

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНИЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»  
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»  
М. М. Чальцев  
18.03.2013 р.

Кафедра «Автомобільний транспорт»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ ІЗ ДИСЦИПЛІНИ  
«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»  
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.070106  
«АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»)**

**4/5-2013-02**

«РЕКОМЕНДОВАНО»  
Навчально-методична комісія  
факультету  
«Автомобільний транспорт»  
Протокол № 3  
від 20.11.2012 р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»  
Кафедра  
«Автомобільний транспорт»  
Протокол № 3  
від 7.11.2012 р.

УДК 629.113.004(071)

Методичні вказівки до практичних робіт із дисципліни «Основи наукових досліджень» (для студентів напряму підготовки 6.070106 «Автомобільний транспорт») [Електронний ресурс] / укладач В. М. Дугельний. – Електрон. дані. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2013. – 1 електрон. опт. диск (CD-R); 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 MB RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 2010. – Назва з титул. екрану.

Викладено послідовність та рекомендації до виконання практичних робіт із дисципліни. Наведено варіанти завдань до практичних робіт.

Укладач:

Дугельний В. М., к.т.н., доц.

Відповідальний за випуск:

Міщенко М. І., д.т.н., проф.

Рецензент:

Хребет В. Г., к.ф.-м.н., доц.  
каф. «Прикладна математика і інформатика»

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП.....  | 5  |
| 1 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК ПРИ ВИВЧЕННІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ПРОЦЕСІВ» .....           | 6  |
| 1.1 Завдання до роботи.....   | 6  |
| 1.2 Теоретичні викладки до практичної роботи.....   | 6  |
| 1.3 Порядок виконання роботи.....   | 7  |
| 1.3.1 Ранжирування факторів досліджуваного процесу .....  | 7  |
| 1.3.2 Визначення ступеня узгодженості думок експертів.....  | 9  |
| 1.3.3 Графічне представлення результатів розрахунків .....  | 10 |
| 1.4 Висновки по роботі.....   | 10 |
| 1.5 Питання поточного контролю .....  | 11 |
| 2 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ВСТАНОВЛЕННЯ ВЗАЄМОВ'ЯЗКУ МІЖ ДОСЛІДЖУВАНИМИ ПАРАМЕТРАМИ» .....                            | 12 |
| 2.1 Завдання до роботи.....   | 12 |
| 2.2 Теоретичні викладки до практичної роботи.....   | 12 |
| 2.3 Порядок виконання роботи.....   | 14 |
| 2.3.1 Побудова кореляційної сітки для досліджуваних параметрів.....   | 14 |
| 2.3.2 Графічне представлення результатів розрахунків .....  | 16 |
| 2.3.3 Визначення тісноти зв'язку між двома параметрами.....   | 17 |
| 2.4 Висновки по роботі.....   | 18 |
| 2.5 Питання поточного контролю .....  | 18 |
| 3 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ПАРАМЕТРІВ ДОСЛІДЖУВАНИХ ЯВИЩ» .....                                 | 19 |
| 3.1 Завдання до роботи.....   | 19 |
| 3.2 Теоретичні викладки до практичної роботи.....   | 19 |
| 3.3 Порядок виконання роботи.....   | 20 |
| 3.4 Висновки по роботі.....   | 24 |
| 3.5 Питання поточного контролю .....  | 24 |
| 4 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ПРОВЕДЕННЯ ЯКІСНОГО АНАЛІЗУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ» .....                                 | 25 |
| 4.1 Завдання до роботи.....   | 25 |
| 4.2 Теоретичні викладки до практичної роботи.....   | 25 |
| 4.3 Порядок виконання роботи.....   | 26 |
| 4.4 Висновки по роботі.....   | 30 |
| 4.5 Питання поточного контролю .....  | 30 |
| 5 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ПРОЦЕСІВ» ..... | 31 |
| 5.1 Завдання до роботи.....   | 31 |

|   |           |
|---|-----------|
| 5.2 Теоретичні викладки до практичної роботи .....  | 31        |
| 5.3 Порядок виконання роботи.....   | 34        |
| 5.3 Висновки по роботі.....   | 41        |
| 5.5 Питання поточного контролю .....  | 41        |
| <b>6 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ЗАСТОСУВАННЯ<br/>ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ Й ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ<br/>МЕТОДОМ ЛАТИНСЬКОГО КВАДРАТА ПРИ ВИВЧЕННІ ПРОЦЕСІВ<br/>З ЯКІСНИМИ ФАКТОРАМИ».....</b> | <b>42</b> |
| 6.1 Завдання до роботи.....   | 42        |
| 6.2 Теоретичні викладки до практичної роботи .....  | 42        |
| 6.3 Порядок виконання роботи.....   | 43        |
| 6.4 Висновки по роботі.....   | 51        |
| 6.5 Питання поточного контролю .....  | 51        |
| <b>7 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ВИРІВНЮВАННЯ<br/>ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ТЕОРЕТИЧНИМ РОЗПОДІЛОМ» .....</b>  | <b>52</b> |
| 7.1 Завдання до роботи.....   | 52        |
| 7.2 Теоретичні викладки до практичної роботи .....  | 52        |
| 7.3 Порядок виконання роботи.....   | 53        |
| 7.4 Висновки по роботі.....   | 60        |
| 7.5 Питання поточного контролю .....  | 60        |
| <b>ВИСНОВКИ .....</b>   | <b>61</b> |
| <b>ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ .....</b>   | <b>62</b> |
| <b>ДОДАТОК А Вихідні дані до практичних робіт .....</b>   | <b>63</b> |
| <b>ДОДАТОК Б Довідковий матеріал.....</b>   | <b>70</b> |

## ВСТУП

Однією з найважливіших рис сучасного науково-технічного прогресу на автомобільному транспорті є розвиток наукових основ формування інженерних рішень при проектуванні, виробництві й експлуатації рухомого складу автотранспортних підприємств. Усе більше стираються розходження між експлуатаційниками, конструкторами й дослідниками. Фахівці, що працюють у кожній з галузей промисловості або народного господарства, неминуче стикаються з необхідністю проведення як теоретичних, так і експериментальних наукових досліджень.

Уміння проводити наукові дослідження стає для інженера необхідністю, тому що часто лише з їхньою допомогою вдається врахувати особливості конкретних умов виробництва й виявити резерви підвищення його ефективності.

Метою практичних робіт є закріплення знань, що отримуються на лекційних заняттях із дисципліни «Основи наукових досліджень», та набуття навичок і досвіду самостійного виконання наукових досліджень.

До виконання практичних робіт допускаються студенти, що відповіли на питання поточного контролю підготовленості студентів до конкретної роботи згідно з її темою.

Практичні роботи виконуються індивідуально кожним студентом, згідно з вихідними даними, що наведені в додатку А.

До захисту практичних робіт допускаються студенти, котрі виконали всі завдання поставлені в практичній роботі (виконали необхідні розрахунки, побудували графіки, дослідили аналітичні залежності), а також зробили висновок по роботі та оформили це в формі індивідуального звіту з виконаної роботи.

Захист студентом практичних робіт проводиться у формі співбесіди з викладачем стосовно питань які вирішувались у ході виконання тієї чи іншої практичної роботи.

Робота вважається захищеною, якщо в ході співбесіди з викладачем, студент відповів на всі поставлені питання за темою практичної роботи.

## **1 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК ПРИ ВИВЧЕННІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ПРОЦЕСІВ»**

Мета роботи: оволодіння технологією ранжирування факторів, що описують досліджуваний процес.

### **1.1 Завдання до роботи**

У ході виконання роботи необхідно:

- виконати ранжирування факторів, що впливають на досліджуваний процес, згідно з опитуванням групи експертів;
- визначити ступінь узгодженості думок експертів;
- побудувати діаграму рангів факторів.

За результатами роботи зробити висновки стосовно узгодженості думок експертів та навести головні, суттєві та несуттєві фактори, що описують досліджуваний процес.

Вихідні дані до роботи приймаються згідно з таблицями А.1 і А.2 додатка А.

### **1.2 Теоретичні викладки до практичної роботи**

У випадках надзвичайної складності наукової проблеми, її новизни, недостатності наявної інформації, неможливості математичної формалізації процесу рішення дослідникам доводиться звертатися до рекомендацій компетентних фахівців – до експертів. Їх рішення задачі, аргументація, формування кількісних оцінок, обробка останніх формальними методами отримала назву методу експертних оцінок.

Експерти (від латинського «expertus» – досвідчений) – це особи, які володіють знаннями й здатні висловити аргументовану думку з досліджуваного явища.

Процедура отримання оцінок від експертів називається експертизою.

При використанні експертного методу для оцінки якості як правило використовується шкала порядку. Її суть полягає в упорядкуванні об'єктів (явищ), а точніше, у виявленні за допомогою експертів прихованої упорядкованості, яка, за припущенням, властива множині об'єктів. Результатом оцінки є рішення про те, що певний об'єкт (явище) більш значущий ніж інший у відношенні якогось критерію.

Способи вимірювання об'єктів, що найбільш часто вживаються при оцінці за порядковою шкалою – це ранжирування, парне порівняння та безпосередня оцінка.

Ранжирування – це розташування об’єктів у порядку зростання або зменшення якої-небудь властивої їм характеристики. Ранжирування дозволяє вибрати з досліджуваної сукупності факторів найбільш істотний.

У разі участі в опитуванні декількох експертів в їхніх оцінках неминучі розбіжності й величина цієї розбіжності має дуже важливе значення. Групова оцінка може вважатися достатньо надійною тільки за умови достатньої узгодженості відповідей окремих фахівців.

Для аналізу розбіжності та узгодженості оцінок застосовуються статистичні характеристики – міри розсіювання, такі як:

- варіаційний розмах;
- середнє квадратичне відхилення;
- коефіцієнт варіації, який зазвичай виражається у відсотках;
- коефіцієнт рангової кореляції Спірмена (узгодженість між ранжируванням двох експертів).

Коли необхідно визначити узгодженість у ранжируваннях значного (більше двох) числа експертів, розраховується так званий коефіцієнт конкордації ( $W$ ) – загальний коефіцієнт рангової кореляції для групи, що складається з  $m$  експертів.

### 1.3 Порядок виконання роботи

#### 1.3.1 Ранжирування факторів досліджуваного процесу

Попереднім аналізом встановлено, що основними факторами, які описують досліджуваний процес, є наступні фактори:

- температура навколишнього середовища,  $t$ ;
- тип малюнка протектора,  $T_M$ ;
- тиск повітря в шині,  $P_W$ ;
- твердість дорожнього покриття,  $H_D$ ;
- наявність вологи в зоні контакту,  $B$ ;
- кути установки коліс,  $\alpha$ ;
- висота нерівностей дорожнього покриття,  $r_D$ ;
- навантаження на шину,  $G$ ;
- твердість гуми протектора шини,  $H_T$ ;
- інтенсивність розгону або гальмування автомобіля,  $A$ .

В якості вихідних даних використовують думки чотирнадцяти фахівців в області експлуатації автомобільних шин, які заносяться у відповідні рядки таблиці 1.1. Кожний із чотирнадцяти експертів оцінює перераховані вище фактори в балах за десятибальною шкалою (див. табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Результати оцінки факторів експертами й послідовність їхнього ранжирування

| Експерти  | Фактори |       |       |       |      |          |       |      |       |        |
|---|---------|-------|-------|-------|------|----------|-------|------|-------|--------|
|   | $t$     | $T_M$ | $P_W$ | $H_D$ | $B$  | $\alpha$ | $r_D$ | $G$  | $H_T$ | $A$    |
| Вагомість факторів у балах                          |         |       |       |       |      |          |       |      |       |        |
| Експерт № 1   | 3,5     | 8     | 3,5   | 3,5   | 3,5  | 9        | 3,5   | 10   | 7     | 3,5    |
| Експерт № 2   | 3       | 8     | 7     | 2     | 1    | 9        | 4     | 10   | 5     | 6      |
| Експерт № 3   | 3       | 6     | 4     | 2     | 1    | 5        | 10    | 9    | 7     | 8      |
| Експерт № 4   | 5       | 9     | 6     | 4     | 1    | 2,5      | 2,5   | 10   | 7     | 8      |
| Експерт № 5   | 1       | 7     | 8     | 2     | 3    | 6        | 4     | 10   | 5     | 9      |
| Експерт № 6   | 5       | 7     | 6     | 1     | 2    | 3        | 4     | 9    | 8     | 10     |
| Експерт № 7   | 1       | 8     | 7     | 2     | 3    | 4        | 5     | 6    | 10    | 9      |
| Експерт № 8   | 1       | 7     | 2     | 3,5   | 3,5  | 5        | 6     | 8    | 10    | 9      |
| Експерт № 9   | 3       | 7     | 8     | 1     | 2    | 4        | 5     | 10   | 6     | 9      |
| Експерт № 10  | 4       | 8     | 7     | 1     | 2    | 3        | 5     | 9    | 6     | 10     |
| Експерт № 11  | 3       | 7     | 5     | 1     | 2    | 6        | 4     | 9    | 8     | 10     |
| Експерт № 12  | 3       | 9     | 6     | 2     | 1    | 5        | 7     | 8    | 4     | 10     |
| Експерт № 13  | 6       | 10    | 9     | 1     | 2    | 4        | 5     | 7    | 3     | 8      |
| Експерт № 14  | 4       | 9     | 6     | 2     | 3    | 1        | 5     | 8    | 7     | 10     |
| Сума балів по кожному фактору $\sum_{j=1}^m a_{ij}$ | 45,5    | 110   | 84,5  | 28    | 30   | 66,5     | 70    | 123  | 93    | 119,5  |
| Відхилення $\Delta_i$                               | -31,5   | 33    | 7,5   | -49   | -47  | -10,5    | -7    | 46   | 16    | 42,5   |
| Квадрати відхилень $\Delta_i^2$                     | 992,3   | 1089  | 56,25 | 2401  | 2209 | 110,3    | 49    | 2116 | 256   | 1806,3 |
| Ранги факторів                                      | VIII    | III   | V     | X     | IX   | VII      | VI    | I    | IV    | II     |

Для кожного  $i$ -го фактору визначають суму отриманих балів від  $j$ -тих експертів ( $j = 1, \dots, m$ )  $\sum_{j=1}^m a_{ij}$ .

Згідно з отриманою сумою набраних балів факторам присвоюють ранги (чим більше сума, тим вище ранг).

Для всіх факторів, що описують досліджуваний процес обчислюють середню суму балів,  $\bar{a}$ :

$$\bar{a} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad (1.1)$$

де  $a_{ij}$  – кількість балів (за десятибальною шкалою), що присвоєні  $j$ -им експертом  $i$ -му фактору;

$k$  – загальна кількість факторів, що описують процес,  $k = 10$ ;

$m$  – загальна кількість експертів,  $m = 14$ .

У розглянутому прикладі

$$\bar{a} = 770 / 10 = 77.$$



Визначають відхилення  $\Delta_i$  суми балів від середньої величини з урахуванням знаків. Наприклад, для першого фактора

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^m a_{ij} - \bar{a} = 45,5 - 77 = -31,5.$$

Аналогічно визначаються  $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{10}$ .

Далі обчислюють квадрати відхилень  $(\Delta_i)^2$  для всіх факторів, що описують досліджуваний процес і знаходять їх суму  $S = \sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2$ . У прикладі

$$S = \sum_{i=1}^{10} (\Delta_i)^2 = 11085.$$

### 1.3.2 Визначення ступеня узгодженості думок експертів

Визначення ступеня узгодженості думок експертів здійснюється за допомогою коефіцієнта конкордації.

Коефіцієнт конкордації змінюється в діапазоні від 0 до 1, причому 0 відповідає неузгодженості (відсутність будь-якої згоди в думках дослідників) у цьому випадку експеримент слід вважати невиконаним, а 1 відповідає повній узгодженості (повна згода опитаних). Якщо значення коефіцієнта конкордації лежить у межах 0,40–0,50, то якість оцінки вважається задовільною, якщо в межах 0,70–0,80, то це свідчить про високу якість оцінки.

Значення коефіцієнта конкордації визначається двояко:

– за відсутності взаємозалежних факторів

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot (k^3 - k)}; \quad (1.2)$$

– за присутності взаємозалежних факторів

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot (k^3 - 1) - m \cdot T}, \quad (1.3)$$

де  $S$  – сума квадратів відхилень від середньої по всіх факторах;

$T$  – показник взаємопов'язаних факторів у таблиці ранжирування, що визначається за формулою (1.4).

$$T = \sum_{i=1}^k (t_{iq}^3 - t_{iq}), \quad (1.4)$$

де  $t_{iq}$  – кількість взаємопов'язаних факторів в оцінках експерта (табл. 1.1).

У прикладі  $T_j = (6^3 - 6) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 222$ .

$$W = \frac{12 \cdot 11085}{14^2 \cdot (10^3 - 1) - 14 \cdot 222} = 0,69.$$

Для оцінки значимості коефіцієнта конкордації користуються критерієм  $\chi^2$  (хі-квадрат) Пірсона, для цього спочатку обчислюють його розрахункове значення

$$\chi_P^2 = \frac{12 \cdot S}{k \cdot m \cdot (k+1) - \frac{1}{k-1} \cdot T}; \quad (1.5)$$

$$\chi_P^2 = \frac{12 \cdot 11085}{10 \cdot 14 \cdot (10+1) - \frac{1}{10-1} \cdot 222} = 87,8.$$

Далі визначають критичне (табличне) значення критерію  $\chi^2$  при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  та числі ступенів свободи  $f = k - 1 = 10 - 1 = 9$ . Так, згідно з таблицею Б.1 додатка Б, при заданих умовах табличне значення критерію  $\chi^2$  буде мати значення  $\chi_{T(0,05)}^2 = 16,92$ .

Якщо розрахункове значення критерію  $\chi_P^2$  більше табличного  $\chi_T^2$ , то коефіцієнт конкордації вважається значущим.

У розглянутому прикладі  $\chi_P^2 = 87,8 > \chi_T^2 = 16,92$ .

### 1.3.3 Графічне представлення результатів розрахунків

За результатами розрахунків будують діаграму рангів (рис. 1.1).

### 1.4 Висновки по роботі

За результатами виконаної роботи (для розглянутого прикладу) можна зробити наступні висновки.

1. Усі фактори за рівнем їхньої значимості можна розбити на три групи:
  - головні фактори (більше 100 балів): навантаження на шину та інтенсивність розгону або гальмування автомобіля;
  - суттєві фактори (більше 60 балів): тип малюнка протектора, твердість гуми протектора шини, тиск повітря в шині, висота нерівностей дорожнього покриття, кути установки коліс;
  - несуттєві (менше 60 балів): температура навколишнього середовища, наявність вологи в зоні контакту, твердість дорожнього покриття.

2. Згідно з критерієм Пірсона коефіцієнт конкордації  $W$  значущий, а сама оцінка має добру якість.

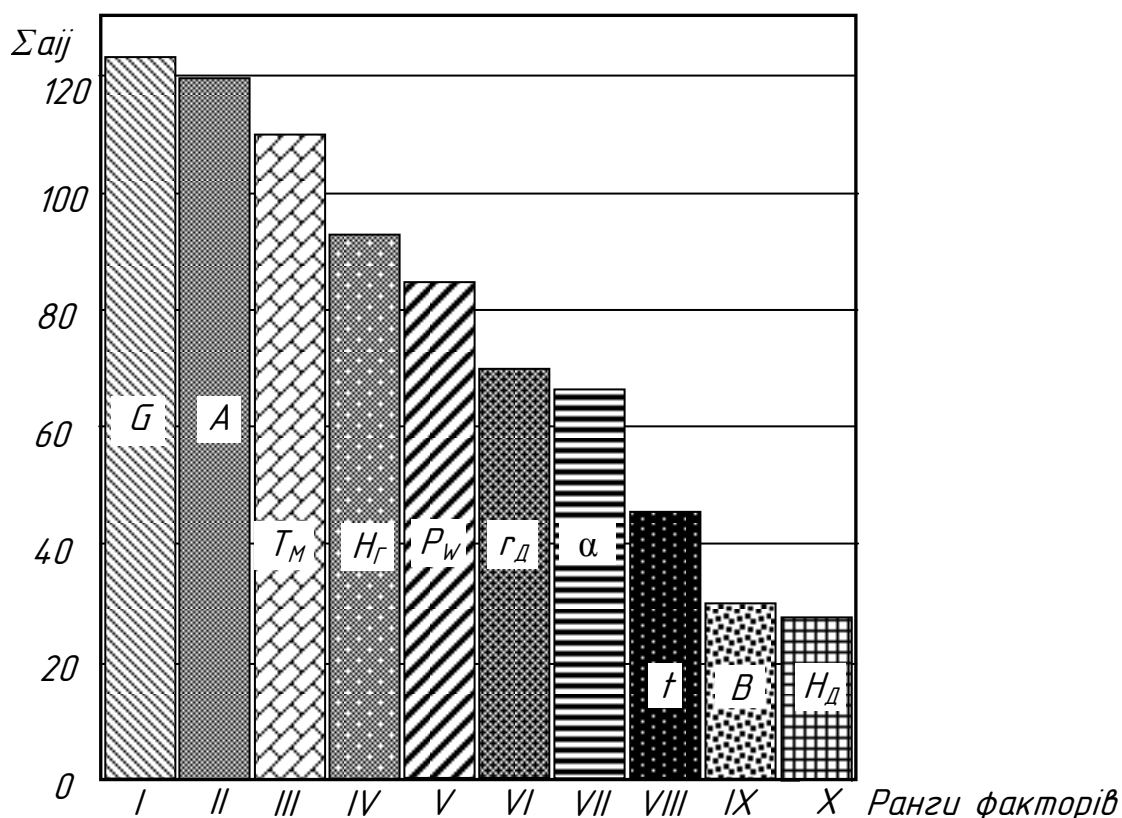


Рисунок 1.1 – Результати ранжирування факторів

### 1.5 Питання поточного контролю

1. В яких випадках застосовують метод експертних оцінок?
2. У чому сутність методу ранжирування?
3. Які статистичні характеристики застосовуються для аналізу розбіжностей і узгодженості оцінок експертів?
4. В якому діапазоні змінюється значення коефіцієнта конкордації й про що свідчить його величина?
5. Наведіть формули для розрахунку коефіцієнта конкордації та причини застосування тієї чи іншої формули.

