Модуль 2
ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Задачі динамічного програмування

Динамічне програмування **(ДП)** — метод оптимізації, пристосований до операцій, в яких процес ухвалення розв'язання може бути розподілений на етапи (кроки). Такі операції називаються *багатокроковими*. Розвиток ДП почався у 50-ті роки XX ст. і зв'язаний з ім'ям Р. Беллмана.

Наведемо *загальну постановку задачі* ДП. Розглядається керований процес, наприклад, економічний процес розподілу коштів між підприємствами, використання ресурсів протягом декількох років, заміни устаткування, поповнення запасів тощо. У результаті керування систему (об'єкт керування) $\boldsymbol{S}$ переводять із початкового стану s_0 у стан $\hat{s}$. Припустимо, що керування можна розподілити на $\boldsymbol{n}$ кроків, тобто рішення приймають послідовно на кожнім кроці, а керування, що переводить систему $\boldsymbol{S}$ із початкового стану в кінцевий, являє собою сукупність $\boldsymbol{n}$ покрокових керувань.

Позначимо через $\boldsymbol{X_k}$ керування на $\boldsymbol{k}$-му кроці ($k = 1, 2, \ldots, n$). Змінні $\boldsymbol{X_k}$ задовольняють деяким обмеженням і називаються *припустимими* ($\boldsymbol{X_k}$ може бути числом, точкою в $\boldsymbol{n}$-мірному просторі, якісною ознакою).

Нехай $\boldsymbol{X(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ — керування, що переводить систему $\boldsymbol{S}$ зі стану s_0 у стан s. Позначимо через $\boldsymbol{s_k}$ стан системи після $\boldsymbol{k}$-го кроку керування. Одержуємо послідовність станів $\boldsymbol{s_0}$, $\boldsymbol{s_1}$, $\boldsymbol{s_{k-1}}$, $\boldsymbol{s_k}$, ..., $\boldsymbol{s_{n-1}}$, $\boldsymbol{s_n = \hat{s}}$, яку позначимо колами (рис. 2.1).

Показник ефективності розглянутої керованої операції — цільова функція — залежить від початкового стану і керування:

$$Z = F(S_0, X). \tag{2.1}$$

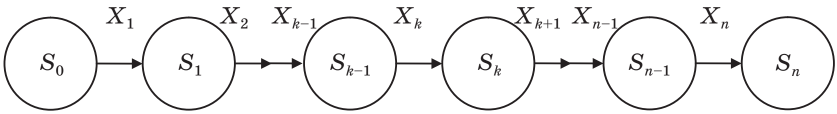


Рис. 2.1. Послідовність станів і керування

Зробимо кілька припущень:

1. Стан $\boldsymbol{s_k}$ системи наприкінці $\boldsymbol{k}$-го кроку залежить тільки від попереднього стану $\boldsymbol{s_{k-1}}$ і керування на $\boldsymbol{k}$-му кроці $\boldsymbol{X_k}$ (і не залежить

від попередніх станів і керувань). Ця вимога називається «відсутністю післядії». Сформульоване положення записують у вигляді рівнянь:

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k),\ \ k = 1;\ 2;\ \ldots;\ n, \tag{2.2}$$

які називаються *рівняннями станів*.

2. Цільова функція (2.1) є адитивною від показника ефективності кожного кроку. Позначимо показник ефективності $\boldsymbol{k}$-го кроку через

$$Z_k = f_k(S_{k-1}, X_k),\ \ k = 1;\ 2;\ \ldots;\ n. \tag{2.3}$$

Тоді

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k). \tag{2.4}$$

Задачу покрокової оптимізації (задача ДП) формулюють так: *визначити таке припустиме керування X, що переводить систему S зі стану S_0 у стан $\hat{S}$, за якого цільова функція (4) набуває найбільшого (найменшого) значення.*

Особливості моделі ДП:

1. Задача оптимізації інтерпретується як $\boldsymbol{n}$*-кроковий процес керування.*

2. Цільова функція дорівнює сумі цільових функцій кожного кроку.

3. Вибір керування на $\boldsymbol{k}$-му *кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку, не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку).*

4. Стан $\boldsymbol{S_k}$ *після* $\boldsymbol{k}$-го *кроку керування залежить тільки від попереднього стану* $\boldsymbol{S_{k-1}}$ *і керування* $\boldsymbol{X_k}$ *(відсутність післядії).*

5. На кожнім кроці керування $\boldsymbol{X_k}$ *залежить від кінцевого числа керувальних змінних, а стан* $\boldsymbol{S_k}$ *— від кінцевого числа параметрів* (зміст зауваження 5 розкриємо на розглянутих нижче прикладах).

2.2. Принцип оптимальності Беллмана

Принцип оптимальності вперше був сформульований Р. Беллманом у 1953 р. *Хоч би який був стан* $\boldsymbol{S}$ *системи внаслідок якого-небудь числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно разом з оптимальним керуванням на всіх подальших кроках призводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи поданий.*

Беллман чітко сформулював й умови, за яких принцип справджується. Основна вимога — процес керування має бути без зворотного зв'язку, тобто керування на цьому кроці не має впливати на попередні кроки.

Принцип оптимальності встановлює, що для будь-якого процесу без зворотного зв'язку оптимальним керуванням є таке, яке є оптимальним для будь-якого підпроцесу стосовно його вихідного стану. Тому рішення на кожному кроці виявляється найкращим із погляду керування в цілому. *Якщо зобразити геометрично оптимальну траєкторію у формі ламаної лінії, то будь-яка частина цієї ламаної буде оптимальною траєкторією відносно початку і кінця.*

Далі давайте розглянемо, як цей принцип оптимальності працюватиме на моделі перебування мінімальної відстані (у загальному випадку — мінімальних витрат).

2.3. Мінімальна відстань засобами ДП

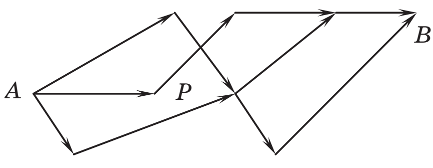


Рис. 2.2. Ациклічна мережа (спрямований граф)

Кожному ребру приписується вага > 0 (можна вважати за довжину шляху).

Постановка задачі: $\min S(A, B) \to ?$

Алгоритм розв'язання заснований на такому твердженні:

Твердження 2.1.1

$$S \mid S(A, P, B) = \min\ (AP) \Rightarrow S(P, B) = \min.$$

Визначення 2.1.1

Послідовність рішень $\xrightarrow{def}$ стратегія.

На безлічі стратегій $\xrightarrow{def}$ цільова функція.

Визначення 2.1.2

Стратегія, на якій цільова функція досягає (min) або (max) $\xrightarrow{def}$ оптимальна стратегія.

Для реалізації методу потрібно:

I. Процес розв'язання перетворити в (***n***)-етапну процедуру.

II. Для кожного етапу описати:

а) безліч рішень;

б) безліч початкових станів.

III. Для I, II застосувати принцип оптимальності.

Оптимальна стратегія має таку властивість, що хоч би які були початкові розв'язання і стани, досягнуті в результаті цих рішень, подальші розв'язання мають бути оптимальними щодо досягнутих попередніх станів.

Розглянемо конкретний приклад: цей спрямований граф (рис. 2.2). Знайдемо мінімальну відстань від вузла 1 до вузла 16.

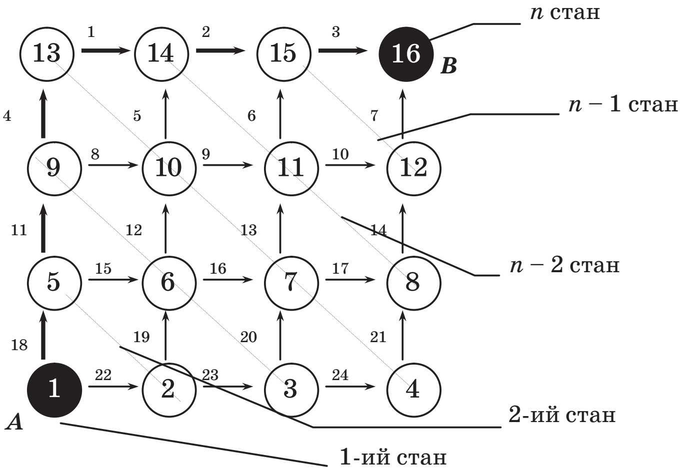


Рис. 2.3. Розмічений граф

А. Реалізація моделі табличним способом:

1) розподілимо процес на ***n* етапів**, як це показано на рисунку 2.2;

2) для кожного етапу запишемо в таблицю 2.1 безліч станів — ***S*** і безліч рішень — ***X***;

3) застосуємо принцип оптимальності ***Беллмана*** стосовно мінімальної відстані, тобто: найкоротший шлях від ***A*** до ***B*** має таку властивість, що які б не були початкові відрізки цього шляху і пункт ***P***, в який вони привели, подальший шлях має бути найкоротшим шляхом від ***P*** до ***B***.

Таблиця 2.1

Таблична реалізація мінімальної відстані

$s \backslash x$	16	$\hat{x}$	$\hat{f}$
12	7	16	7
15	3	**16**	3

$n - 1$ стан

s \ x	12	15	$\hat{x}$	$\hat{f}$
8	7 + 14 = **21**	—	12	21
11	7 + 10 = **17**	3 + 6 = **9**	15	9
14		3 + 2 = **5**	**15**	5

$n - 2$ стан

s \ x	4	7	10	$\hat{x}$	$\hat{f}$
4	21 + 21 = **42**	—	—	8	42
7	21 + 17 = **38**	9 + 13 = **22**	—	11	22
10	—	9 + 9 = **18**	5 + 5 = **10**	14	10
13	—	—	5 + 1 = **6**	**14**	6

s \ x	4	7	10	13	$\hat{x}$	$\hat{f}$
3	42 + 24 = **66**	22 + 20 = **42**	—	—	7	42
6	—	22 + 16 = **38**	10 + 12 = **22**	—	10	22
9	—	—	10 + 8 = **18**	6 + 4 = **10**	**13**	10

s \ x	3	6	9	$\hat{x}$	$\hat{f}$
2	42 + 23 = **65**	22 + 19 = **41**	—	6	41
5		22 + 15 = **37**	10 + 11 = **21**	**9**	21

s \ x	2	5		$\hat{x}$	$\hat{f}$
1	41 + 22 = **63**	21 + 18 = **39**	—	**5**	**39**

Тут $\hat{x}$ і $\hat{f}$ — оптимальне розв’язання і оптимальне значення цільової функції конкретного етапу. З останнього запису таблиці видно, що мінімальна відстань від ***A*** до ***B***: $\boldsymbol{\hat{f} = 39}$.

Починаючи знизу вгору таблиці 2.1, випишемо конкретний маршрут відповідної цільової функції, значення якої дорівнює **39**.

Відповідь: *S* (1-5-9-13-14-15-16) = 39, (наведемо жирною лінією).

Зауваження: реалізувати модель можна і без таблиць — виписуючи проміжні дані безпосередньо на мережу, надаючи кожному станові пріоритетного напрямку.

Покажемо виконання попередньої задачі безпосередньо на мережі (див. рис. 2.4).

