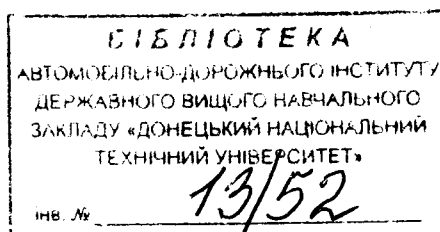


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
"ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"**



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
"Науково - технічна творчість молоді"
(для студентів денної форми навчання спеціальності
8.090258"Автомобілі та автомобільне господарство")



**КОНТРОЛЬНЫЙ ЛИСТОК
СРОКОВ ВОЗВРАТА**

Книга должна быть возвращена не позже указанного здесь срока	
Количество предыдущих выдач _____	
5121, 1	

Изготовление ООО «СтандартСервис» (06264) 5-72-68

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
"ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"**

Бібліотека АДІ ДонНТУ



M398

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

"Науково - технічна творчість молоді"

(для студентів денної форми навчання спеціальності
8.090258 "Автомобілі та автомобільне господарство")

Затверджено
на засіданні методкомісії
факультету "Автомобільний
транспорт"
Протокол № 12 від 15.05.08

Затверджено
на засіданні кафедри
"Технічна експлуатація
автомобілів"
Протокол № 14 від 04.04.08

Горлівка 2008

УДК 629.113.004 (071)

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Науково-технічна творчість молоді" (для студентів денної форми навчання спеціальності 8.090258) /Укл. В.І. Кудінов, І.В. Яковлєв. – Горлівка: ДонНТУ, 2008. - 35 с.

Укладачі: В.І. Кудінов, к.т.н., доц.
І.В. Яковлєв, ас.

Рецензент: Одоєвцева Л.М., к.т.н., доц.

Відповідальний за випуск: зав.каф. ТЕА, к.т.н., доц.Мастепан М.А.

ЗМІСТ

1 Вирівнювання експериментальних даних законом Пуассона.....	4
2 Вирівнювання експериментальних даних показовим законом.....	10
3 Критерій для неприйняття спостережень, що різко виділяються.....	14
4 Застосування методу статистичного моделювання для визначення оптимальних рішень.....	15
4.1 Теоретичні основи методу.....	15
4.2 Алгоритм для моделювання випадкових величин, розподілених за показовим законом.....	16
4.3 Рішення задачі теорії масового обслуговування методом статистичного моделювання.....	18
5 Обробка емпіричних даних цілком визначених вибірок статистичних спостережень.....	24
ЛІТЕРАТУРА.....	32
ДОДАТОК А	33
ДОДАТОК Б	34

1 ВИРІВНЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗАКОНОМ ПУАССОНА

Закон Пуассона широко застосовується для кількісної характеристики цілого ряду явищ. Наприклад, потоки автомобілів, що прибувають на станцію обслуговування; пасажирів, що входять у метро; покупців в торговельних закладах; викликів абонентів на АТС; викликів швидкої допомоги та інші явища.

Ймовірність з'явлення кількості подій $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ у законі Пуассона визначається за формулою:

$$P(x, \alpha) = \frac{\alpha^x}{x!} \cdot e^{-\alpha} = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad (1.1)$$

де x - кількість подій, що з'являються за даний відрізок часу,

$x = 1, 2, 3, 4, \dots$ і т.д.;

t - відрізок часу;

λ - щільність (інтенсивність) явища, що досліджується, тобто середня кількість подій, що з'являлися в одиницю часу;

$\alpha = \lambda t$ - математичне очікування кількості подій, що з'являються за даний (t) відрізок часу.

Розглянемо на прикладі порядок "вирівнювання" експериментальних даних законом Пуассона.

Приклад 1. Досліджується закон розподілу кількості машин, що прибувають на станцію обслуговування в проміжок часу з 8.00 до 9.00 години ранку. Усього було зафіксовано $N=300$ спостережень. Результати спостережень згруповані в $n=9$ розрядів (інтервалів) від мінімального до максимального значення випадкової величини (0 та 8 машин, відповідно - див.табл.1.1).

Таблиця 1.1 - Статистична обробка експериментальних даних - кількості машин, що прибувають на станцію обслуговування, - законом Пуассона

Розряди (кількість машин, що прибувають) x_i	Експ. числа (разів) - частоти влучення в інтервал m_i^*	Дослідні частоти влучення в розряди P_i^*	Теоретичні ймовірності P_i	Теоретичні частоти m_i
I	2	3	4	5
0	10	0.033	0.055	16.5
I	46	0.153	0.160	48

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5
2	72	0.240	0.232	70
3	78	0.260	0.224	67
4	53	0.177	0.160	48
5	25	0.085	0.095	28
6	10	0.033	0.046	14
7	4	0.013	0.019	6
8	2	0.007	0.008	2
Усього	300	1.0	1.0	300

Висувається гіпотеза, що закон розподілу частоти з'явлення (кількості) автомобілів в розгляданий час - пуассонівський.

Потрібно "вирівняти" експериментальні дані $P_i^*(x)$ законом Пуассона. Перевірити правдоподібність прийнятої гіпотези і знайти довірчий інтервал розкиду статистичного математичного очікування при довірчий ймовірності, рівній $P_d=90\%$.

Рішення 1. Будуємо полігон розподілу дослідних частотей влучення випадкової величини - кількості прибуваючих машин у кожний з інтервалів (крива $P_i^*(x)$). Значення частотей одержуємо діленням дослідних частот (разів) спостережень m_i^* на загальний обсяг спостережень ($N = \sum_{i=0}^n m_i$):

$$P_i^* = \frac{m_i^*}{N} \quad (1.2)$$

Для розглянутого прикладу маємо (див.табл.1.1):

$$P_1^* = \frac{10}{300} = 0.033; \quad P_2^* = \frac{46}{300} = 0.153 \text{ и т.д.}$$

На підставі отриманих даних будуємо полігон розподілу експериментальних даних $P_i^*(x)$ влучення у кожний з розрядів (див.рис.1.1).

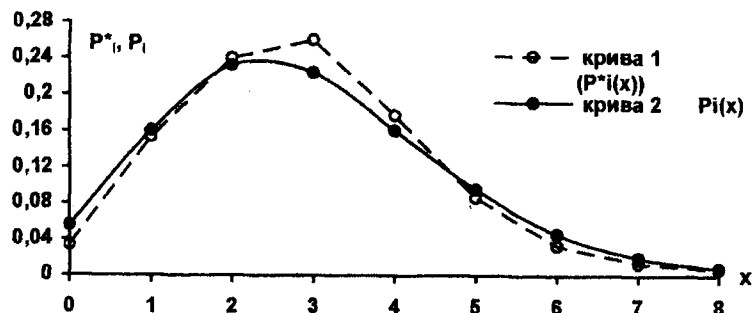


Рисунок 1.1 - Полігон розподілу дослідних частотей (крива $P_i(x)$) - кількості машин, що прибувають на станцію обслуговування в проміжок часу з 8.00 до 9.00 год. ранку та теоретична крива закону Пуассона, що вирівнює експериментальні спостереження (крива $P_i^*(x)$).