## **2 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ВСТАНОВЛЕННЯ ВЗАЄМОВ'ЯЗКУ МІЖ ДОСЛІДЖУВАНИМИ ПАРАМЕТРАМИ»**

Мета роботи: оволодіння технологією встановлення взаємозв'язку параметрів досліджуваних явищ.

### **2.1 Завдання до роботи**

У ході виконання роботи необхідно:

- побудувати кореляційну сітку для двох параметрів  $x$  та  $y$ ;
- побудувати графік емпіричної регресії та за його загальним виглядом висунути гіпотезу щодо виду залежності між параметрами  $x$  та  $y$ ;
- визначити тісноту зв'язку між параметрами за допомогою коефіцієнта кореляції  $r_{xy}$ .

За результатами роботи зробити висновки стосовно тісноти та виду зв'язку між двома параметрами явища, що досліджується.

Вихідні дані до роботи приймаються згідно з таблицями А.3 і А.4 додатка А.

### **2.2 Теоретичні викладки до практичної роботи**

Для виявлення зв'язку між двома параметрами явища, що досліджується, оцінки напрямку та інтенсивності застосовують кореляційний аналіз.

Кореляція (від лат. *correlatio* – співвідношення) – це статистична залежність між випадковими величинами, що носить імовірнісний характер.

Кореляційний зв'язок – це узгоджена зміна двох ознак, що відображає той факт, що мінливість однієї ознаки знаходиться у відповідності з мінливістю іншої.

Кореляційні зв'язки можна вивчати на якісному рівні з діаграм розсіювання емпіричних значень змінних  $x$  і  $y$  (рис. 2.1) і відповідним чином їх інтерпретувати.

Кореляційні зв'язки розрізняються за напрямком, формою та ступенем (силою).

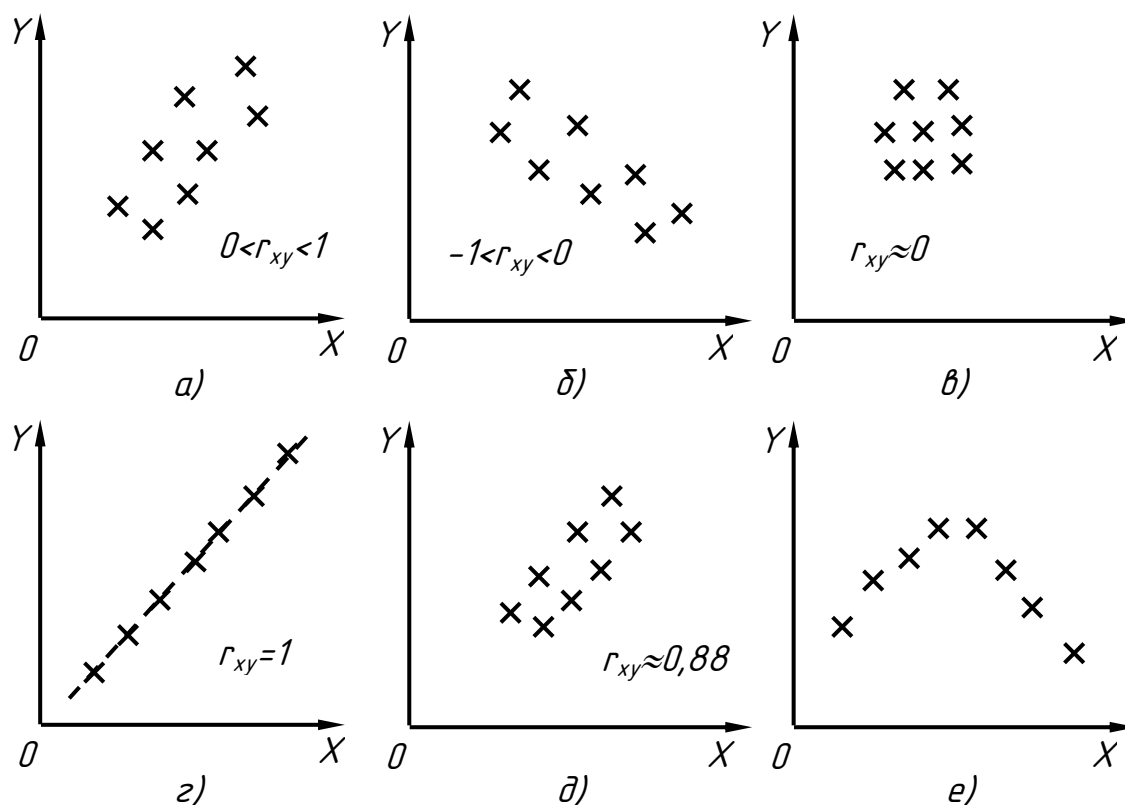
За напрямком кореляційний зв'язок може бути позитивним («прямий») і негативним («зворотний»). При позитивній прямолінійній кореляції більшим значенням однієї ознаки відповідають більші значення іншої, а меншим значенням однієї ознаки – менші значення іншої (рис. 2.1, а). При негативній кореляції співвідношення зворотні (рис. 2.1, б). При позитивній кореляції коефіцієнт кореляції має позитивний знак, при негативній кореляції – негативний знак.

Нульовою називається кореляція за відсутності зв'язку змінних (рис. 2.1, в). Проте нульова загальна кореляція може свідчити лише про відсутність лінійної залежності, а не взагалі про відсутність будь якого статистичного зв'язку.

За формою кореляційний зв'язок може бути прямолінійним (рис. 2.1, г) або криволінійним (нелінійним) (рис. 2.1, е).

Ступінь, сила чи тіснота кореляційного зв'язку визначається за величиною коефіцієнта кореляції ( $r_{xy}$ ). Сила зв'язку не залежить від її спрямованості й визначається за абсолютним значенням коефіцієнта кореляції (рис. 2.1, г та 2.1, д).

Коефіцієнт кореляції – показник ступеня взаємозалежності статистичного зв'язку двох змінних, що змінюється в межах від  $-1$  до  $+1$ . Значення коефіцієнта кореляції  $0$  вказує на можливу відсутність залежності, значення  $+1$  свідчить про узгодженість змінних.



- а) пряма кореляція; б) зворотна кореляція; в) відсутність кореляції;  
 г) строга позитивна кореляція; д) сильна позитивна кореляція;  
 е) нелінійна кореляція

Рисунок 2.1 – Діаграми розсіювання емпіричних значень змінних  $x$  і  $y$

У залежності від коефіцієнта кореляції розрізняють наступні кореляційні зв'язки:

- сильний, або тісний при коефіцієнті кореляції  $r_{xy} > 0,70$ ;

- середній (при  $0,50 < r_{xy} < 0,69$ );
- помірний (при  $0,30 < r_{xy} < 0,49$ );
- слабкий (при  $0,20 < r_{xy} < 0,29$ );
- дуже слабкий (при  $r_{xy} < 0,19$ ).

## 2.3 Порядок виконання роботи

### 2.3.1 Побудова кореляційної сітки для досліджуваних параметрів

Досліджується залежність між зносом корінних шийок (параметр  $x$ ) і биттям фланця колінчатого вала (параметр  $y$ ).

Вихідні дані по вимірах параметрів  $x$  й  $y$  у тридцяти валів заносяться в таблицю 2.1.

Таблиця 2.1 – Таблиця вихідних даних

| № з/п | $x$  | $y$  | № з/п | $x$  | $y$  | № з/п | $x$  | $y$  |
|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|------|
| 1     | 0,85 | 0,36 | 11    | 0,2  | 0,08 | 21    | 0,13 | 0,1  |
| 2     | 0,59 | 0,47 | 12    | 1,42 | 0,45 | 22    | 0,23 | 0,1  |
| 3     | 0,04 | 0,1  | 13    | 0,1  | 0,22 | 23    | 0,06 | 0,07 |
| 4     | 0,14 | 0,18 | 14    | 0,04 | 0,01 | 24    | 0,56 | 0,3  |
| 5     | 0,48 | 0,47 | 15    | 0,17 | 0,12 | 25    | 0,38 | 0,13 |
| 6     | 0,49 | 0,2  | 16    | 0,13 | 0,06 | 26    | 1,01 | 0,43 |
| 7     | 0,21 | 0,04 | 17    | 1,1  | 0,45 | 27    | 0,06 | 0,06 |
| 8     | 0,11 | 0,15 | 18    | 0,35 | 0,4  | 28    | 0,08 | 0,07 |
| 9     | 0,05 | 0,25 | 19    | 0,07 | 0,2  | 29    | 0,06 | 0,07 |
| 10    | 0,1  | 0,1  | 20    | 0,15 | 0,25 | 30    | 0,05 | 0,16 |

Варіаційний ряд за результатами вимірів зносу корінних шийок колінчатого вала (параметр  $x$ ) має вигляд: 0,04; 0,04; 0,05; 0,05; 0,06; 0,06; 0,06; 0,07; 0,08; 0,10; 0,10; 0,11; 0,13; 0,13; 0,14; 0,15; 0,17; 0,20; 0,21; 0,23; 0,35; 0,38; 0,48; 0,49; 0,56; 0,59; 0,85; 1,01; 1,10; 1,42.

Варіаційний ряд за результатами вимірів биття фланця колінчатого вала (параметр  $y$ ) наступний: 0,01; 0,04; 0,06; 0,06; 0,07; 0,07; 0,07; 0,08; 0,10; 0,10; 0,10; 0,10; 0,12; 0,13; 0,15; 0,16; 0,18; 0,20; 0,20; 0,22; 0,25; 0,25; 0,30; 0,36; 0,40; 0,43; 0,45; 0,45; 0,47; 0,47.

Розмахи варіаційних рядів представляють собою різниці найбільших і найменших значень кожного ряду, тобто

$$R_x = 1,42 - 0,04 = 1,38 \text{ мм};$$

$$R_y = 0,47 - 0,01 = 0,46 \text{ мм}.$$

Кількість інтервалів варіювання дорівнює

$$n = 1 + 1,39 \ln N, \quad (2.1)$$

де  $N$  – кількість вимірів у вибірці.

$$n = 1 + 1,39 \cdot \ln 30 = 6.$$

Ширина одного інтервалу для відповідної вибірки

$$C_x = \frac{R_x}{n} = \frac{1,38}{6} = 0,23 \text{ мм};$$

$$C_y = \frac{R_y}{n} = \frac{0,46}{6} = 0,08 \text{ мм}.$$

Далі складають кореляційну сітку у вигляді таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Кореляційна сітка

| Границі інтервалів |          | $x_{iH}$   | 0,04  | 0,27  | 0,50  | 0,73  | 0,96  | 1,19  | $\sum m_i$ | $\bar{x}_i$ |
|--------------------|----------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|-------------|
|                    |          | $x_{iB}$   | 0,27  | 0,50  | 0,73  | 0,96  | 1,19  | 1,42  |            |             |
| $y_{iH}$           | $y_{iB}$ | $\begin{matrix} x_{icp} \\ y_{icp} \end{matrix}$ | 0,155 | 0,385 | 0,615 | 0,845 | 1,075 | 1,305 | –          | –           |
| 0,01               | 0,09     | 0,05   | 8     |       |       |       |       |       | 8          | 0,155       |
| 0,09               | 0,17     | 0,13   | 7     | 1     |       |       |       |       | 8          | 0,184       |
| 0,17               | 0,25     | 0,21   | 3     | 1     |       |       |       |       | 4          | 0,213       |
| 0,25               | 0,33     | 0,29   | 2     |       | 1     |       |       |       | 3          | 0,308       |
| 0,33               | 0,41     | 0,37   |       | 1     |       | 1     |       |       | 2          | 0,615       |
| 0,41               | 0,49     | 0,45   |       | 1     | 1     |       | 2     | 1     | 5          | 0,891       |
| $\sum m_i$         |          | –  | 20    | 4     | 2     | 1     | 2     | 1     | 30         | –           |
| $\bar{y}_i$        |          | –  | 0,126 | 0,290 | 0,370 | 0,370 | 0,450 | 0,450 | –          | –           |

Середини  $i$ -их інтервалів величин  $x$  та  $y$  для кожного інтервалу  $i$  ( $i = 1 \dots 6$ ) визначають за формулами:

$$x_{icp} = \frac{x_{iH} + x_{iB}}{2}; \quad (2.2)$$

$$y_{icp} = \frac{y_{iH} + y_{iB}}{2}, \quad (2.3)$$

де  $x_{iH}$ ,  $y_{iH}$  – нижні границі в  $i$ -му інтервалі відповідно для першої й другої вибірок;

$x_{iB}$ ,  $y_{iB}$  – верхні границі в  $i$ -му інтервалі відповідно для першої й другої вибірок.

У таблиці 2.2 проставляються частоти  $m_i$  влучення в інтервал  $i$  та їх

суми  $\sum_{i=1}^n m_i$  по всіх інтервалах. Нарешті, в останній рядок й останню колонку таблиці 2.2 заносять групові середні кожного ряду по інтервалах  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{y}_i$  відповідно, які визначаються за формулами:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_{icp} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (2.4)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{i=1}^n y_{icp} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.5)$$

Наприклад,

$$\bar{x}_2 = \frac{0,155 \cdot 7 + 0,385 \cdot 1}{8} = 0,184.$$

### 2.3.2 Графічне представлення результатів розрахунків

За результатами розрахунків групових середніх кожного ряду по інтервалах  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{y}_i$  будують діаграму розсіювання емпіричних значень параметрів  $x$  і  $y$  (рис. 2.2).

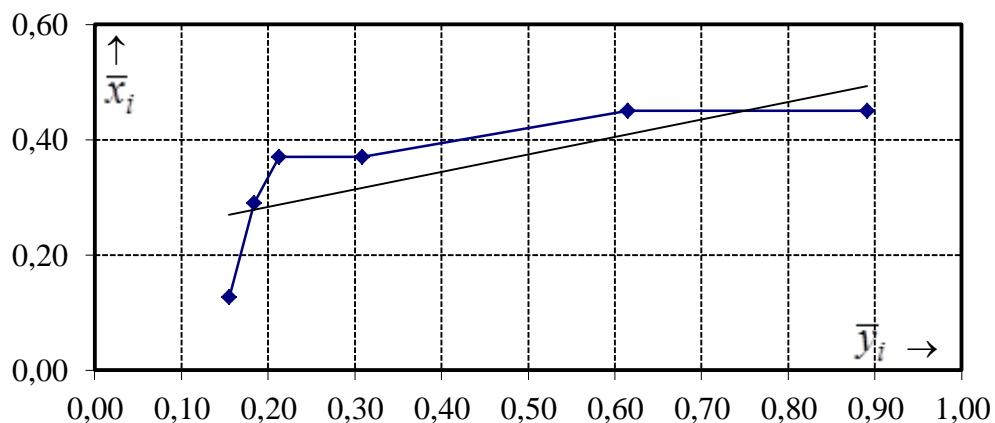


Рисунок 2.2 – Діаграма розсіювання емпіричних значень параметрів  $x$  і  $y$

По результатам аналізу діаграми розсіювання (точки групуються вздовж прямої лінії) висувають гіпотезу про наявність між досліджуваними параметрами лінійного взаємозв'язку.



### 2.3.3 Визначення тісноти зв'язку між двома параметрами

Коефіцієнт лінійної кореляції параметрів  $x$  й  $y$  обчислюють за формулою:

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[ n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \cdot \left[ n \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}. \quad (2.6)$$

Складові формули (2.6) обчислюються за допомогою таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Проміжні розрахунки коефіцієнта кореляції

| № з/п    | $x$   | $y$   | $x \cdot y$ | $x^2$  | $y^2$  |
|----------|-------|-------|-------------|--------|--------|
| 1        | 2     | 3     | 4           | 5      | 6      |
| 1        | 0,85  | 0,36  | 0,3060      | 0,7225 | 0,1296 |
| 2        | 0,59  | 0,47  | 0,2773      | 0,3481 | 0,2209 |
| 3        | 0,04  | 0,1   | 0,0040      | 0,0016 | 0,0100 |
| 4        | 0,14  | 0,18  | 0,0252      | 0,0196 | 0,0324 |
| 5        | 0,48  | 0,47  | 0,2256      | 0,2304 | 0,2209 |
| 6        | 0,49  | 0,2   | 0,0980      | 0,2401 | 0,0400 |
| 7        | 0,21  | 0,04  | 0,0084      | 0,0441 | 0,0016 |
| 8        | 0,11  | 0,15  | 0,0165      | 0,0121 | 0,0225 |
| 9        | 0,05  | 0,25  | 0,0125      | 0,0025 | 0,0625 |
| 10       | 0,1   | 0,1   | 0,0100      | 0,0100 | 0,0100 |
| 11       | 0,2   | 0,08  | 0,0160      | 0,0400 | 0,0064 |
| 12       | 1,42  | 0,45  | 0,6390      | 2,0164 | 0,2025 |
| 13       | 0,1   | 0,22  | 0,0220      | 0,0100 | 0,0484 |
| 14       | 0,04  | 0,01  | 0,0004      | 0,0016 | 0,0001 |
| 15       | 0,17  | 0,12  | 0,0204      | 0,0289 | 0,0144 |
| 16       | 0,13  | 0,06  | 0,0078      | 0,0169 | 0,0036 |
| 17       | 1,1   | 0,45  | 0,4950      | 1,2100 | 0,2025 |
| 18       | 0,35  | 0,4   | 0,1400      | 0,1225 | 0,1600 |
| 19       | 0,07  | 0,2   | 0,0140      | 0,0049 | 0,0400 |
| 20       | 0,15  | 0,25  | 0,0375      | 0,0225 | 0,0625 |
| 21       | 0,13  | 0,1   | 0,0130      | 0,0169 | 0,0100 |
| 22       | 0,23  | 0,1   | 0,0230      | 0,0529 | 0,0100 |
| 23       | 0,06  | 0,07  | 0,0042      | 0,0036 | 0,0049 |
| 24       | 0,56  | 0,3   | 0,1680      | 0,3136 | 0,0900 |
| 25       | 0,38  | 0,13  | 0,0494      | 0,1444 | 0,0169 |
| 26       | 1,01  | 0,43  | 0,4343      | 1,0201 | 0,1849 |
| 27       | 0,06  | 0,06  | 0,0036      | 0,0036 | 0,0036 |
| 28       | 0,08  | 0,07  | 0,0056      | 0,0064 | 0,0049 |
| 29       | 0,06  | 0,07  | 0,0042      | 0,0036 | 0,0049 |
| 30       | 0,05  | 0,16  | 0,0080      | 0,0025 | 0,0256 |
| $\Sigma$ | 9,410 | 6,050 | 3,0889      | 6,6723 | 1,8465 |

З урахуванням даних таблиці 2.4 коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$  дорівнює

$$r_{xy} = \frac{30 \cdot 3,0889 - 9,41 \cdot 6,05}{\sqrt{(30 \cdot 6,67 - 9,41^2) \cdot (30 \cdot 1,85 - 6,05^2)}} = 0,78.$$

Визначають критичне значення коефіцієнта кореляції  $r_{кр}$  при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  і числі ступенів свободи  $f = n - 2 = 30 - 2 = 28$ . Так, згідно з таблицею Б.2 додатка Б, при заданих умовах  $r_{кр} = 0,348$ .

Якщо  $r_{xy} > r_{кр}$ , то отримане значення коефіцієнта кореляції визнається значущим, що підтверджує гіпотезу про наявність лінійного зв'язку між досліджуваними параметрами (в іншому випадку гіпотеза відкидається).

У розглянутому прикладі  $r_{xy} = 0,78 > r_{кр} = 0,348$ .

## 2.4 Висновки по роботі

За результатами виконаної роботи (для розглянутого прикладу) можна зробити наступні висновки.

1. Діаграма розсіювання дозволяє висунути гіпотезу про наявність лінійного зв'язку між досліджуваними параметрами.

2. Розрахункове значення коефіцієнта кореляції більше критичного, це значить що гіпотеза про значущість лінійного зв'язку між досліджуваними параметрами підтверджується.

## 2.5 Питання поточного контролю

1. Що розуміється під терміном «кореляція»?
2. Дайте визначення терміну «кореляційний зв'язок».
3. За якими ознаками розрізняються кореляційні зв'язки?
4. Дайте визначення терміну «коефіцієнт кореляції».
5. В якому діапазоні змінюється значення коефіцієнта кореляції й про що воно свідчить?