Б. Реалізація моделі «безпосередньо на мережі»:

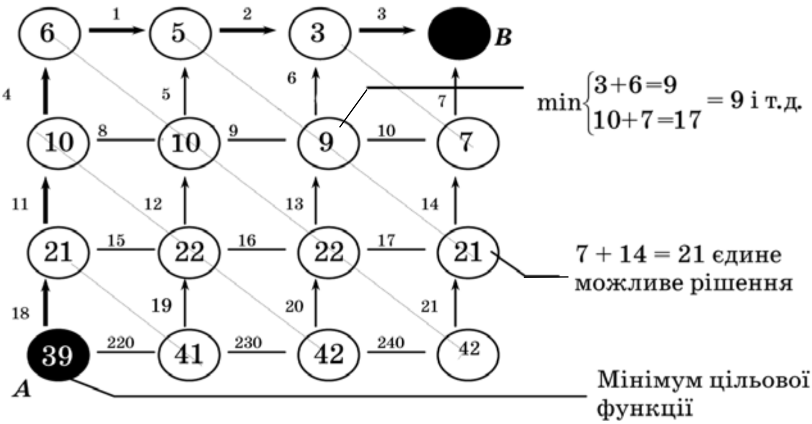
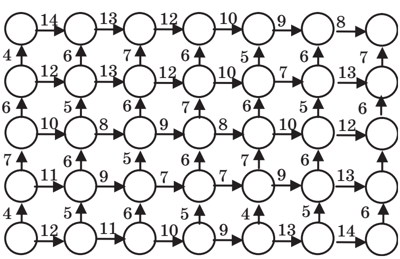


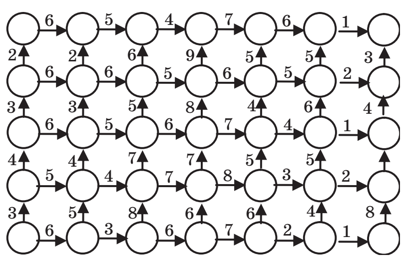
Рис. 2.4. Реалізація моделі безпосередньо на мережі

2.4. Індивідуальні завдання моделі «Мінімальна відстань засобами динамічного програмування»

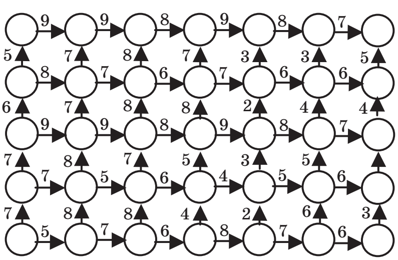
Варіант 1



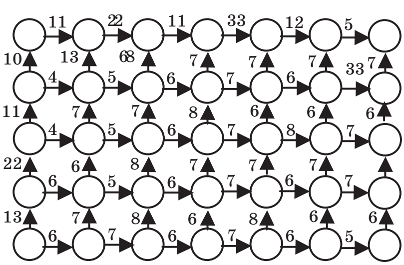
Варіант 2



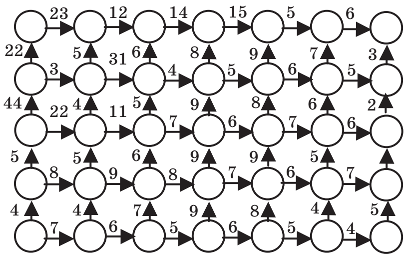
Варіант 3



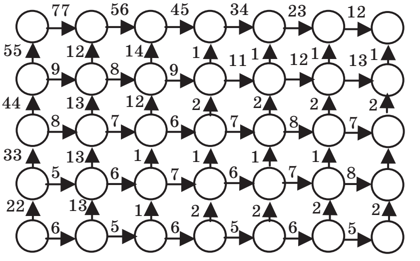
Варіант 4



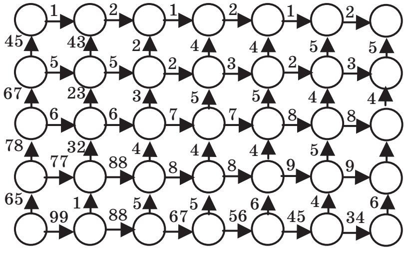
Варіант 5



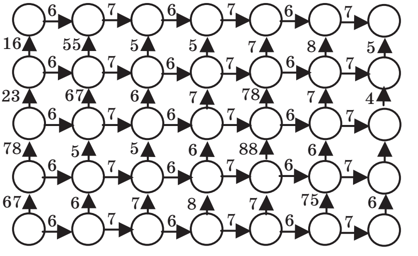
Варіант 6



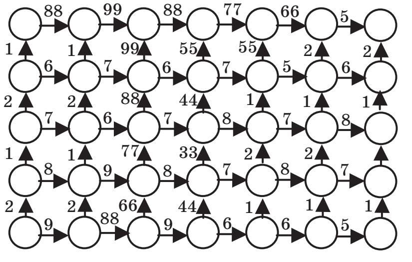
Варіант 7



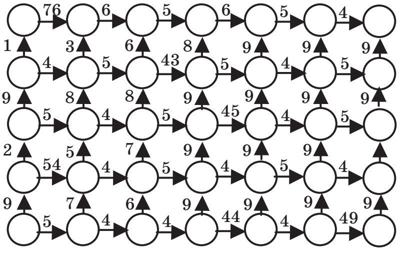
Варіант 8



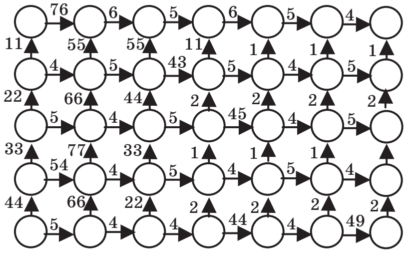
Варіант 9



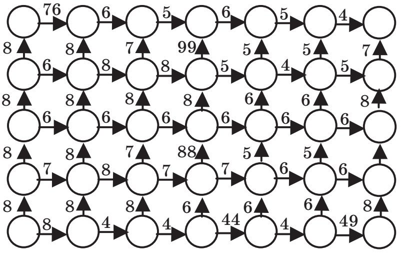
Варіант 10



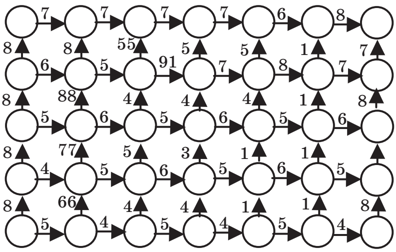
Варіант 11



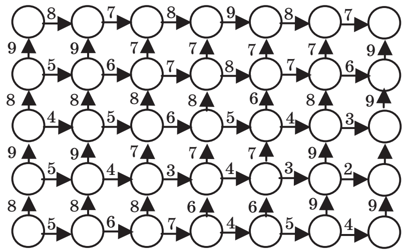
Варіант 12



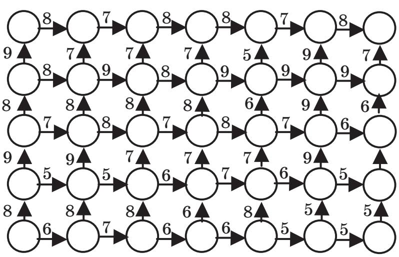
Варіант 13



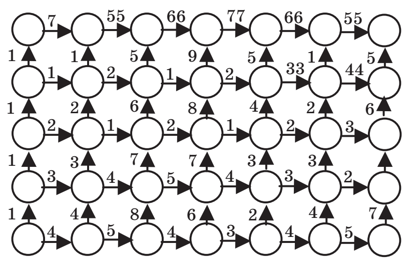
Варіант 14



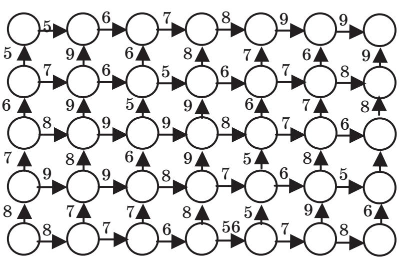
Варіант 15



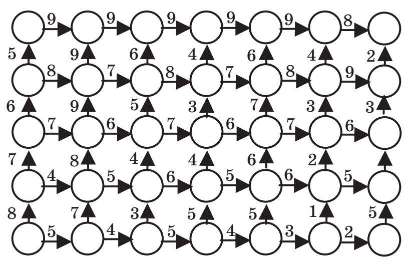
Варіант 16



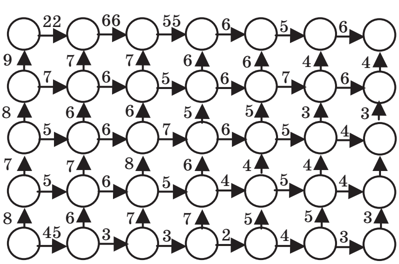
Варіант 17



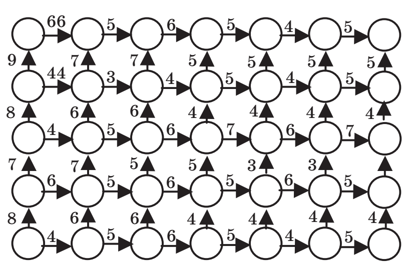
Варіант 18



Варіант 19



Варіант 20



2.5. Заміна устаткування

Заміна устаткування — важлива економічна проблема. Завдання полягає у визначенні оптимальних термінів заміни старого устаткування (верстатів, виробничих будинків тощо). Старіння устаткування означає його фізичний і моральний знос, унаслідок чого збільшуються виробничі витрати, витрати на ремонт і обслуговування, знижуються продуктивність праці, ліквідна вартість (вартість устаткування, що було в експлуатації). Критерієм оптимальності є, як правило, або прибуток від експлуатації устаткування (*задача максимізації*), або сумарні витрати на експлуатацію протягом планованого періоду (*задача мінімізації*).

У процесі побудови моделі задачі вважають, що рішення про заміну виноситься на початку кожного етапу експлуатації (наприклад, на початку року) і що, в принципі, устаткування можна використовувати необмежено довго.

Основна характеристика устаткування — параметр стану — його вік.

Під час складання динамічної моделі заміни процес заміни розглядають як ***n*-кроковий**, розподіляючи весь період експлуатації на n кроків. Можливе керування на кожнім кроці характеризується якісними ознаками, наприклад, X^C (зберегти устаткування), $X^З$ (замінити).

Розглянемо конкретний приклад.

Устаткування експлуатують протягом 5 років, після цього продають. На початку кожного року можна внести рішення зберегти устаткування або замінити його новим.

Вартість нового обладнання $P_0 = 4\ 000$ грн. Після t років експлуатації ($1 \le t \le 5$) устаткування можна продати за

$$g(t) = P_0 \cdot 2^{-t} \tag{2.5}$$

грн (ліквідна вартість). Витрати на утримання протягом року залежать від віку t устаткування і дорівнюють

$$r(t) = 600 \cdot (t + 1). \tag{2.6}$$

Визначити оптимальну стратегію експлуатації устаткування, щоб сумарні витрати з урахуванням початкової купівлі і заключного продажу були мінімальні.

Розв'язання. Спосіб розподілу керування на кроки природний, по роках: $n = 5$. Параметр стану: вік машини S_k. Керування на кожнім кроці залежить від двох змінних: X^C, $X^З$.

Рівняння стану залежить від керування:

$$S_k = \begin{cases} t+1, X_k = X^c \\ t, X_k = X^3, \ k = 1; 2; 3; 4. \end{cases} \tag{2.7}$$

Показник ефективності ***k***-го кроку:

$$f_k(X_k, t) = \begin{cases} 600(t+1), & X_k = X^c \\ 4\,600 - 4\,000 \cdot 2^{-t}, & X_k = X^3, \ k = 1; 2; 3; 4. \end{cases} \tag{2.8}$$

Реалізуємо модель на графі (рис. 2.5), зображуючи керування станом колами, а рішення про заміну і збереження — стрілками, та застосуємо принцип оптимальності.