2. Обчислюємо статистичне математичне очікування явища:

$$M^*(x) = \sum_{i=0}^{i=8} x_i \cdot P_i^* = 0 \cdot 0,033 + 1 \cdot 0,153 + 2 \cdot 0,24 \dots + 8 \cdot 0,0067 = 2,884 \quad (1.3)$$

3. Розраховуємо статистичну дисперсію:

$$D^*(x) = \sum_{i=0}^{i=8} [x_i - M^*(x)]^2 \cdot P_i^* = (0 - 2,884)^2 \cdot 0,033 + (1 - 2,884)^2 \cdot 0,153 + \dots = 2,58 \quad (1.4)$$

4. Знаходимо виправлену (незміщену) дисперсію:

$$\tilde{D}(x) = \frac{n}{n-1} D^*(x) = \frac{9}{9-1} \times 2,58 = 2,9 \quad (1.5)$$

При цьому виправлене середнє квадратичне відхилення випадкової величини x від $M^*(x)$ дорівнює:

$$\tilde{\sigma}(x) = \sqrt{\tilde{D}(x)} = \sqrt{2,9} = 1,7, \quad (1.6)$$

а середнє квадратичне відхилення середнього результату спостереження складає:

$$\sigma_{M^*(x)} = \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sqrt{n}} = \frac{1,7}{\sqrt{9}} = 0,568. \quad (1.7)$$

5. Виконуємо попередню перевірку гіпотези про належність експериментальних даних до закону Пуассона.

Як відомо, для закону Пуассона дисперсія повинна дорівнювати математичному очікуванню. Для розглянутого прикладу маємо:

$$\tilde{D}(x) = 2,9 \cong M^*(x) = 2,884.$$

Це є показником того, що дослідний закон можна прийняти як закон Пуассона.

Для остаточного судження про правдоподібність прийнятої гіпотези, перевірка повинна бути зроблена за допомогою критерію згоди Пірсона, критерію Романовського або інших критеріїв [1].

6. Обчислюємо значення ймовірностей $P(x, \alpha)$ закону Пуассона (ф-ла 1.1) при математичному очікуванні, рівному $\alpha = M^*(x) = 2,9$.

$$P(0, \alpha) = \frac{2,9^0}{0!} e^{-2,9} = 0,055; \quad P(1, \alpha) = \frac{2,9^1}{1!} e^{-2,9} = 0,16;$$

$$P(2, \alpha) = \frac{2,9^2}{2!} e^{-2,9} = 0,232; \quad P(3, \alpha) = \frac{2,9^3}{3!} e^{-2,9} = 0,226 \text{ і т.д.}$$

Для приблизних розрахунків (або перевірки результатів за формулою 1.1) можна використати дані таблиці додатку А (стовпчик $\alpha = 3,0$).

Отримані значення ймовірностей заносимо в стовпець 4 табл. 1.1.

На основі отриманих значень ймовірностей будемо плавну криву (2), що вирівнює експериментальну лому криву (1) (див. рис. 1.1).

7. Перевіряємо правдивість прийнятої гіпотези за допомогою критерію згоди χ^2 Пірсона. Для цього обчислюємо теоретичні частоти влучення випадкової величини в задані розряди за формулою:

$$m_i = P_i \cdot N; \quad (1.8)$$

$$m_1 = 0,055 \times 300 = 16,5; \quad m_2 = 0,16 \times 300 = 48; \quad m_3 = 0,232 \times 300 = 70 \text{ тощо.}$$

Отримані значення теоретичних частот (кількість автомобілів) заносимо в п'ятий стовпець табл. 1.1

Використовуючи дані стовпців 2 та 5, розраховуємо значення χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{i=8} \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i} = \frac{(10 - 16.5)^2}{16.5} + \frac{(46 - 48)^2}{48} + \dots + \frac{(2 - 2)^2}{2} = 8.3 \quad (1.9)$$

З таблиці ймовірностей для закону Пірсона (табл. Б.2) при $\chi^2 = 8,3$ і числі ступенів свободи $k = n - s = 9 - 2 = 7$, де s – число параметрів теоретичної моделі, маємо:

$$P(\chi^2, k) = P(8,3;7) = 0,33 > 0,1$$

Це значить, що при рівні значимості вірогідності помилки $\alpha=0,1(10\%)$ гіпотеза про належність експериментальних даних до закону Пуассона підтверджується.

Правдоподібність прийнятої гіпотези може бути перевірена за допомогою критерію Романовського:

$$K_p = \frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}} = \frac{8,3 - 9}{\sqrt{2 \cdot 9}} = -0,16 < 3, \quad (1.10)$$

де число 3 – граничне значення критерію Романовського.

Отже, і за цим критерієм гіпотеза підтверджується.

8. Обчислюємо довірчий інтервал розкиду середнього результату щодо істинного математичного очікування при довірчій ймовірності $P_d = 90\%$.

Для рішення цієї задачі використовуємо значення аргументу функції Лапласа ($\arg \Phi(P_d)$), дивись табл.5.2).

Величина напівінтервалу розкиду середнього результату дорівнює:

$$\delta = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \arg \Phi(P_d = 0,9) = \frac{1,7}{\sqrt{9}} \cdot 1,64 = 0,57 \cdot 1,64 = 0,94 \quad (1.11)$$

Отже, довірчий інтервал дорівнює:

$$I_d = (M^*(x) - \delta) < \bar{M}(x) < M^*(x) + \delta.$$

$$\text{або } 2,88 - 0,94 < \bar{M}(x) < 2,88 + 0,94. \text{ тобто: } 1,9 < \bar{M}(x) < 3,82.$$

Це значить, що з ймовірністю, рівною 90%, можна стверджувати, що кількість прибуваючих машин буде не менше ніж 1,9 і не більше ніж 3,8 машини.

Таблиця 1.2 - Ймовірності закону Пірсона

x \ a	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	90	81	74	67	60	54	49	44	40
1	09	16	22	26	30	32	34	35	36
2	00	01	03	05	07	09	12	14	16
3	00	00	00	00	01	01	02	03	04
4				00	00	00	00	00	01
5						00	00	00	00

Продовження таблиці 1.2

x \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	36	13	04	01	00	00	00	00	00	00
1	36	27	14	07	03	01	00	00	00	00
2	18	27	22	14	03	04	02	01	00	00
3	06	18	22	19	14	06	05	02	01	00
4	01	09	16	19	17	13	09	05	03	01
5	00	03	10	15	17	16	12	09	06	03
6		01	05	10	14	16	14	12	09	06
7		00	02	05	10	13	14	13	11	09
8			00	02	06	10	13	13	13	11
9				01	03	06	10	12	13	12
10				00	01	04	07	09	11	12
11					00	02	04	07	09	11
12						01	02	04	07	09
13						00	01	02	05	07
14							00	01	03	03
15								00	01	03

Примітка. У таблиці представлена дробова частина числа, тобто якщо написано 90, слід розуміти 0,90.

2 ВИРІВНЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ПОКАЗОВИМ ЗАКОНОМ

Приклад 2. Досліджується закон розподілу часу, що витрачається для встановлення несправностей автомобілів на станції технічного обслуговування. Усього було зафіксовано $N = 175$ спостережень. Результати

спостережень згруповані в $n = 12$ інтервалів значень витраченого часу. (див.табл. 2.1).

