi a h_m = \frac{\pi m \lambda l a}{a+l},$$

площа  $m$ -ї зони:

$$\Delta S = S_{m+1} - S_m = \frac{\pi \lambda l a}{a+l}, \quad \Rightarrow \quad \text{не залежить від } m, \quad \Rightarrow \quad \text{для невеликих } m \text{ площі зон Френеля приблизно однакові.}$$

Нехай амплітуда світлового коливання, створюваного в точці Р першою зоною Френеля є  $A_1$ , другою -  $A_2$ ,  $m$ -ї -  $A_m$ . Тому що площі зон приблизно однакові, з ростом номера зони  $m$  відстань  $r$  росте, кут  $\varphi$  збільшується  $\Rightarrow K(\varphi)$  - убуває, то:  $A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ \dots \succ A_{m-1} \succ A_m \succ A_{m+1} \succ \dots$ . Таким чином, амплітуди світлових коливань, створюваних зонами Френеля в т. Р, утворять монотонно спадну послідовність.

Крім того, всі парні зони Френеля дають негативний внесок в амплітуду результуючого коливання.

$$A_{\text{рез.}} = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - \dots =$$

$$= \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots$$

З математичного аналізу відомо, що для монотонно спадної послідовності кожний середній член дорівнює напівсумі сусідніх:

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2}, \Rightarrow A_2 = \frac{A_1 + A_3}{2}, \Rightarrow A_{рез.} = \frac{A_1}{2}.$$

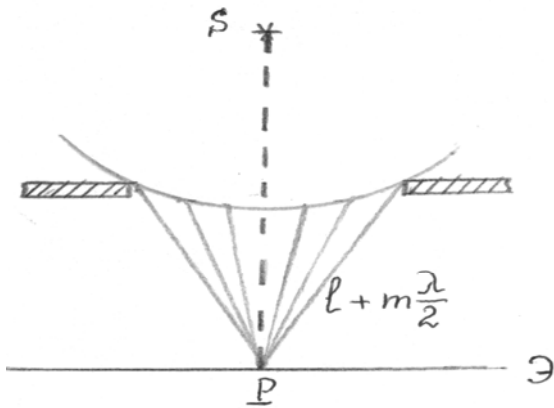
Таким чином, амплітуда, створювана всією хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, створюваної лише однією першою зоною Френеля.

У зв'язку із цим створені:

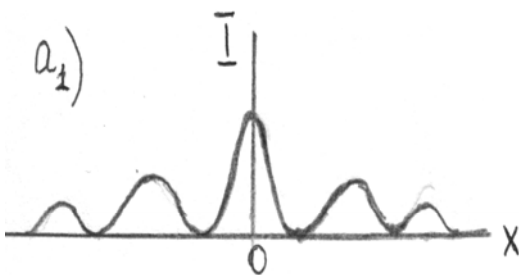
- 1) **амплітудна зонна пластинка**, що перекриває всі парні зони Френеля;
- 2) **фазова зонна пластинка**, у якій на місці парних зон Френеля товщина пластинки підібрана так, що вона дає додатковий внесок  $\frac{\lambda}{2}$  по фазі.

### Приклади дифракції Френеля

а) на малому круглому отворі



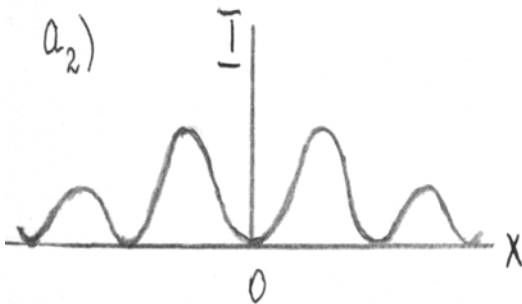
а<sub>1</sub>) Відкрите  $m$  – непарне число зон Френеля



$$A_{рез.} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2};$$

$$A_m \approx A_1, \Rightarrow A_{рез.} \approx A_1.$$

а<sub>2</sub>) Відкрите  $m$  – парне число зон Френеля:

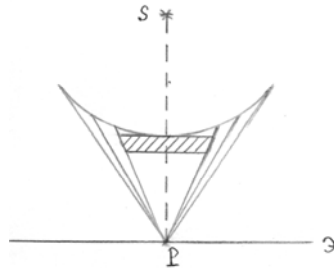


$$A_{рез.} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m = \frac{A_1}{2} - \frac{A_m}{2} \approx 0.$$

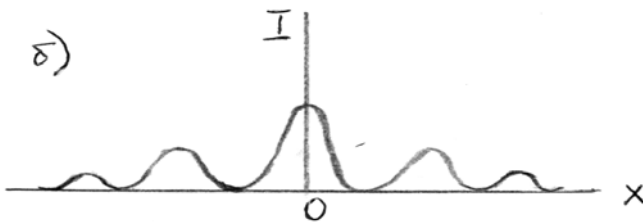
У такий спосіб у центрі екрана (Э), залежно від того скільки френелевських зон укладається в межах отвору, може бути або світла, або темна пляма.

б) На малому диску.

Нехай закрито  $m$  перших зон Френеля:



$$A_{рез.} = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \frac{A_{m+1}}{2} > 0$$



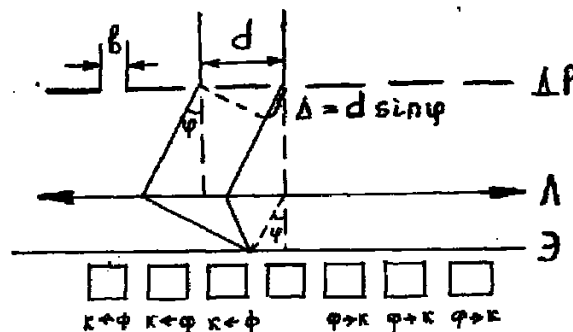
Таким чином, у центрі екрана завжди буде світла пляма.

### Дифракція Фраунгофера

Розглянемо на прикладі дифракційної решітки.

**Плоска дифракційна решітка** – сукупність щілин, розділених непрозорими проміжками.

Нехай на прозору дифракційну решітку падає паралельний пучок світла, радіус когерентності якого більше довжини решітки. Тоді згідно принципу Гюйгенса - Френеля всі джерела вторинних хвиль, що перебувають у межах щілин решітки будуть когерентними.



Відстань між щілинами  $d$  – постійна решітки.

$b$  - ширина щілини;

$N$  - число щілин.

Довжина решітки:  $l_p = dN$

**Умова головних максимумів:**  $d \sin \varphi = \pm k \lambda$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

**Найбільший порядок спектра:**  $k_{\max} = \frac{d}{\lambda} \left( \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \right)$ .

**Загальне число максимумів:**  $M_{\max} = 2k_{\max} + 1$ .

Характер спектрів на екрані залежить від падаючого світла: біле світло буде давати кольоровий спектр.

**Умова мінімумів на одній щілині:**  $b \sin \varphi = \pm m \lambda$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_{\max} &= \frac{\pm k \lambda}{d} \\ \sin \varphi_{\min} &= \frac{\pm m \lambda}{b} \end{aligned} \right\} \frac{k \lambda}{d} = \frac{m \lambda}{b}, \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{d}{b};$$

$$\text{Якщо } \frac{d}{b} = 3, \Rightarrow k = 3m.$$

Звідси маємо, що головні максимуми 3-го, 6-го й т.д. порядків припадати на мінімуми інтенсивності від однієї щілини, тому ці максимуми будуть пропадати.

**Умова додаткових мінімумів:**

$$d \sin \varphi = \pm \frac{n}{N} \lambda \quad (n = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots).$$

Через те, що дифракційна решітка розкладає біле світло в спектр, вона є спектральним приладом, характеристиками якого є дисперсія й роздільна здатність.

Кутова  $D_\varphi$  й лінійна

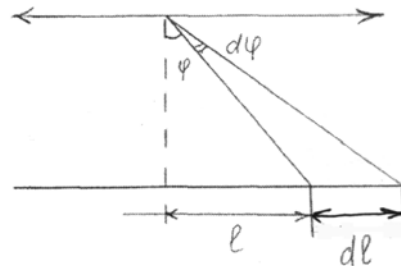
$D_l$  дисперсії визначають кутову

і лінійну відстань

між сусідніми лініями,

які відрізняються по довжині

хвилі на одиницю.



$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad D_l = \frac{dl}{d\lambda};$$

$$d \sin \varphi = k \lambda, \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi};$$

$$\text{Для малих кутів: } D_\varphi \sim \frac{k}{d}.$$

**Роздільна здатність**  $R$  визначає мінімальну різницю довжин хвиль двох спектральних ліній, при якій ці лінії сприймаються на екрані роздільно.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$



## Критерій Релея

Дві хвилі сприймаються в спектрі роздільно, якщо max однієї хвилі накладається на край другої хвилі.



$$\left. \begin{aligned} d \sin \varphi_{\max} &= k(\lambda + d\lambda) \\ d \sin \varphi_{\min} &= \left(k + \frac{1}{N}\right)\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_{\max} = \varphi_{\min};$$

$$kd\lambda = \frac{1}{N}\lambda.$$

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda}, \Rightarrow R = kN.$$

Таким чином, роздільна здатність дифракційної решітки пропорційна порядку спектра  $k$  й числу щілин  $N$ .

Визначимо, що на прозорій дифракційній одномірній решітці дифракція у видимому світлі можлива якщо  $\frac{\lambda}{d} < 1$ :  $d \sin \varphi = k\lambda$ ;  $\Rightarrow \sin \varphi = \frac{k\lambda}{d} < 1$ .

## Просторова дифракція

Загалом кажучи, дифракція Фраунгофера можлива на двовимірних і тривимірних структурах, зокрема, просторова дифракція можлива на кристалах, причому тому що для кристалів  $d$  - відстань між атомними площинами порядку  $10^{-10}$  м, то на світлових променях дифракції не може бути, тому дифракцію одержують за допомогою рентгенівських променів.

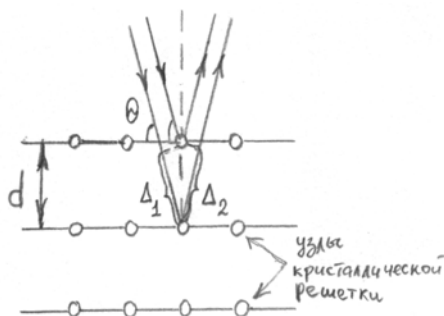
$\theta$  - кут ковзання;

$d$  - відстань між атомними площинами.

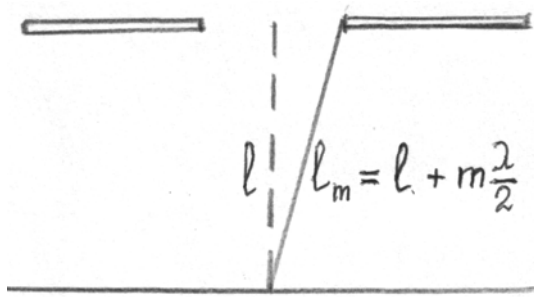
$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 2d \sin \theta;$$

$$\text{Max} : 2d \sin \theta = k\lambda, (k = 1, 2, 3, \dots),$$

- цей вираз називається **формулою Вульфа – Бреггів**.



## Критерії дифракції



$$\frac{b^2}{\lambda l} \begin{cases} \ll 1, & \text{Д. Фраунгофера;} \\ \sim 1, & \text{Д. Френеля;} \\ \gg 1, & \text{геометрична оптика.} \end{cases}$$

$$l_m^2 = l^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2;$$

$$\left(l + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 = l^2 + \frac{b^2}{4};$$

$$l^2 + ml\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} = l^2 + \frac{b^2}{4};$$

$$\frac{m^2 \lambda^2}{4} \ll m\lambda l, \quad m\lambda l \approx \frac{b^2}{4};$$

$$m = \frac{b^2}{4\lambda l}.$$

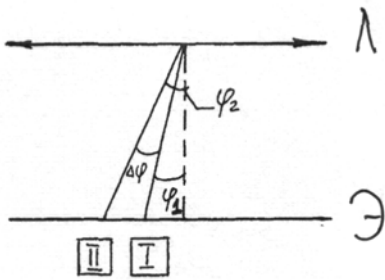
На закінчення, приведемо **приклад** рішення завдань на дифракційну решітку.

- 1) Визначити довжину хвилі монохроматичного світла падаючого нормально на дифракційну решітку з періодом  $d$ , якщо кут між напрямками на  $1$  і  $2$ -го порядку  $\Delta\varphi$ .

$$\frac{k_1 = 1; k_2 = 2; d; \Delta\varphi}{\lambda - ?}$$

$$\left. \begin{aligned} d \sin \varphi_1 &= k_1 \lambda, \Rightarrow d \sin \varphi_1 = \lambda \\ d \sin \varphi_2 &= k_2 \lambda, \Rightarrow d \sin \varphi_2 = 2\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \varphi_2 = 2 \sin \varphi_1;$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1; \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi.$$



$$\sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = \sin \varphi_1 \cos \Delta\varphi + \cos \varphi_1 \sin \Delta\varphi;$$

$$\sin \varphi_1 (\cos \Delta\varphi + \text{ctg} \varphi_1 \sin \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1;$$

$$\text{ctg} \varphi_1 = \frac{2 - \cos \Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi};$$

$$1 + \text{ctg}^2 \varphi_1 = 1 + \frac{\cos^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi_1} = \frac{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi_1} = \frac{1}{\sin^2 \varphi_1};$$

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{1}{1 + \text{ctg}^2 \varphi_1} = \frac{1}{1 + \frac{4 - 4 \cos \Delta\varphi + \cos^2 \Delta\varphi}{\sin^2 \Delta\varphi}} = \frac{\sin^2 \Delta\varphi}{5 - 4 \cos \Delta\varphi};$$

$$\lambda = d \frac{\sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}.$$

- 2) Світло з довжиною хвилі  $530$  нм падає на прозору дифракційну решітку, період якої  $d = 1.5$  мкм. Знайти кут з нормаллю до решітки, під якою утвориться тах найбільшого порядку, якщо світло падає на решітку: а) нормально; б) під кутом  $60^\circ$  до нормалі.

$$\lambda = 530 \text{ нм}$$

$$d = 1.5 \text{ мкм}$$

$$a) \alpha = 0$$

$$б) \alpha = 60^\circ$$

$$a) \alpha = 0;$$

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1.5 \cdot 10^{-6}}{0.53 \cdot 10^{-6}} = 2,83.$$

$\varphi_{\max} = ?$

Т. к.  $k_{\max}$  повинне бути цілим, те  $k_{\max} = 2$ .

$$d \sin \varphi_{\max} = k_{\max} \cdot \lambda;$$

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{2\lambda}{d} = \arcsin \frac{1.06}{1.5} = 45^\circ.$$

$$б) \alpha = 60^\circ;$$

$$\Delta_1 = d \sin \alpha, \quad \Delta_2 = d \sin \varphi;$$

$$\Delta = k\lambda; \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2;$$

$$d(\sin \varphi + \sin \alpha) = k\lambda, \quad d(\sin \varphi_{\max} + \sin \alpha) = k_{\max} \lambda;$$

$$k_{\max} = \frac{1.5}{0.53}(1 + 0.866) = 5.3, \quad \Rightarrow \quad k_{\max} = 5;$$

$$\varphi_{\max} = \arcsin \left( \frac{k_{\max}}{d} \lambda - \sin \alpha \right), \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\max} = \arcsin \left( \frac{5 \cdot 0.53}{1.5} - 0.866 \right) = 64^\circ.$$

### ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

В електромагнітній хвилі присутні дві компоненти: магнітна й електрична. Більша частина фізичних, хімічних і т.д. ефектів обумовлена електричною компонентою, а саме напруженістю  $\vec{E}$ . У силу цього вектор  $\vec{E}$  називають **світловим вектором**. У природному промені світла коливання світлового вектора рівноімовірні. Якщо коливання світлового вектора якось упорядкувати, то таке світло називають **поляризованим**.

Якщо стрілка світлового вектора згодом описує еліпс, то таке світло називається **еліптично поляризованим**. Якщо еліпс вироджується в окружність, то маємо справу зі світлом, **поляризованим по колу**. Світло, у якому вектор  $\vec{E}$  коливається в певній площині, називається **плоско - поляризованим (лінійно поляризованим)**.

Прибори, за допомогою яких одержують лінійно поляризоване світло, називають **поляризаторами**. Ці прилади пропускають коливання тільки певного напрямку (наприклад, пропускають коливання, паралельні площини поляризації, і повністю затримують коливання, перпендикулярні цій площині).

Нехай на поляризатор падає природне світло й деякий вектор  $\vec{E}$  становить кут  $\varphi$  із площиною поляризатора.



Поляризатор пропустить лише компоненту  $E_{\parallel}$  :

$$E_{\parallel} = E \cos \varphi,$$

тому що  $I \sim A^2$ , то

$$I = I_0 \cos^2 \varphi.$$

Для природного світла всі значення  $\varphi$ , рівноімовірні. Тому необхідно зробити усереднення:

$$I = I_0 \langle \cos^2 \varphi \rangle,$$

де  $I$  - інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор;

$I_0$  - інтенсивність природного світла.

Через те, що  $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$ , то для природного світла:  $I = \frac{1}{2} I_0$

### **Закон Малюса**

Інтенсивність плоскополяризованого світла, що пройшло через поляризатор і аналізатор (другий поляризатор) прямопропорційна інтенсивності падаючого плоскополяризованого світла й квадрату косинуса кута між площинами поляризації цих поляризаторів:

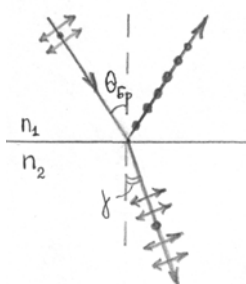
$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi,$$

де  $\varphi$  - кут між площинами поляризації поляризаторів.

Якщо  $\varphi = 0$ ,  $\Rightarrow I_2 = I_1$ , якщо  $\varphi = \pi/2$ ,  $\Rightarrow I_2 = 0$ .

### **Закон Брюстера**

Якщо світло падає на границю поділу двох діелектриків під кутом  $\theta_{Бр.}$ , для якого справедливий вираз  $tg \theta_{Бр.} = \frac{n_2}{n_1}$  (відношення абсолютних показників переломлення другого середовища щодо першого), то відбиті промені світла максимально поляризовані.