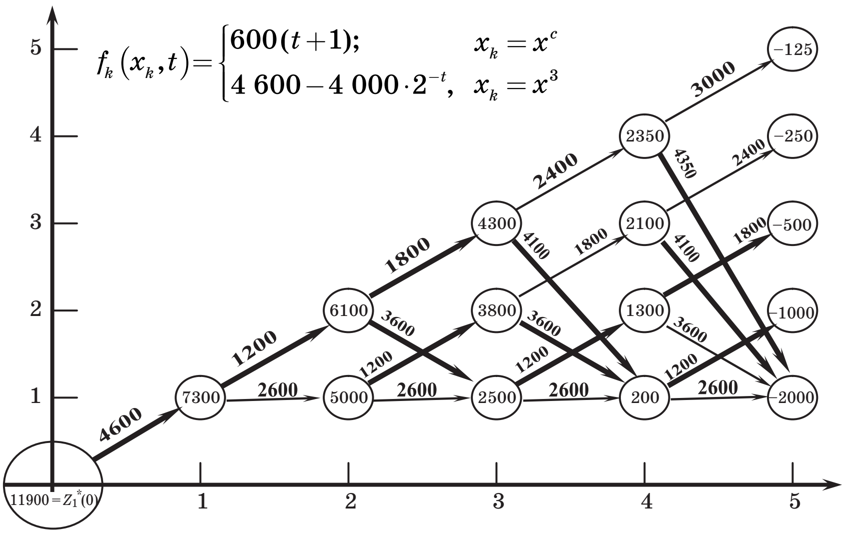


Рис. 2.5. Реалізація заміни устаткування

2.6. Індивідуальні завдання моделі «Заміна устаткування»

Реалізуйте попередню модель із заданим показником ефективності ***k***-го кроку (коефіцієнти наведені в таблиці 2.2).

При цьому ліквідна вартість $g(t)$ дорівнює:

$$g(t) = \frac{P_o}{k^t} \cdot r(t) = w \cdot (t+s). \tag{2.9}$$

Параметри P_0, k, w, S для певного варіанта вказані у відповідному рядку таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Коефіцієнти завдань моделі «заміна устаткування»

Вар.	P_0	k	w	S
1	360	2	60	5
2	400	2	50	2
3	1 000	2	150	2
4	800	2	100	4
5	550	2	75	3
6	4 300	2	600	8
7	2 500	2	340	6
8	120	2	25	3
9	575	2	75	1
10	440	2	65	7
11	1 350	2	260	4
12	3 000	2	290	3
13	1 500	2	250	3
14	2 100	2	250	6
15	1 700	2	200	8

Вар.	P_0	k	w	S
16	365	2	65	6
17	410	2	60	3
18	1 100	2	160	3
19	900	2	110	5
20	560	2	80	4
21	4 400	2	650	7
22	2 600	2	350	5
23	130	2	30	4
24	580	2	80	2
25	450	2	70	6
26	1 400	2	250	5
27	3 100	2	300	2
28	1 600	2	255	5
29	2 200	2	250	3
30	1 800	2	210	4

2.7. Рівняння Беллмана

Рівняння Беллмана

Замість вихідної задачі ДП з фіксованим числом кроків n і початковим станом s_0 (див. розділ 2.2) розглянемо послідовність задач зі змінним числом кроків ($n = 1, 2, \ldots$) і різними S — однокрокову, двокрокову тощо, — використовуючи принцип оптимальності.

Уведемо нові позначення, які в ДП інформаційно дуже важливі.

На кожному кроці будь-якого стану системи s_{k-1} значення X_k потрібно вибирати, зважаючи на попередні кроки, тому що цей вибір впливає на наступний стан s_k і подальший процес керування, що залежить від s_k. Це випливає з принципу оптимальності.

Але тільки один крок, останній, можна планувати для будь-якого стану s_{n-1} як локально оптимальний.

Розглянемо ***n***-й крок: S_{n-1} — стан системи до початку ***n***-го кроку, $s_n = \hat{s}$ — кінцевий стан. X_n — керування на ***n***-му кроці, а f_n (s_{n-1}, X_n) — цільова функція (виграш) ***n***-го кроку.

Відповідно до принципу оптимальності, X_n потрібно вибирати так, щоб для будь-яких станів S_{n-1} одержати максимум (мінімум) цільової функції на цьому кроці.

Позначимо через $Z_n^*(S_{n-1})$ максимум цільової функції — показника ефективності ***n***-го кроку за умови, що до початку останнього кроку система ***S*** була в довільному стані S_{n-1}, а на останньому кроці керування було оптимальним.

$Z_n^*(S_{n-1})$ *називається умовним максимумом цільової функції на **n**-му кроці*. Очевидно, що:

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n). \tag{2.10}$$

Максимізація ведеться за всіма припустимими керуваннями X_n. Розв'язання X_n, коли досягається $Z_n^*(S_{n-1})$, також залежить від S_{n-1} і називається *умовним оптимальним керуванням* на ***n***-му *кроці*. Воно позначається через $X_n^*(S_{n-1})$.

Під час розв'язання одномірної задачі локальної оптимізації за рівнянням (2.10) знайдемо для всіх можливих станів S_{n-1} дві функції: $Z_n^*(S_{n-1}$ і $X_n^*(S_{n-1})$.

Розглянемо тепер двокрокову задачу: приєднаємо до ***n***-го кроку **(*n* − 1)**-й крок (рис. 2.6).

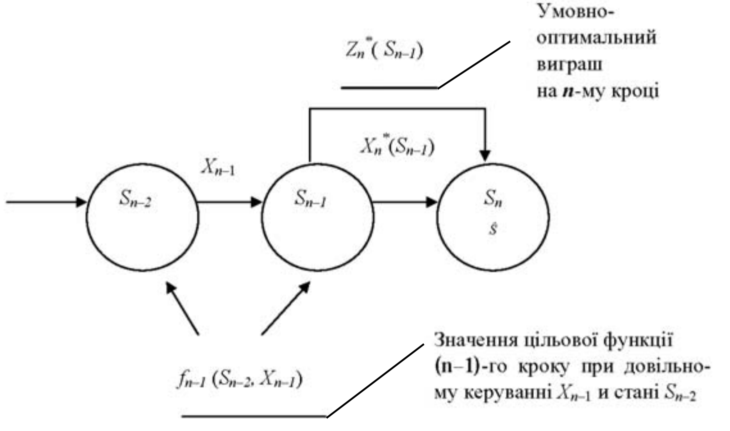


Рис. 2.6. Умовно-оптимальне керування

Для будь-яких станів S_{n-2}, довільних керувань X_{n-1} і оптимальному керуванні на $\boldsymbol{n}$-му кроці значення цільової функції на двох останніх кроках дорівнює:

$$f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}). \qquad (2.11)$$

Відповідно до принципу оптимальності для будь-яких S_{n-2} рішення потрібно вибирати так, щоб воно разом із оптимальним керуванням на останньому $\boldsymbol{n}$-му кроці приводило б до максимуму цільової функції на двох останніх кроках. Отже, потрібно знайти максимум виразу (2.6) за всіма припустимими керуваннями X_{n-1}. Максимум цієї суми залежить від S_{n-2}, позначається через $Z_n^*(S_{n-2})$ і називається *умовним максимумом цільової функції за умови оптимального керування на двох останніх кроках*. Відповідне керування X_{n-1} на **(*n* − 1)**-му кроці позначається через $X_n^*(S_{n-2})$ і називається *умовним оптимальним керуванням* на **(*n* − 1)**-му кроці.

$$Z_{n-1}^*(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}) \right\}. \qquad (2.12)$$

Продовжуючи ці міркування, випишемо рівняння (2.12) для кожного $\boldsymbol{k}$, одержимо:

$$Z_k^*\left(S_{k-1}\right) = \max_{\{X_k\}} \left\{ \mathrm{f}_k\left(S_{k-1}, X_k\right) + Z_{k+1}^*\left(S_k\right) \right\}, \qquad (2.13)$$

Рівняння (2.13) називають ***рівняннями Беллмана***. Це рекурентні співвідношення, що дозволяють знайти попереднє значення функції, знаючи наступні.

Процес розв'язання рівнянь (2.10) і (2.13) називається *умовною оптимізацією*.

У результаті умовної оптимізації маємо дві послідовності:

$Z_n^*(s_{n-1})$, $Z_n^*(s_{n-2})$, ..., $Z_2^*(s_1)$, $Z_1^*(s_0)$ — умовні максимуми цільової функції на останньому, на двох останніх, на $\boldsymbol{n}$ кроках і

$X_n^*(s_{n-1})$, $X_n^*(s_{n-2})$, ..., $X_2^*(s_1)$, $X_1^*(s_0)$ — умовні оптимальні керування на $\boldsymbol{n}$-му, **(*n* − 1)**-му, ..., **1**-му кроках.

Використовуючи ці послідовності, можна знайти розв'язання задачі **ДП** при даних $\boldsymbol{n}$ і S_0, яку розглянемо нижче.

2.8. Оптимальний розподіл засобів між галузями на *N* років

Модель

Планується діяльність двох галузей виробництва на $\boldsymbol{n}$ років. Початкові ресурси $\boldsymbol{S_0}$. Кошти $\boldsymbol{x}$, вкладені в першу галузь на початку року, дають наприкінці року прибуток $f_1(x)$ і повертаються в розмірі $q_1(x) < x$; аналогічно для іншої галузі функція прибутку дорівнює $f_2(x)$, а повернення — $q_2(x)$ ($q_2(x) < x$). Наприкінці року всі повернуті капітали заново перерозподіляють між першою і другою галузями, нові кошти не надходять, прибуток у виробництво не вкладається.

Потрібно розподілити наявні початкові кошти $\boldsymbol{S_0}$ *між двома галузями виробництва на* $\boldsymbol{n}$ *років так, щоб сумарний прибуток від обох галузей за* $\boldsymbol{n}$ *років виявився максимальним.*

Потрібно:

а) побудувати модель **ДП** для задачі й обчислювальну схему;

б) розв'язати задачу за умови, що S_0 = 10 000 од., $n = 4$, $f_1(x) = 0{,}6x$, $q_1(x) = 0{,}7x$, $f_2(x) = 0{,}5x$, $q_2(x) = 0{,}8x$.

Реалізація моделі:

Уведемо деякі математичні позначення:

X_k — кількість коштів, вкладених у першу галузь в k-му році;

Y_k — кількість коштів, вкладених у другу галузь в k-му році;

$X_k + Y_k$ — сумарна кількість вкладених коштів у обидві галузі в k-му році;

$X_k + Y_k = S_{k-1}$ — кількість коштів, отриманих у $\boldsymbol{k-1}$ році для вкладення в $\boldsymbol{k}$-й рік, із цього маємо:

$$y_k = S_{k-1} - x_k; \tag{2.14}$$

$f_1(x_k)$ — прибуток, отриманий першою галуззю у $\boldsymbol{k}$-му році;

$f_2(y_k) \overset{(1)}{=} f_2(S_{k-1} - x_k)$ — прибуток, отриманий другою галуззю у $\boldsymbol{k}$-му році;

$f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k)$ — прибуток, отриманий обома галузями у $\boldsymbol{k}$-му році. Враховуючи прибутки, маємо:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} (f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k)), \tag{2.15}$$

де Z — сумарний прибуток, отриманий обома галузями за $\boldsymbol{n}$ років, максимальний обсяг якого треба знайти;

$q_1(x_k)$ — кількість коштів, повернених першою галуззю у $\boldsymbol{k}$-му році;

$q_2(x_k)$ — кількість коштів, повернених першою і другою галузями підприємству — рекурентне співвідношення, що виражає S_k через S_{k-1}. Із цього маємо:

$$S_k = q_1(x_k) + q_2(S_{k-1} - x_k), \tag{2.16}$$

де S_k — кількість коштів, повернених першій і другій галузям.