### **3 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ПАРАМЕТРІВ ДОСЛІДЖУВАНИХ ЯВИЩ»**

Мета роботи: оволодіння технологією визначення залежності між параметрами досліджуваних явищ.

#### **3.1 Завдання до роботи**

У ході виконання роботи необхідно:

- визначити тісноту зв'язку між двома параметрами (незалежної змінної величини  $x$  та залежної змінної величини  $y$ );
- визначити рівняння регресії;
- виконати перевірку значущості коефіцієнта кореляції  $r_{xy}$  за критерієм Стюдента;
- виконати перевірку гіпотези про лінійну кореляційну залежність між змінними  $y$  та  $x$  з використанням  $F$ -критерію Фішера.

За результатами роботи зробити висновки стосовно виду та ступеня залежності параметрів досліджуваного явища.

Вихідні дані до роботи приймаються згідно з таблицями А.5 і А.6 додатка А.

#### **3.2 Теоретичні викладки до практичної роботи**

Для аналізу залежності однієї величини (параметра) від іншої застосовується регресійний аналіз.

Регресійний аналіз (англ. regression analysis) – це метод визначення відокремленого й спільного впливу факторів на результативну ознаку та кількісної оцінки цього впливу шляхом використання відповідних критеріїв.

На відміну від кореляційного аналізу, регресійний аналіз не з'ясовує чи являється істотним зв'язок, а займається пошуком моделі цього зв'язку, вираженої у функції регресії.

У загальному вигляді функцію (рівняння) регресії можна представити у вигляді:

$$y_x = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

де  $y_x$  – залежна змінна величина;

$x_i$  – незалежні змінні величини (фактори).

Якщо незалежна змінна одна – це простий регресійний аналіз. Якщо

ж їх декілька, то такий аналіз називається багатофакторним.

У ході регресійного аналізу вирішуються дві основні задачі:

1. Побудова рівняння регресії, тобто знаходження виду залежності між результативним показником і незалежними факторами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

2. Оцінка значущості отриманого рівняння, тобто визначення того, наскільки обрані факторні ознаки пояснюють варіацію ознаки  $y_x$ .

### 3.3 Порядок виконання роботи

Досліджується залежність поломок колінчатих валів двигунів у від кількості попередніх капітальних ремонтів  $x$ . Вихідними даними до роботи являються статистичні спостереження, якими зафіксовано  $N$  результатів спостережень (у прикладі  $N = 69$ ). Вихідні дані, що відповідають певному числу капітальних ремонтів  $x$ , заносяться у відповідні стовбці таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Залежність числа поломок колінчатих валів від числа капітальних ремонтів

|                        | Значення параметра $x$ |   |   |   | $n_i$ |
|------------------------|------------------------|---|---|---|-------|
|                        | $i \backslash j$       | 1 | 2 | 3 |       |
| Значення параметра $y$ | 1                      | 2 | — | — | 2     |
|                        | 2                      | — | 2 | — | 2     |
|                        | 3                      | 1 |   | 2 | 3     |
|                        | 4                      | — | 1 | — | 1     |
|                        | 5                      | 2 | — | — | 2     |
|                        | 6                      | — | 2 | 2 | 4     |
|                        | 7                      | — | — | — | —     |
|                        | 8                      | — | — | 2 | 2     |
| $n_j$                  |                        | 5 | 5 | 6 | 16    |

Підраховуються дослідні частоти поломок колінчатих валів за групами ( $n_i$ ) та загальна кількість поломок колінчатих валів у групі ( $n_j$ ), які також заносяться до таблиці 3.1.

Розраховують групові середні:

– параметра  $x$  для кожного значення параметра  $y$ :

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_j^m x_j n_{ij}}{n_i}, \quad (3.2)$$

де  $i$  – група поломок колінчатих валів (кількість поломок);

$j$  – число попередніх капітальних ремонтів двигунів;  
 $m$  – максимальне число капітальних ремонтів двигунів,  $m = 3$ .  
 Тоді

$$\bar{x}_1 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1; \quad \bar{x}_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2; \quad \bar{x}_3 = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{3} = 2,33; \quad \bar{x}_4 = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2;$$

$$\bar{x}_5 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1; \quad \bar{x}_6 = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{4} = 2,5; \quad \bar{x}_8 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3;$$

– параметра  $y$  для кожного значення параметра  $x$ :

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_i y_i n_{ij}}{n_j}, \quad (3.3)$$

де  $k$  – кількість груп поломок колінчатих валів (максимальна кількість поломок),  $k = 8$ .

Тоді

$$\bar{y}_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{5} = 3; \quad \bar{y}_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{5} = 4; \quad \bar{y}_3 = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8}{6} = 5,7.$$

Визначаються загальні статистичні дисперсії за кожною ознакою:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_{xi}}{n} - (\bar{x})^2; \quad (3.4)$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 \cdot n_{yi}}{n} - (\bar{y})^2, \quad (3.5)$$

де  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – загальні середні за кожною з ознак відповідно числу попередніх капітальних ремонтів двигунів і частоті поломок колінчатих валів, що дорівнюють математичним очікуванням цих ознак та розраховуються за формулами:

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n}; \quad (3.6)$$

$$M_y = \frac{\sum_{j=1}^k y_j n_j}{n}, \quad (3.7)$$

де  $n$  – загальна кількість полумок колінчатих валів.

У прикладі

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{16} = 2,062;$$

$$\bar{y} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 2}{16} = 4,313.$$

Тоді

$$S_x^2 = \frac{1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 6}{16} - (2,062)^2 = 0,683;$$

$$S_y^2 = \frac{1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 4 + 7^2 \cdot 0 + 8^2 \cdot 2}{16} - (4,313)^2 = 4,84.$$

Розраховують середні квадратичні відхилення за відповідними ознаками:

$$\sigma_x = \sqrt{S_x^2}; \quad (3.8)$$

$$\sigma_y = \sqrt{S_y^2}. \quad (3.9)$$

Тоді

$$\sigma_x = \sqrt{0,683} = 0,827; \quad \sigma_y = \sqrt{4,84} = 2,2.$$

Визначають значення коефіцієнта кореляції параметрів:

$$r_{xy} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (3.10)$$

Розраховують середнє добутку  $xy$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{n}. \quad (3.11)$$

$$\overline{xy} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 \cdot 2}{16} = 9,813.$$

Тоді

$$r_{xy} = \frac{9,813 - 2,062 \cdot 4,313}{0,827 \cdot 2,2} = 0,5.$$

Отримане значення  $r_{xy}$  свідчить про досить високий зв'язок між досліджуваними факторами.

Знаходять рівняння регресії

$$y_x = r_{xy} \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \sigma_y + \bar{y} = 0,5 \cdot \frac{x - 2,062}{0,827} \cdot 2,2 + 4,313 = 1,34x + 1,54.$$

Виконують перевірку значущості коефіцієнта кореляції  $r_{xy}$ . Перевірка виконується за критерієм Стюдента, для цього розраховують емпіричне значення коефіцієнта Стюдента:

$$t_E = \frac{r_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}. \quad (3.12)$$

Тоді

$$t_E = \frac{0,5 \sqrt{16-2}}{\sqrt{1-0,5^2}} = 2,34.$$

Емпіричне значення коефіцієнта Стюдента порівнюють з табличним значенням  $t_T$ , визначеного при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  та числі ступенів свободи  $f = n - z - 1$ , де  $z$  – кількість пояснюючих змінних,  $z = 1$ .

$$f = 16 - 1 - 1 = 14.$$

Так, згідно з таблицею Б.3 додатка Б табличне значення коефіцієнта Стюдента при заданих умовах буде мати значення  $t_T(0,05; 14) = 2,1448$ .

Якщо  $t_E > t_T$ , то отримане значення коефіцієнта кореляції визнається значущим (нульова гіпотеза, яка стверджує рівність нулю коефіцієнта кореляції або відсутність кореляційного зв'язку, відкидається).

Оскільки  $t_E = 2,34 > t_T = 2,1448$ , то гіпотезу про рівність нулю коефіцієнта кореляції відхиляється. Іншими словами, коефіцієнт кореляції статистично значущий.

Виконують перевірку гіпотези про лінійну кореляційну залежність між змінними  $y$  та  $x$ . Перевірка значущості рівняння регресії проводиться з використанням  $F$ -критерію Фішера, розрахункове значення якого знаходиться з відношення дисперсії вихідного ряду спостережень досліджуваного показника до незміщеної оцінки дисперсії залишкової послідовності:

$$F_E = \frac{\sum(y_x - \bar{y}) / f_1}{\sum(y_i - y_x) / f_2} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{f_2}{f_1}, \quad (3.13)$$

де  $f_1$  – число ступенів свободи, що дорівнює числу факторів у моделі,

$$f_1 = 1;$$

$f_2$  – число ступенів свободи, що визначається як  $f_2 = n - z - 1 = 16 - 1 - 1 = 14$ .

Тоді

$$F_E = \frac{0,5^2}{1 - 0,5^2} \cdot \frac{14}{1} = 4,78.$$

Емпіричне значення  $F_E$  критерію Фішера порівнюють із табличним значенням  $F_T$ .

Табличне значення визначається за таблицями розподілу Фішера для заданого рівня значущості  $\alpha$  ( $\alpha = 0,05$ ), беручи до уваги, що число ступенів свободи для загальної суми квадратів (більшої дисперсії) дорівнює  $f_1 = 1$  і число ступенів свободи залишкової суми квадратів (меншої дисперсії)  $f_2 = 14$ . Так, згідно з таблицею Б.4 додатка Б, табличне значення критерію Фішера при заданих умовах буде мати значення  $F_T(0,01; 1; 14;) = 4,6$ .

Якщо розрахункове значення  $F_E$  більше табличного  $F_T$  при заданому рівні значущості, то рівняння залежності вважається значущим.

Оскільки  $F_E = 4,78 > F_T = 4,6$ , то  $r_{xy}$  значущо відрізняється від нуля, що свідчить про наявність лінійної залежності між змінними  $x$  та  $y$ .

### 3.4 Висновки по роботі

За результатами виконаної роботи (для розглянутого прикладу) можна зробити наступні висновки.

1. Розрахункове значення коефіцієнта кореляції  $r_{xy}$  свідчить про досить високий зв'язок між параметрами досліджуваного явища.

2. Визначене емпіричне значення критерію Стюдента доводить значущість коефіцієнта кореляції  $r_{xy}$ .

3. Перевірка значущості отриманого рівняння регресії для параметрів  $x$  та  $y$ , за допомогою критерію Фішера, підтверджує його лінійний характер.

### 3.5 Питання поточного контролю

1. Для вирішення яких задач наукових досліджень застосовується регресійний аналіз?

2. У чому полягає суть регресійного аналізу?

3. Яка різниця між кореляційним та регресійним аналізами?

4. Який загальний вигляд рівняння багатофакторної регресії?

5. Які основні задачі регресійного аналізу?



## **4 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ПРОВЕДЕННЯ ЯКІСНОГО АНАЛІЗУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ»**

Мета роботи: оволодіння технологією проведення якісного аналізу параметрів досліджуваних явищ за допомогою дисперсійного аналізу.

### **4.1 Завдання до роботи**

У ході виконання роботи необхідно:

- перевірити, користуючись критерієм Фішера, рівність середніх арифметичних вихідного параметра (відгуку) при різних рівнях значимості;
- визначити ступінь впливу рівня вхідного параметра  $x$  (фактора) на вихідний параметр  $y$  (відгук) за допомогою коефіцієнта детермінації ( $\eta^2$ );
- за значенням кореляційного відношення ( $\eta$ ) установити силу зв'язку між досліджуваними параметрами.

За результатами роботи зробити висновки стосовно ступеня впливу рівня вхідного параметра на вихідний параметр досліджуваного явища.

Вихідні дані до роботи приймаються згідно з таблицями А.7 і А.8 додатка А.

### **4.2 Теоретичні викладки до практичної роботи**

Одним із основних завдань наукових досліджень є необхідність визначення значущості впливу ряду факторів на функцію відгуку з метою її покращення. Дослідження впливу тих чи інших факторів на функцію відгуку – завдання дисперсійного аналізу.

Проводячи дисперсійний аналіз, використовують властивість адитивності випадкової величини, яка полягає в тому, що дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин. Тому для виділення й оцінки впливу окремих факторів, що викликають мінливість випадкової величини (функції відгуку), проводиться розкладання сумарної вибіркової дисперсії на складові, що обумовлені окремими незалежними факторами. Кожна з цих складових являє собою оцінку дисперсії генеральної сукупності.

Для визначення значущості впливу окремого фактора необхідно оцінити значимість відповідної йому вибіркової дисперсії у порівнянні з дисперсією відтворюваності, що обумовлена помилкою дослідження. Перевірка значущості оцінок дисперсій проводиться за критерієм Фішера.

### 4.3 Порядок виконання роботи

Досліджується тривалість обслуговування автомобілів ( $y_i$ ) механіками з різним виробничим стажем. Розглядається три рівні фактора ( $x_i$ ), під якими мається на увазі стаж роботи автомеханіків: перший – два роки, другий – три роки й третій – чотири роки. На кожному з рівнів було проведено по чотири рандомізованих виміри.

Вихідні дані по вимірах тривалості обслуговування автомобілів ( $y_{ij}$ ) у залежності від стажу механіків заносяться у відповідні рядки таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Тривалість технічного обслуговування автомобілів механіками з різним стажем (у годинах)

| Параметри                              |       | Значення функції відгуку ( $y_{ij}$ ) |    |    |    | Число дослідів у рядку | Дослідні середні арифметичні |
|--|-------|---------------------------------------|----|----|----|------------------------|------------------------------|
| Номер рандомізованого виміру           |       | 1                                     | 2  | 3  | 4  | $m$                    | $\bar{y}_i$                  |
| Рівень фактора – стаж роботи механіків | $x_1$ | 8                                     | 11 | 14 | 15 | 4                      | 12                           |
|  | $x_2$ | 4                                     | 5  | 9  | 10 | 4                      | 7                            |
|  | $x_3$ | 3                                     | 4  | 6  | 7  | 4                      | 5                            |

Визначення ступеня впливу стажу механіків на тривалість обслуговування автомобілів виконується в наступній послідовності.

1. Знаходять середні арифметичні по кожному з рівнів фактора:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_{ij} = \frac{1}{m} (y_{i1} + \dots + y_{ij}), \quad (4.1)$$

де  $i$  – рівень фактора – стаж роботи;

$j$  – номер дослідів;

$m$  – кількість дослідів одного рівня фактора,  $m = 4$ .

Тоді

$$\bar{y}_1 = \frac{8+11+14+15}{4} = 12 \text{ год}; \quad \bar{y}_2 = \frac{4+5+9+10}{4} = 7 \text{ год}; \quad \bar{y}_3 = \frac{3+4+6+7}{4} = 5 \text{ год}.$$

2. Визначають загальне середнє арифметичне тривалості обслуговування:

$$\bar{y} = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_{ij}, \quad (4.2)$$

де  $n$  – кількість рівнів фактора – стаж роботи,  $n = 3$ .

$$\bar{y} = \frac{8+11+\dots+7}{12} = 8 \text{ год}.$$

3. Знаходять загальну суму квадратів відхилень від загального середнього:

$$SS_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y})^2; \quad (4.3)$$

$$SS_3 = (8-8)^2 + (4-8)^2 + \dots + (7-8)^2 = 170.$$

4. Обчислюють факторну суму квадратів відхилень:

$$SS_{\Phi} = m \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 (\bar{y}_i - \bar{y})^2. \quad (4.4)$$

$$SS_{\Phi} = 4 \cdot [(12-8)^2 + (7-8)^2 + (5-8)^2] = 104.$$

5. Знаходять залишкову суму квадратів відхилень:

$$SS_O = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2. \quad (4.5)$$

$$SS_O = [(8-12)^2 + (11-12)^2 + (14-12)^2 + (15-12)^2] + [(4-7)^2 + (5-7)^2 + (9-7)^2 + (10-7)^2] + [[(3-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2]] = 66.$$

6. Перевіряють правильність розрахунків. Для цього отримані значення квадратів відхилень підставляють в основне рівняння:

$$SS_3 = SS_{\Phi} + SS_O. \quad (4.6)$$

$$SS_3 = 170 = 104 + 66.$$

Отже, розрахунок виконаний правильно.

7. Знаходять загальну незміщену дисперсію:

$$S_3^2 = \frac{SS_3}{f_1} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y})^2, \quad (4.7)$$

де  $N$  – загальна кількість усіх дослідів,  $N = n \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$ ;

$f_1$  – число ступенів свободи для даного виразу,  $f_1 = N - 1 = 12 - 1 = 11$ .

$$S_3^2 = \frac{170}{12-1} = 15,45.$$

8. Обчислюють незміщену факторну дисперсію:

$$S_{\Phi}^2 = \frac{SS_{\Phi}}{f_2} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2, \quad (4.8)$$

де  $f_2$  – число ступенів свободи для даного виразу,  $f_2 = n - 1 = 3 - 1 = 2$ .

$$S_{\Phi}^2 = \frac{104}{3-1} = 52.$$

9. Визначають незміщену залишкову дисперсію:

$$S_O^2 = \frac{SS_O}{f_3} = \frac{1}{f_3} \sum_i^n \sum_j^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad (4.9)$$

де  $f_3$  – число ступенів свободи для даного виразу,  $f_3 = m (n - 1) = 4 \cdot (3 - 1) = 8$ .

$$S_O^2 = \frac{66}{8} = 8,25.$$

10. Знаходять емпіричне значення критерію Фішера, рівне відношенню факторної дисперсії до залишкової:

$$F_E = \frac{S_{\Phi}^2}{S_O^2}; \quad (4.10)$$

$$F_E = \frac{52}{8,25} = 6,3.$$

11. Визначають теоретичне значення критерію Фішера. При рівні значущості  $\alpha = 0,01$  значення критерію Фішера (за таблицею Б.5 додатка Б) буде становити  $F(0,01; 2; 8) = 8,7$ .

12. Порівнюють емпіричне й теоретичне значення критерію:

$$F_E = 6,3 < F_T = 8,7.$$

Таким чином завдання виконане. Встановлено, що емпіричне значення критерію Фішера менше теоретичного при рівні значущості  $\alpha = 0,01$ . Тому гіпотеза про рівність середньої тривалості обслуговування автомобілів механіками з різним стажем роботи не відкидається.

Якщо умови перевірки зробити більш жорсткими, наприклад, якщо рівень значимості прийняти рівним  $\alpha = 0,2$ , то в цьому випадку теоретичне значення критерію Фішера (за таблицею Б.6 додатка Б) буде становити  $F(0,2; 2; 8) = 2,0$ . Отже,

$$F_E = 6,3 > F_T = 2.$$

Це означає, що для більш жорстких умов гіпотеза про рівність середньої тривалості обслуговування машин механіками з різним стажем роботи відкидається. В цьому випадку завдання дисперсійного аналізу може бути продовжено з використанням положень регресійно-кореляційного аналізу. Для цього

на основі середніх арифметичних  $\bar{y}_i$  за рівнями факторів (12, 7 і 5) будується дослідна лінія регресійної залежності. Апроксимація зазначеної дослідної регресійної залежності може здійснюватися, наприклад, параболою другого порядку.

13. Обчислюють значення емпіричного коефіцієнта детермінації ( $\eta^2$ ), котрий інформує про частку міжгрупової дисперсії в загальній дисперсії (ступінь впливу стажу механіків на тривалість обслуговування):

$$\eta^2 = \frac{S_M^2}{S_Z^2}. \quad (4.11)$$

де  $S_M^2$  – міжгрупова дисперсія, що характеризує систематичну варіацію, тобто відмінності у величині досліджуваної ознаки, що виникають під впливом признака-фактора, покладеного в основу групування:

$$S_M^2 = \frac{m \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{N - 1}. \quad (4.12)$$

Тоді

$$S_M^2 = \frac{4 \left[ (12 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (5 - 8)^2 \right]}{12 - 1} = 9,45 \text{ відповідно } \eta^2 = \frac{9,45}{15,45} = 0,61.$$

Це означає, що ознака – «стаж роботи» механіків ( $x_i$ ) є домінуючою, і 61 % розкиду тривалості обслуговування щодо його загального середнього обумовлюється саме цим фактором. Решта 37 % припадають на частку інших чинників.

14. Визначають значення емпіричного кореляційного відношення ( $\eta$ ), яке знаходять як корінь квадратний з емпіричного коефіцієнта детермінації:

$$\eta = \sqrt{0,61} = 0,78.$$

Він характеризує вплив ознаки, що покладена в основу групування, на варіацію результативної ознаки. Емпіричне кореляційного відношення змінюється в межах від 0 до 1 і чим більше його значення наближається до одиниці, тим повніше (сильніше) кореляційний зв'язок між ознаками (таблиця 4.2).

Таблиця 4.2 – Якісна оцінка зв'язку між ознаками (шкала Чеддока)

| Значення              | Характер зв'язку | Значення              | Характер зв'язку |
|-----------------------|------------------|-----------------------|------------------|
| $\eta = 0$            | Відсутній        | $0,5 \leq \eta < 0,7$ | Помітний         |
| $0 < \eta < 0,2$      | Дуже слабкий     | $0,7 \leq \eta < 0,9$ | Сильний          |
| $0,2 \leq \eta < 0,3$ | Слабкий          | $0,9 \leq \eta < 1$   | Вельми сильний   |
| $0,3 \leq \eta < 0,5$ | Помірний         | $\eta = 1$            | Функціональний   |

#### 4.4 Висновки по роботі

За результатами виконаної роботи (для розглянутого прикладу) можна зробити наступні висновки.