$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \theta_{Бр.}}{\cos \theta_{Бр.}} &= \frac{n_2}{n_1} \\ \frac{\sin \theta_{Бр.}}{\sin \gamma} &= \frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \right\} \cos \theta_{Бр.} = \sin \gamma, \Rightarrow \theta_{Бр.} = \frac{\pi}{2} - \gamma;$$

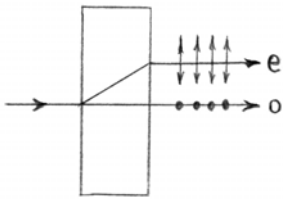
$$\theta_{Бр.} + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Закон Брюстера – це спосіб одержання лінійно поляризованого світла. При виконанні цього закону кут між відбитим світлом і переломленим буде дорівнює  $90^\circ$ .

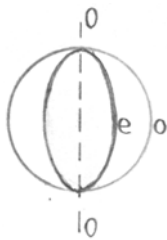
### **Подвійна променезаломлюваність**

Всі прозорі кристали, за винятком кристалів з кубічною решіткою мають подвійну променезаломлюваність. Нехай плоска світлова хвиля падає на

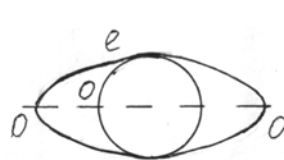
пластинку ісландського шпату. При падінні світла на грань пластинки утворюються два промені: **звичайний** (o) і **незвичайний** (e). Звичайний підпорядковується звичайному закону заломлення, а незвичайний не підпорядковується.



Кристали, у яких утвориться два промені o и e називають **одновісними**, а де обидва промені e – **дзвувісними**. Розглянемо одновісний кристал. Напрямок усередині кристала, уздовж якого промені o и e йдуть із однією швидкістю не розділяючись, називають **оптичною віссю кристала**. Площина, що проходить через OO - оптичну вісь кристала, називають **головною площиною кристала**. У курсі оптики доводиться, що хвильовою поверхнею звичайних променів є сфера, а для незвичайних - еліпсоїд.

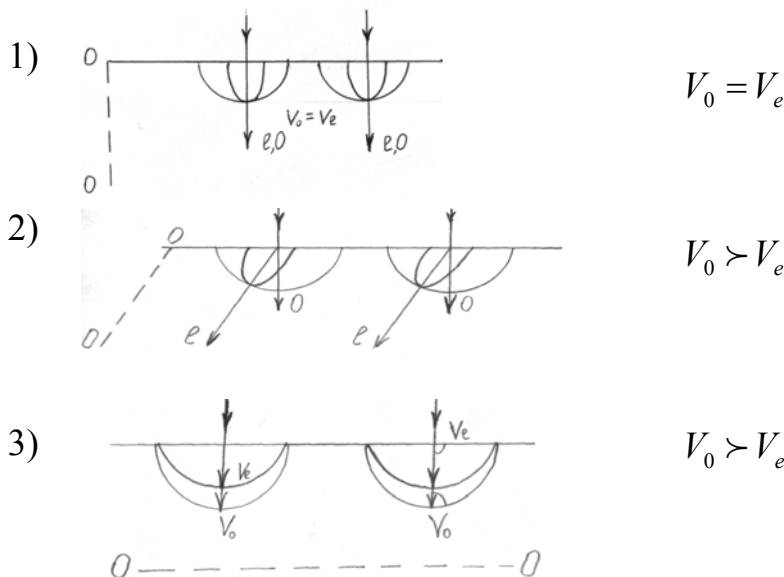


позитивний кристал



негативний кристал

Залежно від того, як вирізана кристалічна прозора пластинка, можливі варіанти поширення звичайних і незвичайних променів:



Якщо кристалічна пластинка вирізана паралельно оптичній осі, то промені o и e йдуть не розділяючись, але з різними швидкостями. **Фізичною причиною подвійної променезаломлюваності є оптична анізотропія кристала**, тобто різні напрямки в кристалах мають різні фізичні властивості.

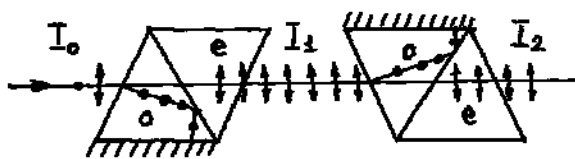
$$V_o = \frac{c}{n_o} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}; \quad V_e = \frac{c}{n_e} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}}$$

### Способи одержання поляризованого світла

1) Поляризатори - у них використовуються явища дихроїзма, тобто один промінь (о) повністю поглинається. У поляроїдах на целулоїдну плівку наносяться кристали сульфату йодистого хініну, у яких промінь повністю поглинається на шляху порядку 0,1мм.

2) Заснований на законі Брюстера.

3) Поляризаційні призми (призма Ніколя):

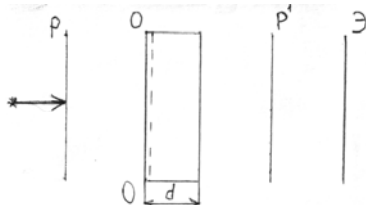


Без урахування поглинання в ніколях:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0; \quad I_2 = I_1 \cos^2 \varphi.$$

### Інтерференція поляризованого світла

Нехай між двома поляроїдами поміщена кристалічна пластинка товщиною  $d$ , вирізана паралельно оптичній осі (00). При падінні поляризованого світла на таку пластинку виниклі промені о и е будуть когерентними.



$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta;$$

$$\Delta = (n_o - n_e)d.$$

Розглянемо випадок, коли оптична вісь пластинки утворює кут  $45^\circ$  із площиною поляризатора.

а)  $P \parallel P'$

$$\alpha = 45^\circ;$$

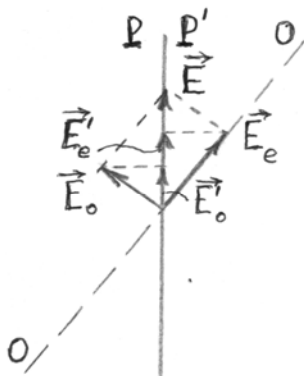
$$E_{рез.} = \sqrt{E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e' \cos \Delta\varphi};$$

$$E_e = E \cos \alpha, \quad E_e' = E_e \cos \alpha = E \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} E;$$

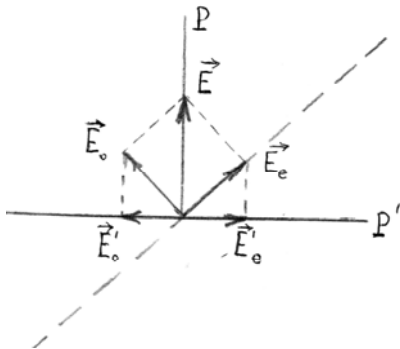
$$E_o = E \cos \alpha, \quad E_o' = E_o \cos \alpha = E \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} E;$$

$$E_{рез.} = \sqrt{\frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{2} E^2 \cos \Delta\varphi} = \sqrt{\frac{1}{2} E^2 (1 + \cos \Delta\varphi)} = E \cos \frac{\Delta\varphi}{2};$$

$$I_{рез.} = I \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.$$



б)  $P \perp P'$



$$\begin{aligned}
 E_{рез.} &= \sqrt{\frac{1}{2} E^2 (1 + \cos(\Delta\varphi + \pi))} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} E^2 (1 - \cos\Delta\varphi)} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} E^2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} = E \sin \frac{\Delta\varphi}{2}; \\
 I_{рез.} &= I \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.
 \end{aligned}$$

### **Обертання площини поляризації**

Кристалічні тіла (цукор, кварц, кіновар), чисті рідини (скипидар, нікотин), водяні розчини цукру, винної кислоти мають здатність обертати площину поляризації. При цьому

а) Кристалічні тіла сильніше всього обертають площину поляризації, якщо світло поширюється уздовж осі ОО. Для них кут повороту площини поляризації при проходженні світла через кристал пропорційний шляху  $l$ , який світло проходить

$$\varphi = \alpha l,$$

де  $\alpha$  - постійна обертання.

б) У розчинах рідин кут повороту прямо пропорційний концентрації активної речовини

$$\varphi = [\alpha] Cl.$$

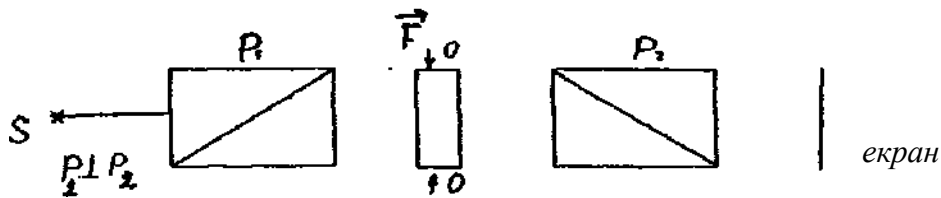
де  $C$  - концентрація речовини в розчині;

$[\alpha]$  - питома постійна обертання.

### **Штучна оптична анізотропія**

В зв'язку з тим, що причиною подвійної променезаломлюваності є оптична анізотропія, для одержання подвійної променезаломлюваності в ізотропних середовищах ( кристалах кубічної системи, рідинах, аморфних тілах, газах) необхідно створити штучну анізотропію.

1) у твердих тілах:



$$n_o - n_e = k_1 \sigma.$$

- 1) Поляроїди  $P_1$  й  $P_2$  схрещені – світло не проходить.
- 2) Під впливом навантаження  $\sigma = \frac{F}{S}$  на екрані з'являються інтерференційні смуги.
- 3) ОО збігається з лінією дії навантаження.

Метод застосовується в дефектоскопії.

2) у рідинах (комірка Керра):



При подачі напруги на пластини конденсатора екран просвітлюється:

$$n_o - n_e = k_2 E^2$$

Тому що час, у плинні якого встановлюється переважна орієнтація молекул, становить порядку  $10^{-10}$  с, то комірка Керра служить практично безінерційним світловим затвором, і застосовується у високошвидкісній фото- і кінозйомці.

Приведемо приклади рішення завдань на поляризацію світла.

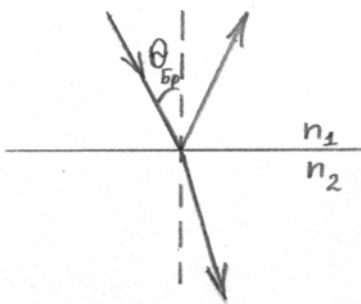
- 1) Кут мах поляризації при відбитті світла від кристала дорівнює  $57^\circ$ . Знайти швидкість поширення світла в цьому кристалі.

Закон Брюстера:  $\text{tg} \theta_{\text{Бр.}} = \frac{n_2}{n_1};$

$$n_1 = n_e \approx 1, \quad n_2 = n_{\text{кр.}}$$

$$\text{tg} \theta_{\text{Бр.}} = n_{\text{кр.}}, \quad V = \frac{c}{n_{\text{кр.}}};$$

$$V = \frac{c}{\text{tg} \theta_{\text{Бр.}}}; \quad V = \frac{3 \cdot 10^8}{\text{tg} 57^\circ} = 1.95 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$





2) Граничний кут повного внутрішнього відбиття луча на межі рідини з повітрям дорівнює  $43^\circ$ . Який повинен бути кут падіння луча з повітря на поверхню рідини, щоб відбитий промінь був максимально поляризований.

Закон Брюстера:

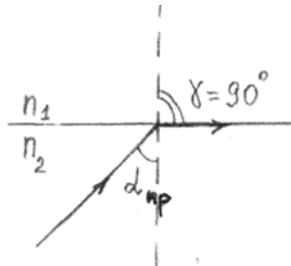
$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр.}} = \frac{n_2}{n_1};$$

$$n_1 = 1;$$

$$n_2 = n_{\text{ж.}};$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр.}} = n_{\text{ж.}};$$

$$\theta_{\text{Бр.}} = \operatorname{arctg} n_{\text{ж.}}.$$



Закон заломлення світла:

$$\frac{\sin \alpha_{\text{пр.}}}{\sin \gamma} = \frac{n_1}{n_2};$$

$$\sin \alpha_{\text{пр.}} = \frac{1}{n_{\text{ж.}}}, \Rightarrow n_{\text{ж.}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\text{пр.}}};$$

$$\theta_{\text{Бр.}} = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sin \alpha_{\text{пр.}}} \right).$$

$$\theta_{\text{Бр.}} = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sin 43^\circ} \right) = 55.7^\circ;$$

2) У скільки разів послабляється світло, проходячи через два ніколя, площини поляризації яких утворюють кут  $30^\circ$ , якщо в кожному з ніколей окремо розгублюється 10 % падаючого на нього світлового потоку.

$\alpha = 30^\circ$
$k = 0.1$
$\frac{I_0}{I_2} = ?$

Закон Малюса:  $I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - k);$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi (1 - k) = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi (1 - k)^2;$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - k)^2 \cos^2 \varphi}; \quad \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - 0.1)^2 \cos^2 30^\circ} \approx 3.3.$$

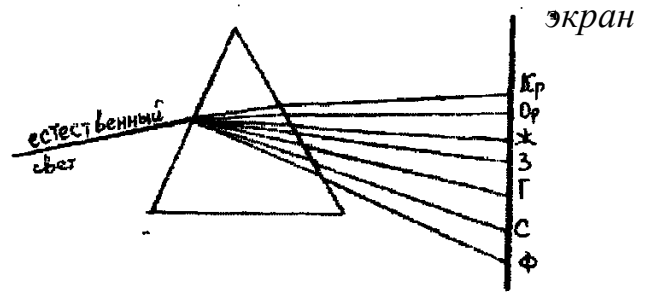
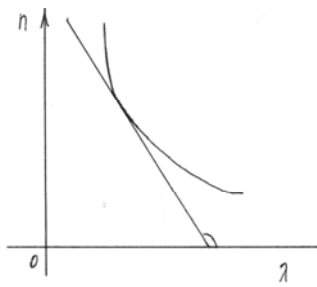
### ДИСПЕРСІЯ СВІТЛА

Залежність абсолютного показника заломлення речовини від частоти або довжини хвилі називають **дисперсією світла**:  $n = f(\lambda)$ . Під **дисперсією речовини** розуміють похідну від  $n$  по  $\lambda$ ; якщо похідна негативна, то дисперсія **нормальна**, якщо  $> 0$ , то **аномальна**.

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \text{ (нормальна)}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0 \text{ (аномальна)}$$

Для прозорих речовин залежність  $n$  від  $\lambda$  має вигляд:  $\left( \frac{dn}{d\lambda} < 0 \right)$ .



Якісну

теорію дисперсії речовини дав Лоренц, який показав, що в першому наближенні можна розглядати електрон в атомі як лінійний осцилятор. Коли на прозору речовину падає електромагнітна хвиля, електрони речовини будуть перебувати під впливом електричної й магнітної компонент хвилі.

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e[\vec{V}\vec{B}];$$

$$\alpha = \frac{VB}{E} = \frac{V\mu\mu_0 H}{E}; \quad \mu = 1;$$

$$\alpha = \frac{V\mu_0 H}{E}; \quad \sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H;$$

$$\alpha = V\mu_0 \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} = V\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \frac{V}{c};$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad A \sim 10^{-10} \text{ м};$$

$$V_{\max} = A\omega = A2\pi\nu, \quad \nu \sim 10^{15} \text{ Гц};$$

$$V \approx 10^{-10} \cdot 10^{15} = 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \Rightarrow \quad \alpha; \sim 10^{-3}$$

Без урахування загасання:

$$m\ddot{r} + kr = -eE_0 \cos(\omega t + \varphi);$$

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t + \varphi);$$

$$r = r_0 \cos(\omega t + \varphi);$$

$$-\omega^2 r_0 + \omega_0^2 r_0 = -\frac{e}{m} E_0; \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$r = \frac{\frac{e}{m}}{\omega^2 - \omega_0^2} E_0 \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{\frac{e}{m} E(t)}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$n^2 = \epsilon\mu = \epsilon = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}.$$

$$P = Np$$

де  $N$  - число атомів в одиниці об'єму;

$p$  - дипольний момент молекули.

Обмежимося розглядом **неполярних молекул**, тобто молекул, у яких у звичайних умовах центри ваги негативного й позитивного заряду збігаються. У цьому наближенні **дипольний електричний момент молекули** можна представити у вигляді:

$$\vec{P} = \sum_k q_k \vec{R}_{ok} + \sum_k (e_k \vec{r}_{ok} + e_k \vec{r}_k),$$

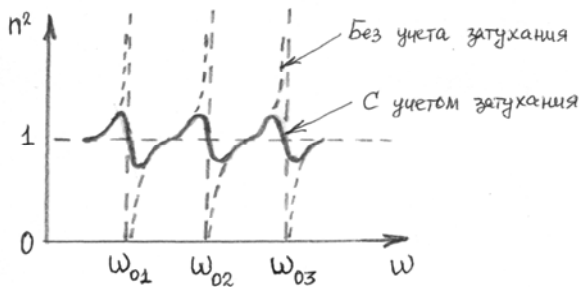
де  $q_k, \vec{R}_{ok}$  - заряди й радіуси-вектори рівноважних положень ядер;

$e_k, \vec{r}_{ok}$  - заряд і радіус-вектор рівноважного положення  $k$ -го електрона;

$r_k$  - зміщення  $k$ -го електрона з положення рівноваги під дією поля хвилі.

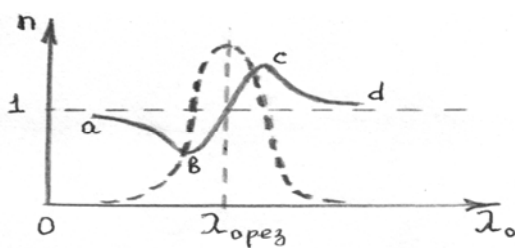
$$\vec{p} = \sum_k (q_k \vec{R}_{ok} + e_k \vec{r}_{ok}) + \sum_k e_k \vec{r}_k;$$

$$\vec{p} = \sum_k e_k \vec{r}_k = -e \sum_k \vec{r}_k, \quad p = \sum_k \frac{e^2 E(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$



$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \sum_k \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}$$

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

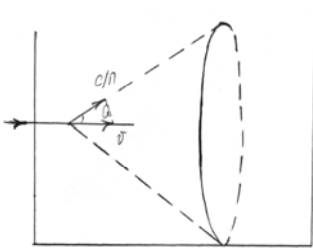


$ab, cd$  - області нормальної дисперсії  
 $bc$  - область аномальної дисперсії

Як показують розрахунки, область аномальної дисперсії попадає в область максимального поглинання світла в речовині.