Рівняння (2.16) — ***рекурентне співвідношення*** або **рівняння Беллмана,** що виражає S_k через S_{k-1} (або ***рівняння станів***):

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{0 \le X_n \le S_{n-1}} \left\{ f_1(x_n) + f_2(S_{n-1} - x_n) \right\}. \qquad (2.17)$$

Рівняння **(2.17)** — *умовно-оптимальний прибуток на останньому* ***n*** *етапі;*

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{0 \le X_k \le S_{k-1}} \left\{ f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k) + Z_{k+1}^*(S_k) \right\}. \qquad (2.18)$$

Рівняння (2.18) — умовно-оптимальний прибуток, отриманий з ***k***-го до ***n***-го року включно.

Для пошуку цільової функції **(2.15)** використовуємо методи динамічного програмування, тобто розподілимо розв'язання задачі на 4 етапи по роках:

Дано:

$f_1(x) = 0{,}6X_k$ $\qquad$ $q_1(x) = 0{,}7X_k$ $\quad S_0 = 10\,000$
$f_2(y) = 0{,}5X_k$ $\qquad$ $q_2(y) = 0{,}8X_k$ $\quad n = 4.$

Використовуючи **(2.14)**, отримаємо таку залежність:

$$Z = \sum_{k=1}^{4} (f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k)) = \sum_{k=1}^{4} (0{,}6\,x_k + 0{,}5(S_{k-1} - x_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{4} (0{,}1\,x_k + 0{,}5\,S_{k-1}) = Z; \qquad (2.19)$$

$$S_k = 0{,}7x_k + 0{,}8(S_{k-1} - x_k) = 0{,}8S_{k-1} - 0{,}1x_k = S_k.$$

4 крок

Визначимо **max** прибуток, отриманий за останній рік — з рівняння **(2.17)**:

$$Z_4^*(S_3) = \max_{0 \le X_4 \le S_3} \left\{ f_1(x_4) + f_2(S_3 - x_4) \right\} = (2.15) =$$

$$= \max_{0 \le X_4 \le S_3} \left\{ 0{,}1x_4 + 0{,}5S_3 \right\} —$$

задача звелася до пошуку **max** функції $Z_4(X_4)$ на відрізку $[0, S_3]$:

$$\max_{0 \le X_4 \le S_3} \left\{ Z_4(S_3) \right\} = 0.6\,S_3 = Z_4^*(S_3) \qquad (2.20)$$

де $X_4 = S3$.

3 крок

Застосовуючи формулу (2.18), визначимо:

$$Z_3^*(S_2) = \max_{0 \le X_3 \le S_2} \left\{ f_1(X_3) + f_2(S_2 - X_3) + Z_4^*(S_3) \right\} = (2.15),(2.20)$$
$$= \max_{0 \le X_3 \le S_2} \left\{ 0{,}1\, X_3 + 0{,}5\, S_2 + 0{,}6\, S_3 \right\} = (2.16)$$
$$= \max_{0 \le X_3 \le S_2} \left\{ 0{,}1\, X_3 + 0{,}5\, S_2 + 0{,}6\,(0{,}8\, S_2 - 0{,}1\, X_3) \right\} =$$
$$= \max_{0 \le X_3 \le S_2} \left\{ 0{,}04\, X_3 + 0{,}98\, S_2 \right\} —$$

задача звелася до пошуку **max** функції $Z_3(X_3)$ на відрізку $[0,S_2]$:

$$\max_{0 \le X_3 \le S_2} \left\{ Z_3(S_3) \right\} = 1.02\, S_2 = Z_3^*(S_2) \qquad (2.21)$$
$$\text{äå } X_3 = S2.$$

2 крок

Застосовуючи формулу (2.18), $k = 2$, визначимо:

$$Z_2^*(S_1) = \max_{0 \le X_2 \le S_1} \left\{ f_1(X_2) + f_2(S_1 - X_2) + Z_3^*(S_2) \right\} = (2.15),(2.21) =$$
$$= \max_{0 \le X_2 \le S_1} \left\{ 0{,}1\, X_2 + 0{,}5\, S_1 + 1.02\, S_2 \right\} = (2.16)$$
$$= \max_{0 \le X_2 \le S_1} \left\{ 0{,}1\, X_2 + 0{,}5\, S_1 + 1.02\,(0{,}8\, S_1 - 0{,}1\, X_2) \right\} =$$
$$= \max_{0 \le X_2 \le S_1} \left\{ -0{,}002\, X_2 + 1.316\, S_1 \right\} —$$

задача звелася до пошуку **max** функції $Z_2(X_2)$ на відрізку $[0, S_1]$.

$$\max_{0 \le X_2 \le S_1} \left\{ Z_2(X_1) \right\} = 1.316\, S_1 \qquad (2.22)$$
$$\text{äå } X_2 = 0.$$

1 крок

Застосовуючи формулу (2.18), $k = 1$, визначимо:

$$Z_1^*(S_0) = \max_{0 \le X_1 \le S_0} \left\{ f_1(X_1) + f_2(S_0 - X_1) + Z_2^*(S_1) \right\} = (2.15),(2.22) =$$
$$= (2.16) = \max_{0 \le X_1 \le S_0} \left\{ 0{,}1\, X_1 + 0{,}5\, S_0 + 1.316\, S_1 \right\} =$$

$$= \max_{0 \le X_1 \le S_0} \left\{ 0{,}1\, X_1 + 0{,}5\, S_0 + 1.316\,(0{,}8\, S_0 - 0{,}1\, X_1) \right\} =$$

$$= \max_{0 \le X_1 \le S_0} \left\{ -0.0316\, X_1 + 1.5528\, S_0 \right\} —$$

задача звелася до пошуку **max** функції $Z_1(X_1)$ на відрізку $[0,\ S_0]$:

$$\max_{0 \le X_1 \le S_0} \left\{ Z_1(X_1) \right\} = 1.5528\, S_0 \qquad (2.23)$$

äå $X_1 = 0$.

Випишемо відповіді всіх етапів у формі таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Відповіді всіх кроків

$Z_4^*(S_3)\Big\vert_{X_4 = S_3} = 0{,}6S_3$	4 крок
$Z_3^*(S_2)\Big\vert_{X_3 = S_2} = 1{,}02S_2$	3 крок
$Z_2^*(S_1)\Big\vert_{X_2 = 0} = 1{,}316S_1$	2 крок
$Z_1^*(S_0)\Big\vert_{X_1 = 0} = 1{,}5528S_0$	1 крок

Після розрахунків умовних максимумів цільової функції кожного кроку зробимо перерахунок розподілу коштів за роками (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Підсумкова таблиця — перерахування коштів по роках

	I етап	II етап	III етап	IV етап
I	$\boxed{X_1 = 0}$	$\boxed{X_2 = 0}$	$\boxed{X_3 = S_2} = 6\,400$	$\boxed{X_4 = S_3} = 4\,480$
$\boxed{S_0 = 10.000}$	$\boxed{S_k = q_1(x_k) + q_2(y_k)} \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{S_k = 0.7x_k + 0.8y_k} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_1 = 0.7x_k + 0.8y_k \Rightarrow$ $\Rightarrow S_1 = 0.7 \cdot 0 + 0.8 \cdot 10\,000 \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{S_1 = 8\,000}$	$\boxed{S_k = 0.7x_k + 0.8y_k} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_2 = 0.7x_2 + 0.8y_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_2 = 0.7 \cdot 0 + 0.8 \cdot 8\,000$ $\Rightarrow \boxed{S_2 = 6\,400}$	$\boxed{S_k = 0.7x_k + 0.8y_k} \Rightarrow$ $\Rightarrow S_3 = 0.7x_3 + 0.8y_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_3 = 0.7 \cdot 6.400 +$ $+ 0.8 \cdot 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{S_3 = 4\,480}$	$S_1 = 3\,136$
II	$\boxed{y_k = S_{k-1} - x_k} \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = S_0 - x_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = 10\,000 - 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{y_1 = 10\,000}$	$\boxed{y_k = S_{k-1} - x_k} \Rightarrow$ $\Rightarrow y_2 = S_1 - x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_2 = 8\,000 - 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{y_2 = 8\,000}$	$\boxed{y_k = S_{k-1} - x_k} \Rightarrow$ $\Rightarrow y_3 = S_2 - x_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_3 = 6\,400 - 6\,400$ $\Rightarrow \boxed{y_3 = 0}$	$\boxed{y_k = S_{k-1} - x_k}$ $\Rightarrow y_4 = S_3 - x_4$ $\Rightarrow y_4 = 4\,480 -$ $- 4\,480 \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{y_4 = 0}$

Відповідь: Оптимальний прибуток за чотири роки, отриманий від двох галузей виробництва при початкових коштах 10 000 од., дорівнює 15 528 за умови, що перша галузь одержує по роках: (0; 0; 6 400; 4 480), а друга галузь одержує по роках: (10 000; 8 000; 0; 0).

2.9. Індивідуальні завдання моделі «Оптимальний розподіл коштів між галузями на N років»

Реалізуйте попередню модель, враховуючи коефіцієнти таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

Коефіцієнти індивідуальних завдань

Вар.	f_1	q_1	f_2	q_2	S_0
1	0,6	0,4	0,3	0,5	10 000
2	0,6	0,5	0,4	0,6	8 000
3	0,7	0,5	0,4	0,6	6 000
4	0,7	0,6	0,5	0,7	4 000
5	0,3	0,2	0,5	0,7	2 000
6	0,9	0,6	0,7	0,8	100
7	1,0	0,4	0,8	0,9	1 000
8	1,0	0,2	0,8	0,9	1 100
9	0,7	0,8	0,9	0,3	1 200
10	1,1	0,8	0,9	1,0	1 300
11	2,0	1,8	1,6	1,9	1 400
12	2,1	2,0	1,7	2,0	1 500
13	0,1	1,9	1,7	1,5	1 600
14	2,2	2,0	1,8	2,1	1 700
15	0,9	2,0	1,8	2,1	1 800
16	1,0	2,4	2,3	2,5	1 200
17	2,7	2,0	2,4	2,6	1 150
18	2,7	2,5	3,0	2,6	1 100
19	2,8	3,0	2,5	4,0	1 050
20	2,8	2,6	2,5	2,7	1 000
21	2,9	2,6	2,7	2,8	950
22	3,0	2,0	2,8	2,9	900
23	3,0	2,7	1,2	2,9	850
24	3,1	2,0	2,9	3,0	800
25	3,1	2,8	2,9	3,0	750
26	1,5	1,3	1,1	1,4	700
27	1,6	1,6	1,2	1,9	650
28	3,5	1,4	1,8	1,5	600
29	2,4	1,5	1,3	1,6	550
30	1,7	1,5	1,3	1,6	500

2.10. Оптимальне капіталовкладення

Метод динамічного програмування широко застосовують для розв'язання адитивних (*сепарабельних*) задач математичного програмування.

Приклад. Розглянемо метод на простому прикладі. Нехай є чотири проекти, для реалізації яких потрібно вкладати деякі кошти. Вихідні дані містяться в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Дані «вкладення — прибуток» у проект

Вкладення в млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,35
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53

Як розподілити вкладення між проектами, щоб дістати максимальний прибуток?