1. Порівняння середніх арифметичних тривалості обслуговування автомобілів механіками з різним стажем роботи при рівні значимості  $\alpha = 0,01$ , не дозволило однозначно стверджувати про безпосередню залежність тривалості обслуговування автомобілів від виробничого стажу механіків. Прийняття більш високого рівня значимості  $\alpha = 0,2$  дозволило відкинути гіпотезу про рівність середньої тривалості обслуговування машин механіками з різним стажем роботи.

2. Розраховане значення емпіричного коефіцієнта детермінації ( $\eta^2$ ), дозволяє стверджувати, що ознака – «стаж роботи» механіків ( $x_i$ ) є домінуючою, і 61 % розкиду тривалості обслуговування щодо його загального середнього обумовлюється саме цим фактором.

3. Розрахунок кореляційного відношення ( $\eta$ ) дозволив установити наявність сильного зв'язку між досліджуваними параметрами.

#### 4.5 Питання поточного контролю

1. Які основні завдання дисперсійного аналізу?
2. За яким критерієм проводиться перевірка значущості оцінок дисперсій?
3. Що дозволяє встановити розрахунок кореляційного відношення?
4. У чому суть коефіцієнта детермінації?
5. За якою шкалою виконується оцінка кореляційного відношення?

## 5 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ПРОЦЕСІВ»

Мета роботи: оволодіння технологією моделювання досліджуваних процесів.

### 5.1 Завдання до роботи

У ході виконання роботи необхідно:

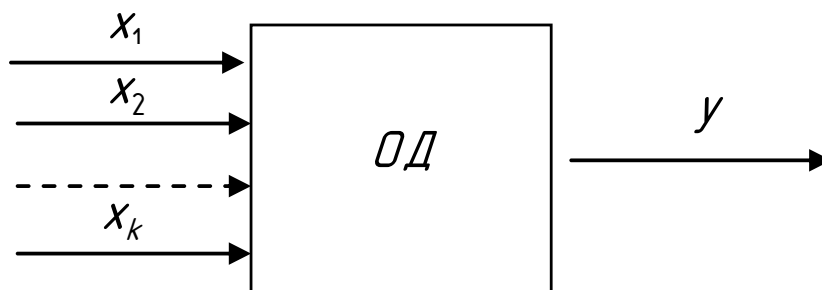
- визначити та виключити грубі помилки експерименту;
- виконати перевірку відтворюваності дослідів за критерієм Кохрена;
- визначити коефіцієнти рівняння регресії;
- виконати перевірку значущості коефіцієнтів регресії за критерієм Стьюдента;
- виконати перевірку адекватності отриманої моделі регресії за критерієм Фішера.

За результатами роботи зробити висновки стосовно отриманої моделі досліджуваних процесів та ступеня впливу вхідних факторів на результат експерименту (функцію відгуку).

Вихідні дані до роботи приймаються згідно з таблицею А.9 додатка А.

### 5.2 Теоретичні викладки до практичної роботи

У випадках, коли дослідник не має вичерпних відомостей про механізм досліджуваного процесу (він може назвати тільки фактори, що визначають умови протікання процесу, і вимоги до його результатів) побудова об'єкта дослідження (ОД) базується на використанні методу «Чорний ящик» (див. рис. 5.1).



$x_1, x_2, \dots, x_k$  – незалежні змінні фактори, які можуть варіювати при постановці експериментів;  $y$  – відгук – результат експерименту;  
 ОД – об'єкт дослідження

Рисунок 5.1 – Схема «Чорного ящика»

Стрілками, що входять в об'єкт, показані вхідні фактори ( $x$ ). Функціонування ОД може характеризуватися відгуком (на схемі це  $y$ ).

Залежність між відгуком і вхідними факторами називається функцією відгуку й має вигляд:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (5.1)$$

Для отримання такої залежності виконують планування експерименту. Планування експерименту – це процедура вибору числа та умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для отримання математичної моделі процесу.

У залежності від того якого виду буде рівняння регресії, отриманого за результатами експериментів, плани експериментів діляться на плани першого й більш високих порядків. Після проведення експерименту за планом першого порядку отримане рівняння буде мати вигляд:

$$y = b_0 + \sum_{u=1}^k b_u x_u \quad \text{або} \quad y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad (5.2)$$

де  $b_0$  – вільний член рівняння регресії;

$b_u$  – коефіцієнт лінійного ефекту;

$k$  – число факторів;

$x_u$  – фактори експерименту.

При плані другого порядку рівняння регресії матиме вигляд:

$$y = b_0 + \sum_{u=1}^k b_u x_u + \sum_{u,l=1}^c b_{ul} x_{ul} + \sum_{u,l=1}^k b_{ul} x_{ul} \quad \text{або} \\ y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \\ + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2, \quad (5.3)$$

де  $c$  – кількість поєднань з  $k$  факторів по два;

$l$  – порядковий номер фактора відмінного від  $u$ ;

$b_{ul}$  – коефіцієнт ефекту парного взаємодії.

Отримане емпіричним шляхом рівняння називається математичною моделлю процесу.

При проведенні прикладних досліджень у першу чергу слід орієнтуватися на організацію плану першого порядку й отримання лінійного рівняння регресії, якщо отримане лінійне рівняння буде адекватне досліджуваному процесу, то ускладнювати завдання (організовувати план другого порядку) не доцільно.

Розрізняють повний факторний експеримент (ПФЕ) і подрібнений факторний експеримент (ДФЕ).

При організації повного факторного експерименту передбачається



проведення експериментів за всіх можливих комбінацій факторів.

Подрібнений факторний експеримент передбачає використання тільки частини повного факторного експерименту.

При плануванні за схемою ПФЕ реалізуються всі можливі комбінації факторів на всіх обраних для дослідження рівнях. Необхідне число дослідів визначається за формулою:

$$N = g^k, \quad (5.4)$$

де  $g$  – кількість рівнів на яких фіксується фактор при проведенні експерименту;

$k$  – кількість вхідних факторів.

Рівнем фактора прийнято називати його значення, що зафіксоване під час проведення експерименту.

При організації плану першого порядку значення фактора фіксується на верхньому й нижньому рівнях, тобто  $g = 2$  і  $N = 2^k$ .

Верхній рівень – таке значення фактора, що встановлюється під час проведення експерименту.

Нижній рівень – таке значення фактора, що встановлюється під час проведення експерименту.

Для розрахунків вводиться нульовий рівень фактора, який представляє собою середньоарифметичне значення верхнього та нижнього рівня. Інтервал значень фактора від нижнього до верхнього рівнів називають областю визначення фактора.

Інтервал варіювання фактора (зміни) – це значення фактора в натуральних величинах, додавання якого до нульового рівня дає верхній рівень фактора, а віднімання – нижній

$$\Delta x_u = x_{ув} - x_{u0} \quad \text{або} \quad \Delta x_u = x_{u0} - x_{ун}. \quad (5.5)$$

При складанні матриці експерименту використовують кодовані значення факторів. При плані першого порядку кодовані значення факторів представлені  $+1$  і  $-1$ .

Кодування значення фактора в матриці експерименту є відношення

$$\begin{aligned} x_{ун} &= \frac{x_{ун} - x_{u0}}{\Delta x_u} = -1; \\ x_{ув} &= \frac{x_{ув} - x_{u0}}{\Delta x_u} = +1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Матриця ПФЕ типу  $2^k$  будується з використанням прийому чергування знаків, що можна розглянути на прикладі побудови матриці ПФЕ  $2^3$  першого порядку (див. таблицю 5.1). Суть прийому чергування знаків: позитивне – негативне значення (верхнє й нижнє значення кожного наступ-

ного фактора в матриці) повторюється на верхньому та нижньому значеннях попереднього фактора.

У матрицю експерименту також вводиться фактор  $x_0$  – фіктивний фактор, що перебуває на верхньому рівні фактора (+ 1).

Таблиця 5.1 – Матриця ПФЕ  $2^3$

| Номер досліду | Кодовані значення факторів |       |       |       | Параметр |
|---------------|----------------------------|-------|-------|-------|----------|
|               | $x_0$                      | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |          |
| 1             | +1                         | +1    | +1    | +1    | $y_1$    |
| 2             | +1                         | -1    | +1    | -1    | $y_2$    |
| 3             | +1                         | +1    | -1    | -1    | $y_3$    |
| 4             | +1                         | -1    | -1    | +1    | $y_4$    |

У разі необхідності врахування взаємодії між факторами типу  $x_1x_2$  в таблиці додаються додаткові колонки.

Виявити помилку експериментів можна шляхом повторення кожного досліду кілька разів (тобто кожен рядок матриці планування повторюється, наприклад  $r$  разів). Для виключення систематичних помилок застосовують метод рандомізації дослідів. Сутність методу полягає в тому, що досліді проводять у випадковому порядку, для чого користуються таблицею випадкових чисел.

### 5.3 Порядок виконання роботи

Досліджується процес втрати компресії автомобільним двигуном залежно від двох факторів: зношування кілець ( $\varepsilon$ ) і втрати пружності кілець ( $\eta$ ). Для уникнення помилки при оцінці коефіцієнтів регресії й оцінки відтворюваності дослідів були проведені паралельні досліді.

Значення названих факторів в умовних одиницях наведені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Рівні варіювання вхідних факторів

| Фактори             | Зношування кілець $\varepsilon$ | Пружність кілець $\eta$ |
|---------------------|---------------------------------|-------------------------|
| Код                 | $x_1$                           | $x_2$                   |
| Основний рівень (0) | 9                               | 6                       |
| Інтервал варіювання | 3                               | 3                       |
| Верхній рівень (+)  | 12                              | 9                       |
| Нижній рівень (-)   | 6                               | 3                       |

У таблиці 5.3 наводиться матриця планування експерименту  $2^2$ , у 6-ий стовпець якої заносяться вихідні дані по вимірах значення функції відгуку.

Таблиця 5.3 – Матриця планування ПФЕ 2<sup>2</sup>

| Номер рядка дослідів в матриці | Порядок реалізації дослідів | $x_0$ | Зношування кілець $x_1$ | Пружність кілець $x_2$ | Компресії двигуна |         |
|--------------------------------|-----------------------------|-------|-------------------------|------------------------|-------------------|---------|
|                                |                             |       |                         |                        | По дослідом       | Середня |
| 1                              | 2                           | 3     | 4                       | 5                      | 6                 | 7       |
| 1                              | 4                           |       |                         |                        | 3                 |         |
|                                | 12                          | +1    | -1                      | -1                     | 4                 | 4       |
|                                | 2                           |       |                         |                        | 5                 |         |
| 2                              | 3                           |       |                         |                        | 7                 |         |
|                                | 7                           | +1    | +1                      | -1                     | 10                | 10      |
|                                | 8                           |       |                         |                        | 13                |         |
| 3                              | 9                           |       |                         |                        | 19                |         |
|                                | 1                           | +1    | -1                      | +1                     | 25                | 25      |
|                                | 11                          |       |                         |                        | 31                |         |
| 4                              | 5                           |       |                         |                        | 33                |         |
|                                | 6                           | +1    | +1                      | +1                     | 36                | 36      |
|                                | 10                          |       |                         |                        | 39                |         |

1. Виключення грубих помилок експерименту. Дуже важливо виключити з експериментальних даних грубі помилки, так званий брак при повторних дослідях. Для визначення браку можна використовувати критерій Стюдента. У цьому випадку для знаходження довірчого інтервалу вихідної величини використовують формулу:

$$y_{i \min}^{\max} = \bar{y}_i \pm \frac{t_T \cdot \sigma(\bar{y}_i)}{\sqrt{r}} \quad \text{або} \quad y_{i \min}^{\max} = \bar{y}_i \pm \frac{t_T \cdot \sqrt{S^2(\bar{y}_i)}}{\sqrt{r}}, \quad (5.7)$$

де  $\bar{y}_i$  – середнє значення функції відгуку  $i$ -го дослідів за даними паралельних вимірів (формула розрахунку та сам розрахунок наведено нижче);

$\sigma(\bar{y}_i)$  – середньоквадратичне відхилення  $i$ -го дослідів;

$S^2(\bar{y}_i)$  – дисперсія функції відгуку  $i$ -го дослідів за даними паралельних вимірів (формула розрахунку та сам розрахунок наведено нижче);

$r$  – кількість паралельних дослідів у кожному рядку матриці планування,  $r = 3$ ;

$t_T$  – табличне значення критерію Стюдента, що визначається при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  та числі ступенів свободи  $f = r - 1$ .

$$f = 3 - 1 = 2.$$

Так, згідно з таблицею Б.3 додатка Б, табличне значення коефіцієнта Стюдента при заданих умовах буде мати значення  $t_T(0,05; 2) = 4,3$ .

Розрахунок середнього значення функції відгуку  $i$ -го дослідів за даними паралельних вимірів ведеться за формулою:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^r y_{ij}}{r}, \quad (5.8)$$

де  $i$  – номер дослід у матриці експерименту;

$j$  – номер паралельного дослід;

$y_{ij}$  – значення функції відгуку  $i$ -го дослід, повторюваного в  $j$ -й раз.

Так

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \frac{3+4+5}{3} = 4; & \bar{y}_2 &= \frac{7+10+13}{3} = 10; \\ \bar{y}_3 &= \frac{19+25+31}{3} = 25; & \bar{y}_4 &= \frac{33+36+39}{3} = 36. \end{aligned}$$

Визначення значення дисперсії для кожного дослід виконується згідно з формулою:

$$S_{(\bar{y}_i)}^2 = \frac{\sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{r-1}. \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} S_{(\bar{y}_1)}^2 &= \frac{(3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2}{3-1} = 1; \\ S_{(\bar{y}_2)}^2 &= \frac{(7-10)^2 + (10-10)^2 + (13-10)^2}{3-1} = 9; \\ S_{(\bar{y}_3)}^2 &= \frac{(19-25)^2 + (25-25)^2 + (31-25)^2}{3-1} = 36 \rightarrow \max; \\ S_{(\bar{y}_4)}^2 &= \frac{(33-36)^2 + (36-36)^2 + (39-36)^2}{3-1} = 9. \end{aligned}$$

З урахуванням наведених вище розрахунків, довірчі інтервали вихідних величин будуть становити:

$$\begin{aligned} y_{1\min}^{\max} &= 4 \pm \frac{4,3 \cdot \sqrt{1}}{\sqrt{3}} = (1,52 - 6,48); & y_{2\min}^{\max} &= 10 \pm \frac{4,3 \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{3}} = (2,55 - 17,45); \\ y_{3\min}^{\max} &= 25 \pm \frac{4,3 \cdot \sqrt{36}}{\sqrt{3}} = (10,10 - 39,9); & y_{4\min}^{\max} &= 36 \pm \frac{4,3 \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{3}} = (28,55 - 43,45). \end{aligned}$$

Результати паралельних дослідів, які не входять у довірчі інтервали, виключають з подальших розрахунків.

2. Виконують перевірку відтворюваності дослідів, для чого за допомогою критерію Кохрена роблять перевірку однорідності вибірок. Критерій Кохрена застосовують, як правило, в тих випадках коли кількість дисперсій, що порівнюються, більше двох і одна дисперсія значно перевищує інші. Цей критерій придатний для випадків, коли у всіх дослідах мається однакове число повторних дослідів.

Обчислюють дослідне значення критерію Кохрена, рівне відношенню максимальної рядкової дисперсії до суми рядкових дисперсій по всіх рядках матриці. У розглянутому прикладі

$$G_{KD} = \frac{S^2_{(\bar{y}_i)_{\max}}}{\sum_{i=1}^N S^2_{(\bar{y}_i)}}, \quad (5.10)$$

де  $N$  – число рядків у матриці планування.

$$G_{KD} = \frac{36}{1+9+36+9} = 0,66.$$

Теоретичне (критичне) значення критерію Кохрена ( $G_{KT}$ ) визначається для заданого рівня значущості  $\alpha$  ( $\alpha = 0,05$ ), у залежності від кількості рядків у матриці планування  $N$  ( $N = 4$ ) та числа ступенів  $f = r - 1$ :

$$f = 3 - 1 = 2.$$

Так, згідно з таблицею Б.7 додатка Б, критичне значення критерію Кохрена при заданих умовах буде мати значення  $G_{KT} (0,05; 4; 2) = 0,768$ .

Якщо дослідне значення  $G_{KD}$  менше теоретичного  $G_{KT}$  при заданому рівні значущості, то дисперсії паралельних дослідів однорідні.

У прикладі

$$G_{KD} = 0,655 < G_{KT} = 0,768.$$

Отже, дисперсії паралельних дослідів при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  однорідні. А якщо дисперсії однорідні, то за значеннями дисперсій дослідів розраховується дисперсія відтворюваності дослідів, яка визначається як середньозважена дисперсія:

$$S^2_{(B)} = S^2_{(CB)} = \frac{\sum_{i=1}^N S^2_{(\bar{y}_i)}}{N(r-1)}. \quad (5.11)$$

$$S^2_{(B)} = \frac{1+9+36+9}{4(3-1)} = 6,875.$$

Розраховують значення коефіцієнтів регресії й визначають їхні довірчі інтервали.

Згідно з планом експерименту першого порядку для двох вхідних факторів  $x_1$  та  $x_2$  рівняння регресії має вигляд:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2. \quad (5.12)$$

Визначаються коефіцієнти регресії за формулою:

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ki} \cdot y_i}{N}, \quad (5.13)$$

де  $x_{ki}$  – значення  $x_k$  в  $i$ -му досліді;

$y_i$  – значення функції відгуку в  $i$ -му досліді;

$N$  – кількість поставлених дослідів.

Для підрахунку будь-якого коефіцієнта регресії стовпцю  $y$  приписують знаки відповідного стовпця  $x_i$ , потім складають значення параметра оптимізації зі своїми знаками й результат ділять на число дослідів матриці планування.

У розглянутому прикладі, згідно з таблицею 5.3, значення коефіцієнтів регресії будуть становити:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{4 + 10 + 25 + 36}{4} = 18,75; \\ b_1 &= \frac{(-1) \cdot 4 + (+1) \cdot 10 + (-1) \cdot 25 + (+1) \cdot 36}{4} = 4,25; \\ b_2 &= \frac{(-1) \cdot 4 + (-1) \cdot 10 + (+1) \cdot 25 + (+1) \cdot 36}{4} = 11,75. \end{aligned}$$

Після розрахунку коефіцієнтів регресії перевіряють їхню значущість.

Перевірка виконується за критерієм Стюдента, так умова значущості коефіцієнта регресії  $t_i \geq t_T$ , де  $t_i$  – розрахункове значення коефіцієнта Стюдента для кожного коефіцієнта регресії, що визначається за формулою:

$$t_i = \frac{|b_i|}{\sqrt{\frac{S_{(B)}^2}{N \cdot r}}}. \quad (5.14)$$

Тоді

$$t_0 = \frac{18,75}{\sqrt{\frac{6,875}{4 \cdot 3}}} = 24,77; \quad t_1 = \frac{4,25}{\sqrt{\frac{6,875}{4 \cdot 3}}} = 5,61; \quad t_2 = \frac{11,75}{\sqrt{\frac{6,875}{4 \cdot 3}}} = 15,52.$$

Розрахункове значення коефіцієнта Стюдента порівнюють з табличним значенням  $t_T$ , що визначається при рівні значимості  $\alpha = 0,05$  та числі ступенів свободи  $f = N - 1$ .

$$f = 4 - 1 = 3.$$

Так, згідно з таблицею Б.3 додатка Б, табличне значення коефіцієнта Стюдента при заданих умовах буде мати значення  $t_T (0,05; 3) = 3,18$ .

Порівнюємо розрахункові значення з табличним і бачимо, що для всіх коефіцієнтів регресії умова значущості виконується й їх слід виключити в рівняння регресії (у протилежному випадку їх необхідно було б виключити з рівняння регресії).

Таким чином, рівняння регресії, має вигляд:

$$y = 18,75 + 4,25x_1 + 11,75x_2.$$

Після обчислення коефіцієнтів регресії й перевірки їх значимості, здійснюють статистичний аналіз рівняння регресії. Із цією метою перевіряється гіпотеза про адекватність даного рівняння, тобто відшукується відповідь на питання чи можна використати отримане лінійне рівняння або необхідна більш складна модель.

Перевірка значущості проводиться з використанням  $F$ -критерію Фішера, розрахункове значення якого знаходиться за формулою:

$$F_E = \frac{S_{(A)}^2}{S_{(B)}^2}, \quad (5.15)$$

де  $S_{(A)}^2$  – дисперсія адекватності, значення якої визначається за формулою:

$$S_{(A)}^2 = \frac{r}{N - d} \sum_{i=1}^N (y_{iE} - y_{iT})^2, \quad (5.16)$$

де  $d$  – кількість коефіцієнтів рівняння регресії;

$y_{iE}$  – значення функції відгуку в  $i$ -му досліді.