### **Випромінювання Вавілова-Черенкова**

В 1934 р. Черенков вивчав вплив радіоактивних променів радію на рідину й виявив незвичайне блакитне світіння рідини. В 1937 р. Франк і Тамм довели, що під дією  $\gamma$  променів радію в рідині електрони набувають швидкість, більшу фазової швидкості світла в цьому середовищі ( $(c/n)$  фазова швидкість)



Характерною рисою випромінювання є те, що воно випускається лише уздовж утворюючого конуса, вісь, якого збігається з напрямком швидкості частинки:

$$\cos Q = \frac{c/n}{V} < 1.$$

### ***Розсіювання світла***

Воно відбувається на неоднорідностях середовища. Якщо розмір неоднорідності порядку 0,1 довжини хвилі світла, то виконується **закон Рэлея**:

$$I \sim \omega^4 \sim \lambda^{-4}$$

Інтенсивність розсіювання світла обернено пропорційна четвертому ступеню довжини хвилі світла. Як заборонний сигнал у світлофорі обране червоне світло, тому що воно менше інших кольорів розсіюється.

Крім того, розсіювання може відбуватися в однорідних середовищах при флуктуації речовини - це випадкові малі відхилення системи від положення рівноваги. Наприклад, у повітрі постійно відбувається флуктуація густини за рахунок руху молекул повітря. Цим молекулярним розсіюванням і пояснюється кольори неба.

### ***ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ***

Випромінювання нагрітими тілами електромагнітних хвиль за рахунок їхньої внутрішньої енергії називають **тепловим випромінюванням**. Всі інші види випромінювань одержали назву **люмінесценції** (катодо - , хеми - , електро - і т.д.). На відміну від люмінесцентного випромінювання, теплове випромінювання є **рівноважним**, тобто якщо нагріте тіло поміщене усередині вакуумированной порожнини, то згодом температура нагрітого тіла буде дорівнювати температурі стінок. Для рівноважного випромінювання справедливі закони термодинаміки. Для характеристики теплового випромінювання вводяться наступні величини:

1) **енергетична світність**  $R_e$  тіла:

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{1}{S} \frac{dW_e}{dt}, \quad [R_e]_{ci} = \frac{Bm}{M^2},$$

де  $\Phi_e$  - потік випромінювання,

$S$  - випромінююча поверхня,

$dW_e$  - енергія, випромінювана за час  $dt$

2) **спектральна густина енергетичної світності**  $r_{\omega,T}$

$$r_{\omega,T} = \frac{dR_e}{d\omega}, \quad R_e = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega;$$

Інакше  $r_{\omega,T}$  називається **випромінювальною здатністю тіла**.  $r_{\omega,T}$  характеризує розподіл по частотах у спектрі випромінювання тіла. Поряд з  $r_{\omega,T}$ , користуються також  $r_{\lambda,T}$

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR_e}{d\lambda}, \quad R_e = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda.$$

### 3) поглинальна здатність тіла:

$$a_{\omega,T} = \frac{d\Phi_{\text{поглин.}}}{d\Phi_{\text{пад.}}}$$

$a_{\omega,T}$  показує, яка частина енергії падаючого випромінювання поглинається тілом.

Тіло, що повністю поглинає електромагнітне випромінювання для будь-яких частот і температур називається **абсолютно чорним тілом (АЧТ)**. Дуже близьким по властивості до АЧТ є чорний оксамит, сажа, платинова чернь. Для АЧТ  $a_{\omega,T} = 1$ .

## Закони теплового випромінювання

### 1. Закон Кірхгофа: $r_{\omega,T} / a_{\omega,T} = f(\omega, T)$ .

Відношення випромінювальної і поглинальної здатностей тіла не залежить від природи тіла, воно є універсальної функції частоти й температури.

### 2. Закон Стефана – Больцмана: $R_e = \alpha \sigma T^4$ , ( $\alpha < 1$ ) для сірого тіла;

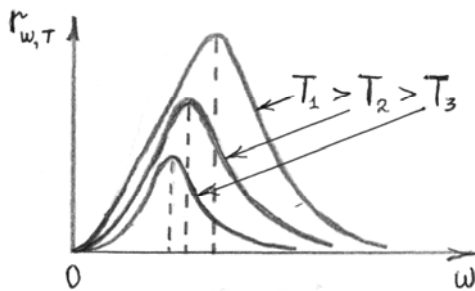
$$R_e^* = \sigma T^4, \text{ для АЧТ;}$$

де  $\sigma$  - постійна Стефана – Больцмана.

Енергетична світність АЧТ прямо пропорційна четвертому ступеню температури його поверхні.

Недоліки закону:

- 1) Постійна Стефана - Больцмана визначається не з теорії, а з експерименту.
- 2) Закон не пояснював закономірності в спектрі випромінювання тіла.



$$\lambda \sim \frac{1}{\omega}.$$

Аналіз експериментальної залежності  $r_{\omega,T}$  від  $\omega$  показав, що:

1. Спектр випромінювання безперервний;

2. Крива справедлива для будь-якого нагрітого тіла при температурі більше 0 К;
3. Площа під графіком кривої пропорційна 4 ступеню температури;
4. При високих температурах випромінюються переважно короткі хвилі (видиме світло, ультрафіолетове випромінювання), а при низьких температурах переважно довгі хвилі (інфрачервоне випромінювання).

### 3. Закони Віна.

3.1.) **Закон зміщення:**  $\lambda_{\max} = C_1 / T$ , де  $C_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$

Довжина хвилі, на яку доводиться max у спектрі випромінювання АЧТ, обернено пропорційна температурі поверхні:

3.2)  $\left( r_{\lambda, T} \right)_{\max} = C_2 T^5$ , де  $C_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт} / (\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$

### 4. Закон Рэлея - Джинса

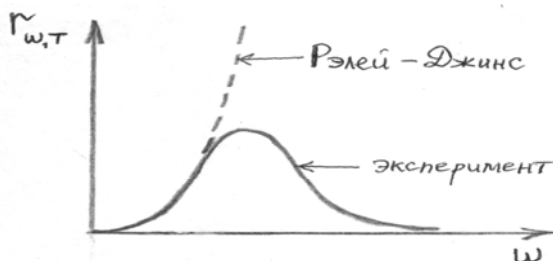
Використовуючи закони статистичної фізики й рівняння Максвелла, вони знайшли теоретичне вираження для функції Кірхгофа.

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2 k T}{4\pi^2 c^2},$$

де,  $k$  - постійна Больцмана

Для  $R_{\nu}^*$  інтегрування дає:

$$R_{\nu}^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega \sim \omega^3 \Big|_0^{\infty} \rightarrow \infty$$



Розбіжність  $R_{\nu}^*$  в області більших частот (малих довжин хвиль) одержало в літературі назва **ультрафіолетової катастрофи**.

Вихід з положення був запропонований в 1900 р. М.Планком. Він висунув квантову гіпотезу: випромінювання ЕМХ атомом відбувається не безперервно, а порціями (квантами).

Енергія кванта:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad (\hbar = h/2\pi)$$

де  $h$  - постійна Планка,  $h = 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

Використовуючи методи статистичної фізики й уявлення про квантовий характер випромінювання Планк одержав теоретичне значення для функції Кірхгофа:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Цей вираз співпадає з експериментальними даними по розподілу енергії в спектрі випромінювання АЧТ у всьому інтервалі частот від 0 до  $\infty$  при різних температурах. Насправді, проаналізуємо вираз для  $f(\omega, T)$ :

1) область малих частот ( $\hbar\omega/kT \ll 1$ ):

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + 0(2), \Rightarrow f(\omega, T) \approx \frac{\omega^2 kT}{4\pi^2 c^2}.$$

Таким чином, закон Рэлея - Джинса справедливий лише в області малих частот (великих довжин хвиль).

2) область великих частот ( $\hbar\omega/kT \gg 1$ ;  $\Rightarrow f(\omega, T) \sim \omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$ )

Ця функція правильно описує праву гілку експериментальної кривої.

3)  $f'_\omega = 0$ ,  $\Rightarrow$  звідси одержуємо закон зміщення Віна:

$$C_1 = hc(4.965k)^{-1}, \quad k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

4) одержимо закон Стефана - Больцмана.

$$R_y^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

$$\frac{\hbar\omega}{kT} = x, \Rightarrow \omega = \frac{kT}{\hbar} x; \Rightarrow d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx$$

$$R_y^* = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}, \Rightarrow R_y^* = \frac{k^4 \pi^2}{60 c^2 \hbar^3} T^4, \Rightarrow \sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 c^2 \hbar^3}$$

Таким чином, формула Планка дозволила пояснити всі закони теплового випромінювання й закономірності експериментальної кривої.

У висновку відзначимо, що сучасні спостережливі дані дають чорнотільний (планківський) спектр теплового випромінювання раннього Всесвіту.

## ФОТОЕФЕКТ

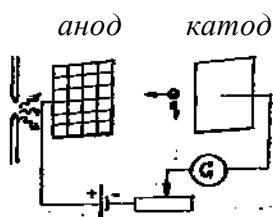
Під **фотоефектом** у загальному випадку, розуміють зміну енергетичного стану електрона під дією світла. Розрізняють: зовнішній, внутрішній, і вентильний фотоефект.

**Зовнішній** – виривання електронів з речовини під дією світла (у газах цей процес називають іонізацією)

**Внутрішній** – перерозподіл електронів по енергетичних станах усередині речовини.

**Вентильний** – явище виникнення фото ЕДС на межі метал – напівпровідник або напівпровідник – напівпровідник при опромінюванні світлом (при відсутності зовнішньої напруги).

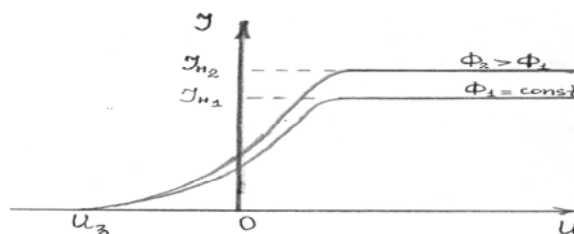
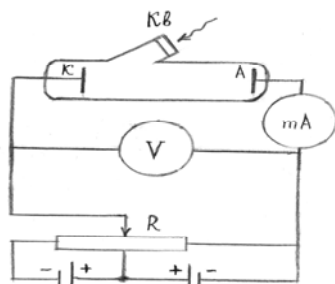
Систематичне вивчення зовнішнього фотоефекта було почато в 1888р. російським фізиком Столетовим, експериментальна установка якого мала вигляд



Столетов виявив, що 1) струм насичення  $I_n$  прямо пропорційний падаючому світловому потоку  $\Phi$  ( $I_n \sim \Phi$ ); 2) найбільший вплив чинять ультрафіолетові промені; 3) під дією світла з катода виривалися негативно заряджені частинки.

В 1899 р. Ленард і Томсон удосконалили схему установки Столетова

Експериментальна вольт – амперна характеристика має вигляд:



Навіть при відсутності напруги існував струм. Ленард і Томсон знайшли відношення заряду частинки до її маси  $m_e$ , таким чином, довели, що це електрон.

### Закони зовнішнього фотоефекта

1) Сила струму насичення прямо пропорційна падаючому світловому потоку:  $I_n \sim \Phi$ .

2) Максимальна кінетична енергія електронів, що вилітають, прямо пропорційно частоті падаючого випромінювання й не залежить від світлового потоку.  $E_{k\max} \sim \nu$ .

3) Існує довгохвильова границя фотоефекта ( $\nu_{кр.}$  або  $\lambda_{кр.}$ ).

Хвильова природа світла, заснована на рівняннях Максвелла, могла пояснити тільки перший закон і вступала в протиріччя з 2 і 3 законами.



Рішення проблеми дав в 1905 р. Ейнштейн. Він записав закон збереження енергії для фотоэффекту, ґрунтуючись на корпускулярній теорії світла й квантовому характері взаємодії електромагнітного випромінювання з речовиною:

$$h\nu = A_{\text{вих.}} + E_k + E',$$

де  $A_{\text{вих.}}$  - робота виходу електрона з металу;

$E_k$  - кінетична енергія після вильоту;

$E'$  - енергія, витрачена на зіткнення з домішками й т.д. при виході електрона на поверхню металу.

Згідно цьому рівнянню кожний квант поглинається тільки одним електроном. Звідси відразу отримаємо перший закон зовнішнього фотоэффекта.

Якщо поверхня відполірована й не містить домішок, то  $E' = 0$ , й, отже,

$$h\nu = A_{\text{вих.}} + E_{k \text{ max.}}$$

Із цього рівняння видно, що  $E_{k \text{ max.}} \sim \nu$ ,  $\Rightarrow$  одержимо другий закон.

Фотоэффект можливий тоді, коли енергія фотона не менше роботи виходу:

$$h\nu \geq A_{\text{вих.}}, \quad h\nu_{\text{кр.}} = A_{\text{вих.}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda_{\text{кр.}}} = A_{\text{вих.}},$$

тобто зі збільшенням довжини хвилі фотоэффект зникає. Таким чином, пояснюється і третій закон зовнішнього фотоэффекта. Отже, квантова теорія фотоэффекта пояснила всі експериментальні закони зовнішнього фотоэффекта.

Для визначення максимальної швидкості електронів, що вилітають, уводиться затримуюча різниця потенціалів.

$$eU_3 = E_{k \text{ max.}}, \quad \Rightarrow \quad h\nu = A_{\text{вих.}} + eU_3;$$

$$h(\nu - \nu_{\text{кр.}}) = eU_3.$$

При рішенні завдань необхідно проводити аналіз:

1) якщо  $h\nu \ll mc^2$  ( $mc^2 = 0.51 \text{ МэВ} = 0,51 \cdot 10^6 \text{ эВ}$ ;  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ).

$$E_{k \text{ max.}} = \frac{mV_{\text{max.}}^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad h\nu = A_{\text{вих.}} + \frac{mV_{\text{max.}}^2}{2};$$

2) якщо  $h\nu \geq mc^2$

$$E_{k \text{ max.}} = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V_{\text{max.}}^2}{c^2}}} - mc^2.$$

Т. к.  $A_{\text{вих.}}$  порядку декількох еВ, те рівняння Ейнштейна прийме вид:

$$h\nu \approx mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{\max}^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

### Характеристики фотона

Маса:  $m = 0$ ; швидкість у вакуумі:  $V = c = 3 \cdot 10^8 \frac{M}{c}$ ; енергія:  $E = h\nu = \hbar\omega$ .

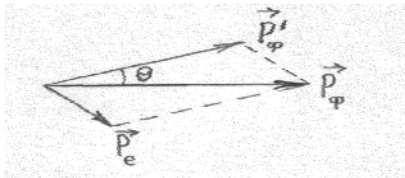
Імпульс:  $p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar 2\pi}{cT} = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \hbar k$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

### Ефект Комптона (1923р.)

Явище розсіювання короткохвильового електромагнітного випромінювання на вільному або слабо зв'язаному електроні називається **ефектом Комптона**. В 1923 р. Комптон, вивчаючи розсіювання рентгенівського випромінювання на парафіні й борі, виявив, що в розсіяних променях присутні хвилі й з більшою довжиною хвилі, що не співпадало з хвильовою теорією.

Корпускулярна природа випромінювання дозволила пояснити ефект Комптона.

$$\begin{cases} \text{Закон збереження імпульсу: } \vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}_e; \\ \text{Закон збереження енергії: } \hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}. \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} = \hbar(k - k') + m_e c, \quad \omega = kc \\ \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{\delta}_a; \quad \vec{\delta}_a = \hbar(\vec{k} - \vec{k}'); \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_e^2 + m_e^2 c^2 = \hbar^2(k^2 - 2kk' + k'^2) + 2\hbar m_e c(k - k') + m_e^2 c^2 \\ p_e^2 = \hbar^2(k^2 - 2kk' \cos\theta + k'^2) \end{cases}$$

$$2\hbar^2 k k' (1 - \cos\theta) = 2\hbar m_e c (k - k') \quad \left| \cdot \frac{2\pi}{\hbar k k' m_e c} \right.$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta).$$

### БОРІВСКА ТЕОРІЯ АТОМА

**Моделі атома** Подання про атоми, як «первокирпичиках» усього сущого сходять до античних філософів Демокриту й Епікуру. Перша теоретично

обґрунтована модель атома була запропонована в 1903 р. англійцем Дж.Томсоном . У його моделі електрони робили коливання усередині позитивно зарядженої кулі. Однак, його модель зуміла пояснити лише розмір атома.

В 1911 англієць Е. Резерфорд досліджував проходження  $\alpha$  - частинок через золоту фольгу товщиною порядку 1 мкм. Він виявив, що більша частина частинок зазнавала незначне відхилення від первісного напрямку й лише незначна частина відхилялася на кут  $180^\circ$  . На підставі цих дослідів Резерфорд запропонував ядерну модель атома, відповідно до якої в центрі ядра знаходиться малюсіньке позитивно заряджене ядро, навколо якого по кругових орбітах обертаються негативно заряджені електрони. Заряд ядра дорівнює сумарному заряду електронів. Рівняння руху електрона має вигляд:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mV^2}{r},$$

де  $V$  - швидкість електрона на орбіті радіуса  $r$  ,  
 $m, e$  - маса й заряд електрона,  
 $Z$  - заряд ядра,  
 $\epsilon_0$  - електрична постійна.

Із цього рівняння випливало, що, загалом кажучи, значення  $V$  й  $r$  могли бути будь-якими й тому атом повинен випромінювати світло будь-якої частоти. Далі, з погляду класичної фізики, модель повинна бути нестійкою: електрон, що рухається прискорено ( $a_n = V^2 / r$ ), повинен випромінювати ЕМХ і втрачаючи енергію по спіралі падати на ядро. Таким чином, атоми повинні бути нестійкими утвореннями, однак, у природі вони саме стійкі.

**Атомні спектри.** Треба сказати, що на той час були відомі спектри воднеподібних атомів ( атоми, електронна оболонка яких містила лише один електрон). Ці спектри показували, що атоми випромінюють світло не будь-якої частоти, а лише строго певної. Дослідним шляхом була отримана формула, що дозволяє розрахувати довжини хвиль  $\lambda$  , що випромінюються (або поглинають) атомами:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

де  $R$  - постійна Рідберга ( $R = 1.1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ )

$n, m$  - квантові числа.

Для водню ( $Z = 1$ ) експериментально були підтверджені наступні серії:

$(n = 1, m = 2, 3, 4, \dots)$ - Лаймана	$(n = 4, m = 5, 6, 7, \dots)$ -Брекета
$(n = 2, m = 3, 4, 5, \dots)$ - Бальмера	$(n = 5, m = 6, 7, 8, \dots)$ -Пфунда
$(n = 3, m = 4, 5, 6, \dots)$ - Пашена	$(n = 6, m = 7, 8, 9, \dots)$ -Хемфрі

Однак залишалось неясним походження цієї формули й для постійної Ридберга був потрібен аналітичний вираз.