Будь-яке припустиме розв'язання можна подати у вигляді ламаної, яку будемо називати траєкторією. Наведемо приклади ламаних для рішень (3, 1, 1, 0) і (2, 1, 1, 1) на рис. 2.7.

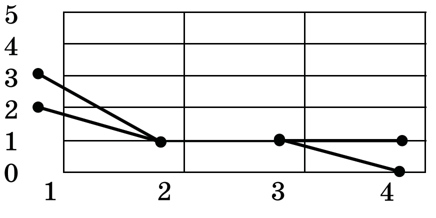


Рис. 2.7. Графічне зображення двох припустимих рішень

Задача має перебірний характер. Нехай $f_i(x)$ — прибуток, отриманий у разі вкладення засобів x у проект i, $i = 1; 2; 3; 4$; $x = 0; 1; \ldots; 5$. Функції $f_i(x)$ монотонно зростають. Тоді поставимо задачу в такий спосіб. Знайти x_1, x_2, x_3, x_4 такі, що:

$$\sum_{i=1}^{4} f_i(x) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i = A.$$

Розглянемо задачу для цілих значень $A \in [0;5]$. Уведемо позначення: $F_{1,\,2}(A)$ — максимальний прибуток, отриманий від коштів A, вкладених у проекти 1, 2. Аналогічно $F_{1,\,2,\,3}(A)$ — максимальний прибуток від коштів A, вкладених у проекти 1, 2, 3 і 4. Нехай потрібно знайти $F_{1,\,2}(2)$. Для цього обчислюємо:

$$f_1(0)+f_2(2)=0+0{,}41=0{,}41;$$
$$f_1(1)+f_2(1)=0{,}28+0{,}25=0{,}53;$$
$$f_1(2)+f_2(0)=0{,}45+0=0{,}45.$$

Застосований вище алгоритм можна описати в такий спосіб:

$$F_{1,2}(A)=\max_{x\in[0,A]}[f_1(x)+f_2(A-x)].$$

Тоді $F_{1,\,2}(2) = 0{,}53(1{,}1)$ — у дужках зазначений розподіл ресурсів між проектами, $x_1 = x_2 = 1$. За цією формулою можна обчислити оптимальний розподіл коштів між двома проектами для всіх A. Знайдемо ще $F_{1,\,2}(4)$:

$$f_1(0)+f_2(4)=0+0{,}65=0{,}65;$$
$$f_1(1)+f_2(3)=0{,}28+0{,}55=0{,}83;$$
$$f_1(2)+f_2(2)=0{,}45+0{,}41=0{,}86;$$
$$f_1(3)+f_2(1)=0{,}65+0{,}25=0{,}90;$$
$$f_1(4)+f_2(0)=0{,}78+0=0{,}78.$$

Тоді $F_{1,\,2}(4) = 0{,}90(3{,}1)$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Отримані результати обчислень $F_{1,\,2}(A)$ для всіх значень A запишемо в таблицю 2.7.

Таблиця 2.7

Результати обчислень для всіх А $\in$ [0,5]

Вкладення А	$F_{1,2}(A)$	$F_{1,\,2,\,3}(A)$	$F_{1,\,2,\,3,\,4}(A)$
0	0 (0, 0)	0 (0, 0, 0)	0 (0, 0, 0, 0)
1	0,28 (1, 0)	0,28 (1, 0, 0)	0,28 (1, 0, 0, 0)
2	0,53 (1, 1)	0,53 (1, 1, 0)	0,53 (1, 1, 0, 0)
3	0,70 (2, 1)	0,70 (2, 1, 0)	0,73 (1, 1, 0, 1)
4	0,90 (3, 1)	0,90 (3, 1, 0)	0,90 (3, 1, 0, 0)
5	1,06 (3, 2)	1,06 (3, 2, 0)	1,10 (3, 1, 0, 1)

Перейдемо до третього проекту, скориставшись таким рекурентним співвідношенням:

$$F_{1,2,3}(A) = \max_{x \in [0,A]} [F_{1,2}(x) + f_3(A - x)].$$

Значення $F_{1,2}(x)$ беремо з таблиці 2.7, а величини $f_3(A - x)$ — з вихідної таблиці 2.6. Нехай $A = 4$. Обчислюємо:

$$f_{1,2}(0) + f_3(4) = 0 + 0,50 = 0,50;$$
$$f_{1,2}(1) + f_3(3) = 0,28 + 0,40 = 0,68;$$
$$f_{1,2}(2) + f_3(2) = 0,53 + 0,25 = 0,78;$$
$$f_{1,2}(3) + f_3(1) = 0,70 + 0,15 = 0,85;$$
$$f_{1,2}(4) + f_3(0) = 0,90 + 0 = 0,90.$$

Тоді $F_{1,2,3}(4) = 0,90(3, 1, 0)$. Розподіл коштів між трьома проектами при $A = 4$ таке: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Результати обчислень для всіх значень A запишемо в таблицю 2.7.

Визначимо $F_{1,2,3}(A)$ за такою формулою:

$$F_{1,2,3,4}(A) = \max_{x \in [0,A]} [F_{1,2,3}(x) + f_4(A - x)].$$

Обчислимо $F_{1,2,3}(4)$:

$$f_{1,2,3}(0) + f_4(4) = 0 + 0,48 = 0,48;$$
$$f_{1,2,3}(1) + f_4(3) = 0,28 + 0,42 = 0,70;$$
$$f_{1,2,3}(2) + f_4(2) = 0,53 + 0,33 = 0,86;$$
$$f_{1,2,3}(3) + f_4(1) = 0,70 + 0,20 = 0,90;$$
$$f_{1,2,3}(4) + f_4(0) = 0,90 + 0 = 0,90.$$

Тоді $F_{1,2,3,4}(4) = 0,90(3, 1, 0, 0)$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Отримані результати обчислення $F_{1,2,3,4}(A)$ для всіх значень A запишемо в таблицю 2.7. Після закінчення процесу обчислень оптимальні капіталовкладення для всіх цілих значень $0 \le A \le 5$ знайдемо в цій таблиці.

Задачі розглянутого типу називають *адитивними*. Під час розв'язання таких задач оптимізація функції n змінних зводиться до багатокрокового процесу з n кроків, на кожнім кроці якого оптимізується функція однієї змінної.

З усіх вкладень на кожнім кроці для подальшого дослідження залишають те значення, що дає максимальний прибуток. У цьому полягає зміст алгоритму динамічного програмування.

2.11. Індивідуальні завдання моделі «Оптимальне капіталовкладення»

Фірма швидкого харчування має намір укласти капітал у розмірі A млн грн у розширення виробництва. Фірма має n філій, розташованих у різних містах. У кожній із цих філій проведено вивчення ринку і математично розраховане очікування прибутку як функції капіталовкладень. Розробіть оптимальний план капіталовкладень, максимізуючи очікуваний прибуток.

Варіант 1

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,3	0,2
2	0,2	0,3	0,4	0,1
3	0,3	0,1	0,5	0,2
4	0,2	0,4	0,3	0,3
5	0,1	0,2	0,2	0,4

Варіант 2

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,2	0,1	0,3	0,1
2	0,3	0,3	0,4	0,1
3	0,3	0,2	0,2	0,2
4	0,4	0,4	0,3	0,2
5	0,4	0,3	0,2	0,3

Варіант 3

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,1	0,2
2	0,3	0,2	0,4	0,1
3	0,2	0,3	0,3	0,2
4	0,2	0,4	0,3	0,3
5	0,1	0,3	0,4	0,4

Варіант 4

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,2	0,4	0,3
2	0,3	0,3	0,4	0,1
3	0,2	0,4	0,3	0,2
4	0,2	0,2	0,2	0,3
5	0,1	0,3	0,3	0,4

Варіант 5

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,2	0,3	0,4
2	0,3	0,3	0,4	0,1
3	0,2	0,4	0,3	0,2
4	0,1	0,5	0,2	0,3
5	0,3	0,3	0,1	0,4

Варіант 6

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,3	0,5	0,1	0,4
2	0,4	0,3	0,2	0,3
3	0,5	0,4	0,3	0,2
4	0,5	0,5	0,4	0,3
5	0,4	0,3	0,5	0,1

Варіант 7

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,5	0,2	0,3	0,4
2	0,4	0,3	0,2	0,3
3	0,3	0,4	0,1	0,2
4	0,3	0,5	0,3	0,3
5	0,2	0,3	0,2	0,3

Варіант 8

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,5	0,2	0,3	0,4
2	0,4	0,3	0,2	0,3
3	0,3	0,4	0,1	0,2
4	0,3	0,5	0,3	0,3
5	0,2	0,3	0,2	0,3

Варіант 9

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,3	0,3	0,4
2	0,4	0,2	0,2	0,3
3	0,3	0,4	0,1	0,2
4	0,5	0,5	0,3	0,1
5	0,4	0,3	0,2	0,2

Варіант 10

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,3	0,2	0,3	0,4
2	0,2	0,3	0,2	0,2
3	0,1	0,4	0,2	0,3
4	0,1	0,5	0,3	0,1
5	0,2	0,3	0,4	0,2

Варіант 11

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,6	0,4	0,5	0,4
2	0,5	0,3	0,4	0,2
3	0,4	0,4	0,4	0,3
4	0,3	0,5	0,3	0,2
5	0,2	0,6	0,4	0,4

Варіант 12

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,7	0,5	0,6	0,2
2	0,5	0,4	0,5	0,3
3	0,6	0,5	0,4	0,4
4	0,4	0,6	0,3	0,5
5	0,5	0,7	0,2	0,6

Варіант 13

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,5	0,4	0,3
2	0,5	0,4	0,5	0,3
3	0,6	0,5	0,4	0,4
4	0,4	0,6	0,3	0,4
5	0,3	0,7	0,4	0,5

Варіант 14

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,3	0,4	0,5	0,3
2	0,4	0,3	0,4	0,2
3	0,5	0,5	0,2	0,4
4	0,4	0,6	0,3	0,3
5	0,5	0,4	0,4	0,5

Варіант 15

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,3	0,4	0,3
2	0,3	0,4	0,4	0,2
3	0,2	0,5	0,2	0,3
4	0,2	0,4	0,3	0,4
5	0,3	0,2	0,4	0,5

Варіант 16

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,3	0,4	0,3
2	0,3	0,4	0,4	0,2
3	0,2	0,5	0,2	0,3
4	0,2	0,4	0,3	0,4
5	0,3	0,2	0,4	0,5

Варіант 17

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,5	0,4	0,3
2	0,3	0,4	0,3	0,2
3	0,2	0,3	0,2	0,2
4	0,3	0,4	0,3	0,3
5	0,4	0,2	0,4	0,5

Варіант 18

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,1	0,3
2	0,2	0,3	0,3	0,2
3	0,3	0,3	0,2	0,2
4	0,4	0,2	0,3	0,3
5	0,6	0,2	0,4	0,5

Варіант 19

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,2	0,3
2	0,2	0,3	0,3	0,2
3	0,2	0,3	0,4	0,3
4	0,4	0,4	0,3	0,4
5	0,3	0,2	0,4	0,5

Варіант 20

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,2	0,2	0,1	0,2
2	0,1	0,3	0,3	0,2
3	0,1	0,3	0,4	0,3
4	0,2	0,2	0,3	0,3
5	0,3	0,2	0,4	0,2