Таблиця 2.1 - Статистична обробка експериментальних даних - часу, що витрачається на виявлення несправностей автомобілів, показовим законом

Номер інтервалу	Межі інтервалів (тривалість діагностики) $\alpha_i - \beta_i$	Середини інтервалів $t_{i,ср.}$	Дослідна кількість спостережень m_i^*	Теоретичні частоти (кількість) m_i		Квадрати відхилень $(m_i^* - m_i)^2$ m_i
				розр.	прийн.	
1	2	3	4	5	6	7
1	0-10	5	49	49,2	49	0,00
2	10-20	15	27	35,4	35	0,11
3	20-30	25	32	25,4	25	1,96
4	30-40	35	20	18,3	18	0,22
5	40-50	45	15	13,1	13	0,31
6	50-60	55	8	9,5	10	0,40
7	60-70	65	8	6,8	7	0,14
8	70-80	75	4	4,9	5	0,20
9	80-90	85	5	3,5	4	0,25
10	90-100	95	2	2,5	3	0,33
11	100 - 110	105	3	1,8	2	0,50
12	110 - 120	115	2	1,3	1	1,00
			175	172	5,42	

Завдання: Потрібно встановити можливість описати експериментальні дані показовим законом, перевірити правдоподібність прийнятої гіпотези і визначити величину довірчого інтервалу, що відповідає $P_d = 95\%$.

Рішення. І. Будемо гістограму дослідного розподілу частот часу, що витрачається на виявлення несправностей. Для цього по осі абсцис відкладаємо середини інтервалів, а по осі ординат - дослідні частоти, що відповідають їм, (див. рис. 2.1).

2. Обчислюємо статистичне математичне очікування, тобто середній час, що витрачається на виявлення несправностей автомобіля:

$$M^*(t) = \frac{\sum t_i m_i^*}{\sum m_i^*} = \frac{5 \cdot 49 + 15 \cdot 27 + 25 \cdot 32 + 115 \cdot 2}{175} = 29,97_{хв} \quad (2.1)$$

3. Визначаємо інтенсивність (щільність) процесу:

$$\lambda = \frac{1}{M^*(t)} = \frac{1}{29,97} = 0,033 \frac{\text{вияв.}}{\text{хв}} \quad (2.2)$$

Розглядаючи гістограму, бачимо з її вигляду, що експериментальний розподіл часу, що витрачається на виявлення несправностей автомобіля, може вирівнюватися показовим законом, щільність ймовірності якого має вигляд:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (2.3)$$

а ймовірність виникнення події :

$$P(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.4)$$

4. Перевіримо правдоподібність прийнятої гіпотези про приналежність експериментального розподілу до показового закону.

Скористаємося критерієм згоди χ^2 Пірсона.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i} \quad (2.5)$$

де m_i - теоретичне значення частоти з'явлення події в інтервалі і.

Значення m_i можна знайти з виразу:

$$m_i = N \cdot P_i \quad (2.6)$$

де P_i - ймовірність з'явлення події в інтервалі і.

$$P_i = P(t_n - t_{кн}) = P(t_{кн}) - P(t_n) = e^{-\lambda t_n} - e^{-\lambda t_{кн}} \quad (2.7)$$

де t_n і $t_{кн}$ - початкове і кінцеве значення t в інтервалі і

$$\text{Тоді: } m_1 = N \cdot P(t_n = 0; t_k = 10) = 175(1 - e^{-0,033 \cdot 10}) = 49,2$$

прийmemo $m_1 = 49$

$$m_2 = N \cdot P(t = 10 \dots 20) = 175(e^{-0,033 \cdot 10} - e^{-0,033 \cdot 20}) = 35,4$$

прийємо $m_2 = 35$

Аналогічними обчисленнями одержуємо теоретичні частоти потрапляння випадкової величини в інші розряди:

$$m_3 = 25.4; \quad m_4 = 18.3; \quad m_5 = 13.1 \quad \text{і т.д.}$$

$$\text{прийємо } m_3 = 25; \quad m_4 = 18; \quad m_5 = 13 \quad \text{і т.д.}$$

Отримані значення теоретичних частот заносимо в табл.2.1 (стовпець 5 и 6). Знаходимо значення відхилень теоретичних значень m_i від результатів спостережень m_i^* (стовпець 7 табл. 2.1) та підсумовуємо результати.

Сумуючи дані колонки 7, маємо:

$$\chi^2 = \frac{\sum (m_i^* - m_i)^2}{m_i} = \frac{(49 - 49)^2}{49} + \frac{(27 - 35)^2}{35} + \dots + \frac{(2 - 1)^2}{1} = 5.42$$

Згідно з таблицею розподілу χ^2 Пірсона (табл.Б.2 додатку Б) при числі ступенів свободи $k = n - s = 12 - 1 = 11$, одержуємо:

$$P(\chi^2, k) = P(5.42, 11) \approx 0.9 > 0.1.$$

Отже, гіпотеза про приналежність експериментальних даних до показового закону за критерієм згоди Пірсона виправдується.

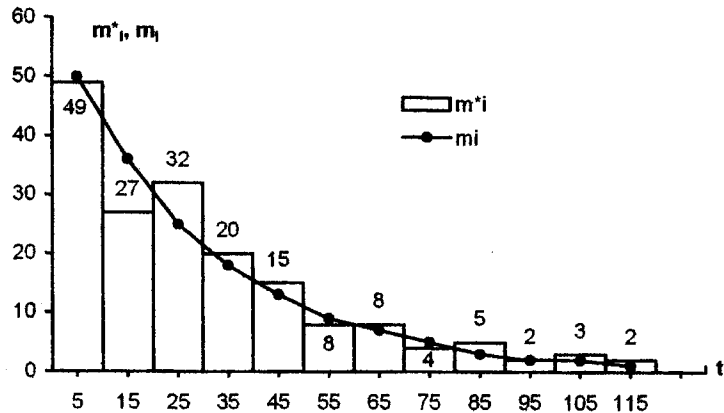


Рисунок 2.1-Гістограма розподілу дослідних частот часу, що витрачається на виявлення несправностей автомобіля на станції технічного обслуговування (m_i^*) і теоретична крива, що її виражає (m_i) показового закону з параметром $\lambda = 0.033$

Перевіряємо правдоподібність прийнятої гіпотези за допомогою критерію Романовського. Для розглянутого прикладу маємо

$$\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2 \cdot n}} = \frac{5.42 - 12}{\sqrt{2 \cdot 12}} = -1.14 < 3.$$

Отже, і за критерієм Романовського гіпотеза про належність експериментальних даних до показового закону виправдується.

5. Обчислюємо величину довірчого інтервалу розкиду середнього результату $M^*(t)$ при довірчій ймовірності $P_d = 95\%$.

Напівінтервал розкиду дорівнює:

$$\delta = \frac{\sigma^*(t)}{\sqrt{n}} = \arg \Phi(P).$$

Як відомо, для показового закону середнє квадратичне відхилення дорівнює математичному очікуванню, тобто:

$$\sigma(t) = M^*(t) = 29.97.$$

Тому для розглянутого прикладу напівінтервал розкиду дорівнює:

$$\delta = \frac{\sigma(t)}{\sqrt{n}} \cdot \arg \Phi(P_d = 0.95) = \frac{29.97}{12} \cdot 1.96 = 16.5 \text{ хв.}$$

Знаходимо аргумент $\arg \Phi(P_d = 0.95) = 1.96$ з табл. 5.2.

Тоді довірчий інтервал дорівнює:

$$M^*(t) - \delta < \overline{M}(t) < M^*(t) + \delta.$$

$$\text{або } 29.97 - 16.5 < \overline{M}(t) < 29.97 + 16.5.$$

$$\text{тобто } 13.5 < \overline{M}(t) < 46.4$$

Це значить, що з ймовірністю $P_d = 95\%$ можна затверджувати, що середній час виявлення несправностей автомобіля на станції технічного обслуговування буде не менше, ніж 13.5 хв. і не більше, ніж 46 хвилин.