$y_{iT}$  – значення функції відгуку в тому ж досліді, визначене за допомогою рівняння регресії, так згідно з рівнянням регресії та згідно з кодованими значеннями вхідних параметрів таблиці 5.3.

$$y_{1T} = 18,75 - 4,25 - 11,75 = 2,75; \quad y_{2T} = 18,75 + 4,25 - 11,75 = 11,25;$$

$$y_{3T} = 18,75 - 4,25 + 11,75 = 26,25; \quad y_{4T} = 18,75 + 4,25 + 11,75 = 34,75.$$

Для зручності розрахунку дисперсії адекватності можна скористатись розрахунковою таблицею 5.4, як це зроблено в даному прикладі.

Таблиця 5.4 – Розрахунок дисперсії адекватності

| Номер досліду | $y_{iE}$ | $y_{iT}$ | $ \Delta y $ | $ \Delta y ^2$ |
|---------------|----------|----------|--------------|----------------|
| 1             | 4        | 2,75     | 1,25         | 1,56           |
| 2             | 10       | 11,25    | 1,25         | 1,56           |
| 3             | 25       | 26,25    | 1,25         | 1,56           |
| 4             | 36       | 34,75    | 1,25         | 1,56           |

Дисперсія адекватності дорівнює:

$$S_{(A)}^2 = \frac{3}{4-3} \cdot 6,25 = 18,75.$$

Тоді

$$F_E = \frac{18,75}{6,875} = 2,73.$$

Емпіричне значення  $F_E$  критерію Фішера порівнюють із табличним значенням  $F_T$ .

Табличне значення визначається за таблицями розподілу Фішера для заданого рівня значущості  $\alpha$  ( $\alpha = 0,05$ ), беручи до уваги, що число ступенів свободи для більшої дисперсії дорівнює  $f_1 = N - d = 4 - 3 = 1$  і число ступенів свободи меншої дисперсії  $f_2 = (r - 1)N = (3 - 1) \cdot 4 = 8$ . Так, згідно з таблицею Б.4 додатка Б, табличне значення критерію Фішера при заданих умовах буде мати значення  $F_T(0,05; 1; 8) = 5,32$ .

Якщо розрахункове значення  $F_E$  менше табличного  $F_T$  при заданому рівні значущості, то модель вважається адекватною.

Оскільки  $F_E < F_T$ , то гіпотеза про адекватність лінійного рівняння не відкидається.

У разі не підтвердження адекватності математичної моделі, негативний результат свідчить про існування взаємодії між факторами й неможливість оцінки значущості лінійних ефектів, так як усі вони змішані з ефектами взаємодії. У цьому випадку переходять до плану проведення експерименту більш високого порядку.

Інтерпретація лінійного рівняння. В отриманому лінійному рівнянні регресії величина й знаки коефіцієнтів дозволяють судити про вплив відповідних факторів на параметр оптимізації. Чим більше  $b_i$  по величині, тим сильніше вплив фактора  $x_i$ . Позитивний знак перед  $b_1$  показує, що збільшення відповідного фактора приводить до зростання параметра, негативний знак свідчить про зменшення параметра при збільшенні  $x_i$ .



### 5.3 Висновки по роботі

За результатами виконаної роботи (для розглянутого прикладу) можна зробити наступні висновки.

1. Проведена перевірка на виявлення грубих помилок експерименту. Грубих помилок експерименту не виявлено.

2. Виконана перевірка відтворюваності дослідів, за допомогою критерію Кохрена, свідчить про однорідність результатів дослідів.

3. Отримане, в результаті розрахунків, рівняння регресії має вигляд  $y = 18 + 4,25x_1 + 11,75x_2$ .

4. Перевірка значущості коефіцієнтів регресії, за допомогою критерію Стюдента, підтвердила їх значущість.

5. Перевірка адекватності отриманої моделі регресії, за допомогою критерію Фішера, підтверджує її лінійний характер.

6. На функцію відгуку найбільший вплив має другий вхідний фактор (пружність кілець).

### 5.5 Питання поточного контролю

1. В яких випадках наукові дослідники використовують метод «Чорний ящик» та в чому його суть?

2. Наведіть загальний вигляд рівнянь регресії, що можуть бути отримані за планом експерименту першого та другого порядку?

3. Як здійснюється кодування значень вхідних факторів експерименту?

4. У чому різниця між повним факторним експериментом і подрібненим факторним експериментом?

5. Наведіть формулу для розрахунку числа дослідів за планом повного факторного експерименту.

## 6 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ЗАСТОСУВАННЯ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ Й ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ МЕТОДОМ ЛАТИНСЬКОГО КВАДРАТА ПРИ ВИВЧЕННІ ПРОЦЕСІВ З ЯКІСНИМИ ФАКТОРАМИ»

Мета роботи: оволодіння технологією дисперсійного аналізу.

### 6.1 Завдання до роботи

У ході виконання роботи необхідно:

- за допомогою розрахунку залишкової дисперсії експерименту, зробити оцінку помилки результатів експерименту;
- з'ясувати значущість впливу кожного із трьох вхідних факторів на функцію відгуку за критерієм Фішера;
- при необхідності виконати перевірку середніх значень рівнів значущих факторів за критерієм Дункана.

За результатами роботи зробити висновки стосовно ступеня впливу вхідних факторів на результат експерименту (функцію відгуку).

Вихідні дані до роботи приймаються згідно з таблицею А.10 додатка А.

### 6.2 Теоретичні викладки до практичної роботи

Для зменшення кількості дослідів багатофакторного експерименту, застосовують планування експерименту за схемою латинського квадрата. Так, при вивченні впливу трьох факторів, кожний з яких змінюють на чотирьох рівнях, необхідно провести  $N = 4^3 = 64$  дослідів. Їхнє число можна значно скоротити, якщо план експерименту побудувати за схемою латинського квадрата.

Латинським квадратом  $n \times n$  називається така таблиця з  $n^2$  елементів (букв або чисел), кожний з яких зустрічається в точності один раз у кожному рядку й у кожному стовпці.

Рядки й колонки квадрата використовують для позначення рівнів двох факторів, а рівні третього утворюють латинський квадрат.

Наприклад, матрицю (план) експерименту для трьох факторів, що позначені буквами А, В і С, кожний з яких варіюється на чотирьох рівнях, можна представити латинським квадратом  $4 \times 4$  (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Матриця трьохфакторного експерименту (латинський квадрат  $4 \times 4$ )

| Фактор В \ Фактор А | А1 | А2 | А3 | А4 |
|---------------------|----|----|----|----|
| В1                  | С1 | С2 | С3 | С4 |
| В2                  | С2 | С3 | С4 | С1 |
| В3                  | С3 | С4 | С1 | С2 |
| В4                  | С4 | С1 | С2 | С3 |

З матриці плану експерименту випливає, що для вивчення впливу трьох факторів, що змінюються на чотирьох рівнях, слід провести тільки шістнадцять дослідів.

Розташування елементів квадрата оптимально в тому розумінні, що кожний елемент зустрічається один і тільки один раз у стовпці й рядку. Тому, яким би не був навантажувальний вплив джерела неоднорідностей, він у рівній мірі позначиться при підрахунку значень у рядку й стовпці у процесі обробки результату експерименту.

Щоб виключити вплив систематичних помилок, що викликані зовнішніми умовами, рекомендується встановлення випадкової послідовності постановки дослідів, тобто досліді необхідно рандомізувати в часі. Для латинського квадрата проводять рандомізацію рядків і колонок, що гарантує випадковий вибір квадрата зі всієї множини квадратів, а також установають випадковий порядок проведення дослідів. Рандомізацію можна проводити за допомогою таблиці випадкових чисел. Після виконання рандомізації дослідів, отримана послідовність їх виконання заноситься у вихідну матрицю (таблиця 6.2).

Таблиця 6.2 – План проведення трьохфакторного експерименту з урахуванням рандомізації дослідів

| Фактор А \ Фактор В | A1    | A2   | A3    | A4    |
|---------------------|-------|------|-------|-------|
| B1                  | 11 C1 | 5 C2 | 10 C3 | 12 C4 |
| B2                  | 6 C2  | 8 C3 | 2 C4  | 7 C1  |
| B3                  | 14 C3 | 1 C4 | 15 C1 | 13 C2 |
| B4                  | 16 C4 | 4 C1 | 9 C2  | 3 C3  |

Нерідко, при проведенні експериментальних досліджень, дослідникам доводиться зустрічатися з якісними факторами. Якісним фактором називають змінну величину, яка характеризується якісними властивостями. Їй не відповідає числова шкала в тому розумінні, як це розуміється для кількісних факторів. Однак для якісних факторів усе-таки використовують умовну порядкову шкалу, яка ставить у відповідність рівням якісного фактора числа натурального ряду, тобто робить кодування рівнів фактора. Порядок рівнів може бути довільний, але після кодування він фіксується в межах дослідження.

### 6.3 Порядок виконання роботи

Досліджується процес викиду токсичних відпрацьованих газів двигунів автомобілів. Попередньо встановлені основні причини (фактори), від яких залежить указана токсичність (функція відгуку) в умовах роботи підприємства автомобільного транспорту: пробіг з початку експлуатації (фактор А), режим руху автомобілів (фактор В) і дієвість роботи технічної служби (фактор С). З

перерахованих трьох факторів, два якісні, а один – кількісний (пробіг автомобілів з початку їх експлуатації).

Вихідні значення перерахованих факторів наведено в таблицях 6.3–6.5.

Таблиця 6.3 – Рівні зміни пробігу автомобілів з початку їх експлуатації (фактор А)

| Значення рівня за умовною порядковою шкалою  | I       | II      | III     | IV        |
|--|---------|---------|---------|-----------|
| Пробіг автомобілів з початку їх експлуатації (у частках від ресурсного пробігу $L_p$ ) | (0–0,5) | (0,5–1) | (1–1,5) | (1,5–2,0) |

Таблиця 6.4 – Рівні зміни режиму руху автомобілів (фактор В)

| Значення рівня за умовною порядковою шкалою | 1            | 2                             | 3   | 4   |
|---|--------------|-------------------------------|---|---|
| Назва рівня                                 | Холостий хід | Постійна швидкість автомобіля | Прискорення (при збільшенні швидкості від 0 до 40 км/год) | Уповільнення (при зменшенні швидкості від 40 до 0 км/год) |

Таблиця 6.5 – Рівні зміни ефективності роботи технічної служби (фактор С)

| Значення рівня за умовною порядковою шкалою | A                                       | B   | C  | D  |
|---|---|---|--|--|
| Назва рівня                                 | Технічна служба не має газоаналізаторів | Технічна служба оснащена газоаналізаторами низької точності | У технічній службі немає фахівців-діагностів | Технічна служба оснащена високоякісним устаткуванням |

Кожний із трьох факторів, що впливають на токсичність відпрацьованих газів змінюється на чотирьох рівнях. Тому, для побудови плану експерименту був використаний латинський квадрат 4×4 (табл. 6.2).

Результати проведених дослідів (вихідні дані) по стовбцям заносяться у вихідну матрицю експерименту, що представлена у вигляді таблиці 6.6 (рівні факторів позначені згідно з таблицями 6.3–6.5).

Таблиця 6.6 – Матриця з результатами експерименту

| Фактор А \ Фактор В | 1     | 2     | 3     | 4     |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| I                   | 4,6 A | 1,0 B | 2,5 C | 1,8 D |
| II                  | 2,5 B | 1,5 C | 2,5 D | 4,0 A |
| III                 | 6,8 C | 1,4 D | 3,0 A | 4,1 B |
| IV                  | 6,8 D | 3,0 A | 2,8 B | 4,5 C |

Проводять дисперсійний аналіз результатів експерименту. Якщо вивчається вплив трьох факторів, то результати експерименту представляються наступною лінійною моделлю:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \quad (6.1)$$

де  $y_{ijk}$  – значення функції відгуку, що отримане в результаті проведення досліду з  $i$ -им,  $j$ -им,  $k$ -им рівнями, відповідно, факторів А, В і С;

$\mu$  – загальний ефект у всіх дослідах (дійсне середнє сукупності, з якої отримана вибірка);

$\alpha_i$  – ефект рядка, дисперсія, що отримана за рахунок зміни фактора А;

$\beta_j$  – ефект колонки, дисперсія, що отримана під впливом зміни фактора В;

$\gamma_k$  – ефект букви (елемента квадрата), дисперсія, що отримана за рахунок зміни фактора С;

$\varepsilon_{ijk}$  – дисперсія, що викликана помилкою експериментального дослідження.

Для зручності обробки результатів проведених дослідів їх переносять у таблицю 6.7. Причому, крім результатів експерименту, у кожній клітинці результат експерименту зводиться у квадрат і записується в дужках. За допомогою цієї таблиці, можна досліджувати перший і другий фактори.

Для виявлення значимості впливу третього фактора, який змінюється на рівнях А, В, С, D вибираються з табл. 6.6 результати експериментів, відповідні до латинських букв, тобто кожному рівню третього фактора й записуються в таблицю 6.8.

Таблиця 6.7 – Аналіз результатів експерименту (фактори А і В)

| Фактор А<br>Фактор В    | 1               | 2              | 3              | 4               | $A_i$ | $\bar{A}_i$ | $\sum_{i=1}^4 y_{ij}^2$ | $A_i^2$ |
|-------------------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|-------|-------------|-------------------------|---------|
| I                       | 4,60<br>(21,16) | 1,00<br>(1,00) | 2,50<br>(6,25) | 1,80<br>(3,24)  | 9,90  | 2,48        | 31,65                   | 98,01   |
| II                      | 2,50<br>(6,25)  | 1,50<br>(2,25) | 2,50<br>(6,25) | 4,00<br>(16,00) | 10,50 | 2,63        | 30,75                   | 110,25  |
| III                     | 6,80<br>(46,24) | 1,40<br>(1,96) | 3,00<br>(9,00) | 4,10<br>(16,81) | 15,30 | 3,83        | 74,01                   | 234,09  |
| IV                      | 6,80<br>(46,24) | 3,00<br>(9,00) | 2,80<br>(7,84) | 4,50<br>(20,25) | 17,10 | 4,28        | 83,33                   | 292,41  |
| $B_j$                   | 20,70           | 6,90           | 10,80          | 14,40           | 52,80 |             |                         | 734,76  |
| $\bar{B}_j$             | 5,18            | 1,73           | 2,70           | 3,60            |       |             |                         |         |
| $\sum_{i=1}^4 y_{ij}^2$ | 119,89          | 14,21          | 29,34          | 56,30           |       |             | 219,74                  |         |
| $B_j^2$                 | 428,49          | 47,61          | 116,64         | 207,36          | 800,1 |             |                         |         |

Таблиця 6.8 – Аналіз результатів експерименту (фактор С)

| Фактор С         |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Позначення рівня | А      | В      | С      | Д      |        |
|                  | 4,60   | 1,00   | 2,50   | 1,80   |        |
|                  | 4,00   | 2,50   | 1,50   | 2,50   |        |
|                  | 3,00   | 4,10   | 6,80   | 1,40   |        |
|                  | 3,00   | 2,80   | 4,50   | 6,80   |        |
| $C_k$            | 14,60  | 10,40  | 15,30  | 12,50  |        |
| $\bar{C}_k$      | 3,65   | 2,60   | 3,83   | 3,13   |        |
| $C_k^2$          | 213,16 | 108,16 | 234,09 | 156,25 | 711,66 |

У випадку проведення експерименту без повторних дослідів можна скористатися наступним порядком проведення дисперсійного аналізу.

1. Обчислюють суми значень функції відгуку за рядками  $A_i$ , стовпцями  $B_j$  і латинськими буквами  $C_k$  (таблиці 6.7 та 6.8).

Наприклад, для першого рядка таблиці 6.7:

$$A_{jI} = 4,6 + 1,0 + 2,5 + 1,8 = 9,90.$$

Визначають середні значення за рядками  $\bar{A}_i$ , стовпцями  $\bar{B}_j$  (таблиця 6.7), латинськими буквами  $\bar{C}_k$  (таблиця 6.8).

Наприклад, для першого рядка сума середніх значень наступна:

$$\bar{A}_{iI} = \frac{1}{n} A_{iI} = \frac{9,90}{4} = 2,48.$$

де  $n$  – кількість рівнів фактора.

2. Обчислюють суму квадратів результатів усіх спостережень  $SS_1$ :

$$SS_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_{ijk})^2. \quad (6.2)$$

Для цього спочатку обчислюють суми квадратів спостережень за рядками й стовпцями.

Отримані результати складають. Якщо обчислення проведені правильно, то суми квадратів за рядками й стовпцями повинні бути рівними. Так, для першого рядка таблиці 6.7 обчислення проводять у такий спосіб:

$$\sum_{i=1}^4 y_{iI}^2 = 21,16 + 1,0 + 6,25 + 3,24 = 31,65.$$

Сума квадратів за рядками:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 y_{ij}^2 = 31,65 + 30,75 + 74,01 + 83,33 = 219,74.$$

Сума квадратів за стовпцями:

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 y_{ij}^2 = 119,89 + 14,21 + 29,34 + 56,30 = 219,74.$$

Отже,  $SS_1 = 219,74$ .

3. Визначаємо суму квадратів підсумків за рядками, що ділиться на число елементів у кожному рядку  $SS_2$ :

$$SS_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2. \quad (6.3)$$

Тоді  $SS_2 = (98,01 + 110,25 + 234,09 + 292,41) / 4 = 183,69$ .

4. Сума квадратів підсумків за стовпцями, що ділиться на число елементів у стовпці  $SS_3$ :

$$SS_3 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B_j^2.$$

Тоді  $SS_3 = (428,49 + 47,61 + 116,64 + 207,36) / 4 = 200,025$ .

5. Обчислюють суму квадратів підсумків за латинськими буквами, що ділиться на число елементів, відповідних до кожної букви, тобто на 4  $SS_4$ :

$$SS_4 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_k^2.$$

Тоді  $SS_4 = (213,16 + 108,16 + 234,09 + 156,25) / 4 = 177,915$ .

6. Для визначення коригувального члена  $SS_5$ , квадрат загального підсумку  $Q$  ( $Q^2 = 52,82$ ) ділять на загальне число кліток квадрата (загальне число дослідів)  $N$ ,  $N = 16$ :

$$SS_5 = \frac{G^2}{n^2} = \frac{G^2}{N}.$$

$$SS_5 = \frac{(52,80)^2}{16} = \frac{2787,84}{16} = 174,24.$$

7. Визначають суму квадратів відхилень для рядка, тобто обумовле-

ну впливом фактора А  $SS_a$ :

$$SS_a = SS_2 - SS_5.$$

$$SS_a = 183,69 - 174,24 = 9,45.$$

8. Обчислюють суму квадратів відхилень для стовпця, що обумовлена впливом фактора В  $SS_b$ :

$$SS_b = SS_3 - SS_5.$$

$$SS_b = 200,025 - 174,24 = 25,785.$$

9. Сума квадратів для латинських букв дає суму квадратів відхилень, що обумовлена впливом фактора В  $SS_c$ :

$$SS_c = SS_4 - SS_5.$$

$$SS_c = 177,915 - 174,24 = 3,675.$$

10. Визначають загальну суму квадратів усіх спостережень із урахуванням коригувального члена  $SS_3$ :

$$SS_3 = SS_1 - SS_5.$$

$$S_3 = 219,74 - 174,24 = 45,50.$$

11. Для оцінки помилки експерименту обчислюють залишкову суму квадратів  $SS_O$  або суму квадратів, що обумовлена помилкою досліду  $SS_{II}$ :

$$SS_O = SS_{II} = SS_3 - (SS_a + SS_b + SS_c). \quad (6.4)$$

$$SS_O = 45,500 - 9,450 - 25,785 - 3,675 = 6,59.$$

12. Результат розрахунків обчислень зводять у таблицю дисперсійного аналізу (таблиця 6.9).

Таблиця 6.9 – Таблиця дисперсійного аналізу

| № з/п | Джерело мінливості | Число ступенів свободи           | Сума квадратів | Середній квадрат     | Розрахунковий критерій | Табличний критерій Фішера |
|-------|--------------------|----------------------------------|----------------|----------------------|------------------------|---------------------------|
| 1     | Фактор А           | $n - 1 = 4 - 1 = 3$              | 9,450          | $9,450 : 3 = 3,150$  | 2,87                   | 4,76                      |
| 2     | Фактор В           | $n - 1 = 3$                      | 25,758         | $25,758 : 3 = 8,595$ | 7,83                   | 4,76                      |
| 3     | Фактор С           | $n - 1 = 3$                      | 3,675          | $3,675 : 3 = 1,225$  | 1,12                   | 4,76                      |
| 4     | Помилка            | $(n - 1)(n - 2) = 3 \cdot 2 = 6$ | 6,590          | $6,590 : 6 = 1,098$  |                        |                           |
|       | Разом:             | $(n^2 - 1) = 16 - 1 = 15$        | 45,50          |                      |                        |                           |

Залишкова дисперсія – сумарна величина, яка складається з дисперсії, що обумовлена помилкою досліду, і дисперсії, що обумовлена взаємодіями, якщо вони є.



13. Значимість впливу кожного з перерахованих факторів на функцію відгуку визначають за критерієм Фішера, для цього обчислюються розрахункове значення критерію Фішера ( $F_P$ ), яке знаходять із відношення середнього квадрата кожного досліджуваного фактора до середнього квадрата помилки й порівнюють із табличним значенням критерію Фішера ( $F_T$ ). Якщо  $F_P > F_T$  – лінійний ефект значущий, тобто значущі відмінності в середніх значеннях рівня.

Для перевірки відмінності середніх значень рівня переходимо до наступного пункту. Якщо ж перевірка за критерієм Фішера не дала позитивних результатів, то статистичний аналіз на цьому закінчується.