Варіант 21

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,7	0,5	0,7	0,6
2	0,9	0,7	0,6	0,8
3	0,8	0,6	0,5	0,9
4	0,7	0,8	0,4	0,7
5	0,6	0,6	0,3	0,5

Варіант 22

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,1	0,3
2	0,2	0,3	0,3	0,2
3	0,3	0,3	0,2	0,2
4	0,4	0,2	0,3	0,3
5	0,6	0,2	0,4	0,5

Варіант 23

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,6	0,4	0,4	0,5
2	0,5	0,5	0,3	0,3
3	0,4	0,3	0,4	0,2
4	0,3	0,2	0,3	0,3
5	0,4	0,2	0,2	0,4

Варіант 24

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,2	0,3	0,4	0,3
2	0,2	0,2	0,3	0,2
3	0,3	0,3	0,2	0,4
4	0,3	0,4	0,1	0,3
5	0,4	0,5	0,3	0,5

Варіант 25

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,2	0,2	0,1	0,3
2	0,1	0,3	0,3	0,2
3	0,1	0,3	0,4	0,3
4	0,2	0,4	0,3	0,3
5	0,3	0,2	0,4	0,4

Варіант 26

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,3	0,4	0,1	0,2
2	0,2	0,3	0,3	0,2
3	0,3	0,3	0,4	0,3
4	0,3	0,2	0,3	0,3
5	0,4	0,2	0,2	0,5

Варіант 27

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,3	0,2	0,4	0,3
2	0,2	0,4	0,3	0,2
3	0,2	0,3	0,2	0,1
4	0,3	0,2	0,3	0,3
5	0,4	0,1	0,4	0,4

Варіант 28

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,4	0,2	0,1	0,3
2	0,2	0,3	0,3	0,4
3	0,3	0,4	0,2	0,2
4	0,4	0,2	0,3	0,4
5	0,5	0,3	0,4	0,5

Варіант 29

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,1	0,2
2	0,2	0,3	0,2	0,3
3	0,4	0,4	0,3	0,3
4	0,5	0,2	0,4	0,4
5	0,3	0,3	0,4	0,5

Варіант 30

Млн грн	Прибуток			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,4	0,3
2	0,1	0,3	0,3	0,4
3	0,3	0,3	0,2	0,4
4	0,2	0,4	0,3	0,3
5	0,3	0,2	0,4	0,5

2.12. Планування виробництва

Задача:

Спланувати виробництво на N періодів так, щоб:

а) задовольняти попит на продукцію;

б) сумарні витрати за всі N періодів були min.

$$\min \sum_{t=1}^{N} s_t(x_t, i_t), \tag{2.16}$$

де:

$s_t(x_t, i_t) \xrightarrow{def}$ — перевитрати підприємства;

$t = \overline{1, N} \xrightarrow{def}$ — значення періоду;

$x_t \xrightarrow{def}$ — кількість продукції, що випускається у t-ому періоді;

$i_t \xrightarrow{def}$ — запаси на кінець t-го періоду;

$d_t \xrightarrow{def}$ — попит на цю продукцію в t-ому році.

Задача може бути розв'язана методом динамічного програмування.

Для реалізації методу необхідно процес розв'язання перетворити в N-етапний процес. Для кожного етапу описати:

а) безліч початкових станів;

б) безліч рішень.

Застосуємо принцип оптимальності (див. пункт 2.1)

Стосовно до задачі планування виробництва:

Оптимальна стратегія (план) має ту властивість, що: $\forall k \mid 1 \le k \le N$: *який би не був рівень випуску з* $\overline{1, k}$; *який би не був запас на кінець* N-го *періоду, подальший план має бути оптимальним щодо досягнутого стану.*

Реалізація задачі планування виробництва:

$$s_t(x_t, i_t) = s(x_t) + i_t. \tag{2.17}$$

$x = \overline{0,5}$; $i = \overline{0,4}$; $d = 3 = \text{cons}$; t $S(0)$: = 0; $S(3)$: = 3; $S(1)$: = 1; $S(4)$: = 4; $S(2)$: = 2; $S(5)$: = 5.

Таблиця 2.8

Етап № 1

S/x	0	1	2	3	4	5	$\hat{X}$	$\hat{F}$
0	–	–	–	3	–	–	3	3
1	–	–	2	–	–	–	2	2
2	–	1	–	–	–	–	1	1
3	0	–	–	–	–	–	0	0
4	–	–	–	–	–	–		
5	–	–	–	–	–	–		

Таблиця 2.9

Етап № 2

S/x	0	1	2	3	4	5	$\hat{X}$	$\hat{F}$
0	–	–	–	3+0+3=**6**	4+1+2=**7**	5+2+1=**8**	3	6
1	–	–	2+0+3=**5**	3+1+2=**6**	4+2+1=**7**	5+3+0=**8**	2	5
2	–	1+0+3=**4**	2+1+2=**5**	3+2+1=**6**	4+3+0=**7**	–	1	4
3	0+0+3=**3**	1+1+2=**4**	2+3+0=**5**	3+3+0=**6**	–	–	0	3
4	0+1+2=**3**	1+2+1=**4**	2+3+0=**5**	–	–	–	0	3
5	–	–	–	–	–	–		

Таблиця 2.10

Етап № 3

S/x	0	1	2	3	4	5	$\hat{X}$	$\hat{F}$
0	–	–	–	3+0+6=**9**	4+1+5=**10**	5+2+4=**11**	3	9
1	–	–	2+0+6=**8**	3+1+5=**9**	4+2+4=**10**	5+3+3=**11**	2	8
2	–	1+0+6=**7**	2+1+5=**8**	3+2+4=**9**	4+1+5=**10**	5+4+3=**12**	1	7
3	0+3+3=**6**	1+1+5=**7**	2+2+4=**8**	3+3+3=**9**	4+4+3=**11**	–	0	6
4	0+1+5=**6**	1+2+4=**7**	2+3+3=**8**	3+4+3=**10**	–	–	0	6
5	–	–	–	–	–	–		

Таблиця 2.11

Етап № 4

S/x	0	1	2	3	4	5	$\hat{X}$	$\hat{F}$
0	–	–	–	3+0+9=**12**	4+1+8=**13**	5+2+7=**14**	3	12
1	–	–	2+0+9=**11**	3+1+8=**12**	4+2+7=**13**	5+3+6=**14**	2	11
2	–	1+0+9=**10**	2+1+8=**11**	3+2+7=**12**	4+3+6=**13**	5+4+6=**15**	1	10
3	0+0+9=**9**	1+1+8=**10**	2+2+7=**11**	3+3+6=**12**	4+4+6=**14**	–	0	9
4	0+1+8=**9**	1+2+7=**10**	2+3+6=**11**	3+4+6=**13**	–	–	0	9
5	–	–	–	–	–	–		

Таблиця 2.12

Етап № 5

S/x	0	1	2	3	4	5	$\hat{X}$	$\hat{F}$
0	–	–	–	3+0+12=**15**	4+1+11=**16**	5+2+10=**17**	3	15
1	–	–	2+0+12=**14**	3+1+11=**15**	4+2+10=**16**	5+3+9=**17**	2	14
2	–	1+0+12=**13**	2+1+11=**14**	3+2+10=**15**	4+3+9=**16**	5+4+9=**18**	1	13
3	0+0+12=**12**	1+1+11=**13**	**14**	**15**	**17**	–	0	12
4	**12**	**13**	**14**	**16**	–	–	0	12
5	–	–	–	–	–	–		

Випишемо відповіді, виходячи з попередніх таблиць:
Відповідь 3-го етапу:
Оптимальний план (стратегія) на 3-му етапі із запасом
i_3 = 0:3,3,3; i_3 = 1:2,3,3; i_3 = 2:1,3,3; i_3 = 3:0,3,3; i_3 = 4:0,2,3.
Відповідь 5-го етапу:
Оптимальний план (стратегія) на 5-му етапі із запасом
i_5 = 0:3,3,3,3; i_5 = 1:2,3,3,3; i_5 = 2:1,3,3,3; i_5 = 3:0,3,3,3; i_5 =4:0,2,3,3;3.

2.13. Індивідуальні завдання моделі «Планування виробництва»

Реалізуйте попередню модель за даними таблиці 2.13.

Таблиця 2.13

Варіанти завдань «планування виробництва»

№ з/п	Попит за періодами						Можливі запаси					
						i(t)	0	1	2	3	4	5
						Витрати на виробництво одиниці продукції						
	t	1	2	3	4	5	x	0	1	2	3	4	5
[redacted]	d(t)	3	2	4	3	4	S(x)	0	2	5	10	17	26
	d(t)	3	2	5	5	4	S(x)	0	3	6	11	18	27
	d(t)	2	3	4	5	3	S(x)	0	4	7	12	19	28
	d(t)	2	4	5	6	7	S(x)	0	5	8	13	20	29
	d(t)	4	4	4	5	5	S(x)	0	6	9	14	21	30
	d(t)	3	4	5	6	5	S(x)	0	7	10	15	22	31
	d(t)	3	5	5	3	3	S(x)	0	8	11	16	23	32

Закінчення табл. 2.13

№ з/п	Попит за періодами							Можливі запаси					
							i(t)	0	1	2	3	4	5
							Витрати на виробництво одиниці продукції						
	t	1	2	3	4	5	x	0	1	2	3	4	5
[redacted]	d(t)	2	2	3	4	6	S(x)	0	9	12	17	24	33
[redacted]	d(t)	4	6	5	5	5	S(x)	0	10	13	18	25	34
[redacted]	d(t)	3	2	6	6	5	S(x)	0	11	14	19	26	35
[redacted]	d(t)	3	3	3	4	4	S(x)	0	12	15	20	27	36
[redacted]	d(t)	4	5	3	4	5	S(x)	0	13	16	21	28	37
[redacted]	d(t)	2	2	3	3	5	S(x)	0	14	17	22	29	38
[redacted]	d(t)	2	3	5	5	6	S(x)	0	15	18	23	30	39
[redacted]	d(t)	4	3	2	5	4	S(x)	0	16	19	24	31	40
[redacted]	d(t)	3	2	4	3	4	S(x)	0	17	20	25	32	41
[redacted]	d(t)	3	2	5	5	4	S(x)	0	18	21	26	33	42
[redacted]	d(t)	2	3	4	5	3	S(x)	0	19	22	27	34	43
[redacted]	d(t)	2	4	5	6	7	S(x)	0	20	23	28	35	44
[redacted]	d(t)	4	4	4	5	5	S(x)	0	21	24	29	36	45
[redacted]	d(t)	3	4	5	6	5	S(x)	0	22	25	30	37	46
[redacted]	d(t)	3	5	5	3	3	S(x)	0	23	26	31	38	47
[redacted]	d(t)	2	2	3	4	6	S(x)	0	24	27	32	39	48
[redacted]	d(t)	4	6	5	5	5	S(x)	0	25	28	33	40	49
[redacted]	d(t)	3	2	6	6	5	S(x)	0	26	29	34	41	50
[redacted]	d(t)	3	3	3	4	4	S(x)	0	27	30	35	42	51
[redacted]	d(t)	4	5	3	4	5	S(x)	0	28	31	36	43	52
[redacted]	d(t)	2	2	3	3	5	S(x)	0	29	32	37	44	53
[redacted]	d(t)	2	3	5	5	6	S(x)	0	30	33	38	45	54
[redacted]	d(t)	4	3	2	5	4	S(x)	0	31	34	39	46	55

Модуль 3
МОДЕЛЬ ПРИЗНАЧЕНЬ

3.1. Основні положення задачі

Задачі:

Нехай потрібно виконати n різних робіт за наявності n механізмів (машин) для їхнього виконання, причому кожен механізм можна використовувати на будь-якій роботі.