3 КРИТЕРІЙ ДЛЯ НЕПРИЙНЯТТЯ СПОСТЕРЕЖЕНЬ, ЩО РІЗКО ВИДІЛЯЮТЬСЯ

При статистичній обробці дослідних даних часто виникає питання: чи не слід відкинути одне або декілька спостережень, які забагато виділяються з загальної кількості спостережень. Тобто вважати чи не вважати їх грубими помилками.

Рішення цього питання виконується на основі порівняння ймовірностей, розрахованих з урахуванням і без урахування зазначених підозрілих спостережень, при визначеному заздалегідь і прийнятому рівні значимості.

Покажемо на прикладі порядок зазначеної перевірки.

Приклад 3 Нехай у результаті спостережень було отримано шість значень будь якої випадкової величини: $y = 3, 4, 5, 15, 6, 2$.

Значення $y=15$ викликає сумнів, тому що воно помітно відрізняється від інших. Відкинемо $y = 15$, і для викирів, що залишилися, обчислимо числові характеристики. Статистичне математичне очікування, тобто середнє значення y , дорівнює:

$$\bar{y} = M^*(y) = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{3+4+5+6+2}{5} = 4$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\bar{\sigma}(y) = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{5((3-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (2-4)^2)}{5-1}} = 1.58$$

Тепер з табл.3.1 для $n=5$ при рівні значимості $\beta=0,01$ знаходимо $t_\beta=5,043$.

Розраховуємо відхилення сумнівного значення y від середнього значення $\Delta = |y_{\max} - \bar{y}| = |15 - 4| = 11$. Добуток $t_\beta \cdot \bar{\sigma}(y)$ складає

$$t_\beta \cdot \bar{\sigma}(y) = 5,043 \cdot 1,58 = 8. \text{ Відхилення } \Delta=11 \text{ перевищує критичне значення } 8.$$

Це значить, що при рівні значимості $\beta = 0,01$ значення $y = 15$ слід вважати грубою помилкою і, отже, його треба відкинути в подальших розрахунках.

Якщо взяти менший рівень значимості, наприклад $\beta = 0,001$, тоді $t_\beta = 9,43$. При цьому добуток $t_\beta \cdot \bar{\sigma}(y) = 9,43 \cdot 1,58 = 15$ і $11 < 15$. Це значить,

що при меншому рівні значимості результат $y = 15$ можна вважати незначною похибкою і виключати його з дослідного ряду не треба.

Таблиця 3.1 - Критерій для неприйняття спостережень, які різко виділяються

Кількість спостережень n	Рівень значимості			
	$\beta=0,05$	$\beta=0,02$	$\beta=0,01$	$\beta=0,001$
2	15,561	38,973	77,964	779,696
5	3,041	4,105	5,043	9,432
7	2,616	3,360	3,963	6,370
10	2,372	2,959	3,409	5,014
15	2,215	2,710	3,075	4,276
20	2,145	2,602	2,932	3,979
25	2,105	2,541	2,852	3,819
30	2,079	2,503	2,802	3,719
60	2,018	2,411	2,683	3,492

Примітка. Повну таблицю див. у роботі [1].

4 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

4.1 Теоретичні основи методу

Метод статистичного моделювання (називаний також методом Монте-Карло) полягає у відтворенні досліджуваного фізичного процесу за допомогою ймовірностей математичної моделі й обчисленні характеристик цього процесу. Засновано цей метод на багаторазових іспитах побудованої моделі з наступною статистичною обробкою отриманих даних. Метою є визначення числових характеристик розглянутого процесу у вигляді статистичних оцінок його параметрів. Основою методу статистичного моделювання є закон великих чисел, у якому доводиться збіжність по ймовірності середніх значень результатів великої кількості спостережень до деяких постійних величин.

Для того, щоб одержати ймовірність якої-небудь події, наприклад, ймовірності станів системи масового обслуговування $P(0), P(1) \dots P(K)$ обчислюють питомі частоти $P_i = \frac{m_i}{n}$ для кожної реалізації. Далі проводять

подібні обчислення для кількості реалізацій, наприклад, $n = 1000$. Результати усереднюють і з деяким наближенням одержують ймовірності станів системи. На підставі обчислених ймовірностей $P_0, P_1, P_2, \dots, P_K, \dots, P_S$ розраховують математичне очікування кількості зайнятих каналів M_K , математичне очікування довжини черги M_S , середній час перебування в черзі t_{oc}^{cp} й інші характеристики.

4.2 Алгоритм для моделювання випадкових величин, розподілених за показовим законом

Наприклад, проміжки часу між двома заявками на обслуговування, тобто, проміжки часу між двома автомобілями, що прибувають на станцію технічного обслуговування (так само, як і час обслуговування зазначених заявок), розподілено за показовим законом, який має математичний вираз (модель) щільності ймовірності з'явлення події:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{та відповідно} \quad F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t},$$

або в інших позначеннях ймовірність події

$$y = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{і, відповідно,} \quad e^{-\lambda t} = 1 - y$$

Логарифмуючи отриманий вираз, одержуємо

$$-\lambda t \ln e = \ln(1 - y); \quad t_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y_i), \quad (\text{А})$$

де приймаємо, що y_i - випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $0 \dots 1$ і стохастичне незалежні.

Таким чином, вираз (А) являє собою алгоритм для моделювання випадкових величин, розподілених за показовим законом. Значення y_i звичайно одержують з таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел (табл.4.1)

4.3 Рішення задачі теорії масового обслуговування методом статистичного моделювання

Задача 4. Досліджується робота станції технічного обслуговування автомобілів, що має у своєму розпорядженні два робочих пости ($n = 2$) і два місця для чекання в черзі ($m = 2$). На станцію надходить потік заявок із щільністю $\lambda = 1,5$ автомобілів у годину, а час обслуговування машин розподілено за показовим законом і складає в середньому $M_{\text{обс}} = 2,5$ год. на один автомобіль. Якщо всі пости і місця чекання зайняті – вважається, що автомобіль втрачено як об'єкт обслуговування.

Потрібно, застосовуючи метод статистичного моделювання, визначити числові характеристики функціонування станції за один 10-годинний робочий день. При моделюванні часу надходження заявок скористатися, наприклад, рядком 1 табл.4.1, а при моделюванні часу обслуговування - рядком 2 тої ж таблиці, починаючи, наприклад, із третього числа (не має значення).