Значення середнього квадрата для кожного джерела мінливості одержують шляхом ділення суми його квадратів на відповідне їй число ступенів свободи.

По числу ступенів свободи для чисельника  $f_1=3$ , знаменника  $f_2=6$  і прийнятого рівня значущості  $\alpha=0,05$  за таблицею Б.4 додатка Б визначають табличне значення критерію Фішера

$$F_T = (\alpha=0,05; f_1=3; f_2=6) = 4,76;$$

$$F_a < F_T; F_b > F_T; F_c < F_T.$$

Із порівнянь розрахункового й табличного значень критерію Фішера випливає, що вплив фактора В на функцію відгуку значущий, вплив факторів А та С на функцію відгуку не значущий при отриманій помилці експерименту.

14. Аналіз відмінності середніх значень рівнів значимих факторів проводиться за  $t$ -критерієм або множинним ранговим критерієм Дункана. Значущий фактор В (режим руху автомобілів) має чотири рівні: холостий хід, постійну швидкість, прискорення (0–40 км/год) і уповільнення (40–0 км/год). Необхідно встановити який з рівнів впливає на токсичність, для цього:

а) з таблиці 6.7 виписують величини значущого фактора  $\bar{B}_j$  й розташовують їх у порядку зростання в таблиці 6.10.

Таблиця 6.10 – Середні значення значущого фактора

| Рівні режиму руху            | 2    | 3    | 4    | 1    |
|------------------------------|------|------|------|------|
| Середнє значення токсичності | 1,73 | 2,70 | 3,60 | 5,18 |

б) обчислюють нормовану помилку середнього

$$S_{\{\bar{y}\}} = \sqrt{\frac{S_{II}^2}{n}}, \quad (6.5)$$

де  $S_{II}^2$  – значення середнього квадрата помилки, тобто дисперсії від-

творюваності. Згідно з таблицею 6.9  $S_{II}^2 = 1,098$ .

$$S_{\{\bar{y}\}} = \sqrt{\frac{1,098}{4}} = 0,524;$$

в) згідно з таблицею Б.8 додатка Б для прийнятого рівня значущості ( $\alpha = 0,05$ ), числа  $n_D$ , рівного числу ступенів свободи середнього квадрата помилки ( $n_D = f = 6$ ) та  $p = 2, 3, \dots, n$ , вибирають  $(n - 1)$  значущих рангів ( $r_\omega$ ), які заносять до таблиці 6.11.

Таблиця 6.11 – Значущі ранги

| $p$               | 2    | 3    | 4    |
|-------------------|------|------|------|
| Ранги, $r_\omega$ | 3,46 | 3,58 | 3,64 |

г) обчислюють найменші значущі ранги ( $H_\gamma$ )

$$H_1 = 3,46 \cdot 0,524 = 1,813; H_2 = 3,58 \cdot 0,524 = 1,876; H_3 = 3,64 \cdot 0,524 = 1,907.$$

д) визначивши різниці між середніми ( $E_\mu$ ) і порівнявши їх з відповідним  $H_\gamma$ , оцінюють значущість відмінності токсичності при різних режимах руху автомобілів. Починають підраховувати різниці з крайніх значень. Різницю максимального й мінімального значень порівнюють із найменшим значимим рангом  $H_1$  при  $p = n$ , потім знаходять різницю максимального середнього й першого, що перевершує мінімальне, і порівнюють її з найменшим значимим рангом  $H_2$  при  $p = n - 1$ . Це порівняння продовжують для другого, по величині середнього, яке порівнюють із найменшим і т. д., поки будуть досліджені всі  $\frac{n(n-1)}{2}$  можливі пари. Якщо різниця між середніми значеннями рівнів більш відповідного найменшого значимого рангу, то відмінність між середніми значуща.

$$E_1 = \bar{B}_1 - \bar{B}_2 = 5,18 - 1,73 = 3,45 > 1,907 \text{ – відмінність значуща.}$$

$$E_2 = \bar{B}_1 - \bar{B}_3 = 5,18 - 2,7 = 2,48 > 1,876 \text{ – відмінність значуща.}$$

$$E_3 = \bar{B}_1 - \bar{B}_4 = 5,18 - 3,60 = 1,58 < 1,813 \text{ – відмінність незначуща.}$$

$$E_4 = \bar{B}_4 - \bar{B}_2 = 3,6 - 1,73 = 1,87 < 1,876 \text{ – відмінність незначуща.}$$

$$E_5 = \bar{B}_4 - \bar{B}_3 = 3,6 - 2,7 = 0,9 < 1,813 \text{ – відмінність незначуща.}$$

$$E_6 = \bar{B}_3 - \bar{B}_2 = 2,7 - 1,73 = 0,98 < 1,813 \text{ – відмінність незначуща.}$$

## 6.4 Висновки по роботі

За результатами виконаної роботи (для розглянутого прикладу) можна зробити наступні висновки.

1. Результати розрахунків залишкової дисперсії експерименту дозволяють виконати оцінку значущості впливу досліджених факторів.

2. За критерієм Фішера, з трьох досліджених факторів, на функцію відгуку (токсичність відпрацьованих газів) значущий вплив має лише режим руху автомобілів фактор А.

3. Перевірка за критерієм Дункана відмінності середніх значень значущого фактора дозволяє зробити висновок про те, що на токсичність відпрацьованих газів найбільший вплив має режим роботи автомобіля на холостому ході, а також режим руху автомобілів з уповільненням.

## 6.5 Питання поточного контролю

1. У чому полягає планування багатофакторного експерименту за схемою латинського квадрата?

2. Що необхідно передбачити в плані експерименту для виключення систематичних помилок?

3. Який фактор експерименту називають якісним фактором?

4. Наведіть матрицю трьохфакторного експерименту, що побудована за схемою латинського квадрата?

5. У чому полягає рандомізація дослідів?

## 7 ПРАКТИЧНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ «ВИРІВНЮВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ТЕОРЕТИЧНИМ РОЗПОДІЛОМ»

Мета роботи: оволодіння технологією визначення приналежності дослідних даних до певного закону розподілу.

### 7.1 Завдання до роботи

У ході виконання роботи необхідно:

– установити закон, котрий описує розглянуте явище, і перевірити достовірність зробленої статистичної гіпотези при рівні значимості  $\alpha = 0,1$ ;

– визначити коефіцієнти придатності й змінності деталі по досліджуваному параметру за допустимими значеннями цього параметра.

За результатами роботи зробити висновки стосовно приналежності дослідних даних до певного закону розподілу.

Вихідні дані до роботи приймаються згідно з таблицею А.11 додатка А.

### 7.2 Теоретичні викладки до практичної роботи

Змінна величина називається випадковою, якщо в результаті дослідження вона може приймати дійсні значення з певними ймовірностями. Найбільш повною, вичерпною характеристикою випадкової величини є закон розподілу. Закон розподілу – функція (таблиця, графік, формула), яка дозволяє визначати ймовірність того, що випадкова величина  $X$  приймає певне значення  $x_i$  або потрапляє в деякий інтервал. Якщо випадкова величина має даний закон розподілу, то говорять, що вона розподілена за цим законом або підкоряється цьому закону розподілу.

Випадкова величина  $X$  називається дискретною, якщо існує така ненегативна функція

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \quad (7.1)$$

яка ставить у відповідність значенню  $x_i$  змінної  $X$  ймовірність  $p_i$ , з якою вона набуває цього значення.

Випадкова величина  $X$  називається безперервною, якщо для будь-яких  $a < b$  існує така ненегативна функція  $f(x)$ , що

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.2)$$

Функція  $f(x)$  називається щільністю розподілу неперервної випадкової величини.

Імовірність того, що випадкова величина  $X$  (дискретна або безперервна) приймає значення менше  $x$ , називається функцією розподілу випадкової величини  $X$  і позначається  $F(x)$ :

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (7.3)$$

Функція розподілу є універсальним видом закону розподілу, що придатний для будь-якої випадкової величини.

Загальні властивості функції розподілу:

а) функція розподілу приймає значення тільки з відповідного інтервалу  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;

б)  $F(x)$  – неспадаюча функція, тобто якщо  $x_2 > x_1$ , то  $F(x_2) > F(x_1)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;

г) ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу  $(a, b)$  (причому  $a < b$ ), дорівнює:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a); \quad (7.4)$$

д)  $F(x)$  неперервна зліва.

Крім цього універсального, існують також окремі види законів розподілу: ряд розподілу  $p_i = P\{X = x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  (тільки для дискретних випадкових величин) і щільність розподілу  $f(x) = F'(x)$  (тільки для неперервних випадкових величин).

Основні властивості щільності розподілу:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 1. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Можна сказати, що кожен закон розподілу – це деяка функція, яка повністю описує випадкову величину з імовірнісної точки зору.

Для отримання наближеного уявлення про вид закону розподілу ймовірностей для випадкової величини  $X$  будують гістограму розподілу дослідних частот.

### 7.3 Порядок виконання роботи

Досліджується закон розподілу радіальних зазорів підшипників вторинних валів коробки передач автомобілів ГАЗ-3307, що надходять у ремонт на ремонтний завод. Для встановлення закону статистичними спостереженнями було перевірено 100 підшипників по радіальних зазорах.

Допустиме значення радіального зазору лежить у межах від 12 до 26 мкм.

Вихідні дані по вимірах радіальних зазорів заносяться в таблицю 7.1.

Таблиця 7.1 – Радіальні зазори підшипників

| № з/п | Радіальний зазор | № з/п | Радіальний зазор | № з/п | Радіальний зазор | № з/п | Радіальний зазор |
|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|
| 1     | 40               | 26    | 61               | 51    | 55               | 76    | 46               |
| 2     | 41               | 27    | 31               | 52    | 45               | 77    | 84               |
| 3     | 60               | 28    | 32               | 53    | 58               | 78    | 79               |
| 4     | 45               | 29    | 44               | 54    | 52               | 79    | 57               |
| 5     | 25               | 30    | 69               | 55    | 49               | 80    | 49               |
| 6     | 45               | 31    | 46               | 56    | 67               | 81    | 74               |
| 7     | 43               | 32    | 28               | 57    | 36               | 82    | 42               |
| 8     | 35               | 33    | 55               | 58    | 82               | 83    | 64               |
| 9     | 30               | 34    | 43               | 59    | 77               | 84    | 39               |
| 10    | 49               | 35    | 12               | 60    | 9                | 85    | 35               |
| 11    | 56               | 36    | 51               | 61    | 53               | 86    | 54               |
| 12    | 45               | 37    | 37               | 62    | 59               | 87    | 71               |
| 13    | 26               | 38    | 24               | 63    | 63               | 88    | 38               |
| 14    | 49               | 39    | 18               | 64    | 48               | 89    | 30               |
| 15    | 57               | 40    | 39               | 65    | 54               | 90    | 41               |
| 16    | 50               | 41    | 52               | 66    | 48               | 91    | 31               |
| 17    | 44               | 42    | 62               | 67    | 33               | 92    | 49               |
| 18    | 36               | 43    | 65               | 68    | 37               | 93    | 92               |
| 19    | 16               | 44    | 43               | 69    | 53               | 94    | 40               |
| 20    | 20               | 45    | 66               | 70    | 42               | 95    | 12               |
| 21    | 29               | 46    | 36               | 71    | 59               | 96    | 100              |
| 22    | 51               | 47    | 57               | 72    | 29               | 97    | 52               |
| 23    | 50               | 48    | 47               | 73    | 35               | 98    | 80               |
| 24    | 33               | 49    | 32               | 74    | 58               | 99    | 50               |
| 25    | 35               | 50    | 43               | 75    | 54               | 100   | 18               |

Визначення закону розподілу, що описує досліджуваний процес, виконується в наступній послідовності.

1. Результати спостережень випадкової величини розміщують у порядку зростання, тобто отримують упорядковану вибірку, потім емпіричні дані групують.

2. Знаходять найбільше  $t_N$  та найменше  $t_1$  значення елементів вибірки, так  $t_N = 100$  мкм, а  $t_1 = 9$  мкм.

3. Обчислюють наближену кількість інтервалів групування.

$$n = 1 + 3,22 \cdot \lg N, \quad (7.6)$$

де  $N$  – обсяг вибірки обстежених деталей,  $N = 100$ .

$$n = 1 + 3,22 \cdot \lg 100 = 7.$$

3. Знаходять ширину інтервалу групування.

$$\Delta x = \frac{x_N - x_1}{n}. \quad (7.7)$$

$$\Delta x = \frac{100 - 9}{7} = 13 \text{ мм.}$$

4. Установлюють границі інтервалів групування й заносять їх у таблицю 7.2.

Таблиця 7.2 – Таблиця проміжних обчислень

| № з/п | Параметри   | № інтервалів |        |        |        |        |        |        |
|-------|---|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|       |   | 1            | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| 1     | Границі інтервалів у мкм  |              |        |        |        |        |        |        |
|       | – нижня ( $x_{in}$ )  | 9            | 22     | 35     | 48     | 61     | 74     | 87     |
|       | – верхня ( $x_{ig}$ )   | 22           | 35     | 48     | 61     | 74     | 87     | 100    |
| 2     | Середини інтервалів групування ( $x_{icp}$ )                      | 15,5         | 28,5   | 41,5   | 54,5   | 67,5   | 80,5   | 93,5   |
| 3     | Дослідні частоти влучення в інтервали групування ( $m_i^*$ )      | 7            | 18     | 29     | 30     | 9      | 5      | 2      |
| 4     | Дослідні частоти влучення в інтервали групування ( $P_i^*$ )      | 0,07         | 0,18   | 0,29   | 0,3    | 0,09   | 0,05   | 0,02   |
| 5     | Добуток $x_{icp} \cdot P_i^*$                                     | 1,085        | 5,13   | 12,035 | 16,35  | 6,075  | 4,025  | 1,87   |
| 6     | Добуток $(x_{icp} - M_x)^2 \cdot P_i^*$                           | 67,574       | 58,774 | 7,454  | 18,865 | 39,426 | 57,562 | 44,048 |
| 7     | Границі інтервалів групування у відхиленнях від хибного нуля      |              |        |        |        |        |        |        |
|       | – на початку інтервалу $i$  | -2,192       | -1,434 | -0,675 | 0,083  | 0,842  | 1,601  | 2,359  |
|       | – наприкінці інтервалу $i$  | -1,434       | -0,675 | 0,083  | 0,842  | 1,601  | 2,359  | 3,118  |
| 8     | Значення інтегральної функції $\Phi(t)$                           |              |        |        |        |        |        |        |
|       | – на початку інтервалу $i$  | 0,017        | 0,08   | 0,274  | 0,539  | 0,815  | 0,955  | 0,991  |
|       | – наприкінці інтервалу $i$  | 0,08         | 0,274  | 0,539  | 0,815  | 0,955  | 0,991  | 0,999  |
| 9     | Теоретичні ймовірності влучення в інтервали групування ( $P'_i$ ) | 0,063        | 0,194  | 0,265  | 0,276  | 0,14   | 0,036  | 0,008  |
| 10    | Теоретичні частоти влучення в розряди ( $m'_i$ )                  | 6,3          | 19,4   | 26,5   | 27,6   | 14     | 3,6    | 0,8    |
| 11    | Відносні різниці  | 0,078        | 0,101  | 0,236  | 0,209  | 1,786  | 0,544  | 1,800  |

5. Знаходять середини інтервалів групування ( $x_{icp}$ ) та заносять їх у другий рядок таблиці 7.2.

6. Підраховують дослідні частоти влучення ( $m_i^*$ ) випадкової величини в інтервали групування та заносять їх у третій рядок таблиці 7.2.

7. Обчислюють дослідні частоти  $P_i^*$  та заносять їх у четвертий рядок таблиці 7.2.

$$P_i^* = \frac{m_i^*}{N}. \quad (7.8)$$

$$P_1^* = \frac{7}{100} = 0,07; \quad P_2^* = \frac{18}{100} = 0,18 \quad \text{і т. д.}$$

8. За результатами розрахунків дослідних частот  $P_i^*$  будують графік-гістограму та теоретичну вирівнюючу криву.

9. За виглядом гістограми та вирівнюючої кривої роблять попередній висновок щодо закону розподілу, котрий описує досліджуваний процес. Так, розглянувши гістограму (рис. 7.1), роблять попередній висновок, що досліджуване явище належить до нормального закону розподілу.

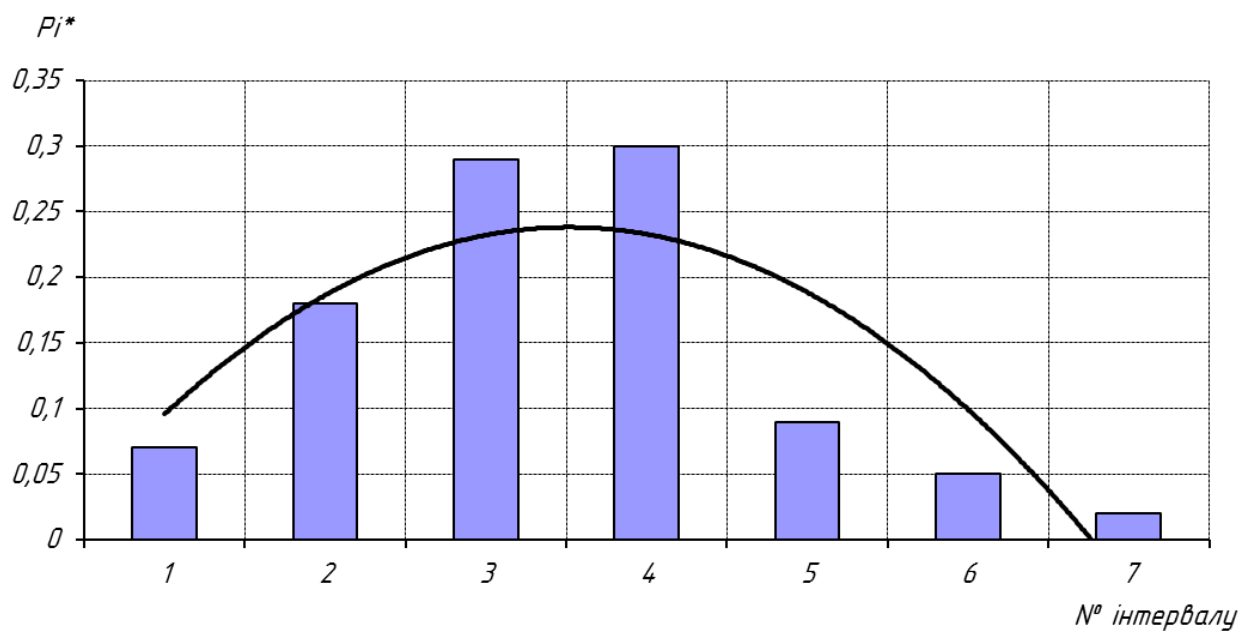


Рисунок 7.1 – Гістограма розподілу дослідних частот радіальних зазорів підшипників та лінія тренду

10. Для остаточного судження щодо закону розподілу, котрий описує досліджуваний процес виконують перевірку прийнятої гіпотези за допомогою критерію згоди «хі-квадрат».

11. Для розрахунку дослідного математичного очікування ( $M_x$ ) середніх радіальних зазорів виконують проміжні обчислення добутку  $x_{i\text{cp}} \cdot P_i^*$  та заносять у п'ятий рядок таблиці 7.2. Після чого, знаходять величину дослідного математичного очікування (сума всіх семи стовпців рядка 5 таблиці 7.2).

$$M_x = \sum_{i=1}^n X_{i\text{cp}} \cdot P_i^* \quad (7.9)$$

$$M_x = 1,085 + 5,13 + 12,035 + 16,35 + 6,075 + 4,025 + 1,87 = 46,6 \quad \text{мкм.}$$

12. Для розрахунку статистичної дисперсії ( $S_x^2$ ), виконують проміж-



ні обчислення величини  $(x_{i \text{ cp}} - M_x)^2 \cdot P_i^*$  та заносять у шостий рядок таблиці 7.2. Після чого, знаходять величину статистичної дисперсії (сума всіх семи стовпців рядка 6 табл. 7.2).

$$S_x^2 = \sum_{n=1}^n (x_{i \text{ cp}} - M_x)^2 \cdot P_i^*. \quad (7.10)$$

$$S_x^2 = 67,57 + 58,77 + 7,45 + 18,87 + 39,43 + 57,56 + 44,05 = 293,7 \text{ мкм}^2.$$

13. Знаходять незміщену оцінку для середнього квадратичного відхилення

$$S_x = \sqrt{\frac{N}{N-1} \cdot S_x^2}. \quad (7.11)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{100}{100-1} \cdot 293,7} = 17,2 \text{ мкм}.$$

Таким чином, дослідну гістограму (рис. 7.1) можна вирівняти нормальним законом наступного виду:

$$f(x) = \frac{1}{18,5 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi^2}} \cdot e^{-\frac{(x-46,6)^2}{2 \cdot 18,5^2}}. \quad (7.12)$$

14. Обчислюють імовірності влучення випадкової величини в інтервали групування. Визначення ймовірностей може виконуватись трьома способами: з використанням функції Лапласа, інтегральної функції та приближеним способом. Використовуємо інтегральну функцію  $\Phi(t)$ , для цього нормують і центрують величину  $x$  на початку й кінці кожного розряду відносно хибного нуля за формулами

$$\left. \begin{aligned} t_i &= \frac{x_i - M_x}{\sigma(x)}, \\ t_{i+1} &= \frac{x_{i+1} - M_x}{\sigma(x)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

де  $x_i$  – значення радіального зазору на початку інтервалу групування  $i$ ;

$x_{i+1}$  – значення радіального зазору наприкінці інтервалу групування  $i$ ;

$\sigma_x$  – середньоквадратичне відхилення випадкової величини.