## Постулати Бору (1913 р.)

Для усунення протиріч у ядерній моделі Резерфорда й пояснення закономірностей атомних спектрів датський фізик Н.Бор запропонував наступні постулати:

1. В атомі існують стаціонарні орбіти, рухаючись по яких електрон не випромінює ЕМХ.

$$mV_n r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

де  $m$  - маса електрона

$V_n$  - швидкість електрона по  $n$ -й орбіті радіуса  $r_n$ .

2. Випромінювання (поглинання) енергії відбувається лише при переході електрона з однієї стаціонарної орбіти на іншу.

$$h\nu = E_m - E_n,$$

де  $E_m$  й  $E_n$  - відповідно енергії стаціонарних станів атома до й після випромінювання (поглинання).

Множачи рівняння руху електрона у водородоподібному атомі

$$\frac{mV_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2},$$

на  $mr_n^3$ , одержимо:

$$(mV_n r_n)^2 = \frac{Ze^2 m r_n}{4\pi\epsilon_0}$$

звідки, використовуючи перший постулат Бору, одержимо:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 m}.$$

Повна енергія електрона:

$$E = \frac{mV_n^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

Тому що:

$$\frac{mV_n^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n},$$

одержимо:

$$E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 \hbar^2}.$$

Відповідно до другого постулату:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_m - E_n = \frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

звідки:

$$R = \frac{me^4}{8h^3 \varepsilon_0^2 c}$$

Скориставшись табличними значеннями постійних, що входять у цю формулу, неважко одержати величину, що співпадає з експериментальним значенням постійної Ридберга.

Незважаючи на те, що боровская теорія змогла пояснити деякі закономірності для атома водню, у її рамках неможливо було описати атом гелію (наступний елемент у таблиці Менделєєва). Ця теорія була внутрішньо суперечливою: одночасно застосовувалися закони класичної фізики й квантові постулати.

## ЕЛЕМЕНТИ НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ.

Розділ фізики, що вивчає рух мікрочастинок в областях ( $10^{-13} \div 10^{-6}$ ) см зі швидкостями  $V \ll c$  називається **нерелятивістською квантовою механікою**.

До 1913 р. основні дослідження у фізиці були пов'язані із хвильовою й квантовою оптикою. На підставі цих досліджень був сформульований так званий «корпускулярно - хвильовий дуалізм» світла.

### *Корпускулярно - хвильовий дуалізм світла*

За результатами експериментів на початку XX століття зложилося двоїсте уявлення про світло: такі явища як інтерференція, дифракція, поляризація, дисперсія пояснювалися хвильовою природою світла, в основі якої рівняння Максвелла; а теплове випромінювання, фотоефект, ефект Комптона одержували пояснення тільки з погляду корпускулярної теорії світла. У зв'язку із цим виник термін «корпускулярно - хвильовий дуалізм світла». Таким чином зі збільшенням довжини хвилі світла більше проявляються його хвильові властивості, а зі зменшенням - корпускулярні:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{cT} = \frac{h}{\lambda}.$$

### *Корпускулярно - хвильовий дуалізм речовини Хвилі де Бройля (1924р.)*

В 1924 р. французький учений Луї де Бройль висунув гіпотезу: кожній мікрочастиці з імпульсом  $p$  і енергією  $E$  можна зіставити хвилю з довжиною  $\lambda = \frac{h}{p}$ , і частотою  $\nu = \frac{E}{h}$

Дослідне обґрунтування гіпотези де Бройля:

1. В 1927 р. американці Джермер і Девіссон досліджували розсіювання пучка електронів на кристалі нікелю.  $\lambda$  розраховували по формулі  $\lambda = \frac{h}{p}$ .

Електрони набували кінетичну енергію  $E_k$  за рахунок проходження прискорювальної напруги  $U$ :

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \quad A = eU;$$

$$E_k = A, \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2meU}, \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Дифракційні максимуми відповідали формулі Вульфа - Бреггів:

$$2d \cos \theta = k\lambda,$$

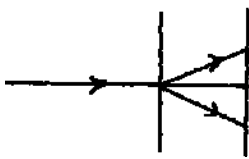
де  $\theta$  - кут ковзання;

$d$  - відстань між атомними площинами кристала.

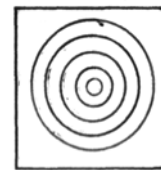
$$\lambda^{**} = \frac{2d}{k} \cos \theta.$$

Після порівняння  $\lambda^*$  й  $\lambda^{**}$  одержали:  $\lambda^*$  відрізняється від  $\lambda^{**}$  на  $10^{-12}$  м.

## 2. Дослід Томсона й Тартаковського (1927р.)



Електроно -  
грама



Рентгено -  
грама

Пучок швидких електронів проходив через тонку металеву фольгу й попадав на фотопластинку. Та ж картина вийшла при рентгенівському опроміненні фольги. Таким чином, пучок електронів має хвильові властивості, тому що картини збігаються.

## 3 Дослід Фабриканта (1949р.)

Провів дослід подібний Томсону й Тартаковському, але особливість така, що через фольгу пролітали послідовно по одному електрону. Результат вийшов аналогічним 2. Таким чином, було доведено, що хвильові властивості присутні окремому електрону.

## **Співвідношення невизначеностей Гейзенберга (1927р.)**

Добуток невизначеностей двох канонічно сполучених величин не може бути менше один по порядку величини постійної Планка  $\hbar$ :  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar$ . Як

канонічно сполучені величини А и В можуть бути координата й імпульс, енергія й час:

- 1) Невизначеності значень  $x$  і  $p_x$ ,  $y$  и  $p_y$ ,  $z$  и  $p_z$  задовольняють співвідношенням:

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar; \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar; \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar; \end{cases}$$

$\Delta x$  - невизначеність координати частинки уздовж осі  $x$ ,

$\Delta p_x$  - невизначеність проекції імпульсу на вісь  $x$ .

Невизначеність: неточність у визначенні координати,  
розкидання у визначенні координати.

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x}.$$

Якщо точно визначена координата:  $\Delta x = 0$ ,  $\Rightarrow \Delta p_x \rightarrow \infty$ .

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x}.$$

Якщо точно визначений імпульс:  $\Delta p_x = 0$ ,  $\Rightarrow \Delta x \rightarrow \infty$ .

Таким чином, у квантовій механіці не можна одночасно точно визначити координату й імпульс частинки, виходить, не існує поняття траєкторії частинок.

$$\Delta p_x = m \Delta V_x, \Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{m \Delta V_x}.$$

Звідси одержуємо, що чим більше маса частинки, тим менше невизначеність її координати.

$$2) \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

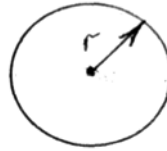
Невизначеність енергії  $\Delta E$  квантової системи пов'язана із часом життя  $\Delta t$ : розкид енергії  $\Delta E = \hbar / \Delta t$  зростає зі зменшенням середнього часу життя.

Співвідношення невизначеностей є одним з фундаментальних положень нерелятивістської квантової механіки. Воно дозволяє дати якісну оцінку явищ у мікросвіті.

Приклади:

- 1) Електрон не може впасти на ядро атома тому що в цьому випадку виконувалося б  $\Delta r = 0$ ,  $\Delta p = 0$ , що суперечить співвідношенню Гейзенберга.
- 2) Оцінити мінімальний радіус електрона на орбіті й енергію його в атомі водню:

$$\begin{aligned} \Delta r \Delta p &\geq \hbar; \\ \Delta r &\leq r, \quad \Delta p \leq p; \\ rp &\approx \hbar. \end{aligned}$$



$$E = E_k + E_n, \quad E_k = \frac{mV^2}{2}; \quad E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r};$$

$$E_p = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad p = mV;$$

$$p = \frac{\hbar}{r}, \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r};$$

$$E_r' = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0;$$

$$r_{\min} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}; \quad E_r'' > 0, \quad \Rightarrow \quad \min.$$

## РІВНЯННЯ ШРЕДИНГЕРА

В 1926 р. австрійський фізик Ервин Шредингер, виходячи з ідей де Бройля, запропонував рівняння для однієї мікрочастинки у відсутності зовнішнього магнітного поля.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U\Psi = i\hbar (d\Psi/dt),$$

де  $\hbar = h/2\pi$ ;

$\Delta$  - Лапласіан;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  (у декартовій системі координат);

$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$  - комплексна функція координат і часу;

$U = U(x, y, z)$  - функція координат;

$i$  - мніма одиниця.

Дане рівняння, що описує поведінку частинки в мікросвіті, є **основним рівнянням нерелятивістської квантової механіки**.

М. Борн (1926р.) установив **фізичний зміст квадрата модуля псі функції**:

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = \frac{dP}{dV}$$

$|\Psi|^2$  = густина ймовірності знаходження частинки в даному елементі об'єму.

$$P = \int_{(V)} \Psi \cdot \Psi^* d$$



Середнє значення фізичної величини  $f$  у квантовій механіці визначається виразом  $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{f} \psi dV$ , де  $\hat{f}$  - оператор, зіставлений  $f$ .

Надалі обмежимося стаціонарним випадком. Стани для яких

$$\frac{d}{dt} \Psi \Psi^* = 0, \quad \frac{dU}{dt} = 0$$

- називаються **стаціонарними**.

У цьому випадку можливий поділ  $\Psi$  - функції на координатну й просторову частину:

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-iEt/\hbar}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = E \psi,$$

- **рівняння Шредингера для стаціонарного стану**.

Це рівняння можна записати в операторному виді:

$$\hat{H} \psi = E \psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U,$$

де  $\hat{H}$  - оператор Гамильтона.

У теорії диференціальних рівнянь доводиться, що рівняння  $\hat{H} \psi = E \psi$  має рішення, що задовольняє **стандартним умовам** не для будь-яких значень  $E$  и  $\psi$ , а лише для строго певних – **власних значень**  $E$  и  $\psi$ .

Рішення рівняння полягає в знаходженні власних значень  $E$  и  $\psi$ . Тут  $E$  має сенс повної енергії частинки, а  $U$  - потенційної енергії.

Стандартні умови на  $\psi$  - функцію: у відповідності зі своїм змістом  $\psi$  - функція повинна бути:

- 1) однозначної (тому що ймовірність однозначна);
- 2) кінцевої (тому що ймовірність не може бути більше 1);
- 3) безперервної (тому що ймовірність не повинна мати стрибків);
- 4) повинна бути безперервною 1 - а похідна від  $\psi$  - функції.

Умова нормировки  $\psi$  - функції: для достовірної події (події, що обов'язково відбудеться)

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1.$$

Надалі рівняння Шредингера для стаціонарних станів будемо записувати у вигляді:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

Конкретні приклади інтегрування рівняння Шредингера.

**1) рух вільної частинки (U=0) уздовж осі x.**

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi &= 0; \\ \psi''_{xx} + k^2\psi &= 0, \quad \psi = e^{\lambda x} \text{ (підстановка);} \\ \lambda^2 + k^2 &= 0, \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm ik; \\ \psi &= c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Приватне рішення:

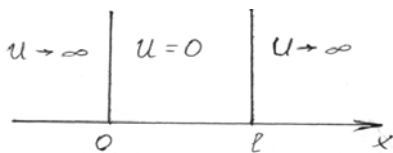
$$\begin{aligned} \psi = c_1 e^{ikx}, \quad \Rightarrow \quad \Psi = c_1 e^{ikx - \frac{iEt}{\hbar}}; \\ E = \hbar\omega, \quad \Rightarrow \quad \Psi = c_1 e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned}$$

Тобто вільна частинка описується плоскою хвилею де Бройля. Власні значення енергії визначаються з умови  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ :

$$E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m},$$

- енергія частинки має безперервний спектр, інакше кажучи, вільна частинка уздовж осі x може рухатися з будь-якою енергією.

**2) частинка в одновимірній прямокутній нескінченно глибокій потенційній ямі.**



$$\begin{aligned} \psi''_{xx} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0, \quad \Rightarrow \quad \psi''_{xx} + k^2\psi = 0; \\ \psi = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx. \end{aligned}$$

Частинка може перебувати лише в області  $0 < x < l$ .

$$\psi(0) = 0 \text{ (тому що повинен бути плавний перехід),} \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1$$

$$\psi(l) = 0, \Rightarrow 0 = c_2 \sin kl, \Rightarrow kl = \pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$k = \frac{n\pi}{l}; \quad E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}, \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ml^2};$$

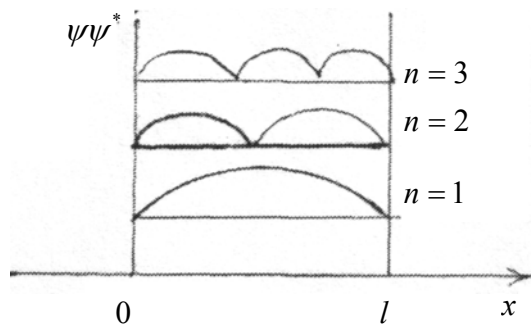
$$\psi(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Постійну  $c_2$  знайдемо з умови нормировки:

$$\int_0^l |\psi|^2 dx = 1, \Rightarrow c_2^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} c_2^2 \int_0^l \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} c_2^2 \left[ x \Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) \Big|_0^l \right] = \frac{1}{2} c_2^2 l.$$

$$\frac{1}{2} c_2^2 l = 1, \Rightarrow c_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}, \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$



Енергетичний інтервал між двома сусідніми рівнями дорівнює:

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} (2n + 1).$$

Окремі випадки:

а) Електрон перебуває в металі:  $l \sim 10^{-1} \text{ м}$ ,  $\Rightarrow \Delta E_n \sim 10^{-16} n (\text{эВ})$ . Така різниця енергії не може бути зареєстрована сучасними приладами, тому спектр практично можна вважати безперервним.

б) електрон в атомі:  $l \sim 10^{-10} \text{ м}$ ,  $\Rightarrow \Delta E_n \sim 10^2 n (\text{эВ})$ ,  $\Rightarrow$  дискретність енергетичних рівнів практично помітна.

### Висновки:

1. У загальному випадку для частинки в ямі існує квантування енергії. Практичне спостереження дискретності енергетичних рівнів залежить від маси частинки й розміру ями.
2. Існує мінімальна енергія:  $E_{\min} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2}$

Покажемо, що існування міні енергії випливає зі співвідношення невизначеностей Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta x = l, \quad \Delta p_x \leq p_x;$$

$$x \cdot p_x \approx \hbar, \quad \Rightarrow \quad p_x \approx \frac{\hbar}{x};$$

$$E = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ml^2}.$$

$$3. \frac{\Delta E_n}{E_n} \sim \frac{1}{n}.$$

$$\left( \frac{\Delta E_n}{E_n} \right) \Big|_{n \rightarrow \infty} \sim \left( \frac{1}{n} \right) \Big|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Даний результат є наслідком **принципу відповідності Бора**, відповідно до якого при більших квантових числах необхідний перехід до класичної фізики.

3) **Лінійний гармонійний осцилятор.** Частинка, що робить одномірні коливання під дією квазіупругої сили називається **гармонійним осцилятором**.

$$F = -kx, \quad \Rightarrow \quad U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2};$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

При накладенні стандартних умов на  $\psi$  – функцію, одержали наступне власне значення енергії.

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$  - нульова енергія (енергія нульових коливань).

$$E_{\text{клас}} = kT \Big|_{T \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Існування нульової енергії експериментально доведено в досвідах по розсіюванню світла при низьких температурах на кристалах: при  $T \rightarrow 0$  коливання атомів у кристалах не припиняються.

З іншого боку, існування нульової енергії треба зі співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta x \leq x, \quad \Delta p_x \leq p_x;$$

$$x \cdot p_x \approx \hbar; \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\hbar}{x}.$$

Повна енергія осцилятора:  $E = E_k + E_n$ .

Кінетична енергія:  $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

Потенційна енергія:  $E_n = U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \left( \frac{k}{m} = \omega^2; \Rightarrow k = m\omega^2 \right)$ .

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Шукаємо екстремум:

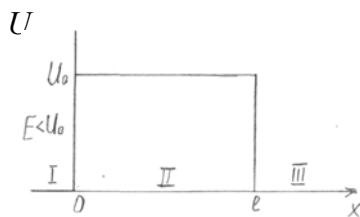
$$E'_x = 0; \Rightarrow -\frac{\hbar^2 k}{m} + m\omega^2 x = 0;$$

$$\hbar^2 k = m^2 \omega^2 x, \Rightarrow x = \frac{\hbar k}{m\omega}$$

У підсумку:  $E_{\min} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \cdot \frac{m\omega}{\hbar k} = \frac{1}{2} \hbar \omega$

#### 4) Проходження частинок через потенціальний бар'єр (тунельний ефект)

Нехай частинка, рухаючись із енергією  $E$  на своєму шляху зустрічає потенціальний бар'єр з висотою  $U_0$ . Обчислимо, яка ймовірність того, що частинка пройде через бар'єр.



В I і III областях потенціальна енергія  $U = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0;$$

$$I \Rightarrow \psi_I = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}.$$

Доданок виду  $e^{ikx}$  відповідає хвилі де Бройля, що розповсюджується уздовж осі  $x$ , а  $e^{-ikx}$  – відбитій хвилі.

$$III \Rightarrow \psi_{III} = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} \quad (B_3 = 0)$$

В II області потенціальна енергія  $U = U_0$

$$II \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0, \quad \psi = e^{\beta x};$$

$$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E); \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - E)};$$

$$II \Rightarrow \psi_{II} = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x};$$

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2; \quad D = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2.$$

де  $R$  - коефіцієнт відбиття;

$D$  - коефіцієнт проходження (прозорості).

Для знаходження постійні інтегрування скористаємося умовами, яким повинна задовольняти  $\psi$  - функція:

$$1) \psi_I(0) = \psi_{II}(0), \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2;$$

$$2) \psi_{II}(l) = \psi_{III}(l), \Rightarrow A_2 e^{\beta l} + B_2 e^{-\beta l} = A_3 e^{ikl};$$

$$3) \psi'_I(0) = \psi'_{II}(0); \Rightarrow ik(A_1 - B_1) = \beta(A_2 - B_2);$$

$$4) \psi'_{II}(l) = \psi'_{III}(l); \Rightarrow \beta(A_2 e^{\beta l} - B_2 e^{-\beta l}) = ikA_3 e^{ikl};$$

$$D \sim e^{-2\beta l} = \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right).$$

Проходження частинок через бар'єр у літературі одержало назву «**тунельного ефекту**». Завдяки йому відбувається  $\alpha$  - розпад ядер і синтез легких ядер.