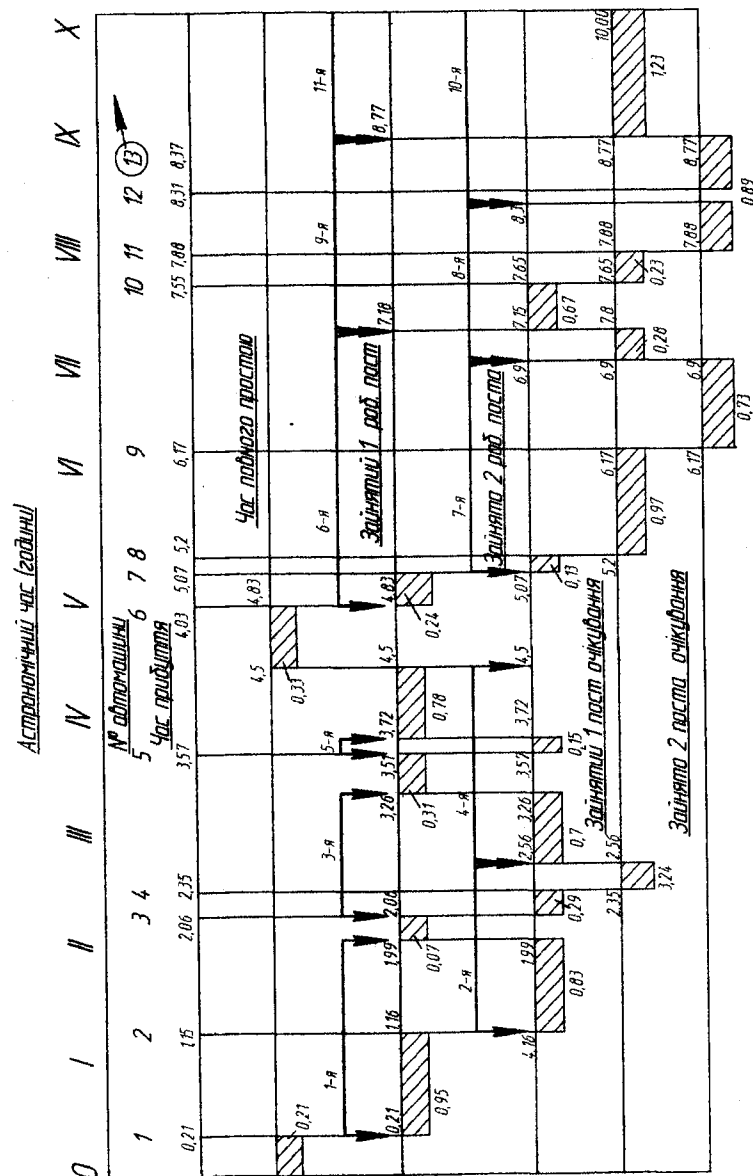


Рисунок 4.1 – Графік розрахунку часу станів системи масового обслуговування, що має два робочих поста і два місця для чекання в черзі

Рішення 1. Моделюємо час надходження заявок. Для першого випадкового числа $y_1 = 0,27$, одержуємо

$$t_1^* = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y_1) = -\frac{1}{1,5} \ln(1 - 0,27) = 0,21$$

За допомогою аналогічних розрахунків одержуємо значення проміжків часу між двома наступними (сусідніми) автомобілями

$$t_2^* = 0,95; \quad t_3^* = 0,90; \quad t_4^* = 0,29; \quad \text{і т.і.}$$

Отримані дані заносяться в таблицю (див. рядок 3 табл.4.2).

Для визначення моментів прибуття автомобілів на станцію обслуговування за астрономічним часом робимо підсумовування обчислених значень часу:

$$t_1 = t_1^* + 0 = 0,21; \quad t_2 = t_1 + t_2^* = 0,21 + 0,95 = 1,16$$

$$t_3 = t_2 + t_3^* = 1,16 + 0,90 = 2,06 \text{ і т.і. до } t_i > 10 \text{ год.}$$

Отримані значення моментів часу прибуття машин на станцію технічного обслуговування відкладаємо на графіку (рис.4.1).

2. Моделюємо за допомогою алгоритму «А» час, що витрачається на обслуговування кожної чергової машини. Випадкові числа y_i , що відповідають другому рядку табл.4.1, складають: 0,51; 0,43; 0,38 і т.і. Для цього спочатку обчислюємо щільність (інтенсивність) обслуговування

$$\mu = \frac{1}{\text{Мобс}} = \frac{1}{2,5} = 0,4.$$

Тепер скористаємося алгоритмом (А)

$$\Delta t_1 = \frac{1}{\mu} \ln(1 - y_1) = \frac{1}{0,4} \ln(1 - 0,51) = 1,78$$

Отримане значення часу $\Delta t_1 = 1,78$ заносимо в табл.4.3 (рядок 3).

Аналогічно обчислюємо значення часу обслуговування для інших машин. З огляду на час прибуття машин (рядок 4 табл.4.2) і час, що витрачається на їхнє обслуговування (рядок 3 табл.4.3), обчислюємо моменти

початку і кінця обслуговування для кожної з машин (строки 4 та 5 табл.4.3), враховуючи те, що СТОА має всього 2 робочі пости і 2 місця чекання.

3. За результатами розрахунків відмічаємо на графіку час того чи іншого стану системи обслуговування (рис.4.1). На підставі побудованого графіка розраховуємо питомі частоти стану системи, які отримані на основі однієї реалізації для 10-годинного робочого дня ($T_{\text{сум}} = 10$):

$$P_0 = \frac{T_0}{T_{\Sigma}} = \frac{0,21 + 0,33}{10} = 0,054 \quad (P_0 - \text{ймовірність повного простою станції})$$

$$P_1 = \frac{T_1}{T_{\Sigma}} = \frac{0,95 + 0,07 + 0,31 + 0,78 + 0,24}{10} = \frac{2,35}{10} = 0,235;$$

$$P_2 = \frac{T_2}{T_{\Sigma}} = \frac{0,83 + 0,29 + 0,7 + 0,15 + 0,13 + 0,47}{10} = \frac{2,57}{10} = 0,257;$$

$$P_3 = \frac{T_3}{T_{\Sigma}} = \frac{0,21 + 0,97 + 0,28 + 0,23 + 1,23}{10} = \frac{2,92}{10} = 0,292.$$

$$P_4 = \frac{T_4}{T_{\Sigma}} = \frac{0,73 + 0,89}{10} = \frac{1,69}{10} = 0,162$$

P_4 - ймовірність повного завантаження станції, вона ж є ймовірністю відмовлення.

Перевіряємо правильність виконаних розрахунків:

$$\sum_{i=1}^n P_i = (0,05 + 0,235 + 0,257 + 0,292 + 0,162) = 1$$

4. Визначаємо ймовірність відмови в обслуговуванні. З загальної кількості прибулих на станцію машин за 10-годинний робочий день (13 машин) 12-а і 13-а одержали відмовлення, тому що усі пости і місця очікування були зайняті. Отже ймовірність відмовлення складає

$$P_{\text{від}} = \frac{2}{13} = 0,154.$$

Таблиця 4.2 - Розрахунок моментів часу прибуття автомобіля на станцію технічного обслуговування

Номер машини	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Випадкові числа	0,27	0,76	0,74	0,35	0,84	0,85	0,30	0,18	0,89	0,77	0,29	0,049	0,06	0,97
Проміжок часу між двома машинами	0,21	0,95	0,9	0,29	1,22	1,26	0,24	0,13	1,47	0,98	0,23	0,43	0,06	1,73
Момент прибуття машини	0,21	1,16	2,06	2,35	3,57	4,83	5,07	5,20	6,17	7,65	7,88	8,31	8,37	10

Таблиця 4.3 - Розрахунок моментів початку і кінця обслуговування автомобілів на СТО

Номер машини	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Випадкові числа	0,51	0,43	0,38	0,54	0,06	0,61	0,52	0,43	0,47	0,72	0,46	0,67	ВІДМ
Час обслуговування	1,78	1,4	1,2	1,94	0,15	2,35	1,83	1,4	1,9	3,18	1,54	2,77	ВІДМ
Початок обслуговування	0,21	1,16	2,06	2,56*	3,57	4,83	5,07	6,9**	7,18**	8,3**	8,77**	ВІДМ	ВІДМ
Кінець обслуговування	1,99	2,56	3,26	4,5	3,72	7,18	6,9	8,3	8,77	11,48	10,31	ВІДМ	ВІДМ

* Незважаючи на те, що черговий прибулий автомобіль (4) надходить о 2,35 год., він починає обслуговуватись тоді, коли звільниться один з робочих постів, а до цього автомобіль знаходиться на посту чекання (яких $m = 2$).