Середньоквадратичне відхилення випадкової величини визначається за формулою:

$$\sigma_x = \sqrt{S_x^2}. \quad (7.14)$$

Нормовано-центровані границі інтервалів групування  $t_i$  та  $t_{i+1}$  випадкової величини у відхиленнях відносно хибного нуля заносять у сьомий рядок таблиці 7.2.

15. Згідно з таблицею Б.9 додатка Б знаходять інтегральні функції  $\Phi(t)$  початку й кінця кожного інтервалу групування розряду  $\Phi(t_i)$  та  $\Phi(t_{i+1})$ . Знайдені значення  $\Phi(t)$  заносять у восьмий рядок таблиці 7.2.

16. Визначають теоретичні ймовірності влучення в інтервали групування:

$$P'_i = \Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i), \quad (7.15)$$

де  $\Phi(t_{i+1})$  – інтегральна функція кінця  $i$ -го інтервалу групування;

$\Phi(t_i)$  – інтегральна функція початку  $i$ -го інтервалу групування.

Розрахункові значення  $P'_i$  для кожного інтервалу групування заносять у дев'ятий рядок таблиці 7.2.

17. Обчислюють теоретичні частоти влучення випадкової величини в інтервали групування

$$m'_i = P'_i \cdot N, \quad (7.16)$$

Результати розрахунків заносять у десятий рядок таблиці 7.2.

18. Для остаточного з'ясування приналежності дослідних даних по зазорах підшипників до нормального закону обчислюють значення критерію  $\chi^2$ . Для цього визначають розрахункове значення критерію  $\chi^2$

$$\chi_p^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i^* - m'_i)^2}{m'_i}, \quad (7.17)$$

Для зручності розрахунку критерію  $\chi^2$ , виконують проміжні обчислення величини  $(m_i^* - m'_i)^2 / m'_i$  та заносять в одинадцятий рядок таблиці 7.2, після чого знаходять величину критерію  $\chi^2$  (сума всіх семи стовпців рядка 11 таблиці 7.2). Для даного прикладу  $\chi_p^2 = 7,754$ .

19. Згідно з таблицею Б.10 додатка Б, на підставі розрахункового значення критерію  $\chi_p^2$  й числа ступенів свободи  $f$  визначається значення ймовірності  $P(\chi^2, K)$ . Число ступенів свободи  $f$  визначається як  $f = n - z - 1$ ,  $n$  – число інтервалів групування;  $z$  – число параметрів теоретичного закону (для нормального закону  $z = 2$ ).

$$f = 7 - 2 - 1 = 4.$$

Тоді  $P(\chi^2, f) = P(4,754; 4) = 0,287$ .

Так як  $P(\chi^2, f) = 0,287 > \alpha = 0,10$ , то гіпотеза про нормальний розподіл радіальних зазорів підшипників підтверджується.

20. Для наочності уявлення будують криву щільності розподілу нормовано-центрованої величини  $f(t)$  (див. рис. 7.2).

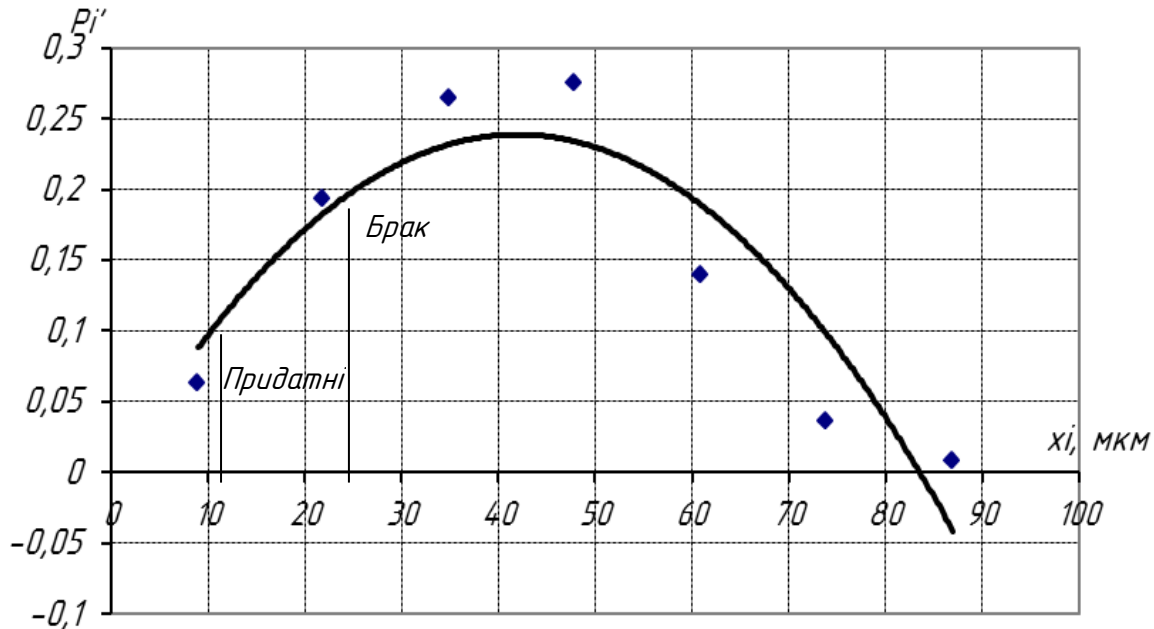


Рисунок 7.2 – Щільність розподілу нормовано-центрованої випадкової величини (радіального зазору)

21. Визначають величину коефіцієнта придатності підшипників ( $K_{II}$ )

$$K_{II} = P_z = \Phi(t_{z.v}) - \Phi(t_{z.n}), \quad (7.18)$$

де  $t_{z.v}$  та  $t_{z.n}$  – нормовано-центровані границі допустимої верхньої та нижньої величини значення радіального зазору, що визначаються згідно з формулами

$$t_{z.v} = \frac{x_{z.v} - M_x}{\sigma(x)}; \quad t_{z.n} = \frac{x_{z.n} - M_x}{\sigma(x)},$$

де  $x_{z.v}$  – допустима верхня межа величини радіального зазору,  $x_{z.v} = 26$  мкм;

$x_{z.n}$  – допустима нижня межа величини радіального зазору,  $x_{z.n} = 12$  мкм.

$$\text{Тоді } t_{z.v} = \frac{26 - 46,57}{17,14} = -1,2 \quad \text{та} \quad t_{z.n} = \frac{12 - 46,57}{17,14} = -2,0.$$

Значення інтегральної функції  $\Phi(t_{2,n})$  та  $\Phi(t_{2,g})$  визначають згідно з таблицею Б.9 додатка Б. Так для  $\Phi(-1,2) = 0,116$ , а для  $\Phi(-2,0) = 0,022$ .

$$K_{II} = 0,116 - 0,022 = 0,094 \quad (9,4 \%).$$

22. Визначають величину коефіцієнта змінності підшипників ( $K_3$ )

$$K_3 = 1 - K_{II}. \quad (7.19)$$

Тоді коефіцієнт змінності або утилю буде дорівнювати

$$K_3 = 1 - 0,094 = 0,906 \quad (90,6 \%).$$

## 7.4 Висновки по роботі

За результатами виконаної роботи (для розглянутого прикладу) можна зробити наступні висновки.

1. Розглянуте явище (стан радіальних зазорів підшипників вторинних валів коробки передач автомобілів ГАЗ-3307, що надходять у ремонт на ремонтний завод) описує нормальний закон розподілу, що було підтверджено перевіркою за допомогою критерію згоди «хі-квадрат» при рівні значимості  $\alpha = 0,1$ .

2. Згідно з визначеними значеннями коефіцієнта придатності  $K_{II}$  та коефіцієнта змінності  $K_3$  можна стверджувати, що тільки 9,4 % досліджених підшипників придатні до подальшої експлуатації. Решта підшипників – 90,6 %, згідно з технічними умовами на контроль-сортування підшипників вторинних валів, підлягає вибраковці.

## 7.5 Питання поточного контролю

1. Що називають законом розподілу випадкової величини?
2. Перелічте загальні властивості функції розподілу.
3. Перелічте основні властивості щільності розподілу.
4. За допомогою чого можна отримати наближене уявлення про закон розподілу випадкової величини?
5. Що називають функцією розподілу випадкової величини?

## ВИСНОВКИ

Прискорення науково-технічного прогресу, впровадження науки у виробництво, необхідність творчого вирішення виробничих завдань – усе це безпосередньо впливає на розвиток вищої школи, що повинна готувати фахівців на рівні сучасних вимог. Сучасний фахівець повинен не тільки мати глибокі професійні теоретичні й практичні знання, але й мати мінімум знань у галузі наукових досліджень. Усе це дозволить самостійно ставити й творчо вирішувати різні складні питання виробництва. З погляду на це наукова підготовка студентів на сьогоднішній день є однією з найважливіших форм навчання. Так, у результаті виконання практичних робіт, що наведені в даних методичних вказівках, студенти отримують навички:

- відбору й аналізу необхідної інформації;
- визначення взаємозв'язку параметрів досліджуваних явищ;
- моделювання залежності параметрів досліджуваних явищ;
- проведення якісного аналізу параметрів досліджуваних явищ;
- моделювання досліджуваних процесів;
- математичної обробки результатів досліджень.

Перелічені навички, які отримують студенти на практичних заняттях, дозволять їм, як в якості магістрів вузу так і спеціалістів ПАТ, успішно формулювати й вирішувати наукові задачі.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Теорія планування експерименту: навч. посібник / [В. П. Нечаєв, Т. М. Берідзе, В. В. Кононенко та ін.]. – К.: Кондор, 2005. – 232 с.
2. Методологія наукових досліджень (на прикладах автомобільного транспорту): навчальний посібник / [В. П. Волков, М. А. Подригало, О. П. Кравченко та ін.]. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2009. – 352 с.
3. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М.: Диалектика, 2007.
4. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 260 с.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
6. Обергауз Г. Г. Справочник по вероятностным расчётам / Г. Г. Обергауз. – М.: Высш. шк., 1970. – 237 с.
7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.
8. Большов Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большов. – М.: Наука, 1971. – 507 с.
9. Сиденко В. Ш. Основы научных исследований / В. Ш. Сиденко, И. М. Грушко. – Харьков: Вища школа, 1977. – 182 с.
10. Завадский Ю. В. Статистическая обработка эксперимента в задачах автомобильного транспорта: метод. пособие / Ю. В. Завадский. – М.: Изд. Моск. автомоб.-дор. ин-та, 1982. – 132 с.

## ДОДАТОК А

### ВИХІДНІ ДАНІ ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Таблиця А.1 – Вибір думки експертів

| Експерт<br>Варіант | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1                  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 2                  | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 3                  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 4                  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 5                  | 1  | 3  | 5  | 7  | 9  | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |
| 6                  | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
| 7                  | 1  | 4  | 5  | 8  | 9  | 12 | 13 | 16 | 17 | 20 | 21 | 24 | 25 | 28 |
| 8                  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 9                  | 1  | 3  | 5  | 8  | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 | 25 | 27 |
| 10                 | 1  | 3  | 6  | 8  | 9  | 11 | 14 | 16 | 17 | 19 | 22 | 24 | 25 | 27 |
| 11                 | 1  | 3  | 5  | 7  | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 26 | 28 |
| 12                 | 1  | 3  | 5  | 7  | 9  | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 21 | 23 | 25 | 27 |
| 13                 | 2  | 3  | 6  | 7  | 10 | 11 | 14 | 15 | 18 | 19 | 22 | 23 | 26 | 27 |
| 14                 | 1  | 3  | 5  | 7  | 9  | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
| 15                 | 2  | 4  | 5  | 7  | 10 | 12 | 13 | 15 | 18 | 20 | 21 | 23 | 26 | 28 |
| 16                 | 2  | 4  | 6  | 7  | 9  | 11 | 14 | 16 | 18 | 19 | 21 | 23 | 26 | 28 |
| 17                 | 2  | 4  | 6  | 8  | 9  | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 22 | 24 | 25 | 27 |
| 18                 | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 28 |
| 19                 | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 26 | 28 |
| 20                 | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |
| 21                 | 1  | 4  | 6  | 7  | 9  | 12 | 14 | 15 | 17 | 20 | 22 | 23 | 25 | 28 |
| 22                 | 2  | 3  | 5  | 8  | 9  | 11 | 14 | 15 | 17 | 20 | 21 | 23 | 26 | 27 |
| 23                 | 1  | 4  | 6  | 8  | 9  | 12 | 14 | 16 | 17 | 20 | 22 | 24 | 25 | 28 |
| 24                 | 2  | 3  | 5  | 7  | 10 | 11 | 13 | 15 | 18 | 19 | 21 | 23 | 26 | 27 |
| 25                 | 1  | 3  | 5  | 7  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 19 | 21 | 23 | 26 | 28 |
| 26                 | 1  | 2  | 5  | 6  | 9  | 10 | 13 | 14 | 17 | 18 | 21 | 22 | 25 | 26 |
| 27                 | 3  | 4  | 7  | 8  | 11 | 12 | 15 | 16 | 19 | 20 | 23 | 24 | 27 | 28 |
| 28                 | 1  | 2  | 3  | 4  | 9  | 10 | 11 | 12 | 17 | 18 | 19 | 20 | 25 | 26 |
| 29                 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 27 | 28 |
| 30                 | 1  | 3  | 6  | 7  | 10 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 21 | 24 | 26 | 27 |

Таблиця А.2 – Оцінка факторів експертів

| Фактори<br>Думка | 1   | 2   | 3   | 4   | 5  | 6   | 7   | 8   | 9  | 10 |
|------------------|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|----|
| 1                | 5   | 8   | 2,5 | 2,5 | 9  | 2,5 | 2,5 | 10  | 7  | 6  |
| 2                | 3   | 6   | 2   | 1   | 5  | 4   | 10  | 9   | 7  | 8  |
| 3                | 1   | 7   | 2   | 3   | 6  | 4   | 8   | 10  | 5  | 9  |
| 4                | 1   | 8   | 2   | 3   | 4  | 5   | 7   | 6   | 10 | 9  |
| 5                | 3   | 7   | 1   | 2   | 4  | 5   | 8   | 10  | 6  | 9  |
| 6                | 3   | 7   | 1   | 2   | 6  | 4,5 | 4,5 | 9   | 8  | 10 |
| 7                | 9   | 10  | 1   | 2   | 4  | 5   | 6   | 7   | 3  | 8  |
| 8                | 1   | 8   | 2   | 3   | 10 | 6   | 5   | 7   | 4  | 9  |
| 9                | 5   | 7   | 3   | 2   | 6  | 4   | 9   | 1   | 10 | 8  |
| 10               | 5   | 9,5 | 1   | 3   | 4  | 2   | 6   | 9,5 | 8  | 7  |
| 11               | 2   | 6   | 1   | 3   | 4  | 10  | 5   | 7   | 9  | 8  |
| 12               | 1   | 6   | 2   | 3   | 5  | 4   | 7   | 8   | 10 | 9  |
| 13               | 2   | 7   | 2   | 2   | 5  | 6   | 9   | 8   | 4  | 10 |
| 14               | 5   | 8   | 1   | 2   | 4  | 7   | 6   | 10  | 3  | 9  |
| 15               | 1   | 9   | 2   | 3   | 6  | 4   | 5   | 7   | 8  | 10 |
| 16               | 3   | 9   | 4   | 2   | 10 | 1   | 5   | 7   | 6  | 8  |
| 17               | 4   | 10  | 1   | 3   | 2  | 5   | 6   | 7   | 8  | 9  |
| 18               | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 5  | 9   | 6   | 10  | 8  | 7  |
| 19               | 6   | 10  | 1   | 2   | 9  | 3   | 4   | 7   | 5  | 8  |
| 20               | 10  | 8   | 1   | 2   | 4  | 5   | 3   | 7   | 6  | 9  |
| 21               | 9   | 8   | 10  | 3   | 2  | 4   | 5   | 7   | 6  | 1  |
| 22               | 4   | 9   | 2   | 3   | 1  | 5,5 | 5,5 | 8   | 7  | 10 |
| 23               | 3   | 9   | 2   | 1   | 5  | 6   | 7   | 8   | 4  | 10 |
| 24               | 4   | 8   | 1   | 2   | 3  | 6   | 5   | 9   | 7  | 10 |
| 25               | 1   | 7   | 2   | 3   | 4  | 5   | 6   | 8   | 10 | 9  |
| 26               | 5   | 7   | 1   | 2   | 3  | 4   | 6   | 9   | 8  | 10 |
| 27               | 10  | 9   | 4   | 1   | 2  | 5,5 | 5,5 | 3   | 7  | 8  |
| 28               | 7   | 8   | 2   | 1   | 9  | 4   | 3   | 10  | 5  | 6  |

Таблиця А.3 – Визначення номерів вибірок за варіантами

| Варіант                 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| № вибірки параметра $x$ | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  |
| № вибірки параметра $y$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Варіант                 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| № вибірки параметра $x$ | 4  | 4  | 4  | 4  | 4  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  |
| № вибірки параметра $y$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |



Таблиця А.4 – Значення  $x$  та  $y$  за вибірками

| Значення параметра $x$ за вибірками |      |      |       |      |      | Значення параметра $y$ за вибірками |       |      |      |      |
|-------------------------------------|------|------|-------|------|------|-------------------------------------|-------|------|------|------|
| 1                                   | 2    | 3    | 4     | 5    | 6    | 1                                   | 2     | 3    | 4    | 5    |
| 0,84                                | 0,7  | 1    | 0,9   | 1,1  | 1,2  | 0,4                                 | 0,6   | 0,8  | 0,5  | 0,7  |
| 0,6                                 | 0,55 | 0,65 | 0,77  | 0,85 | 0,76 | 0,52                                | 0,62  | 0,74 | 0,68 | 0,62 |
| 0,05                                | 0,2  | 0,25 | 0,32  | 0,28 | 0,35 | 0,14                                | 0,18  | 0,17 | 0,22 | 0,18 |
| 0,16                                | 0,11 | 0,15 | 0,2   | 0,25 | 0,3  | 0,19                                | 0,23  | 0,22 | 0,26 | 0,22 |
| 0,52                                | 0,44 | 0,6  | 0,62  | 0,74 | 0,81 | 0,52                                | 0,65  | 0,71 | 0,82 | 0,76 |
| 0,6                                 | 0,46 | 0,52 | 0,51  | 0,65 | 0,6  | 0,23                                | 0,32  | 0,33 | 0,34 | 0,26 |
| 0,23                                | 0,17 | 0,23 | 0,31  | 0,35 | 0,43 | 0,05                                | 0,12  | 0,18 | 0,22 | 0,18 |
| 0,14                                | 0,8  | 0,7  | 0,65  | 0,7  | 0,86 | 0,18                                | 0,22  | 0,26 | 0,32 | 0,26 |
| 0,07                                | 0,03 | 0,06 | 0,09  | 0,14 | 0,25 | 0,23                                | 0,25  | 0,3  | 0,27 | 0,21 |
| 0,12                                | 0,07 | 0,11 | 0,13  | 0,18 | 0,23 | 0,12                                | 0,15  | 0,13 | 0,14 | 0,08 |
| 0,25                                | 0,16 | 0,23 | 0,32  | 0,46 | 0,39 | 0,12                                | 0,16  | 0,17 | 0,21 | 0,17 |
| 1,4                                 | 1,43 | 1    | 1,2   | 1,14 | 1,2  | 0,65                                | 0,78  | 0,84 | 0,96 | 0,85 |
| 0,13                                | 0,13 | 0,17 | 0,24  | 0,25 | 0,32 | 0,32                                | 0,42  | 0,62 | 0,53 | 0,45 |
| 0,05                                | 0,08 | 0,12 | 0,15  | 0,19 | 0,22 | 0,02                                | 0,03  | 0,06 | 0,08 | 0,04 |
| 0,16                                | 0,19 | 0,24 | 0,26  | 0,3  | 0,27 | 0,14                                | 0,16  | 0,14 | 0,09 | 0,12 |
| 0,14                                | 0,12 | 0,14 | 0,16  | 0,25 | 0,22 | 0,07                                | 0,09  | 0,05 | 0,08 | 0,13 |
| 1                                   | 0,9  | 1,15 | 1,24  | 1,32 | 1,4  | 0,54                                | 0,63  | 0,68 | 0,71 | 0,76 |
| 0,33                                | 0,31 | 0,38 | 0,43  | 0,68 | 0,85 | 0,6                                 | 0,55  | 0,62 | 0,59 | 0,53 |
| 0,058                               | 0,05 | 0,08 | 0,13  | 0,18 | 0,24 | 0,3                                 | 0,25  | 0,31 | 0,28 | 0,12 |
| 0,12                                | 0,12 | 0,16 | 0,19  | 0,22 | 0,23 | 0,32                                | 0,238 | 0,19 | 0,17 | 0,14 |
| 0,15                                | 0,09 | 0,12 | 0,16  | 0,19 | 0,22 | 0,14                                | 0,12  | 0,13 | 0,11 | 0,08 |
| 0,25                                | 0,17 | 0,23 | 0,28  | 0,35 | 0,33 | 0,12                                | 0,11  | 0,08 | 0,12 | 0,15 |
| 0,08                                | 0,05 | 0,07 | 0,13  | 0,18 | 0,19 | 0,09                                | 0,08  | 0,06 | 0,09 | 0,16 |
| 0,8                                 | 0,45 | 0,56 | 0,62  | 0,75 | 0,95 | 0,35                                | 0,41  | 0,52 | 0,63 | 0,75 |
| 0,45                                | 0,33 | 0,42 | 0,56  | 0,8  | 0,95 | 0,15                                | 0,18  | 0,21 | 0,32 | 0,46 |
| 1,3                                 | 0,8  | 0,95 | 1,23  | 1,32 | 1,45 | 0,52                                | 0,63  | 0,52 | 0,63 | 0,75 |
| 1,2                                 | 0,05 | 0,7  | 0,85  | 0,75 | 0,62 | 0,07                                | 0,09  | 0,11 | 0,15 | 0,25 |
| 0,12                                | 0,04 | 0,03 | 0,012 | 0,02 | 0,03 | 0,12                                | 0,15  | 0,14 | 0,11 | 0,08 |
| 0,08                                | 0,05 | 0,06 | 0,13  | 0,15 | 0,18 | 0,11                                | 0,14  | 0,13 | 0,08 | 0,06 |
| 0,07                                | 0,05 | 0,07 | 0,14  | 0,18 | 0,23 | 0,2                                 | 0,18  | 0,17 | 0,21 | 0,25 |