Для бар'єра довільної форми:

$$D \sim e^{-2 \int_0^l \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)} dx}$$

## 5) Електрон в атомі водню

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \Rightarrow \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

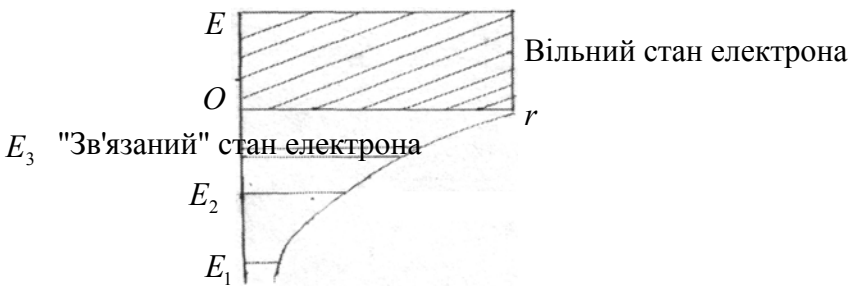
Рівняння Шредингера, записане в сферичній системі координат, має вигляд:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

При накладенні стандартних умов на  $\psi$  - функцію, можливі два випадки для власних значень енергії:

1) енергія електрона будь-яка й більше нуля, тобто енергетичний спектр безперервний, що відповідає електрону, що пролітає поблизу ядра й віддаляється на  $\infty$ ;

2) енергія  $E = -\frac{E_1}{n^2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), де  $E_1$  - енергія першого не збудженого стану атома водню. Цей випадок відповідає так званому **зв'язаному стану електрона**.



$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Власним значенням  $E$  відповідає власна  $\psi$  – функція

$$\psi = \psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi).$$

### Квантові числа і їхній зміст

- 1)  $n = 1, 2, 3, \dots$  - **головне квантове число**; визначає повну енергію частинок:

$$E = -\frac{E_1}{n^2}.$$

- 2)  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  - **орбітальне квантове число**; визначає модуль моменту імпульсу:

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

Квантові числа  $n$  і  $l$ , крім того, визначають форму й розмір електронної хмари.

- 3)  $m_l = -l, -l+1, \dots, 0, l-1, l$  - **магнітне орбітальне квантове число**; визначає проекцію вектора моменту імпульсу на вибраний напрямок у просторі:

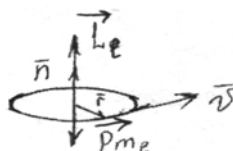
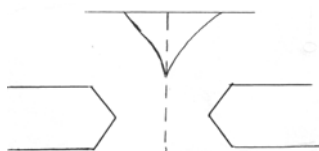
$$L_{lz} = \hbar m_l.$$

Крім того,  $m_l$  визначає орієнтацію електронної хмари в просторі.

Стани з однаковою енергією називаються **виродженими**, а їхнє число **кратністю виродження**:  $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$ .

### Дослід Штерна й Герлаха (1922г)

Штерн і Герлах пропускали атомарний водень, що перебуває в  $s$  – стані ( $l=0$ ), у неоднорідному магнітному полі. По теорії очікувалося одержати пляму в центрі екрана.



$$F = -\frac{dU}{dx}, \quad U = E_n = \int M d\varphi.$$

$$\bar{p}_{m_l} = IS\bar{n};$$

$$p_{m_l} = \frac{q}{T} S = \frac{eV}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{eVr}{2};$$

$$L_l = rmV.$$

де  $\bar{M} = [\bar{p}_m \bar{B}]$  - обертальний момент, що діє на магнітний момент  $p_m$ .

$$M = p_m B \sin \varphi.$$

$$\frac{p_{m_l}}{L_l} = -\frac{e}{2m},$$

- гіромагнітне відношення.

$$U = \int M d\varphi = \int p_{m_l} B \sin \varphi d\varphi = -p_{m_l} B \cos \varphi$$

$$F = p_{m_l} \frac{dB}{dx} \cos \varphi$$

$$p_{m_l} = -\frac{e}{2m} \hbar \sqrt{l(l+1)} = 0, \quad \text{тому що } l=0$$

Звідси  $F=0$ , тобто на пучок водню ніякі сили діяти не повинні.

Однак дослід показав розщеплювання пучка атома водню надвоє.

Пояснення досліду Штерна й Герлаха було дано в 1925р. Американські фізики Уленбек і Гаудсмит висунули гіпотезу, що в електрона поряд з орбітальним моментом імпульсу існує власний механічний момент імпульсу «спін», для якого справедливі наступні вираження:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)};$$

$$L_{s_z} = \hbar m_s, \quad m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2},$$

де  $m_s$  - магнітне спінове число.

Як виявилось надалі, існує аналогічне гіромагнітному відношення для власних магнітних  $p_{m_s}$  і власного механічного  $L_s$  моментів:

$$\frac{p_{m_s}}{L_s} = -\frac{e}{m}.$$

### Принцип Паулі

У квантовій системі не існує двох електронів з однаковою четвіркою квантових чисел  $n, l, m_l, m_s$ .



Принцип Паулі справедливий для ферміонів, тобто частинок з напівцілим спіном, і лежить в основі систематики заповнення електронних станів у періодичній системі елементів Менделєєва.

Стани з однаковими  $n$  утворюють оболонки, а стани з однаковими  $l$  утворюють підоболочки:

$n$	1	2	3	4
Назва оболонки	K	L	M	N
Число $e^-$ $2n^2$	2	8	18	32

$l$	0	1	2	3
Назва підоболочки	s	p	d	f
Число $e^-$ $2(2l+1)$	2	6	10	14

$$\text{Кратність виродження} = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2.$$

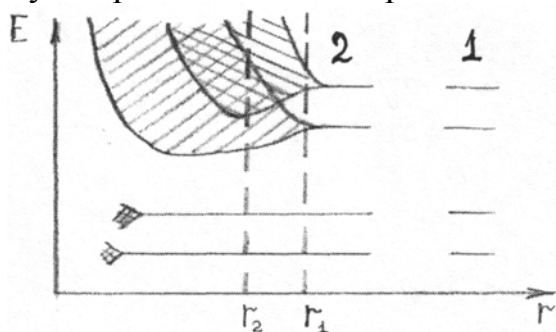
### б) Елементи зонної теорії твердого тіла.

Рівняння Шредингера справедливо для однієї частинки, що рухається в якомусь силовому полі. Квантово - механічне завдання у випадку руху багатьох частинок, наприклад, у кристалі вирішуються в наближенні адіабатичності й самоузгодженого поля. Як показують квантово - механічні розрахунки, при зближенні  $N$  - атомів кожний з енергетичних рівнів розщеплюється на  $N$  підуровнів, утворюючи зону.

$$\text{Ширина зони} \sim \text{декілька eV} \Rightarrow \Delta E \sim 10^{-23} \text{ eV}.$$

$kT (T = 1\text{K}) = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 1 \text{ Дж} \sim 10^{-4} \text{ eV}$ ,  $\Rightarrow$  електрони вільно можуть переміщатися в межах зони.

Як показують експерименти при зближенні атомів спостерігається наступне розщеплення енергетичних рівнів.



1- до зближення  
2- після зближення

### Висновки:

- 1) найменше розщеплюються нижчі енергетичні рівні;
- 2) найбільше розщеплюються енергетичні рівні, що відповідають валентним електронам;
- 3) для рівноважних відстаней між атомами типу  $r_1$  існують заборонені зони енергії, а для типу  $r_2$  їх немає (лужні метали).

Існування енергетичних зон безпосередньо витікає з рішення рівняння Шредингера для електрона кристала, що перебуває в періодичному силовому

полі кристала, для якого справедливе наступне вираження для потенціальної енергії:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0,$$

$$U(x, y, z) = \begin{cases} U(x+a, y, z); \\ U(x, y+b, z); \\ U(x, y, z+c); \end{cases}$$

де  $a, b, c$  - періоди решітки кристала уздовж вісей  $x, y, z$

Рішення рівняння має вигляд:

$$\psi = u_{\vec{k}}(\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

де  $\vec{k}$  - хвильовий вектор;

$u_{\vec{k}}(\vec{r})$  - періодичні функції Блоха.

$$U=0, \Rightarrow \psi = Ce^{i\vec{k}\vec{r}}, \Rightarrow \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0, \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$



Рішення Блоха отримані при наступних припущеннях:

1) адиабатичності - урахувався рух тільки електронів, а важкі іони у вузлах решітки вважали, що вони знаходяться у спокої.

2) самоузгодженого поля - електрон рухається в полі, створюваному всіма іонами й електронами кристала.

Зонна теорія твердого тіла дозволяє єдиним образом класифікувати тверді тіла на метали, напівпровідників, діелектрики по двох параметрах:

- характеру заповнення валентної зони (В.з.)

- ширині забороненої зони (З.з.)

Ширина забороненої зони (в енергетичних одиницях) для напівпровідників (Н/П), діелектриків (Д) і металів (Ме):

$$\Delta E_{n/n} \approx 0.1 \div 1 \text{ эВ}$$

$$\Delta E_{\text{Д}} - \text{несколько эВ}$$

$$\Delta E_{n/n} < \Delta E_{\text{Ме}} < \Delta E_{\text{Д}}$$

У металів валентна зона не повністю заповнена електронами, тому вона одночасно є зоною провідності, а ширина З.з. займає проміжне значення між n/n і діелектриками.

У Н/П и Д при нулі Кельвін валентна зона повністю заповнена електронами, а ширина З. з.  $\Delta E_{i/n}$  найменша.

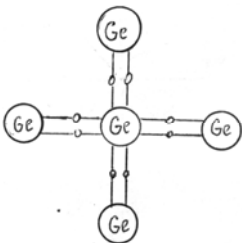
### ***Власна провідність напівпровідників***

Н/П - це речовини із проміжним типом провідності, які при нулі Кельвін поводяться як діелектрики. До них відносяться елементи IV, V, VI, груп таблиці Менделєєва.

Провідність хімічно чистих Н/П називають власною.

*Особливості власної провідності Н/П:*

- 1) У відмінності від металів існують так звані парно - електронні ковалентні зв'язки.



Електрон за рахунок отриманої енергії може покинути своє місце, у результаті чого на його місці утвориться позитивна заряджена дірка, тому в Н/П існує електронно - дірковий тип провідності.

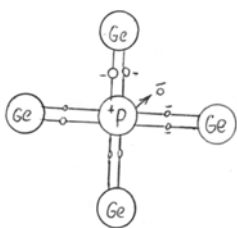
- 2) З ростом температури провідність росте за законом:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\Delta E / 2kT},$$

де  $\Delta E$  - ширина забороненої зони;

T - температура.

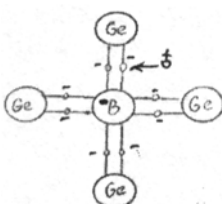
### ***Домішкова провідність***



Якщо в хімічно чистий напівпровідник впровадити домішку з валентністю на одиницю більше, то одержимо напівпровідник n - типу. Фосфор (P) чотири валентних електрони віддає для насичення ковалентних зв'язків, а п'ятий електрон залишається вільним, тобто одержує n/n з переважно електронним типом провідності, при низьких температурах.

Помітимо, що іон донорної домішки буде мати позитивний заряд.

Якщо в хімічно чистий Н/П впровадити домішку з валентністю на одиницю менше, допустимо тривалентний бор, одержимо Н/П p - типу, з переважно дірковим типом провідності при низьких температурах. У цьому випадку іон акцепторної домішки буде мати негативний заряд.



Варто мати на увазі, що впровадження домішок спотворює кристалічні зони й приводить до утворення

домішкових рівнів енергії. Донорні рівні розташовуються ближче до вільної зони, а акцепторні – до валентної.

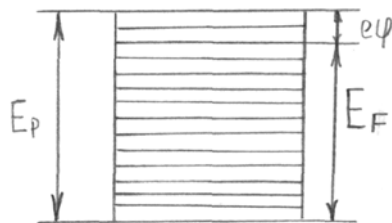
При низьких температурах переважає домішкова провідність, а при високих - власна.

### **Робота виходу електрона з металу**

Електрони провідності в металі перебувають у потенціальній ямі, для виходу з якої на поверхню їм необхідно перебороти **подвійний електричний шар**, утворений позитивно зарядженими іонами решітки й електронною хмарою над поверхнею металу.

МАХ кінетична енергія електронів при нулі Кельвін називається енергією Ферми ( $E_F$ ).

МІН енергія, яку необхідно затратити електрону, щоб вийти на поверхню називається **роботою виходу електрона**.



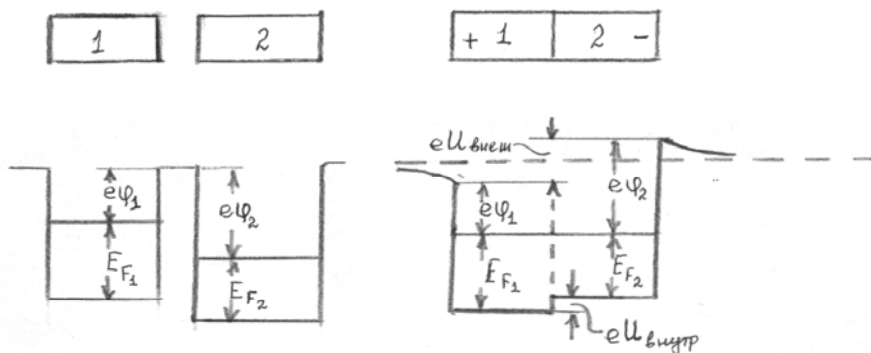
$$A_{\text{вих.}} = e\varphi = E_p - E_F;$$

$$E_F = E_F(T), \Rightarrow A_{\text{вих.}} = A_{\text{вих.}}(T).$$

У загальному випадку енергія Ферми залежить від температури, тому робота виходу теж залежить від  $T$ .

## **КОНТАКТНІ ЯВИЩА**

### 1) Контакт двох металів.



$$U_{\text{внеш.}} = \frac{A_{\text{вих.}2} - A_{\text{вих.}1}}{e};$$

$$U_{\text{внутр.}} = \frac{E_{F1} - E_{F2}}{e}.$$

При контакті двох металів поблизу контакту на поверхні металу виникає зовнішня контактна різниці потенціалів (визначається різницею робіт виходу

електронів з металу), усередині металу виникає внутрішня контактна різниця (визначається різницею енергії Фермі).

## **Термоелектричні явища**

### *1) Ефект Зєєбека (1821 р.).*

Замкнуте електричне коло, що складається зі спаїв двох різнорідних металів, називається **термопарою**.

Сутність ефекту: при різному нагріванні спаїв у замкнутому колі з'являється термо ЕДС:

$$\varepsilon_{\text{термо}} = \alpha(T_2 - T_1) = \alpha\Delta T,$$

де  $\alpha$  - постійна Зєєбека,

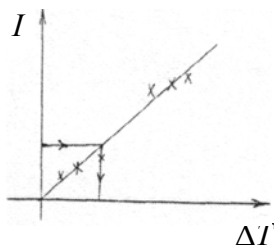
$\Delta T$  - різниця температур спаїв ( $\Delta T$  невелике).

При не занадто сильному нагріванні  $\varepsilon_{\text{термо}}$  прямо пропорційна різниці температур спаїв.

### *Причини виникнення термо ЕДС:*

- 1) переважна дифузія електронів у межах однорідного провідника від нагрітих ділянок до холодних;
- 2) залежність енергії Фермі від температури;
- 3) електрони металу захоплюються фононами (фонони - це кванти звукових коливань кристалічної решітки), які переважно переміщуються від гарячого кінця провідника до холодного.

Побудова графіка залежності сили струму в колі від різниці температур спаїв називається **градуїровкою термопари**.



Градуїровочний графік необхідний для визначення температури за відомим значенням струму.

На практиці термопари використовуються як датчики температур і слабких генераторів струму (КПД металевих термопар 0,5%, а Н/П ~ 15%)

### *2 Ефект Пельтьє (1834р.) (зворотний ефект Зєєбека).*

При пропусканні струму через коло, що складається зі спаїв різноарідних металів в одних спаях тепло буде виділятися, а в інші поглинатися.

$$Q = \Pi q = \Pi I t$$

де  $\Pi$  - постійна Пельтьє;

$I$  - сила струму;

$t$  - час протікання струму.

### 3. Ефект Томсона (1856р.)

При пропусканні струму через однорідний провідник, уздовж якого існує градієнт температури, відбувається виділення тепла за законом.

$$dQ = \tau I \frac{dT}{dl} dl,$$

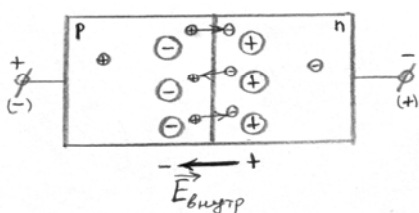
де  $\frac{dT}{dl}$  - градієнт температури.

### Контакт двох напівпровідників ((p - n) - перехід)

При контакті Н/П р и n типів за рахунок дифузії в зустрічних напрямках електронів і дірок відбувається їхня рекомбінація, у результаті:

1) граничний шар сильно збіднюється носіями заряду й тому він буде мати великий опір.

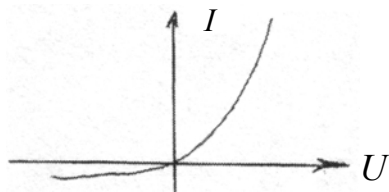
2) на границі між областями утвориться «подвійний електричний шар» з некомпенсованих зарядів іонів донорної і акцепторної домішок.



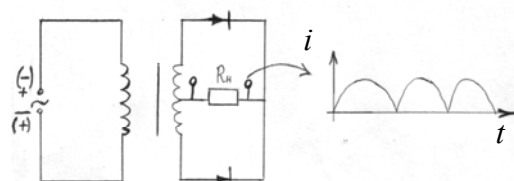
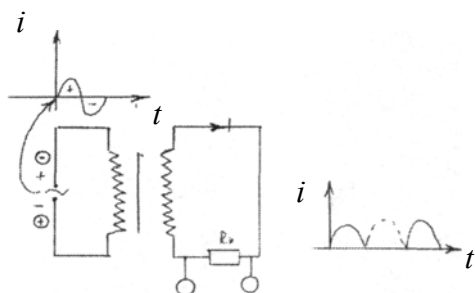
На схемі більші кружки відповідають іонам, а маленькі - електронам і діркам.

Внутрішнє поле перешкоджає руху основних носіїв через (p - n) - перехід. Таким чином, якщо на p область подати більший потенціал, чим на n, то опір переходу буде невеликим, а значить струм через перехід буде більшим, а якщо навпаки, то струм буде невеликим.