** Починаючи з прибулого автомобіля №8 і далі, вони надходять до робочих постів після чекання.

5 ОБРОБКА ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ ЦІЛКОМ ВИЗНАЧЕНИХ ВИБІРОК СТАТИСТИЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Вибірка обсягом n називається цілком визначеною, якщо в ній відомі достатня кількість значень випадкової величини. При обсязі вибірки $n > 50$ обробку емпіричних даних рекомендується вести за значеннями, згрупованими у r інтервалів, що не перетинаються.

З огляду обмеженості обсягу вибірки і її випадковості, вибіркові характеристики, які одержуються на основі обмеженої кількості дослідних даних, є лише наближеними значеннями, що міняються від досліду до досліду. Тому в статистиці вибіркові (статистичні) числові характеристики піддаються деякому виправленню. Виправлені числові характеристики називають оцінками.

Статистичні й оцінні характеристики називаються точковими, тому що вони характеризують досліджуване явище одним числом. При невеликій кількості іспитів зазначені точкові характеристики, як правило, відрізняються від їхніх істинних значень. У зв'язку з цим, у математичній статистиці, поряд із точковими характеристиками, застосовують так звані інтервальні оцінки - довірчий інтервал і довірна ймовірність, що дають уявлення про точність і надійність точкових характеристик.

Довірчим інтервалом для статистичного математичного очікування називається інтервал довжиною $2\delta_n$, центром якого є незміщена оцінка, і усередині якого з довірчою ймовірністю P_d знаходиться істинне значення математичного очікування.

Задача 5. Розтискні кулаки ножних гальм машин замінялися в експлуатації при перевищенні припустимого зносу робочих поверхонь і місць сполучень із втулками кронштейнів. У процесі спостереження за групою машин було зафіксовано 106 перших заміни розтискних кулаків. Максимальний наробіток до заміни склав $t_{\max} = 322,3$ тис. км, а мінімальний - $t_{\min} = 59,2$ тис. км. Потрібно знайти оцінки параметрів закону розподілу ресурсу, перевірити гіпотезу про вид закону розподілу, визначити довірчі границі параметрів закону розподілу, обчислити оцінки показників надійності: середнього ресурсу, ймовірності безвідмовної роботи за наробіток $t = 150$ тис. км, гама - процентного ресурсу при $\gamma = 95\%$.

Рішення.

1. Визначаємо наближену кількість інтервалів групування за формулою:

$$r = 1,15 [0,49(n-1)^2]^{0,27},$$

де n – кількість спостережень, тоді

$$r = 1,15 \left[0,49(106-1)^2 \right]^{0,27} = 11,2.$$

Приймаємо $r = 11$.

Обчислюємо ширину інтервалу групування:

$$\Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{r} = \frac{322,3 - 59,2}{11} = 23,9 \text{ тис. км,}$$

приймаємо $\Delta t = 24$ тис. км.

2. Обчислюємо статистичні поінтервальні питомі частоти влучень випадкової величини в інтервали P_i^* , значення емпіричної щільності розподілу $f_e(t)$ і функції розподілу F_e за формулами:

$$P_i^* = \frac{m_i}{n}; \quad f_e(t) = \frac{m_i}{n \cdot \Delta t}; \quad F_e = \frac{\sum m_i}{n}.$$

Заносимо отримані значення в таблицю 5.1 (рядки 4,5 і 6) і будемо гістограму розподілу випадкової величини (рис. 5.1).

З зовнішнього вигляду гістограми висуваємо гіпотезу, що емпіричні дані відповідають нормальному закону (закон Гауса), теоретична щільність розподілу якого визначається виразом:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{[t - M(t)]^2}{2\sigma^2} \right].$$

Таблиця 5.1– Послідовність обчислень експериментальних даних

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1. Границі інтервалів										
	59-	83-	107-	131-	155-	179-	203-	227-	251-	275-	299-
	83	107	131	155	179	203	227	251	275	299	323
2	2. Середини інтервалів										
	71	95	119	143	167	191	215	239	263	287	311
3	3. Дослідні числа влучень в інтервал										
	2	34	8	12	15	18	17	14	9	5	2
4	4. Дослідна частота влучень в інтервал, $\times 10^{-2}$										
	1,9	3,8	7,5	11,3	12,4	17,0	16,0	13,2	8,5	4,7	1,9
5	5. Емпірична щільність розподілу, $\times 10^{-2}$										
	0,8	1,6	3,1	4,7	5,9	7,1	6,7	5,5	3,5	2,0	0,8
6	6. Емпірична функція розподілу										
	0,019	0,057	0,132	0,245	0,387	0,557	0,717	0,849	0,934	0,981	1,0
7	7. Теоретичні ймовірності влучення в інтервал										
	0,013	0,034	0,067	0,09	0,14	0,17	0,17	0,14	0,10	0,07	0,01
8	8. Теоретична функція розподілу										
	0,01	0,05	0,11	0,20	0,34	0,51	0,68	0,82	0,92	0,99	1,00
9	9. Теоретичні числа влучення в інтервал										
	1,4	3,6	7,1	9,5	14,8	18,0	18,0	14,8	10,6	7,4	1,1
10	10. Теоретична частота з'явлення події, $\times 10^{-2}$										
	1,32	3,4	6,9	10,9	13,9	16,9	16,9	13,9	8,02	3,96	1,04
11	11. Теоретична щільність з'явлення події, $\times 10^{-3}$										
	0,6	1,4	2,9	4,6	5,8	7,1	7,1	5,8	3,3	1,7	0,4

Розраховуємо оцінку коефіцієнта варіації:

$$V = \frac{\bar{\sigma}}{M(t)} = \frac{54}{194} = 0,28$$

Судячи зі значення, близького до 0,33, підтверджується гіпотеза, що досліджуваний закон розподілу є нормальним.

4. За допомогою таблиць функції Лапласа (табл. 5.2) теоретично обчислюємо ймовірності влучення в інтервали:

$$P_i (t_{in} < t < t_{ik}) = \frac{1}{2} \left[\Phi_0 \left(\frac{t_{ik} - M(t)}{\sigma} \right) - \Phi_0 \left(\frac{t_{in} - M(t)}{\sigma} \right) \right],$$

де Φ_0 - функція розподілу Лапласа нормального закону для нормованої, центрованої випадкової величини, При від'ємному значенні аргументу t , функція також від'ємна.

$$\Phi_0(-t) = -\Phi_0(t).$$

Для першого інтервалу

$$P_1 (59 < t < 83) = \frac{1}{2} \left[\Phi_0 \left(\frac{83 - 194}{54} \right) - \Phi_0 \left(\frac{59 - 194}{54} \right) \right] = 0,5(-0,960 + 0,987) = 0,0135$$

Аналогічно для інших інтервалів (рядок 7 табл. 5.1).

Послідовно підсумовуючи результати цих розрахунків, одержуємо значення теоретичної функції розподілу (рядок 8 табл. 5.1).

На основі отриманих поінтервальних теоретичних ймовірностей відбувається згладжування дослідного багатокутника (гістограми) теоретичної кривої. Для цього обчислюємо теоретичні значення числа влучення в кожний інтервал, теоретичні частоти і щільність з'явлення події.