$C_{ij} \xrightarrow{def}$ продуктивність i-го механізму на j-тій роботі.

Задача полягає в такому розподілі механізмів по роботах, за якого сумарна продуктивність має максимальне значення.

Математична модель:

$$X_{i,j} \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 \Leftrightarrow & i\text{-ий механізм призначається на } j\text{-у роботу} \\ 0 \Leftrightarrow & i\text{-ий механізм призначається на не } j\text{-у роботу} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \to \max & \text{(Сумарна продуктивність за цього варіанту призначень максимальна)} \quad (3.1) \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad i = \overline{1,n} & \text{(Кожен механізм призначається на одну роботу)} \quad (3.2) \\ \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad j = \overline{1,n} & \text{(На кожну роботу призначається один механізм)} \quad (3.3) \\ X_{ij} = \begin{cases} 1; \\ 0. \end{cases} \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,n} & \text{(Бінарні значення змінних)} \quad (3.4) \end{cases}$$

Зауваження: Умови (3.1–3.4) виводять задачу про призначення з класу задач лінійного програмування, тому що вони ***нелінійні***.

(*Задачі математичного програмування, в яких на змінні накладено умови (3.4), називаються* ***задачами з логічними змінними***.)

Оскільки вся решта умов (3.2), (3.3) і функція (3.1) нашої задачі лінійні, ми маємо формально зарахувати її до класу задач лінійного програмування з логічними змінними.

Однак практично задачу (3.1–3.4) можна розглядати як окремий випадок транспортної, якщо:

а) умову (3.4) замінити умовою невід'ємності змінних;

б) умови (3.2 $\sim$ 3.3) продукція, вироблена кожним заводом = 1. Попит кожного споживача = 1.

3.2. Угорський метод

Перш ніж перейти безпосередньо до «угорського методу», *визначимо деякі перетворення*:

$\max\limits_i C_{ij} - C_{ij}$ **(I)** «Максимум стовпчика мінус елементи стовпчика»

$C_{ij} - \min\limits_j C_{ij}$ **(II)** «Елементи мінус мінімум рядка»

$\left. C_{ij} - h \right|_{j}$ i незайнята **(III)** «Віднімаємо (h) від усіх незайнятих елементів рядків»

$\left. C_{ij} + h \right|_{i}$ j зайнята **(IV)** «Додаємо (h) до всіх зайнятих елементів стовпчика»

де h — min елемент серед незайнятих елементів матриці.

Визначення. Додавання (або віднімання) будь-якого числа до (від) довільного рядка і (стовпчика) $\xrightarrow{def}$ ***еквівалентні перетворення.***

Теорема

Множини оптимальних призначень двох задач вибору з еквівалентними матрицями збігаються [1–3].

Ідея розв'язання:

а) **max** оптимальний план для матриці $(C_{ij}) \sim$ **min** оптимальному планові для матриці $(-1C_{ij})$. Тому шукаємо **min** оптимальний план із матрицею призначень $(-C_{ij})$;

б) матрицю призначень $(-C_{ij})$ еквівалентними перетвореннями приводимо до невід'ємного значення (C_{ij});

в) шукаємо всіма можливими способами (n) нулів у (C_{ij}), що і дасть нам **min** безлічі оптимальних призначень для матриці з коефіцієнтами призначень $(-C_{ij})$; (тому що менше нуля елемента в матриці немає — усі додатні).

Зауваження. У перетворенні (I) міститься множення C_{ij} на (-1), тобто $\max\limits_i \mathbf{C}_{ij} - \mathbf{C}_{ij} = \max\limits_i \mathbf{C}_{ij} + (-\mathbf{1C}_{ij})$.

(До речі, *дане перетворення не еквівалентне*.)

Із цього зауваження випливає, що матрицю $(-C_{ij})$ можна не шукати, а відразу застосовувати перетворення **(I)** до матриці призначень (C_{ij}).

Алгоритм **угорського методу:**

1. Позначаємо (наприклад, зірочкою) який-небудь нуль у першому стовпчику матриці — (0^*); позначаємо зірочкою *який-небудь нуль у другому стовпчику, що не лежить у тому рядку, в якому є 0^* з першого стовпчика (якщо такий нуль у другому стовпчику знайдеться); позначаємо зірочкою один із нулів третього стовпчика, що міститься у рядку, де немає ще нулів із зірочкою (якщо такий нуль у третьому стовпчику знайдеться); і так далі, поки не пройдемо всі стовпчики матриці.*

*Якщо число позначених зірочкою нулів дорівнює **n**, то процес закінчено: місця, займані нулями із зірочкою, відповідають **n** змінним X_{ij}, рівним **1**, в оптимальному рішенні вихідної задачі.*

*Якщо нулів із зірочкою менше **n**, то переходимо до п. 2.*

2. Позначаємо (наприклад, знаком «+» зверху) стовпчики матриці, в яких є 0^*, і вважаємо ці стовпчики зайнятими.

У ході процесу будуть з'являтися і зайняті рядки. Елементи, що стоять на перетині незайнятого стовпчика і незайнятого рядка будемо вважати незайнятими; інші елементи — зайнятими.

Якщо в матриці немає незайнятих нулів, то переходимо до п. 5.

Якщо незайняті нулі є, то вибираємо перший із них (переглядаючи по черзі рядок матриці зліва направо). Позначаємо його яким-небудь проміжним значком (наприклад, штрихом — $0'$). Якщо в його рядку немає нуля із зірочкою, то переходимо до п. 4; якщо в його рядку 0^* є, то переходимо до п. 3.

3. Звільняємо (знімаємо знак «+» і вважаємо знову незайнятим) стовпчик, в якому знаходиться 0^*, що лежить у тому ж рядку, що і позначений тільки що штрихом нуль. Позначаємо (наприклад, знаком «+» праворуч) рядок, у якому знаходиться наш $0'$, і вважаємо його зайнятим. Повертаємося до другої частини п. 2 (третій абзац п. 2).

4. Починаючи з тільки що позначеного $0'$, будуємо ланцюжок із нулів : від цього $0'$ по стовпчику до 0^*, від нього по рядку до $0'$ тощо, поки це можливо. Ланцюжок обірветься (можливо, на першому ж 0) на деякому 0. Знімаємо зірочки біля нулів з ланцюжка і заміняємо зірочками штрихи біля нулів із ланцюжка. Новий набір нулів із зірочками містить на один більше, ніж попередній, і є також правильним.

Знімаємо всі позначки, крім зірочок, і повертаємося до другої частини п. 1 (другий абзац п. 1).

Відшукуємо мінімальний елемент серед незайнятих елементів матриці (нехай він дорівнює h) і віднімаємо його від усіх незайнятих рядків, а потім додаємо до всіх зайнятих *стовпчиків. Ніякі позначки у тому разі не знімаємо. Отримаємо матрицю, еквівалентну попередній, яка містить незайняті нулі. Повертаємося до третьої частини п. 2 (четвертий абзац п. 2).*

3.3. Приклади розв’язання задач

Приклад 3.1

Подано матрицю призначень. Знайти **max** цільової функції **(3.1)** з обмеженнями **(3.2–3.4).**

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(I)}} \begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \\ 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(II)}}$$

$$: \begin{array}{c} \begin{matrix} + & \boxed{+} & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0^* & 0' & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \underset{h=1}{\overset{\text{(III)}}{:}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 & 11 & 15 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{h=1}{\overset{\text{(IV)}}{:}}$$

$$\underset{:}{\text{Переносимо } \langle *,/,+ \rangle} \begin{array}{c} \begin{matrix} + & & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 3 & 7 & 11 & 15 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{0'}\ ^{*} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{0^*} & \boxed{0'}\ ^{*} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \underset{:}{\begin{matrix}\text{Залишаємо тільки (*)} \\ \text{повторюємо цикл}\end{matrix}}$$

$$: \begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & \boxed{+} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 3 & 7 & 11 & 15 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0^* & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0^* & 0' & 0 \end{pmatrix} + \end{array} \underset{h=1}{\overset{\text{(IV)}}{:}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ -1 & 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{h=1}{\overset{\text{(IV)}}{:}}$$

$$
:\;\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} + & \boxed{+} & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 6 & 10 & 14\\
0 & 2 & 4 & 7 & 10\\
0 & 1 & 2 & 4 & 6\\
\cancel{0} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'} & \cancel{1} & \cancel{2}\\
\cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'} & \cancel{0}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ + \\ + \end{array}
\;\underset{h=1}{\overset{\text{(III)}}{:}}
$$

< не пощастило,* додатково не одержали >

$$
:\;\begin{pmatrix}
\cancel{-1} & 2 & 5 & 9 & 13\\
\cancel{-1} & 1 & 3 & 6 & 9\\
\cancel{-1} & 0 & 1 & 3 & 5\\
\cancel{0} & 0 & 0 & 1 & 2\\
\cancel{2} & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\;\underset{\text{перенос }(*,/,+)}{\underset{h=1}{\overset{\text{(IV)}}{:}}}\;
\begin{pmatrix}
0^{*} & 2 & 5 & 9 & 13\\
0 & 1 & 3 & 6 & 9\\
0 & \boxed{0'}\,{}^{*} & 1 & 3 & 5\\
1 & \boxed{0^{*}} & \boxed{0'}\,{}^{*} & 1 & 2\\
3 & 1 & \boxed{0^{*}} & \boxed{0'}\,{}^{*} & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
\;\underset{h=1}{\overset{\text{(III)}}{:}}
$$

залишаємо тільки (*), всі інші позначки знімаємо

ітерація № 3

$$
:\;\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} + & + & + & \boxed{+} & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
\cancel{0^{*}} & \cancel{2} & \cancel{5} & 9 & 13\\
\cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{3} & 6 & 9\\
\cancel{0} & \cancel{0^{*}} & \cancel{1} & 3 & 5\\
\cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0^{*}} & 1 & 2\\
\cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ + \end{array}
\;\underset{h=1}{\overset{\text{(III)}}{:}\;\text{(IV)}}
$$

$$
:\;\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} + & + & \boxed{+} & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0^{*} & 2 & 5 & 8 & 12\\
0 & 1 & 3 & 5 & 8\\
0 & 0^{*} & 1 & 2 & 4\\
1 & 0 & 0^{*} & 0' & 1\\
4 & 2 & 1 & 0^{*} & 0'
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ + \\ + \end{array}
\;:\;
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} + & + & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
\cancel{0^{*}} & \cancel{2} & 5 & 8 & 12\\
\cancel{0} & \cancel{1} & 3 & 5 & 8\\
\cancel{0} & \cancel{0^{*}} & 1 & 2 & 4\\
\cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'} & \cancel{1}\\
\cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ + \\ + \end{array}
$$

не пощастило, додаткових (*) не одержали :

$$
\underset{h=1}{\overset{\text{(III)}+\text{(IV)}}{:}}\;
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} + & \boxed{+} & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
\cancel{0} & 2 & 4 & 7 & 11\\
\cancel{0} & 1 & 2 & 4 & 7\\
\cancel{0} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'} & \cancel{1} & \cancel{3}\\
\cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'} & \cancel{1}\\
\cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{0^{*}} & \cancel{0'}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
\;\underset{h=1}{\overset{\text{(III)}+\text{(IV)}}{:}}\;
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} + & & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0^{*} & 1 & 3 & 6 & 10\\
0 & \boxed{0'}\,{}^{*} & 1 & 3 & 6\\
1 & \boxed{0^{*}} & \boxed{0'}\,{}^{*} & 1 & 3\\
3 & 1 & \boxed{0^{*}} & \boxed{0'}\,{}^{*} & 1\\
6 & 3 & 1 & \boxed{0^{*}} & \boxed{0'}\,{}^{*}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
$$

=> одержали ***n*** «0^*», що знаходяться у кожному стовпчику і кожному рядку. У такий спосіб перший механізм призначається на першу роботу; другий на другу тощо. ***Цільова функція*** = [див. первісну матрицю] = −3 − 2 + 1 + 6 + 13 = **15 → max** віддача від спільної роботи устаткування.