Вольт – амперна характеристика (p - n) – переходу має вигляд:

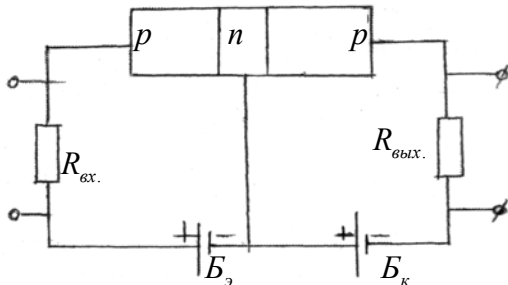


Таким чином, на практиці (p - n) - перехід можна використати як випрямлячі змінного струму.



## Транзистор із загальною базою

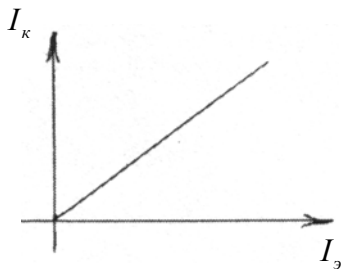
Розглянемо будову і принцип роботи (р - n - р) – транзистора із загальною базою, що перебуває в активному режимі.



Середня частина транзистора називається базою. Прилягаючі до бази по обидва боки області з іншим, ніж у неї, типом провідності утворюють емітер і колектор.

Через полярність батареї в колі емітера, опір переходу емітер - база буде малим, тому  $R_{вх.}$  повинне бути малим і струм у колі емітера може бути більшим.

Через полярність батареї в колі колектора, опір переходу база - колектор буде більшим, а значить  $R_{вих.}$  повинне бути більшим. Концентрація електронів у базі набагато менше, ніж дірок в емітері й товщина бази невелика, у результаті більша частина дірок з емітерного кола проходить у колекторне коло.



$$I_э = \frac{U_{вх.}}{R_{вх.}}; \quad I_к = \frac{U_{вих.}}{R_{вих.}};$$

$$I_э \approx I_к;$$

$$\frac{U_{вх.}}{R_{вх.}} = \frac{U_{вих.}}{R_{вих.}};$$

$$\frac{U_{вих.}}{U_{вх.}} = \frac{R_{вих.}}{R_{вх.}} \gg 1, \quad \Rightarrow \quad U_{вих.} \gg U_{вх.}$$

Транзистор із загальною базою служить для збільшення напруги й потужності сигналу, що подається в коло емітера.

$$P_{вих.} = I_к U_{вих.} \approx I_э U_{вих.} \gg P_{вх.}$$

## ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ

Протонно - нейтронна модель ядра була запропонована радянським фізиком Д.Д. Іваненко. Відповідно до цієї моделі ядра складаються із протонів і нейтронів.

**Протон:**  $p, {}^1_1p, {}^1_1p^+$ .

$$Z = +|e|; \quad s = \frac{1}{2}; \quad m_p = 1836m_e; \quad \mu_p = 2,79\mu_y, \quad (\mu_y = e\hbar/2m_p).$$

Очікувалося, що власний магнітний момент протона  $\mu_p$  буде дорівнює ядерному магнетону  $\mu_y$  за аналогією із власним магнітним моментом електрона  $\mu_e = e\hbar/2m_e$ . Тому експериментальне значення  $\mu_p$  одержало в літературі назву аномально великого значення магнітного моменту.

Донедавна вважалося, що протон - стабільна частинка

**Нейтрон:**  $n, {}^1_0n, {}^1_0n^0$ .

$$Z = 0; \quad s = \frac{1}{2}; \quad m_n = 1839m_e, \quad \mu_n = -1,91\mu_y.$$

Наявність у нейтральної частинки негативного власного магнітного моменту здавалося загадковим явищем.

У вільному стані нейтрон не стабільний, тобто розпадається з періодом напіврозпаду 12 хв., за схемою  $n \rightarrow p + e + \tilde{\nu}$ , ( $\tilde{\nu}$  - антинейтрино)

### Загальна характеристика ядер

${}^A_ZX$ ;  ${}_Z X^A$ ,  $X$  хімічний символ елемента

$Z$  - заряд ядра,

$Z$  - число протонів у ядрі,

$Z$  - порядковий номер елементів по таблиці Менделєєва.

$A$  - масове число (округлене до цілого числа малярна маса елемента).

$A$  - число протонів і нейтронів у ядрі.

Наприклад, для  ${}_2\text{He}^4$ , молярна маса  $M_{{}_2\text{He}^4} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

Ядра, з однаковими  $Z$  одержали назву **ізотопів**. Наприклад, водень має три ізотопи:  ${}_1\text{H}^1$  - протій,  ${}_1\text{H}^2$  - дейтерій,  ${}_1\text{H}^3$  - тритій.

Ядра з однаковими  $A$  називають **ізобарами**. У природі існують ядра із  $Z = 1 \div 92$  крім  $Tc (Z = 43)$  і  $Pm (Z = 61)$ . Елементи з  $Z = 93 \div 107$ , отримані штучним шляхом, називаються трансурановими елементами.

**Розмір ядер:**  $r \approx (1.3 \div 1.7) \cdot 10^{-15} A^{1/3} (\text{м})$

Використовуючи визначення густини  $\rho = \frac{m}{V}$ , маємо:



$$\left. \begin{array}{l} V \sim r^3 \sim A \\ m \sim A \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \approx const, \quad \rho = 10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

### Спін ядер.

Протони й нейтрони одержали назву нуклонів. Тому що вони є фермионами ( $s = \frac{1}{2}$ ), спіни ядер можуть бути як цілими, так і напівцілими. Експерименти показують, що спіни ядер не перевищують декількох одиниць, тобто відбувається взаємна компенсація спінів.

### Механізм ядерної взаємодії

Механізм ядерної взаємодії був запропонований японцем Х. Юкавой в 1935р. і експериментально доведений в 1947р. американцями Поуеллом і Оккіаліні. Згідно ідеї Юкави справедливі віртуальні процеси:

$$\begin{aligned} p &\rightleftharpoons p + \pi^0; & n &\rightleftharpoons n + \pi^0, & m_{\pi^0} &= 264m_e; \\ p &\rightleftharpoons n + \pi^+; & n &\rightleftharpoons p + \pi^-, & m_{\pi^\pm} &= 273m_e; \end{aligned}$$

Уявне порушення закону збереження енергії не відбувається. Час життя збудженого стану  $\Delta t$  й невизначеність енергії  $\Delta E$  зв'язані співвідношенням:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar.$$

Якщо поглинання  $\pi$  - мезона відбулося за час:

$$t < \Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{m_\pi c^2},$$

те порушення закону збереження енергії ми не виявимо.

Механізм взаємодії, запропонований Юкавою дозволив пояснити аномально велике значення магнітного моменту протона внеском орбітального руху  $\pi^+$  - мезона. Негативне значення магнітного моменту нейтрона – орбітальним рухом  $\pi^-$  - мезона. Крім того, запропонований механізм пояснив короткодіючий характер ядерних сил.

$$\begin{aligned} \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, & \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar; \\ c\Delta t = \frac{c\hbar}{\Delta E} = \frac{c\hbar}{m_\pi c^2} = \frac{\hbar}{m_\pi c}. \end{aligned}$$

## Властивості ядерних сил

Дослідним шляхом установлені характерні особливості ядерних сил:

- 1) вони короткодіючі ( $r \sim 10^{-15} \text{ м}$ ),
- 2) є нецентральними,
- 3) мають властивості насичення, тобто кожний нуклон взаємодіє з обмеженою кількістю інших нуклонів. Тому густина ядерної речовини однакова,
- 4) залежать від орієнтації спінів нуклонів,
- 5) має властивість зарядової незалежності, тобто взаємодії  $p \sim p$ ,  $p \sim n$ ,  $n \sim n$  є однаковими по величині.

Складний характер сил ядерної взаємодії й складність рішення квантово-механічної задачі багатьох тіл обумовило то, що дотепер не побудовано повну теорію ядра.

### Дефект мас. Енергія зв'язку атомних ядер.

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}.$$

Різниця мас протонів і нейтронів, що утворюють ядро в їх вільному й зв'язаному станах називається **дефектом мас**.

Енергія, що виділяється при злитті ядер, називається **енергією зв'язку**.

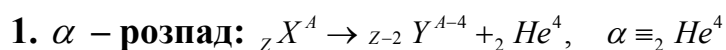
$$\Delta E = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2 = [Zm_{\text{1H}^1} + (A - Z)m_n - m_A]c^2;$$
$$c^2 = 931 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}}$$

Інакше, **енергію зв'язку** можна визначити як, мінімальна енергія, яку треба затратити, щоб розділити ядро на складові його протони й нейтрони.

## РАДІОАКТИВНІСТЬ

Явище самочинного розпаду ядер з випускненням частинок називається **радіоактивним розпадом**.

У загальному випадку розрізняють  $\alpha, \beta, \gamma$ - розпади, спонтанний розподіл важких ядер, протонну радіоактивність, вуглецевий і неонний розпади.



Закономірності  $\alpha$  розпаду:

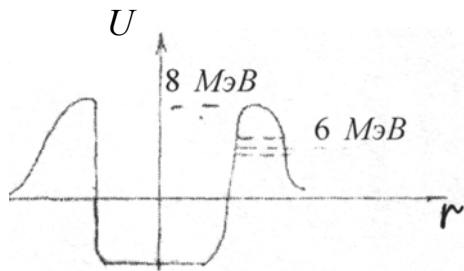
а) існують 25 природних  $\alpha$ - радіоактивних ядер, і 100 ядер синтезованих штучно.

б)  $\alpha$  – розпад характерний для ядер з  $A > 200$  і  $Z > 82$ .

с) при  $\alpha$  – розпаді  $Z \rightarrow Z - 2$ , а  $A \rightarrow A - 4$ .

d) у сучасній фізиці вважається, що  $\alpha$ -частинки утворюються у момент вильоту з ядра за рахунок сильної взаємодії між нуклонами.

e) енергія вильоту  $\alpha$ -частинки порядку 6 MeV, а висота потенціального бар'єра  $\sim 8,8$  MeV.



$\alpha$ -частинка виходить із ядра завдяки **тунельному ефекту**.

f) спектр  $\alpha$ -випромінювання дискретний (тобто  $\alpha$ -частинки вилітають із ядер зі строго певними значеннями енергії).

g) іонізуючий вплив великий, тому що заряд  $\alpha$ -частинки у два рази більше заряду електрона по модулю:  $Z = 2|e|$ .

h) проникаюча здатність невелика (затримується аркушем паперу).

i) супроводжується  $\gamma$ -випромінюванням.

**2.  $\beta$ -розпад:** ( $\beta^-$  - розпад,  $\beta^+$  - розпад,  $e^-$  - захоплення);

2.1)  $\beta^-$ -розпад:  ${}_Z X^A \rightarrow {}_{Z+1} Y^A + {}_{-1} e^0 + {}_0 \tilde{\nu}^0$ ,  ${}_0 \tilde{\nu}^0$  антинейтрино;

**Закономірності  $\beta$ -розпаду:**

a) існує 20 природних і 900 штучних  $\beta$ -радіоактивних ядер.

b) при  $\beta^-$ -розпаді  $Z \rightarrow Z + 1$ , а масове число  $A$  не змінюється.

c) вважається, що  $\beta^-$ -розпад відбувається за рахунок слабкої взаємодії між нуклонами, причому,  ${}_{-1} e^0$  і  ${}_0 \tilde{\nu}^0$  утворюються в момент вильоту з ядра:

$${}_0 n^1 \rightarrow {}_1 p^1 + {}_{-1} e^0 + {}_0 \tilde{\nu}^0.$$

d) у зв'язку з виниклими проблемами із законами збереження енергії й спіна, Паулі пророчив існування нової частинки - антинейтрино.

e) спектр  $\beta^-$ -випромінювання безперервний (це пояснюється перерозподілом енергії між  ${}_{-1} e^0$  і  ${}_0 \tilde{\nu}^0$ ).

f) іонізуючий вплив невеликий, у порівнянні з  $\alpha$ -випромінюванням, тому що  $Z = e$ .

g) проникаюча здатність більше, ніж в  $\alpha$ -випромінювання (затримується 2мм алюмінію).

h) супроводжується  $\gamma$ -випромінюванням.

2.2)  $\beta^+$ -розпад:  ${}_Z X^A \rightarrow {}_{Z-1} Y^A + {}_{+1} e^0 + {}_0 \nu^0$ ,  ${}_{+1} e^0$  - позитрон,  ${}_0 \nu^0$  - нейтрино.

нейтрино.

2.3)  $e^-$ -захоплення (електронне захоплення):  ${}_1 p^1 + {}_{-1} e^0 \rightarrow {}_0 n^1 + {}_0 \nu^0$ .

Ця реакція має місце при утворенні нейтронних зірок (супроводжується потужним випромінюванням нейтрино й рентгенівського випромінювання).

**3.  $\gamma$ - розпад:** є несамостійним видом радіоактивного розпаду. Це жорстке ЕМ - випромінювання з довжинами хвиль  $\lambda \sim 10^{-11} \div 10^{-9}$  см

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} - \text{т. к. } \lambda \text{ мало, } \Rightarrow \varepsilon - \text{ велика.}$$

Закономірності  $\gamma$  випромінювання:

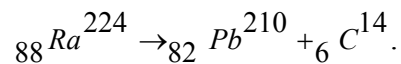
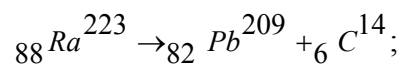
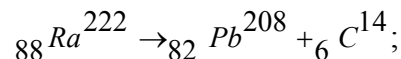
- а) іонізуючий вплив невеликий.
- б) проникаюча здатність найбільша, ( $> 5$  див свинцю)
- с) спектр дискретний.

**4. Спонтанний (самочинний) розподіл важких ядер.**

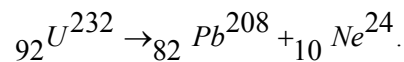
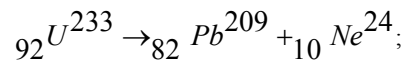
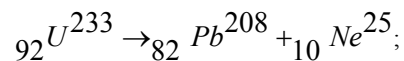
Його виявили радянські фізики Флерів і Петржак (1940 р.)

**5. Протонна радіоактивність** – розподіл ядер з випускненням одного або двох протонів.

**6. Вуглецевий розпад (1984 р.):**  $P_{e^{14}C} = \frac{P_{\alpha\text{-распад}}}{10^{10}}$ .



**7) Неонний розпад (1985р.):**  $P_{{}_{10}Ne^{24}} = \frac{P_{\alpha\text{-распад}}}{10^{12}}$ .



### **Закон радіоактивного розпаду**

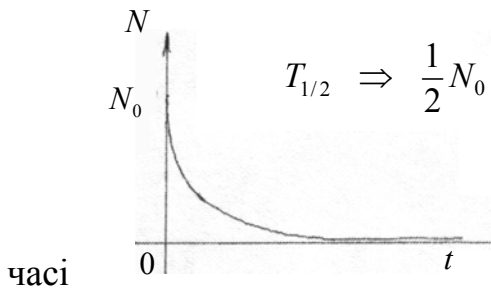
$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

де N - число ядер, що не розпалися до моменту часу t;

$N_0$ - число ядер у початковий момент часу (t=0);

$\lambda$  – постійна радіоактивного розпаду.

Інтервал часу, за який розпадається половина наявних ядер називається **періодом напіврозпаду**.



$$T_{1/2} \Rightarrow \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \Rightarrow \ln 2 = \lambda T_{1/2}, \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Число ядер, що розпадаються за одиницю називається активністю радіоактивного ізотопу.

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right|; \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}; \quad N_0 = \frac{m}{M} N_A$$

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}, \quad A(t=0) = \lambda N_0, \quad A = A_0 e^{-\lambda t};$$

$$[A] = \frac{\text{расп}}{\text{с}}; \quad 1 \text{Ku} = 3.7 \cdot 10^{10} \frac{\text{расп}}{\text{с}}.$$

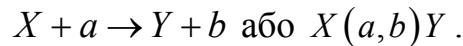
$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \quad - \text{число ядер, що розпалися за час } t$$

## **ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ**

Процес сильної взаємодії ядер між собою або з елементарною частинкою називається **ядерною реакцією**. При реакціях на повільних частинках утворюється проміжне ядро:



Якщо ядро бомбардується частинкою високої енергії, то схема реакції така:



У ході ядерних реакцій виконуються закони збереження заряду  $Z$ , масового числа  $A$ , релятивістських енергій і імпульсу й т.д.

**Деякі елементи класифікацій ядерних реакцій:**

- 1) По енергіях частинок, що бомбардують: реакції йдуть при
  - малих енергіях ( $\sim$  еВ)
  - середніх енергіях ( $\sim$  МеВ)
  - більших енергіях ( $\sim$  100МеВ)
- 2) По роду частинок, що беруть участь:
  - незаряджені частинки:  $n$
  - заряджені частинки:  $p, \alpha, e$
  - фотоядерні реакції:  $\gamma$
- 3) По роду ядер, що беруть участь:
  - ядра малих мас ( $A < 50$ )
  - середніх мас ( $50 < A < 100$ )
  - більших мас ( $A > 100$ )

Енергетичний вихід ядерної реакції  $X + a \rightarrow Y + b$  розраховується за формулами:

$$Q = \left[ (m_X + m_a) - (m_Y + m_b) \right] \cdot c^2;$$

$$Q = (E_{kY} + E_{kb}) - (E_{kX} + E_{ka});$$

Якщо  $[m] = \text{a.e.m.}; \quad c^2 = 931 \frac{\text{МэВ}}{\text{a.e.m.}};$

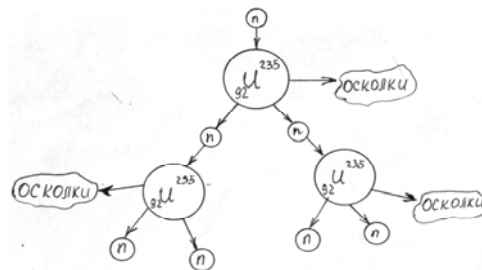
Якщо  $[m] = \text{кг}; \quad c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}^2.$

### Особливості розподілу ядер урану

Німецькі фізики Ганн і Штрассман в 1938р. виявили, що ядра урану при поглинанні нейтронів діляться на 2 осколки ( $m_1 / m_2 \sim 2/3$ )

Особливості розподілу ізоотопу  ${}_{92}\text{U}^{235}$ :

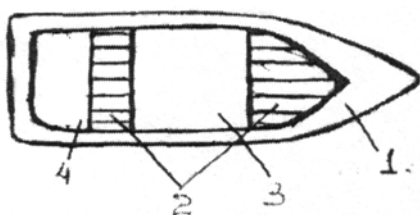
- 1)  ${}_{92}\text{U}^{235}$  особливо добре ділиться повільними нейтронами;
- 2) при розподілі одного ядра виділяється енергія 200 Мев;
- 3) при розподілі одного ядра вилітають 2 n або 3 n;
- 4) швидкість нейтрона  $V \sim 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}};$
- 5) при критичній масі речовини, що ділиться, виникає самопідтримуюча ланцюгова ядерна реакція.