5. Знаходимо теоретичні числа улучення випадкових чисел в інтервали:

$$m_{im} = P_i \cdot n; \quad m_1 = 0,0135 \cdot 106 = 1,4 \text{ у т.і.}$$

Результати розрахунків заносимо в табл. 5.2, рядок 9.

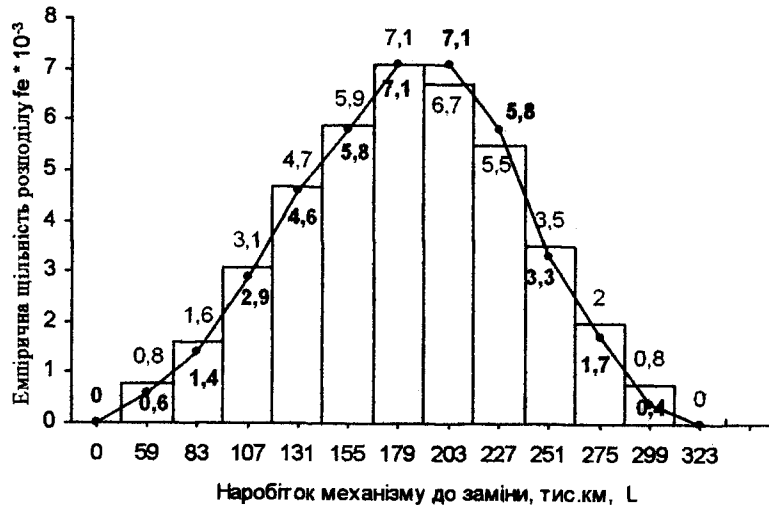


Рисунок 5.1 – Гістограма щільності розподілу частоти заміни механізму по інтервалах наробітку

3. Обчислюємо оцінку математичного очікування:

$$M(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r t_i m_i = \frac{1}{106} (71 \cdot 2 + 95 \cdot 4 + \dots + 311 \cdot 2) = 193,9 \text{ тис. км}$$

Визначаємо незміщену оцінку середнього квадратичного відхилення:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^r m_i (t_i - M(t))^2} = \sqrt{\frac{1}{106} [2(71-194)^2 + 4(95-194)^2 + \dots + 2(311-194)^2]} = 54 \text{ тис. км}$$

Таблиця 5.2 – Значення функції розподілу Лапласа нормального закону для нормованої і центрованої випадкової величини

Аргумент t	Соті частки t									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	000	008	016	023	031	039	047	055	063	071
0,1	079	087	095	103	111	119	127	135	142	150
0,2	158	166	174	181	189	197	205	212	220	228
0,3	235	243	251	258	266	273	281	288	296	303
0,4	310	318	325	332	340	347	354	361	368	375
0,5	382	389	396	403	410	417	424	431	438	444
0,6	451	458	464	471	477	484	490	497	503	509
0,7	516	522	528	534	540	546	552	558	564	570
0,8	576	582	587	593	599	604	610	615	621	626
0,9	631	637	642	647	652	657	662	667	672	677
1,0	682	687	692	697	701	706	710	715	719	724
1,1	728	733	737	741	745	749	754	758	762	766
1,2	769	773	777	781	785	788	792	795	799	802
1,3	806	809	813	816	819	823	826	829	832	835
1,4	838	841	844	847	850	852	855	858	861	863
1,5	866	869	871	874	878	878	881	883	885	888
1,6	890	892	894	896	899	901	903	905	907	909
1,7	910	912	914	916	918	919	921	923	924	926
1,8	928	929	931	932	934	935	937	938	939	941
1,9	942	943	945	946	947	948	950	951	952	953
2,0	954	955	956	967	958	959	960	961	962	963
2,1	964	965	966	966	966	968	969	970	970	971
2,2	972	972	973	974	974	975	976	976	977	978
2,3	978	979	979	980	980	981	981	982	982	983
2,4	983	984	984	984	985	985	986	986	986	987
2,5	987	987	988	988	988	989	989	989	990	990
2,6	990	991	991	991	991	992	992	992	992	992
2,7	993	993	993	993	993	994	994	994	994	994
2,8	994	995	995	995	995	995	995	995	996	996
2,9	996	996	996	996	996	996	996	997	997	997
3,0	997	997	997	997	997	997	997	997	997	998

6. Обчислюємо критерій Пірсона:

$$\chi_0^2 = \sum_1^2 \frac{(m_{ik} - m_{im})^2}{m_{im}} = \frac{(2-1,4)^2}{1,4} + \frac{(4-3,6)^2}{3,6} + \dots \approx 3.$$

7. Перевіряємо правильність гіпотези про приналежність дослідних даних до нормального закону за допомогою критерію Пірсона.

Для розглянутого прикладу число ступенів свободи дорівнює:

$$k = n - s = 11 - 2 = 9; \quad r-s \text{ чим менше}$$

Припустимий рівень значимості приймаємо $\alpha = 0,05$, тоді критичне значення $\chi_r^2 = 15,5$ (табл. Б1).

Отже $\chi_0^2 = 3,0 < \chi_r^2 \left(\begin{smallmatrix} 0,05 \\ 9 \end{smallmatrix} \right) = 16,9$

Отже, за критерієм Пірсона гіпотеза не спростовується.

За критерієм Романовського

$$K_p = \frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}} = \frac{3 - 11}{\sqrt{2 \cdot 11}} = -1,7 < 3$$

За критерієм Романовського гіпотеза не спростовується.

8. Обчислюємо довірчі границі математичного очікування при довірчій ймовірності (коефіцієнт довіри) $P_d = 0,95$:

$$I_0[M(t)] = M(t) \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi_0^{-1}(P_d),$$

де Φ_0^{-1} - зворотне значення функції Лапласа (табл. 5.2).

Для $P_d = \Phi_0 = 0,95$, значення аргументу $t = 1,96$.

9. Ймовірність безвідмовної роботи за напрацювання, тис. км дорівнює:

$$P(150) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi_0 \left(\frac{150 - 194}{54} \right) = 0,791.$$

10. Гама – процентный ресурс t_γ при значенні $\gamma = 95\%$ знаходимо з виразу:

$$\frac{\gamma}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi_0 \left(\frac{t_\gamma - M(t)}{\sigma} \right),$$

тобто
$$\frac{95}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi_0 \left(\frac{t_\gamma - 194}{54} \right) = 2(0,95 - 0,5) = -\Phi_0 \left(\frac{t_\gamma - 194}{54} \right),$$

відкіля $1,645 = -\frac{t_\gamma - 194}{54}$; $t_\gamma = 194 - 1,645 \cdot 54 = 105$ тис. км.

Отже, 95% розтискних кулаків гальм мають напрацювання до першого відмовлення більше 105 тис. км.

Література

- Обергауз Г.Г. Справочник по вероятностным расчётам. –М.: Высш. шк., 1970. –237с.
2. Завадский Ю.В. Решение задач автомобильного транспорта с помощью математических моделей. Методическое пособие. –М.: Изд. Моск. автомоб.-дор. ин-та, 1980.–153с.
3. Завадский Ю.В. Статистическая обработка эксперимента в задачах автомобильного транспорта; Метод. пособие. –М.: Изд. Моск. автомоб.-дор. ин-та, 1982.–132с.
4. Галушко В. Г. Вероятностно-статистические методы на автотранспорте. — Киев: Вища шк., 1976. — 276 с.
5. Зарубкин В. А. Оптимизация системы технического обслуживания и ремонта автомобилей в АТП: Метод, указания — М.: Изд. Моск. автомоб.-дор. ин-та, 1976. — 78 с.
6. Кожин А. П. Математические методы в планировании и управлении грузовыми автомобильными перевозками — М.: Высш. шк., 1979. — 113 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высш. шк., 1977. — 479 с.