Приклад 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \overset{(II)}{:} \begin{pmatrix} \boxed{\cancel{2}} & \cancel{0}^* & \boxed{\cancel{1}} & 1 & 1 \\ 0^* & 1 & 0 & 0' & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0' & 0 & 0^* & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ \\ + \end{matrix} \overset{(III)}{:}$$

$$\overset{(III)}{:} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(IV)}{:} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\cancel{0}^*} & 0' & 0 & 0 \\ 0^{*\prime} & 2 & 0 & 0'^* & 3 \\ \boxed{0'^*} & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0'} & 1 & 0^* & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ \\ + \end{matrix}$$

переносячи (*,/,+),* одержимо додатковий 0^* :

$$: \begin{pmatrix} \boxed{\cancel{1}} & \boxed{0^*}' & \boxed{\cancel{0}} & \cancel{0} & 0'^* \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0^* & \boxed{3} \\ 0^* & 0' & 0 & 0 & 0 \\ 0' & 1 & 0^* & 3 & 0 \\ 1 & \boxed{0'}^* & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \\ + \\ + \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0^* \\ 0 & 2 & 0 & 0^* & 3 \\ 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0^* & 3 & 0 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Таблиця 3.1

Призначення механізмів за роботами

№ механізму	Робота
1	5
2	4
3	1
4	3
5	2

Оптимальний варіант призначень: $x_{15} = x_{24} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1$.

Спробуйте вирішити цю задачу самостійно. Оптимальний план у задачі не єдиний. Розв’язання правильне, якщо одержано одну з таких матриць коефіцієнтів (рис. 3.1).

Цільова функція = 17.

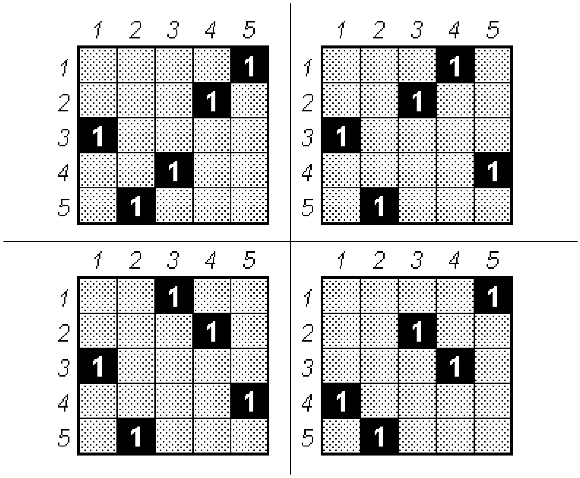


Рис. 3.1. Можливі варіанти призначень

3.4. Індивідуальні завдання «Моделі призначень»

В. № 1	1	2	3	4	5
1	15	12	2	9	10
2	2	10	−8	7	−3
3	1	3	−5	6	0
4	9	6	6	13	−7
5	−20	5	7	15	3

В. № 2	1	2	3	4	5
1	1	12	19	20	4
2	13	9	8	6	5
3	−20	−5	17	4	−4
4	−4	5	9	−7	−10
5	6	−1	−1	−1	9

В. № 3	1	2	3	4	5
1	10	2	5	8	6
2	14	6	16	−5	−17
3	−17	−6	9	4	2
4	15	13	12	17	−8
5	−6	−10	−7	18	15

В. № 4	1	2	3	4	5
1	−19	10	16	12	20
2	3	−13	12	−1	13
3	1	−19	15	8	11
4	9	15	−14	−16	2
5	0	19	13	1	10

В. № 5	1	2	3	4	5
1	7	−2	9	5	4
2	17	8	6	−19	7
3	−20	2	13	12	−4
4	6	17	2	11	7
5	3	4	2	−5	13

В. № 6	1	2	3	4	5
1	9	12	14	18	5
2	7	9	5	8	−8
3	6	3	−5	−8	18
4	−9	−6	7	10	12
5	16	9	5	−5	−4

В. № 7	1	2	3	4	5
1	6	−8	9	−8	7
2	15	4	1	−5	3
3	16	19	13	5	13
4	−3	2	14	−8	5
5	10	−20	20	15	19

В. № 8	1	2	3	4	5
1	13	5	−10	17	9
2	5	−6	−2	20	4
3	−17	0	−5	−7	14
4	6	17	−8	4	−17
5	−7	−8	9	4	12

В. № 9	1	2	3	4	5
1	12	−2	−1	5	−3
2	−7	−2	7	6	5
3	5	1	18	9	13
4	−7	11	7	17	19
5	2	16	−6	9	8

В. № 10	1	2	3	4	5
1	2	8	−2	8	−18
2	2	17	7	15	20
3	16	7	−8	6	−12
4	6	−9	14	5	−5
5	15	6	−9	−14	−1

В. № 11	1	2	3	4	5
1	14	−4	7	−19	5
2	−2	−5	3	5	9
3	−5	4	15	−5	6
4	−1	−6	4	−2	11
5	13	12	−4	−20	−8

В. № 12	1	2	3	4	5
1	−15	4	−4	5	−6
2	13	−2	11	14	−3
3	−5	9	7	1	−7
4	−5	19	8	9	−10
5	13	19	−6	8	12

В. № 13	1	2	3	4	5
1	7	8	5	1	4
2	9	12	−18	15	−9
3	−4	5	2	8	−7
4	8	10	5	4	8
5	−5	1	−9	−4	−3

В. № 14	1	2	3	4	5
1	13	2	−5	−8	−3
2	−2	16	−4	−9	7
3	−4	51	−8	−13	−17
4	−16	−22	−6	−20	−19
5	17	19	14	11	−5

В. № 15	1	2	3	4	5
1	8	8	−2	3	13
2	−5	−7	18	6	5
3	8	−2	7	8	9
4	6	−5	−20	6	18
5	4	7	18	10	12

В. № 16	1	2	3	4	5
1	−2	8	−6	2	14
2	2	−4	8	−10	−1
3	5	5	−9	6	−10
4	13	8	10	5	11
5	7	−16	18	9	−20

В. № 17	1	2	3	4	5
1	−4	2	3	6	−5
2	−3	16	11	2	8
3	9	9	19	7	8
4	3	7	−1	16	9
5	13	−18	−13	−16	7

В. № 18	1	2	3	4	5
1	−3	−18	4	−3	9
2	−5	−6	−9	−3	8
3	0	−4	−11	15	3
4	−4	−9	−3	−14	−6
5	1	15	−2	−12	15

В. № 19	1	2	3	4	5
1	12	0	8	−9	3
2	−4	39	1	8	−15
3	−2	−8	4	7	1
4	10	20	13	2	13
5	9	6	3	4	−2

В. № 20	1	2	3	4	5
1	−7	−20	2	20	17
2	9	5	4	3	14
3	8	13	11	−2	15
4	−13	7	1	−18	2
5	−8	−13	5	−3	−17

В. № 21	1	2	3	4	5
1	−1	11	8	9	−7
2	−15	11	−8	−6	−10
3	9	19	2	8	2
4	8	19	−4	−14	−4
5	−8	−4	−3	4	12

В. № 22	1	2	3	4	5
1	11	−10	2	−3	5
2	−4	5	7	−20	4
3	−9	−15	−5	−8	9
4	8	8	−9	19	19
5	14	−7	19	−4	−13

В. № 23	1	2	3	4	5
1	−7	−2	−7	−6	2
2	−3	15	16	13	−13
3	−4	2	60	−4	−3
4	2	−2	44	−9	−8
5	8	7	9	20	−7

В. № 24	1	2	3	4	5
1	−13	4	−8	2	−10
2	3	−13	−8	18	−3
3	8	15	5	11	−7
4	7	−14	6	16	9
5	−17	7	−8	3	12

В. № 25	1	2	3	4	5
1	8	−9	2	8	11
2	−12	−3	18	6	3
3	9	7	12	−16	7
4	−20	5	2	8	2
5	17	18	9	7	9

В. № 26	1	2	3	4	5
1	−8	5	6	8	−5
2	−17	18	20	−19	−7
3	9	11	−5	11	9
4	−6	20	10	−16	−3
5	2	12	8	−9	−5

В. № 27	1	2	3	4	5
1	10	19	12	2	8
2	−19	−20	1	10	18
3	7	6	−2	16	9
4	3	18	−14	14	7
5	14	15	11	−19	13

В. № 28	1	2	3	4	5
1	5	−4	6	−9	8
2	6	−6	−11	1	−3
3	−2	5	−5	3	6
4	−12	−20	0	−14	−17
5	4	−9	9	−4	8

В. № 29	1	2	3	4	5
1	−9	17	6	4	5
2	5	−18	−8	−1	8
3	9	20	32	−9	9
4	−8	−15	−6	8	−5
5	−6	5	14	−13	−9

В. № 30	1	2	3	4	5
1	8	6	10	−5	−10
2	12	−13	17	20	17
3	8	6	−7	−18	2
4	−8	2	5	14	−3
5	−9	12	7	11	−12

Модуль 4
МЕРЕЖНІ МОДЕЛІ

4.1. Задачі мережної структури

У рамках теорії дослідження операцій розглядають велику кількість практичних задач, які можна сформулювати і розв'язати як мережні моделі. Наведемо кілька конкретних прикладів:

1. Проектування газопроводу, що з'єднує свердловини морського базування з приймальною станцією, розташованою на березі. Цільова функція відповідної моделі має мінімізувати вартість будівництва газопроводу.

2. Знаходження найкоротшого маршруту між двома містами по наявній мережі доріг.

3. Визначення оптимальної пропускної спроможності трубопроводу для транспортування вугільної пульпи від вугільних шахт до електростанцій.

4. Визначення максимальної пропускної спроможності нафтопроводу від пунктів нафтовидобутку до нафтопереробних заводів із мінімальною вартістю транспортування.

5. Складання тимчасового графіка будівельних робіт (визначення дати початку і завершення окремих етапів робіт).

Рішення приведених задач (як і багатьох інших подібних задач) вимагає застосування різних мережних оптимізаційних алгоритмів. У цьому розділі розглянемо такі алгоритми:

1. Алгоритм визначення мінімального остового дерева.
2. Алгоритм визначення найкоротшого шляху.
3. Оптимальний розподіл товарообігу по мережі.

Задачі, що випливають із перерахованих прикладів, можна сформулювати і розв'язувати як задачі лінійного програмування. Однак специфічна структура цих задач дозволяє розробити спеціальні мережні алгоритми ефективніше, ніж стандартний симплекс-метод.

4.2. Основні визначення мережних моделей

Мережа складається з множини **вузлів**, зв'язаних **дугами** (або **ребрами**). Таким чином, мережу можна описати двома множинами (N, A), де N — множина вузлів, A — множина ребер. Наприклад, мережу, показану на рис. 4.1, описуємо в такий спосіб:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$A = \{(1,3), (1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$.