Ядерні вибухи в природі вкрай мало ймовірні, тому що наявність у руді  ${}_{92}\text{U}^{235}$  становить 0,72%, а 99,27% становить  ${}_{92}\text{U}^{238}$ , що ділиться на швидких нейтронах.

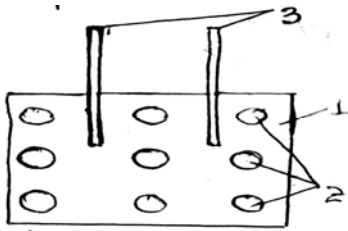
Реалізація ядерної реакції може проходити у двох варіантах:

- 1) некерований варіант (ще здійснюється в ядерній бомбі).



- 1 - масивна оболонка з високоміцної сталі
- 2 - некритичні маси урану ( ${}_{92}\text{U}^{235}$ )
- 3 - електронна начинка
- 4 - тритил

2) керований варіант (реалізується на атомних електростанціях).

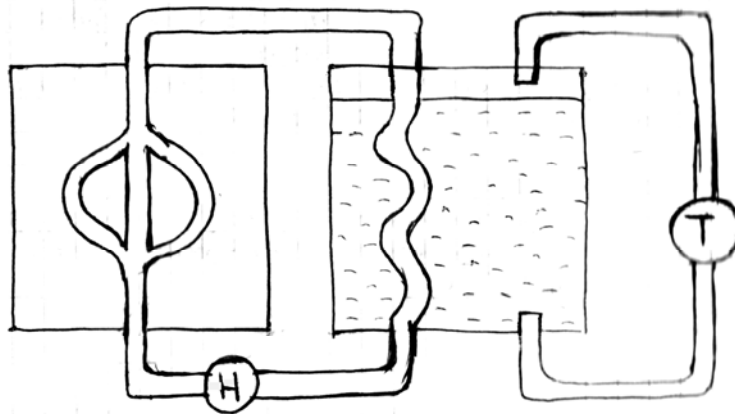


Принципова схема уран - графітового реактора.

- 1 - графітові блоки
- 2 - уранові стрижні (ТВЕЛ - тепловиділяючі елементи)
- 3 - поглиначі нейтронів

Ядра  ${}_{92}U^{235}$  діляться, поглинаючи нейтрон, і викидають 2 нейтрони, кожний з яких має  $v \sim 10^7 \frac{M}{c}$ . Нейтрони, зіштовхуючись із ядрами вуглецю, уповільнюються до теплових швидкостей. Швидкість реакції керується введенням або виведенням стрижнів, що містять кадмій або бор. Якщо стрижні повністю уведені то реактор заглушений.

Схема АЕС



- 1 - активна зона
- 2 - теплоносій
- 3 - теплообмінники
- 4 - насоси
- 5 - вода
- 6 - турбіна

Уран - графітові реактори були запущені:

1942р. - Фермі (Чиказький університет)

1946р.- Курчатов (Москва)

1954р. - 1-я АЕС для мирних цілей ( Обнінськ, СРСР)

Інтерес до АЕС обумовлений тим фактом, що енергія, що виділяє

$$1\text{кг } {}_{92}U^{235} \rightarrow \begin{cases} 1800\text{т бензина} \\ 2500\text{т вугілля} \end{cases};$$

### *Термоядерна реакція*

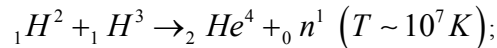
Реакція синтезу легких ядер (утворення з легких ядер більш важких), що протікає при високій температурі називається **термоядерною реакцією**.

Для протікання реакції необхідно затратити енергію проти кулоновського взаємодії ядер.

$$E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad r \sim 10^{-15} \text{ м}, \quad \Rightarrow \quad E \sim 0.7 \text{ MeV}.$$

$$\text{На одне ядро } \sim 0,35 \text{ MeV}, \quad \Rightarrow \quad kT, \quad \Rightarrow \quad T \sim 10^9 \text{ K}.$$

Однак у природі існують реакції, які протікають при температурах на 2 порядки нижче:



$$\Delta E_{\text{питома.}} = \frac{\Delta E}{A};$$

$$\Delta E_{\text{питома.}} ({}_{92}\text{U}^{235}) \sim 0.85 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}};$$

$$\Delta E_{\text{питома.}} (\text{термояд.}) \sim 3,5 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}}.$$

Реалізація термоядерних реакцій:

1) некерований варіант (здійсним в термоядерній бомбі, запалом у якій служить ядерна бомба).

Першу термоядерну бомбу випробував Радянський Союз в 1953р. на архіпелазі Нова Земля.

2) керований варіант (реалізується в термоядерному реакторі)

Найбільш перспективний варіант термоядерного реактора був запропонований радянськими фізиками Сахаровим і Таммом. Він називається «Токамак». Реактор являє собою порожній тороїд, у якому плазма втримується магнітним полем. Будівництво першого промислового реактора такого типу почато в 2007 році у Франції.



### **Чотири типи фундаментальних взаємодій**

Відомі 4 типи фундаментальних взаємодій між елементарними частинками:

Тип взаємодії	Константи взаємодій	Радіус дії
Сильне	10	$10^{-15} \text{ м}$
Електромагнітне	1/37	$\infty$



Слабке	$10^{-14}$	коротко діюче
Гравітаційне	$10^{-39}$	$\infty$

**Сильне** – обумовлює взаємодію нуклонів у ядрах атомів.

**Електромагнітне** - обумовлює взаємодію між зарядженими частинками. Ця взаємодія описує більшість фізичних, хімічних, біологічних процесів відомих нам, тому вивчено найкраще.

**Слабке** – відповідає за всі види  $\beta$ - розпадів ядер і за взаємодією нейтрино з речовиною.

**Гравітаційне** – є універсальною взаємодією.

### Класифікація мікрочастинок

- Фотон:**  $\gamma$  ( $Z=0, s=1$ ) – приймає участь в електромагнітних взаємодіях.
- Лептони:**  $e, \mu$  (мюон),  $\tau$  (тау лептон) і  $\tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}$  - античастинки;  
 $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  (нейтрино електронне, нейтрино мюонное й тау - нейтрино) і  $\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau$  - античастинки.  
 $(Z=0, \pm 1, s=\frac{1}{2})$  Беруть участь в електромагнітних і слабких взаємодіях.
- Мезони:**  $\pi^0, \pi^+, \pi^-, K^0, K^+, K^-, \eta$  – ета мезон ( $Z=0, \pm 1, S=1$ )  
Беруть участь у сильних, електромагнітних і слабких взаємодіях.
- Баріони:**  $p, n, \Lambda, \Sigma^0, \Sigma^+, \Sigma^-$  - гіперони,  $Z=0, \pm 1; s=\frac{1}{2}$ .  
Беруть участь у всіх взаємодіях.

### Античастинки.

Електрон ( $e$ ) відрізняється від позитрона ( $\tilde{e}$ ) тільки зарядом. Протон від антипротона відрізняється зарядом і знаком власного магнітного моменту ( $p \sim \tilde{p}$ ).

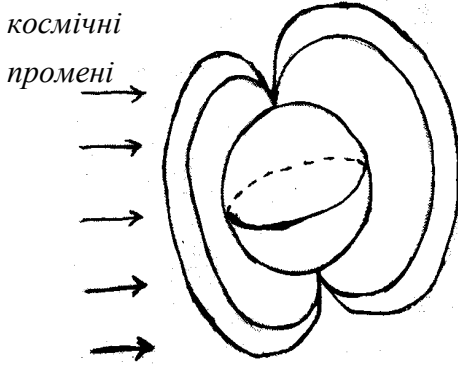
Нейтрон від антинейтрона – знаком власного магнітного моменту ( $n \sim \tilde{n}$ ).  
Нейтрино відрізняється від антинейтрино спіральністю  $\nu \sim \tilde{\nu}$ .



При взаємодії часток з античастинками відбувається анігіляція. Істинно нейтральними частинками в природі є  $\gamma, \pi^0, \eta$ .

**Космічні промені** – це потік частинок із Всесвіту на Землю, що складаються на 90% р, 4%  $\alpha$  – частинок ( ${}^4_2\text{He}$ ) і 6% - ін. частинки. До 20км., над поверхнею Землі це первинні космічні промені, нижче - вторинні.

### Радіаційні пояси



$\vec{F} = q[\vec{V}\vec{B}]$  - у магнітному полі Землі на заряджені частинки діє сила Лоренца.  
У площині екватора 1- й радіаційний пояс (600 ÷ 6000) км., і 2-й пояс (20 ÷ 60) · 10<sup>3</sup> км. На ширині 70° ці пояси замикаються на висоті порядку 100км.

### Фундаментальні частинки (нескладові частинки)

До теперішнього часу відомо 16 фундаментальних частинок (не вважаючи античастинок). В 1964р. американський фізик Гелл – Манн висунув гіпотезу, відповідно до якої всі елементарні частинки побудовані із кварків. Останній із кварків *t* - кварк був відкритий в 1994р. Кварки *u*, *c*, *t* мають заряд  $Z = +\frac{2}{3}$ .

Кварки *d*, *s*, *b* мають заряд  $Z = -\frac{1}{3}$ . Всі вони мають спин  $s = \frac{1}{2}$ .

Баріони - побудовані з 3 кварків:

$$p = uud; \quad Z_p = +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = +1;$$

$$n = udd; \quad Z_n = +\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Мезони складаються з 2-х кварків: кварка й антикварка.

Лептони: *e*,  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ .

Лептони й кварки утворюють покоління :

1 покоління: *u*, *d*,  $\nu_e$ , *e*.

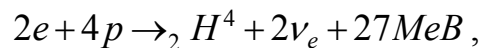
2 покоління: *c*, *s*,  $\nu_\mu$ ,  $\mu$ .

3 покоління: *t*, *b*,  $\nu_\tau$ ,  $\tau$ .

Отже, з 16 фундаментальних частинок, 12 є ферміонами.

Частинки першого покоління самі легкі, а третього найважчі.

Із частинок першого покоління побудовані атоми. Електронне нейтрино виділяється при термоядерних реакціях у надрах зірок.



Не зовсім ясно, навіщо потрібні частинки 2-го й 3-го поколінь.

Як переносники взаємодії відкриті 4 бозона, (частинки із цілим спіном):

$\gamma$  - квант (фотон) ( $s = 1$ ) - переносник електромагнітної взаємодії.

$g$  - глюон ( $s = 1$ ) переносник взаємодії між кварками.

$W^0, Z^\pm$  – проміжні слабкі бозони – переносники електрослабкої взаємодії.

Фізики не сумніваються в існуванні ще однієї фундаментальної частинки – гравітону – переносника гравітаційних взаємодій. ( $m = 0; Z = 0; s = 2$ )

## СУЧАСНІ ТЕОРІЇ

1) **Електрослабка теорія:** електромагнітне +слабке;

В 1979р. Нобелівська премія по фізиці була вручена групі фізиків за створення електрослабкої теорії, що об'єднала електромагнітні й слабкі взаємодії в природі.

2) побудовані **теорії «великого об'єднання»:** сильне + електромагнітне + слабке.

Масштаб об'єднання:  $r \sim 10^{-30}$  см;  $E \sim 10^{14}$  Гев, ( $1\text{Г} = 10^9$ ).

Деякі з варіантів теорії пророкують розпад протона.

Час життя протона  $\tau_p \sim 10^{30}$  років. Час існування Всесвіту

$\tau_{\text{Всесвіту}} \sim 10^{10}$  років. Необхідно взяти 16 тонн  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\Rightarrow 10^{31}$  протонів,  $\Rightarrow 10$  распадов за 1 рік.

3) **Теорія супергравітації:** сильне + електромагнітне + слабке + гравітаційне;

Відстань на якій працює ця теорія  $r \sim 10^{-33}$  см., а  $E = 10^{19}$  ГеВ,

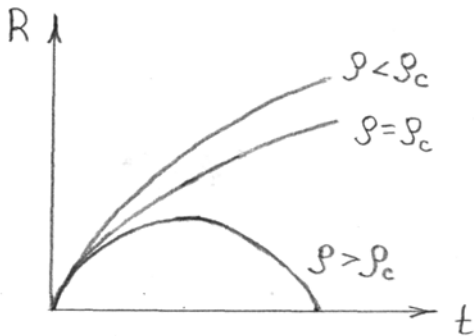
4) **Теорія суперструн.**

Струни – це гіпотетичні об'єкти розмір яких становить  $\sim 10^{-33}$  см. Незбудженому стану струн відповідають безмасові частинки, а збуджений стан струни описує весь спектр мас елементарних частинок. Незамкнутим струнам відповідають частки зі спіном  $\frac{1}{2}$  і 1, а замкнутим  $0, \frac{1}{2}, 1, 3/2, 2$ .

Несуперечлива теорія струни будується в десятивимірному просторі (9 просторових координат + 1 часова координата).

## Гравітація й космологія

По Фрідману еволюція Всесвіту залежить від того, як її середня густина  $\rho$  відрізняється від критичної  $\rho_c = 10^{-29} \text{ г/см}^3$ : якщо  $\rho \leq \rho_c$  розширення триває вічно, якщо  $\rho > \rho_c$  розширення досягає максимуму й Всесвіт реколлапсує.



На графіку еволюції Всесвіту  $R$  - масштабний фактор,  $t$  - космологічний час.

Останнім часом інтерес до космології підсилюється у зв'язку з тим, що теорії «великого об'єднання», «супергравітації» і суперструн ніколи не зможуть експериментально підтвердити в земних умовах. Їх можна перевірити лише у Всесвіті, де реалізуються енергії, характерні для цих теорій.

## Нанотехнології

Нанотехнологія – міждисциплінарна галузь фундаментальної і прикладної науки і техніки, що має справу з сукупністю теоретичного обґрунтування, практичних методів дослідження, аналізу і синтезу, а також методів виробництва і вживання продуктів із заданою атомною структурою шляхом контрольованого маніпулювання окремими атомами і молекулами.

### Визначення і термінологія

На сьогоднішній день в світі немає стандарту, що описує, що таке нанотехнології, що таке нанопродукція. У Єврокомісії створена спеціальна група, якою дали два роки на те, щоб розробити класифікацію нанопродукції.

Серед підходів до визначення поняття «нанотехнології» є наступні:

1. В Технічному комітеті Iso/ТК 229 під нанотехнологіями мається на увазі наступне:

- знання і управління процесами, як правило, в масштабі 1 нм, але що не виключає масштаб менше 100 нм в одному або більш вимірах, коли введення в дію розмірного ефекту (явища) приводить до можливості нових вживань;

- використання властивостей об'єктів і матеріалів в нанометровому масштабі, які відрізняються від властивостей вільних атомів або молекул, а також від об'ємних властивостей речовини, що складається з цих атомів або молекул, для створення досконаліших матеріалів, приладів, систем, що реалізують ці властивості.

2. Згідно «Концепції розвитку в Російській Федерації робіт в області нанотехнологій на період до 2010 року» (2004 р.) нанотехнологія визначається як сукупність методів і прийомів, що забезпечують можливість контрольованим чином створювати і модифікувати об'єкти, що включають компоненти з розмірами менше 100 нм, хоч би в одному вимірі, і в результаті цього принципово нові якості, що отримали, дозволяють здійснювати їх інтеграцію в повноцінно функціонуючі системи більшого масштабу.

Практичний аспект нанотехнологій включає виробництво пристроїв і їх компонентів, необхідних для створення, обробки і маніпуляції атомами, молекулами і наночастками. Мається на увазі, що не обов'язково об'єкт повинен володіти хоч одним лінійним розміром менше 100 нм – це можуть бути макрооб'єкти, атомарна структура яких контрольовано створюється з дозволом на рівні окремих атомів, або ж наноб'єкти, що містять в собі. У ширшому сенсі цей термін охоплює також методи діагностики, характерології і досліджень таких об'єктів.

Нанотехнології якісно відрізняються від традиційних дисциплін, оскільки на таких масштабах звичні, макроскопічні технології поводження з матерією часто непридатні, а мікроскопічні явища, зневажливо слабкі на звичних масштабах, стають набагато значнішими: властивості і взаємодії окремих атомів і молекул або агрегатів молекул (наприклад, сили Ван-дер-Ваальса), квантові ефекти.

Нанотехнологія і особливо молекулярна технологія – нові, дуже мало досліджені дисципліни. Основні відкриття, що передбачаються в цій області, поки не зроблені. Проте, дослідження, що проводяться, вже дають практичні результати. Використання в нанотехнології передових наукових досягнень дозволяє відносити її до високих технологій.

Розвиток сучасної електроніки йде по шляху зменшення розмірів пристроїв. З іншого боку, класичні методи виробництва личать до свого природного економічного і технологічного бар'єру, коли розмір пристрою зменшується ненамного, зате економічні витрати зростають експоненціально. Нанотехнологія – наступний логічний крок розвитку електроніки і інших наукоємких виробництв.

## **Історія**

Багато джерел, в першу чергу англomовних, перша згадка методів, які згодом будуть названі нанотехнологією, пов'язують з відомим виступом Річарда Фейнмана «На тому світі повно місця» (англ. «There's Plenty of Room at

the Bottom»), зробленим їм в 1959 році в Каліфорнійському технологічному інституті на щорічній зустрічі Американського фізичного суспільства. Річард Фейнман передбачив, що можливо механічно переміщати одиночні атоми, за допомогою маніпулятора відповідного розміру, принаймні, такий процес не перечив би відомим на сьогоднішній день фізичним законам.