Розподілення ймовірностей закону Пуассона в залежності від параметра α і окремого значення випадкової величини x

$$P(\alpha, x) = \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t},$$

де α - математичне очікування випадкової величини; $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ - окремі значення випадкової величини; λ - щільність або інтенсивність, тобто середня кількість подій в одиницю часу; t - відрізок часу, за який розглядається поведінка випадкової величини.

x	Математичне очікування α									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	367	135	049	018	006	002	000	000	000	000
1	367	270	149	073	033	014	006	000	001	000
2	183	270	224	146	084	044	022	010	005	000
3	061	180	224	195	140	089	052	028	015	000
4	015	090	168	195	175	133	091	057	033	018
5	003	036	100	156	175	160	127	091	060	037
6	0005	012	050	104	146	160	149	122	091	063
7	00	003	021	059	104	137	149	139	117	09
8		00	008	029	066	103	130	139	131	112
9		00	002	013	036	068	101	124	131	125
10			00	005	018	041	071	099	118	125
11				00	008	022	045	072	097	113
12					003	0111	026	048	072	094
13					001	005	014	029	050	072
14							007	016	032	052
15							003	0009	019	034
								010	021	
								005	012	

Пояснимо порядок користування таблицею.

Припустимо, що відомо математичне очікування закону $\alpha = 4$. Вимагається знайти ймовірність того, що кількість появ події А буде рівним в точності $x = 5$.

Рішення

З таблиці знаходимо $P(\alpha; x) = P(4; 5) = 0,156$. За допомогою таблиці можуть бути знайдені також ймовірності появи кількості подій не менш і не більш заданої кількості разів. Так, наприклад, при $\alpha = 3$ ймовірність появи кількості подій не більш двох разів, складає:

$$P(\leq 2) = 0,049 + 0,149 + 0,224 = 0,422.$$

Таблиця Б.1 - Табличні (критичні) значення розподілу хи-квадрат в залежності від рівня значимості α і числа ступенів свободи k (правостороння критична область)

k	Рівень значимості α				k	Рівень значимості α			
	0.01	0.05	0.10	0.20		0.01	0.05	0.10	0.20
1	6.3	3.8	2.7	1.6	16	32.0	26.2	23.5	20.4
2	9.2	5.9	4.0	3.2	17	33.4	27.5	24.7	21.6
3	11.3	7.8	6.2	4.6	18	34.8	28.8	25.9	22.7
4	13.2	9.4	7.7	5.9	19	36.1	30.1	27.2	23.9
5	15.0	11.0	9.2	7.2	20	37.5	31.4	28.4	25.0
6	16.8	12.5	10.6	8.5	21	38.9	32.6	29.6	26.1
7	18.4	14.0	12.0	9.8	22	40.2	33.9	30.8	27.3
8	20.0	15.5	13.3	11.0	23	41.6	35.1	32.0	28.4
9	21.6	16.9	14.6	12.2	24	42.9	36.4	33.1	29.5
10	23.2	18.3	15.9	13.4	25	44.3	37.6	34.3	30.6
11	24.7	19.6	17.2	14.6	26	45.6	38.8	35.5	31.7
12	26.2	21.0	18.5	15.8	27	46.9	40.1	36.7	32.9
13	27.6	22.3	19.8	16.9	28	48.2	41.3	37.9	34.0
14	29.1	23.6	21.0	18.1	29	49.5	42.5	39.8	35.1
15	30.5	24.9	22.3	19.3	30	50.8	43.7	40.2	36.2

Правило перевірки правдоподібності гіпотези належності дослідних даних до заданого виду ймовірнісного закону записується у вигляді наступної альтернативної вимоги, що відповідає правосторонній критичній області.

$$\chi^2_{\text{Пірсона дослід}} = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i} =$$

$\leq \chi^2_{\text{табл.}}(\alpha_k)$ - гіпотеза про належність дослідних даних до ймовірнісного закону, який розглядається, не спростовується;
 $> \chi^2_{\text{табл.}}(\alpha_k)$ - гіпотеза про належність дослідних даних до ймовірнісного закону, який розглядається, спростовується;

Приклад використання табл. Б.1. Нехай підраховане (дослідне) значення критерію χ^2 – квадрат Пірсона дорівнює $\chi^2_{\text{дослід.}}=17$, а число ступенів свободи $k = r - s = 10$. З таблиці Б.1 видно, що допустиме (критичне) значення $\chi^2_{\text{табл.}}$ (при рівні значимості $\alpha=0,05$) дорівнює: $\chi^2_{\text{табл.}} = 18,3$

Отже

$$\chi^2_{\text{дослід.}}=17 < \chi^2_{\text{табл.}}=18,3,$$

і, таким чином, гіпотеза про належність дослідних даних до закону, що розглядається, не спростовується.

Таблиця Б.2 - Табличні значення ймовірностей $P_{\text{Пірсона дослід.}}(\chi^2; k)$ – що підраховані в залежності від числа ступенів свободи k і дослідного значення χ^2 – квадрат (лівостороння критична область)

χ^2	Число ступенів свободи $k = r - s$								
	2	3	4	5	6	7	8	10	12
1	606	801	909	962	985	994	998	999	939
2	367	572	735	849	919	959	981	996	999
3	223	391	557	700	808	885	934	981	995
4	135	261	406	549	676	779	857	947	983
5	082	171	287	415	543	660	757	891	958
6	049	111	199	306	423	539	647	815	916
7	030	071	135	220	320	428	536	725	857
8	018	046	091	156	238	332	433	629	758
9	011	029	061	109	173	252	342	532	702
10	006	018	040	075	124	188	265	440	616
11	004	011	026	051	088	138	201	357	528
12	002	007	017	034	062	100	151	285	445
13	001	004	011	023	043	072	111	223	369
14		002	007	014	029	051	081	173	300
15		001	004	010	020	036	059	132	241
16		001	003	006	013	015	042	099	191
17			001	004	009	017	030	074	149
18			001	002	006	012	021	055	115
19				001	004	008	014	040	088
20				001	002	005	010	029	067
21					001	003	007	021	050
22					001	002	004	015	037
23						001	002	004	015
24						001	002	007	020
25							001	005	015
26							001	003	010

Правило

$$P_{\text{Пірсона дослід.}}[\chi^2; k = r - s] =$$

$\geq \alpha$ - гіпотеза про належність дослідних даних до ймовірнісного закону, який розглядається, не спростовується;

$< \alpha$ - гіпотеза про належність дослідних даних до ймовірнісного закону, який розглядається, спростовується;

Приклад. Нехай, як і для прикладу, що розміщений під таблицею Б.1, маємо

$$\chi^2_{\text{дослід.}} = 17 \text{ і } k = 10.$$

Тоді

$$P_{\text{Пірсона дослід.}}(17; 10) = 0,074 > \alpha = 0,05$$

і це значить, гіпотеза про належність дослідних даних до ймовірнісного закону, що розглядається, не спростовується.

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни
" Науково- технічна творчість молоді "

(для студентів денної форми навчання спеціальності 8.090258)

Валерій Іванович Кудінов
Ігор Вікторович Яковлев

Підписано до друк. 05. 06. 08
Умовн. – друк.арк. 2,8
Замовлення № 19 - 08

Тираж 50 екз.
Формат 70х90/16

АДІ ДВНЗ "ДонНТУ"
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51