Цей маніпулятор він запропонував робити наступним способом. Необхідно побудувати механізм, що створював би свою копію, лише на порядок меншу. Створений менший механізм повинен знову створити свою копію, знову на порядок меншу і так до тих пір, поки розміри механізму не будуть соізмеріми з розмірами порядку одного атома. При цьому необхідно буде робити зміни в пристрої цього механізму, оскільки сили гравітації, що діють в макросвіті, робитимуть весь менший вплив, а сили міжмолекулярних взаємодій і Ван-дер-Ваальсови сили все більше впливатимуть на роботу механізму. Останній етап – отриманий механізм збере свою копію з окремих атомів. Принципове число таких копій необмежено, можна буде за короткий час створити довільне число таких машин. Ці машини зможуть таким же способом, поатомной збіркою, збирати макроречі. Це дозволить зробити речі на порядок дешевше – таким роботам (нанороботам) потрібно буде дати лише необхідну кількість молекул і енергію, і написати програму для збірки необхідних предметів. До цих пір ніхто не зміг спростувати цю можливість, але і нікому доки не удалося створити такі механізми. От як Р. Фейнман описав передбачуваний ним маніпулятор: Я думаю про створення системи з електричним управлінням, в якій використовуються виготовлені звичайним способом «обслуговуючі роботи» у вигляді зменшених в чотири рази копій «рук» оператора. Такі мікромеханізми зможуть легко виконувати операції в зменшеному масштабі. Я говорю про крихітних роботів, забезпечених серводвигателями і маленькими «руками», які можуть закручувати настільки ж маленькі болти і гайки, свердлити дуже маленькі отвори і так далі. Коротше кажучи, вони зможуть виконувати всі роботи в масштабі 1:4. Для цього, звичайно, спочатку слід виготовити необхідні механізми, інструменти і руки-маніпулятори в одну четвертую звичайної величини (насправді, ясно, що це означає зменшення всіх поверхонь контакту в 16 разів). На останньому етапі ці пристрої будуть обладнані серводвигателями (із зменшеною в 16 разів потужністю) і приєднані до звичайної системи електричного управління. Після цього можна буде користуватися зменшеними в 16 разів руками-маніпуляторами! Сфера вживання таких мікророботів, а також мікромашин може бути задоволене широкою — від хірургічних операцій до транспортування і переробки радіоактивних матеріалів. Я сподіваюся, що принцип пропонованої програми, а також пов'язані з нею несподівані проблеми і блискучі можливості зрозумілі. Більш того, можна задуматися про можливість подальшого істотного зменшення масштабів, що, природно, зажадає подальших конструкційних змін і модифікацій (до речі, на певному етапі, можливо, доведеться відмовитися від «рук» звичної форми), але дозволить виготовити нові, значно досконаліші пристрої описаного типу. Ніщо не заважає

продовжити цей процес і створити скільки завгодно крихітних верстатів, оскільки немає обмежень, пов'язаних з розміщенням верстатів або їх матеріаломісткістю. Їх об'єм буде завжди набагато менше об'єму прототипу. Легко розрахувати, що загальний об'єм 1 млн зменшених в 4000 разів верстатів (а отже, і маса використовуваних для виготовлення матеріалів) складатиме менше 2 % від об'єму і маси звичайного верстата нормальних розмірів. Зрозуміло, що це відразу знімає і проблему вартості матеріалів. В принципі, можна було б організувати мільйони однакових мініатюрних заводиків, на яких крихітні верстати безперервно свердлили б отвори, штампували деталі і тому подібне. У міру зменшення розмірів ми постійно стикатимемося з дуже незвичайними фізичними явищами. Все, з чим доводиться зустрічатися в житті, залежить від масштабних чинників. Крім того, існує ще і проблема «злипання» матеріалів під дією сил міжмолекулярної взаємодії (так звані сили Ван-дер-Ваальса), яка може приводити до ефектів, незвичайних для макроскопічних масштабів. Наприклад, гайка не відділятиметься від болта після відкручування, а в деяких випадках щільно «приклеюватиметься» до поверхні і так далі. Існує декілька фізичних проблем такого типу, про які слід пам'ятати при проектуванні і створенні мікроскопічних механізмів.

В ході теоретичного дослідження даної можливості, з'явилися гіпотетичні сценарії кінця світу, які передбачають, що нанороботи поглинуть всю біомасу Землі, виконуючи свою програму саморозмноження (так званий «сірий слиз» або «сіра рідота»).

Перші припущення про можливість дослідження об'єктів на атомному рівні можна зустріти в книзі «Opticks» Ісаака Ньютона, що вийшла в 1704 році. У книзі Ньютон виражає надію, що мікроскопи майбутнього коли-небудь зможуть досліджувати «таємниці корпускул».

Вперше термін «нанотехнологія» спожив Норіо Танігуті в 1974 році. Він назвав цим терміном виробництво виробів розміром декілька нанометрів. У 1980-х роках цей термін використовував Ерік К. Дрекслер в своїх книгах: «*Машины создания: Грядущая эра нанотехнологии*» («*Engines of Creation: The Coming Era of Nanotechnology*») и «*Nanosystems: Molecular Machinery, Manufacturing, and Computation*». Центральне місце в його дослідженнях грали математичні розрахунки, за допомогою яких можна було проаналізувати роботу пристрою розмірами в декілька нанометрів.

## **Фундаментальні положення**

Недавно було з'ясовано, що закони тертя в макро- і наносвіті виявилися схожі.

## **Скануюча зондська мікроскопія**

Одним з методів, використовуваних для вивчення нанооб'єктів, є скануюча зондська мікроскопія. В рамках скануючої зондської мікроскопії реалізовані оптичні методики.

Дослідження властивостей поверхні за допомогою скануючого зондського мікроскопа (СЗМ) проводяться на повітрі при атмосферному тиску, у вакуумі і навіть в рідині. Різні методики СЗМ дозволяють вивчати як провідні, так і не провідні об'єкти. Крім того, СЗМ підтримує поєднання з іншими методами дослідження, наприклад з класичною оптичною мікроскопією і спектральними методами.

За допомогою скануючого зондського мікроскопа (СЗМ) можна не лише побачити окремі атоми, але також вибірково впливати на них, зокрема, переміщати атоми по поверхні. Ученим вже удалося створити двовимірні наноструктури на поверхні, використовуючи даний метод. Наприклад, в дослідницькому центрі компанії ІВМ, послідовно переміщаючи атоми Ксенону на поверхні монокристала нікелю, співробітники змогли викласти три букви логотипу компанії, використовуючи 35 атомів Ксенону.

При виконанні подібних маніпуляцій виникає ряд технічних труднощів. Зокрема, потрібне створення умов надвисокого вакууму ( $10^{-11}$  тор), необхідно охолоджувати підкладку і мікроскоп до наднизьких температур (4-10 К), поверхня підкладки має бути атомарно чистою і атомарно гладкою, для чого застосовуються спеціальні методи її приготування. Охолодження підкладки виробляється з метою зменшення поверхневої дифузії атомів, що облягають, охолодження мікроскопа дозволяє позбавитися від термодрейфа.

Для вирішення завдань, пов'язаних з точним виміром топографії, властивостей поверхні і з маніпуляцією нанооб'єктами за допомогою зонда скануючого атомно-силового мікроскопа, була запропонована методологія орієнтованого для особливості сканування (ООС). ООС підхід дозволяє в автоматичному режимі реалізувати нанотехнологію «знизу-вгору», тобто технологію поелементної збірки нанопристроїв. При цьому робота виробляється при кімнатній температурі, оскільки ООС в реальному масштабі часу визначає швидкість дрейфу і виконує компенсацію зсуву, що викликається дрейфом. На багатозондських інструментах ООС дозволяє послідовно застосувати до нанооб'єкту будь-яку кількість аналітичних і технологічних зондів, що дає можливість створювати складні нанотехнологічні процеси, що складаються з великого числа вимірювальних, технологічних і контрольних операцій.

Проте в більшості випадків немає необхідності маніпулювати окремими атомами або наночастками і досить звичайних лабораторних умов для вивчення об'єктів, що цікавлять.

## **Наночастки**



Сучасна тенденція до мініатюризації показала, що речовина може мати абсолютно нові властивості, якщо узяти дуже маленьку частку цієї речовини. Частки розмірами від 1 до 100 нанометрів зазвичай називають «наночастками». Так, наприклад, виявилось, що наночастки деяких матеріалів мають дуже хороші каталітичні і адсорбційні властивості. Інші матеріали показують дивні оптичні властивості, наприклад, надтонкі плівки органічних матеріалів застосовують для виробництва сонячних батарей. Такі батареї, хоч і володіють порівняно низькою квантовою ефективністю, зате дешевші і можуть бути механічно гнучкими. Удається добитися взаємодії штучних наночасток з природними об'єктами нанорозмірів – білками, нуклеїновими кислотами і ін. Ретельно очищені наночастки можуть самовистраїватися в певні структури. Така структура містить строго впорядковані наночастки і також частенько проявляє незвичайні властивості.

Нанооб'єкти діляться на 3 основних класу: тривимірні частки, що отримуються вибухом провідників, плазмовим синтезом, відновленням тонких плівок і т. д.; двовимірні об'єкти – плівки, що отримуються методами молекулярного напластовування, CVD, ALD, методом іонного напластовування і т. д.; одновимірні об'єкти – віськери, ці об'єкти виходять методом молекулярного напластовування, введенням речовин в циліндрові мікропори і так далі. На даний момент обширне вживання отримав лише метод мікролітографії, що дозволяє отримувати на поверхні матриць плоскі островкові об'єкти розміром від 50 нм, застосовується він в електроніці; метод CVD і ALD в основному застосовується для створення мікронних плівок. Інші методи в основному використовуються в наукових цілях. Особливо слід зазначити методи іонного і молекулярного напластовування, оскільки з їх допомогою можливе створення реальних моношарів.

Особливий клас складають органічні наночастки як природного, так і штучного походження.

Оскільки багато фізичних і хімічних властивостей наночасток, на відміну від об'ємних матеріалів, сильно залежать від їх розміру, останніми роками виявляється значний інтерес до методів виміру розмірів наночасток в розчинах: аналіз траєкторій наночасток, динамічне светорассеяніє, седиментаційний аналіз, ультразвукові методи.

## **Самоорганізація наночасток**

Одне з найважливіших питань, що стоять перед нанотехнологією, – як змусити молекули групуватися певним способом, самоорганізо-виватися, щоб у результаті отримати нові матеріали або пристрої. Цією проблемою займається розділ хімії – супрамолекулярная хімія. Вона вивчає не окремі молекули, а

взаємодії між молекулами, які здатні упорядкувати молекули певним способом, створюючи нові речовини і матеріали. Обнадіює те, що в природі дійсно існують подібні системи і здійснюються подібні процеси. Так, відомі біополімери, здатні організовуватися в особливі структури. Один з прикладів – білки, які не лише можуть згортатися в глобулярну форму, але і утворювати комплекси – структури, включаючи декілька молекул білків. Вже зараз існує метод синтезу, що використовує специфічні властивості молекули ДНК. Береться ДНК (кДНК) комплементу, до одного з кінців під'єднується молекула А або Б. Імеєм 2 речовини: ----А і ----Б, де ---- – умовне зображення одинарної молекули ДНК. Тепер, якщо змішати ці 2 речовини, між двома одинарними ланцюжками ДНК утворюються водневі зв'язки, які притягнуть молекули А і Б один до одного. Умовно змалюємо отримане з'єднання: =====АБ. Молекула ДНК може бути легко видалена після закінчення процесу.

## **Проблема утворення агломератів**

Частки розмірами порядку нанометри або наночастки, як їх називають в наукових кругах, мають одну властивість, яка дуже заважає їх використанню. Вони можуть утворювати агломерати, тобто злипатися один з одним. Оскільки наночастки багатообіцяючі в галузях виробництва кераміки, металургії, цю проблему необхідно вирішувати. Одне з можливих рішень – використання речовин – диспергентів, таких як цитрат амонія (водний розчин), імідазолін, олеїновий спирт (нерозчинних у воді). Їх можна додавати в середу, що містить наночастки. Детальніше це розглянуто в джерелі «Organic Additives And Ceramic Processing», D. J. Shanefield, Kluwer Academic Publ., Boston (англ.).

## **Новітні досягнення**

### **Наноматеріали**

Матеріали, розроблені на основі наночасток з унікальними характеристиками, витікаючими з мікроскопічних розмірів їх складових.

- Вуглецеві нанотрубки – протяжні циліндрові структури діаметром від одного до декількох десятків нанометрів і завдовжки до декількох сантиметрів, що складаються з однієї або декількох згорнутої в трубку гексагональної графітової плоскості (графенов) і зазвичай закінчуються півсферичною голівкою.

- Фуллерени – молекулярні з'єднання, що належать класу аллотропних форм вуглецю (інші — алмаз, карбін і графіть) і опуклі замкнуті многогранники, що є, складені з парного числа трьохкоординуваних атомів вуглецю.

- Графен – моношар атомів вуглецю, отриманий в жовтні 2004 року в Манчестерському університеті (The University Of Manchester). Графен можна використовувати, як детектор молекул ( $\text{NO}_2$ ), що дозволяє детектувати прихід і відхід одиничних молекул. Носії зарядів в графене володіють високою рухливістю при кімнатній температурі, завдяки чому як тільки вирішать проблему формування забороненої зони в цьому напівметалі, обговорюють графен як перспективний матеріал, який замінить кремній в інтегральних мікросхемах.

- Нанокристали
- Аерогель
- Аерографіт – найтвердіший матеріал

- Наноаккумулятори – на початку 2005 року компанія Altair Nanotechnologies (США) оголосила про створення інноваційного нанотехнологічного матеріалу для електродів іонних для літію акумуляторів. Акумулятори з  $\text{Li}_4\text{Ti}_5\text{O}_{12}$  електродами мають час зарядки 10-15 хвилин. У лютому 2006 року компанія почала виробництво акумуляторів на своєму заводі в Індіані. У березні 2006 Altairnano і компанія Boshart Engineering уклали угоду про спільне створення електромобіля. У травні 2006 успішно завершилися випробування автомобільних наноаккумуляторів. У липні 2006 Altair Nanotechnologies отримала перше замовлення на постачання іонних для літію акумуляторів для електромобілів.

- Поверхні, що самоочищаються, на основі ефекту лотоса.

## **Методи дослідження**

Внаслідок того, що нанотехнологія – міждисциплінарна наука, для проведення наукових досліджень використовують ті ж методи, що і «класичні» біологія, хімія, фізика. Одним з відносно нових методів досліджень в області нанотехнології є скануюча зондська мікроскопія. В даний час в дослідницьких лабораторіях використовуються не лише «класичні» зондські мікроскопи, але і СЗМ в комплексі з оптичними мікроскопами, електронними мікроскопами, спектрометрами комбінаційного (рамановського) розсіяння і флюоресценції, ультрамікроскопами (для здобуття тривимірної структури матеріалів).

## **Наномедицина і хімічна промисловість**

Напрямок в сучасній медицині, заснований на використанні унікальних властивостей наноматеріалів і нанооб'єктів для відстежування, конструювання і зміни біологічних систем людини на наномолекулярному рівні.

- ДНК-нанотехнологія – використовують специфічні основи молекул ДНК і нуклеїнових кислот для створення на їх основі чітко заданих структур.
- Промисловий синтез молекул ліків і фармакологічних препаратів чітко певної форми (біси-пептиди).

### **Комп'ютери і мікроелектроніка**

- Центральні процесори – 15 жовтня 2007 року компанія Intel заявила про розробку нового прототипу процесора, що містить найменший структурний елемент розмірами приблизно 45 нм. Надалі компанія має намір досягти розмірів структурних елементів до 5 нм. Основний конкурент Intel, компанія AMD, також давно використовує для виробництва своїх процесорів нанотехнологічні процеси, розроблені спільно з компанією IBM. Характерною відмінністю від розробок Intel є вживання додаткового ізолюючого шару SOI, що перешкоджає витоку струму за рахунок додаткової ізоляції структур, що формують транзистор. Вже існують робочі зразки процесорів з транзисторами розміром 32 нм і дослідні зразки на 22 нм.

- Жорсткі диски – в 2007 році Пітер Грюнберг і Альберт Ферт отримали Нобелівську премію по фізиці за відкриття gmr-ефекту, що дозволяє виробляти запис даних на жорстких дисках з атомарною щільністю інформації.

- Скануючий зондський мікроскоп – мікроскоп високого дозволу, заснований на взаємодії голки кантильовера (зонда) з поверхнею досліджуваного зразка. Зазвичай під взаємодією розуміється тяжіння або відштовхування кантильовера від поверхні із-за сил Ван-дер-Ваальса. Але при використанні спеціальних кантильоверов можна вивчати електричні і магнітні властивості поверхні. СЗМ може досліджувати як провідні, так і непровідні поверхні навіть через шар рідини, що дозволяє працювати з органічними молекулами (ДНК). Просторовий дозвіл скануючих зондських мікроскопів залежить від характеристик використовуваних зондів. Дозвіл досягає атомарного по горизонталі і істотно перевищує його по вертикалі.

- Антена-осцилятор – 9 лютого 2005 року в лабораторії університету Бостона була отримана антена-осцилятор розмірами порядку 1 мкм. Цей пристрій налічує 5000 мільйонів атомів і здатне осцилювати з частотою 1,49 гігагерців, що дозволяє передавати з її допомогою величезні об'єми інформації.

- Плазмони – колективні коливання вільних електронів в металі. Характерною особливістю збудження плазмонів можна вважати так званий плазмонний резонанс, вперше передбачений Мі на початку ХХ століття. Довжина хвилі плазмонного резонансу, наприклад, для сферичної частки срібла діаметром 50 нм складає приблизно 400 нм, що вказує на можливість реєстрації наночасток далеко за межами дифракційної межі (довжина хвилі випромінювання багато більше розмірів частки). На початку 2000-го року, завдяки швидкому прогресу в технології виготовлення часток нанорозмірів, був дан поштовх до розвитку нової області нанотехнології – наноплазмоніке.

Виявилося можливим передавати електромагнітне випромінювання уздовж ланцюжка металевих наночасток за допомогою збудження плазмонних коливань.

### **Робототехніка**

- Молекулярні ротори – синтетичні нанорозмірні двигуни, здатні генерувати момент, що крутить, при додатку до них достатньої кількості енергії

- Нанороботи – роботи, створені з наноматеріалів і розміром порівнянні з молекулою, рухи, що володіють функціями, обробки і передачі інформації, виконань програм. Нанороботи, здібні до створення своїх копій, тобто самовідтворюванню, називаються реплікаторами. Можливість створення нанороботів розглянув в своїй книзі «Машини створення» американський вчений Ерік Дрекслер. Питання розробки нанороботів і їх компонентів розглядаються на профільних міжнародних конференціях.

- Молекулярні пропелери – нанорозмірні молекули у формі гвинта, здатні здійснювати обертальні рухи завдяки своїй спеціальній формі, аналогічній формі макроскопічного гвинта.

- З 2006 року в рамках проекту Robocup (чемпіонат по футболу серед роботів) з'явилася номінація «Nanogram Competition», в якій ігрове поле вдає із себе квадрат із стороною 2,5 мм. Максимальний розмір гравця обмежений 300 мкм.

### **Концептуальні пристрої**

- Nokia Morph – проект стільникового телефону майбутнього, створений спільно науково-дослідним підрозділом Nokia і Кембріджським університетом на основі використання нанотехнологічних матеріалів.