Таблиця А.5 – Визначення номерів вибірок за варіантами

| Варіант                   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| № вибірки параметра $x_1$ | 1  | 4  | 7  | 10 | 5  | 1  | 6  | 1  | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 5  |
| № вибірки параметра $x_2$ | 2  | 5  | 8  | 1  | 7  | 2  | 8  | 4  | 3  | 2  | 1  | 10 | 9  | 8  | 9  |
| № вибірки параметра $x_3$ | 3  | 6  | 9  | 3  | 9  | 4  | 10 | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 3  |
| Варіант                   | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| № вибірки параметра $x_1$ | 7  | 10 | 1  | 7  | 5  | 10 | 6  | 3  | 8  | 6  | 1  | 1  | 3  | 4  | 2  |
| № вибірки параметра $x_2$ | 2  | 4  | 6  | 3  | 1  | 7  | 10 | 5  | 7  | 4  | 3  | 2  | 2  | 8  | 7  |
| № вибірки параметра $x_3$ | 6  | 8  | 1  | 9  | 7  | 4  | 2  | 1  | 10 | 3  | 4  | 5  | 10 | 6  | 9  |

Таблиця А.6 – Дослідні частоти влучення за вибірками

|                                      |   | Номер вибірки |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|--------------------------------------|---|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|                                      |   | 1             | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Дослідні частоти влучення за групами | 1 | 0             | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1  |
|                                      | 2 | 0             | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2  |
|                                      | 3 | 1             | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0  |
|                                      | 4 | 2             | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0  |
|                                      | 5 | 0             | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1  |
|                                      | 6 | 2             | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2  |
|                                      | 7 | 0             | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0  |
|                                      | 8 | 0             | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0  |

Таблиця А.7 – Визначення номерів вибірок за варіантами

| Варіант                   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| № вибірки параметра $x_1$ | 1  | 1  | 3  | 1  | 1  | 1  | 3  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 3  | 2  | 2  |
| № вибірки параметра $x_2$ | 4  | 4  | 6  | 4  | 5  | 5  | 6  | 5  | 6  | 6  | 6  | 6  | 5  | 4  | 4  |
| № вибірки параметра $x_3$ | 7  | 8  | 7  | 10 | 7  | 8  | 8  | 10 | 7  | 8  | 9  | 10 | 9  | 8  | 9  |
| Варіант                   | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| № вибірки параметра $x_1$ | 2  | 2  | 3  | 2  | 2  | 2  | 2  | 3  | 2  | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  |
| № вибірки параметра $x_2$ | 4  | 5  | 6  | 5  | 6  | 6  | 6  | 5  | 6  | 4  | 4  | 6  | 4  | 5  | 5  |
| № вибірки параметра $x_3$ | 10 | 7  | 10 | 9  | 10 | 7  | 8  | 10 | 10 | 7  | 8  | 9  | 10 | 7  | 8  |

Таблиця А.8 – Значення функції відгуку за вибірками

|               |    | Значення функції відгуку |    |    |    |
|---------------|----|--------------------------|----|----|----|
|               |    | 1                        | 2  | 3  | 4  |
| Номер вибірки | 1  | 9                        | 10 | 14 | 13 |
|               | 2  | 8                        | 14 | 12 | 15 |
|               | 3  | 8                        | 13 | 16 | 15 |
|               | 4  | 4                        | 7  | 9  | 10 |
|               | 5  | 5                        | 8  | 6  | 7  |
|               | 6  | 6                        | 9  | 8  | 8  |
|               | 7  | 3                        | 6  | 7  | 5  |
|               | 8  | 2                        | 4  | 5  | 7  |
|               | 9  | 3                        | 5  | 7  | 7  |
|               | 10 | 4                        | 6  | 6  | 7  |

Таблиця А.9 – Значення функції відгуку за варіантами

| Номери варіантів |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1                | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 0  |
| 4                | 6  | 4  | 8  | 5  | 4  | 3  | 3  | 10 | 3  |
| 4                | 5  | 5  | 9  | 5  | 4  | 3  | 4  | 9  | 3  |
| 5                | 4  | 5  | 6  | 6  | 6  | 4  | 5  | 11 | 5  |
| 8                | 9  | 8  | 17 | 8  | 9  | 10 | 11 | 17 | 9  |
| 9                | 10 | 10 | 15 | 8  | 13 | 12 | 14 | 14 | 14 |
| 14               | 13 | 12 | 17 | 13 | 12 | 11 | 13 | 17 | 10 |
| 19               | 20 | 20 | 28 | 19 | 20 | 22 | 21 | 31 | 19 |
| 29               | 28 | 27 | 30 | 25 | 24 | 26 | 27 | 30 | 27 |
| 30               | 29 | 31 | 31 | 31 | 30 | 28 | 30 | 29 | 29 |
| 34               | 33 | 34 | 39 | 33 | 34 | 33 | 34 | 36 | 32 |
| 35               | 35 | 36 | 42 | 36 | 36 | 36 | 38 | 39 | 37 |
| 40               | 41 | 39 | 40 | 39 | 41 | 40 | 40 | 40 | 40 |

Таблиця А.10 – Значення функції відгуку для трьохфакторного експерименту за варіантами

| Номери варіантів |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1                | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 0   |
| 4,3              | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,2 | 4,1 | 4,3 | 4,5 | 4,4 |
| 2,7              | 2,6 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 2,2 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,7 |
| 6,6              | 6,7 | 6,8 | 6,9 | 7   | 6,5 | 6,7 | 6,6 | 7   | 6,9 |
| 7                | 6,9 | 6,8 | 6,7 | 6,6 | 6,6 | 6,8 | 6,9 | 6,8 | 7   |
| 0,8              | 0,9 | 1   | 1,1 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,9 | 1   |
| 1,6              | 1,4 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,3 | 1,6 |
| 1,1              | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,1 | 1,2 |
| 2,8              | 2,9 | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 2,8 | 2,9 | 3,0 | 3,1 | 3,2 |
| 2,5              | 2,6 | 2,7 | 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,5 | 2,6 |
| 2,4              | 2,4 | 2,5 | 2,5 | 2,6 | 2,6 | 2,7 | 2,7 | 2,4 | 2,4 |
| 2,9              | 3,0 | 3,1 | 2,9 | 3,0 | 3,1 | 2,9 | 3,0 | 3,1 | 2,9 |
| 2,9              | 2,8 | 2,7 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,7 |
| 1,6              | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 1,7 | 1,8 | 1,6 | 1,9 | 2,0 |
| 3,8              | 3,9 | 4,0 | 4,1 | 4,0 | 4,1 | 3,8 | 4,0 | 4,1 | 3,9 |
| 4,1              | 4,2 | 4,1 | 4,2 | 4,2 | 4,2 | 4,1 | 4,1 | 4,2 | 4,1 |
| 4,4              | 4,5 | 4,6 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,4 | 4,5 | 4,5 | 4,6 |

Таблиця А.11 – Дані вимірів за варіантами

| Номери варіантів |     |     |     |     |    |     |    |     |    |
|------------------|-----|-----|-----|-----|----|-----|----|-----|----|
| 1                | 2   | 3   | 4   | 5   | 6  | 7   | 8  | 9   | 0  |
| 5                | 9   | 15  | 6   | 14  | 13 | 10  | 11 | 12  | 9  |
| 51               | 24  | 29  | 22  | 29  | 14 | 26  | 26 | 26  | 25 |
| 32               | 38  | 42  | 37  | 43  | 40 | 41  | 40 | 39  | 40 |
| 61               | 52  | 55  | 53  | 57  | 53 | 56  | 56 | 60  | 55 |
| 107              | 66  | 67  | 47  | 51  | 75 | 64  | 76 | 55  | 10 |
| 31               | 107 | 16  | 54  | 44  | 41 | 27  | 41 | 49  | 26 |
| 52               | 10  | 30  | 48  | 63  | 54 | 42  | 96 | 61  | 65 |
| 6                | 25  | 43  | 63  | 112 | 14 | 57  | 49 | 27  | 70 |
| 62               | 39  | 56  | 98  | 76  | 28 | 46  | 27 | 39  | 80 |
| 35               | 53  | 106 | 7   | 29  | 65 | 78  | 86 | 56  | 88 |
| 60               | 46  | 49  | 23  | 50  | 53 | 11  | 75 | 40  | 11 |
| 30               | 52  | 55  | 77  | 45  | 42 | 56  | 57 | 52  | 27 |
| 48               | 30  | 31  | 56  | 68  | 55 | 80  | 41 | 73  | 56 |
| 7                | 40  | 44  | 37  | 58  | 74 | 28  | 12 | 28  | 64 |
| 29               | 54  | 57  | 111 | 15  | 58 | 41  | 55 | 75  | 81 |
| 41               | 67  | 34  | 38  | 30  | 15 | 79  | 42 | 100 | 41 |
| 53               | 24  | 45  | 64  | 46  | 29 | 63  | 78 | 13  | 25 |
| 33               | 41  | 32  | 55  | 64  | 56 | 45  | 85 | 74  | 40 |
| 63               | 58  | 58  | 87  | 77  | 43 | 29  | 28 | 57  | 51 |
| 49               | 37  | 85  | 46  | 41  | 64 | 112 | 80 | 29  | 12 |
| 59               | 53  | 18  | 86  | 87  | 76 | 77  | 74 | 40  | 28 |
| 36               | 68  | 33  | 54  | 69  | 54 | 12  | 26 | 59  | 57 |
| 57               | 48  | 48  | 8   | 54  | 29 | 88  | 77 | 53  | 66 |
| 28               | 83  | 56  | 24  | 88  | 57 | 81  | 48 | 48  | 42 |
| 64               | 11  | 50  | 65  | 40  | 44 | 43  | 29 | 54  | 71 |
| 39               | 26  | 46  | 47  | 52  | 16 | 57  | 84 | 30  | 39 |
| 51               | 42  | 55  | 26  | 49  | 30 | 30  | 73 | 72  | 58 |
| 34               | 69  | 59  | 45  | 75  | 53 | 62  | 50 | 62  | 63 |
| 66               | 39  | 34  | 84  | 47  | 77 | 55  | 13 | 41  | 47 |
| 27               | 54  | 57  | 66  | 59  | 45 | 82  | 58 | 76  | 30 |
| 45               | 70  | 84  | 25  | 53  | 31 | 13  | 43 | 53  | 41 |
| 90               | 49  | 42  | 76  | 16  | 58 | 65  | 30 | 31  | 55 |
| 37               | 38  | 83  | 38  | 31  | 73 | 44  | 83 | 14  | 62 |
| 65               | 40  | 35  | 57  | 65  | 54 | 58  | 49 | 50  | 43 |
| 54               | 71  | 56  | 49  | 48  | 32 | 31  | 54 | 63  | 67 |
| 45               | 31  | 43  | 22  | 70  | 46 | 76  | 67 | 26  | 38 |
| 67               | 43  | 58  | 43  | 66  | 63 | 42  | 31 | 54  | 42 |
| 84               | 55  | 25  | 85  | 39  | 55 | 37  | 54 | 77  | 59 |
| 26               | 72  | 66  | 55  | 57  | 67 | 56  | 47 | 32  | 50 |
| 42               | 45  | 51  | 26  | 49  | 33 | 61  | 40 | 47  | 43 |
| 65               | 82  | 47  | 83  | 74  | 56 | 32  | 32 | 56  | 13 |
| 35               | 57  | 60  | 45  | 30  | 47 | 87  | 61 | 53  | 29 |
| 64               | 36  | 76  | 39  | 48  | 78 | 54  | 79 | 41  | 45 |
| 55               | 44  | 33  | 52  | 68  | 59 | 57  | 50 | 33  | 56 |
| 38               | 81  | 59  | 82  | 50  | 72 | 45  | 82 | 64  | 61 |
| 47               | 41  | 43  | 50  | 32  | 34 | 68  | 59 | 58  | 48 |
| 10               | 25  | 57  | 25  | 60  | 48 | 51  | 33 | 27  | 31 |
| 68               | 51  | 36  | 58  | 53  | 55 | 59  | 69 | 46  | 68 |
| 51               | 54  | 77  | 42  | 67  | 28 | 66  | 51 | 34  | 72 |

## Продовження таблиці А.11

| 1   | 2  | 3   | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 0   |
|-----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 39  | 50 | 58  | 27 | 42  | 51  | 33  | 42  | 71  | 44  |
| 52  | 56 | 32  | 39 | 51  | 35  | 89  | 27  | 42  | 69  |
| 83  | 44 | 60  | 73 | 17  | 60  | 60  | 66  | 95  | 37  |
| 21  | 12 | 61  | 42 | 55  | 49  | 53  | 34  | 52  | 79  |
| 58  | 27 | 37  | 27 | 52  | 27  | 47  | 55  | 15  | 60  |
| 74  | 62 | 82  | 75 | 38  | 56  | 36  | 68  | 42  | 45  |
| 25  | 55 | 100 | 52 | 61  | 50  | 50  | 48  | 35  | 60  |
| 57  | 56 | 48  | 36 | 47  | 36  | 72  | 62  | 58  | 52  |
| 36  | 45 | 60  | 74 | 69  | 50  | 46  | 35  | 43  | 44  |
| 63  | 61 | 52  | 51 | 31  | 62  | 67  | 72  | 55  | 32  |
| 56  | 47 | 38  | 46 | 58  | 51  | 58  | 60  | 36  | 68  |
| 40  | 59 | 59  | 28 | 84  | 37  | 61  | 66  | 59  | 78  |
| 56  | 32 | 62  | 53 | 67  | 68  | 34  | 36  | 28  | 57  |
| 42  | 60 | 44  | 59 | 33  | 62  | 68  | 43  | 54  | 46  |
| 59  | 73 | 81  | 43 | 78  | 38  | 73  | 51  | 37  | 73  |
| 24  | 51 | 39  | 34 | 54  | 61  | 43  | 60  | 55  | 36  |
| 52  | 64 | 75  | 40 | 73  | 57  | 52  | 37  | 44  | 67  |
| 70  | 35 | 61  | 60 | 32  | 52  | 69  | 70  | 38  | 46  |
| 41  | 74 | 49  | 23 | 62  | 39  | 83  | 61  | 65  | 61  |
| 75  | 65 | 63  | 59 | 18  | 40  | 70  | 44  | 56  | 47  |
| 37  | 46 | 53  | 29 | 57  | 49  | 47  | 56  | 52  | 66  |
| 46  | 60 | 31  | 68 | 46  | 57  | 59  | 38  | 60  | 82  |
| 58  | 13 | 62  | 56 | 62  | 66  | 67  | 63  | 45  | 58  |
| 60  | 28 | 50  | 61 | 56  | 41  | 48  | 54  | 81  | 74  |
| 43  | 63 | 63  | 40 | 72  | 69  | 35  | 46  | 70  | 33  |
| 53  | 65 | 40  | 67 | 61  | 71  | 62  | 28  | 64  | 84  |
| 40  | 38 | 69  | 28 | 37  | 42  | 71  | 53  | 46  | 75  |
| 23  | 75 | 45  | 60 | 70  | 85  | 44  | 65  | 61  | 110 |
| 69  | 57 | 64  | 44 | 63  | 61  | 51  | 44  | 57  | 83  |
| 82  | 33 | 51  | 32 | 55  | 58  | 74  | 39  | 66  | 59  |
| 44  | 52 | 68  | 66 | 34  | 43  | 60  | 64  | 47  | 48  |
| 73  | 43 | 70  | 71 | 58  | 62  | 66  | 52  | 62  | 65  |
| 38  | 61 | 41  | 44 | 86  | 70  | 38  | 109 | 29  | 53  |
| 46  | 47 | 74  | 61 | 43  | 48  | 75  | 62  | 82  | 92  |
| 22  | 76 | 64  | 30 | 71  | 59  | 63  | 45  | 67  | 85  |
| 55  | 50 | 47  | 65 | 110 | 44  | 48  | 59  | 48  | 62  |
| 43  | 64 | 65  | 62 | 66  | 66  | 84  | 31  | 80  | 34  |
| 49  | 14 | 29  | 70 | 85  | 79  | 69  | 71  | 63  | 114 |
| 54  | 29 | 65  | 41 | 64  | 63  | 90  | 57  | 49  | 87  |
| 61  | 62 | 54  | 57 | 59  | 45  | 39  | 46  | 68  | 76  |
| 47  | 77 | 52  | 33 | 35  | 81  | 86  | 65  | 50  | 91  |
| 71  | 53 | 71  | 72 | 59  | 67  | 107 | 58  | 78  | 70  |
| 110 | 48 | 94  | 63 | 79  | 80  | 49  | 63  | 43  | 86  |
| 96  | 80 | 66  | 24 | 44  | 46  | 64  | 45  | 30  | 35  |
| 21  | 94 | 30  | 62 | 60  | 92  | 70  | 29  | 69  | 63  |
| 81  | 34 | 72  | 31 | 36  | 64  | 91  | 66  | 45  | 54  |
| 44  | 58 | 46  | 69 | 81  | 104 | 40  | 53  | 51  | 49  |
| 72  | 49 | 53  | 41 | 60  | 47  | 115 | 30  | 79  | 64  |
| 50  | 63 | 67  | 58 | 45  | 65  | 50  | 64  | 83  | 77  |
| 62  | 42 | 73  | 35 | 65  | 60  | 65  | 47  | 44  | 89  |
| 20  | 59 | 54  | 64 | 80  | 52  | 49  | 67  | 103 | 90  |

## ДОДАТОК Б

### ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Таблиця Б.1 – Таблиця квантилів розподілу  $\chi^2_{\alpha, f}$ , де  $\alpha$  – рівень значущості;  $f$  – число ступенів свободи

| $\alpha \backslash f$ | 0,01   | 0,05   | 0,1    | 0,5     | 0,9     | 0,95    | 0,99    |
|-----------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 1                     | 0,0002 | 0,0039 | 0,0158 | 0,4549  | 2,7055  | 3,8415  | 6,6349  |
| 2                     | 0,0201 | 0,1026 | 0,2107 | 1,3863  | 4,6052  | 5,9915  | 9,2103  |
| 3                     | 0,1148 | 0,3518 | 0,5844 | 2,3660  | 6,2514  | 7,8147  | 11,3449 |
| 4                     | 0,2971 | 0,7107 | 1,0636 | 3,3567  | 7,7794  | 9,4877  | 13,2767 |
| 5                     | 0,5543 | 1,1455 | 1,6103 | 4,3515  | 9,2364  | 11,0705 | 15,0863 |
| 6                     | 0,8721 | 1,6354 | 2,2041 | 5,3481  | 10,6446 | 12,5916 | 16,8119 |
| 7                     | 1,2390 | 2,1673 | 2,8331 | 6,3458  | 12,0170 | 14,0671 | 18,4753 |
| 8                     | 1,6465 | 2,7326 | 3,4895 | 7,3441  | 13,3616 | 15,5073 | 20,0902 |
| 9                     | 2,0879 | 3,3251 | 4,1682 | 8,3428  | 14,6837 | 16,9190 | 21,6660 |
| 10                    | 2,5582 | 3,9403 | 4,8652 | 9,3418  | 15,9872 | 18,3070 | 23,2093 |
| 11                    | 3,0535 | 4,5748 | 5,5778 | 10,3410 | 17,2750 | 19,6751 | 24,7250 |
| 12                    | 3,5706 | 5,2260 | 6,3038 | 11,3403 | 18,5493 | 21,0261 | 26,2170 |
| 13                    | 4,1069 | 5,8919 | 7,0415 | 12,3398 | 19,8119 | 22,3620 | 27,6882 |
| 14                    | 4,6604 | 6,5706 | 7,7895 | 13,3393 | 21,0641 | 23,6848 | 29,1412 |
| 15                    | 5,2293 | 7,2609 | 8,5468 | 14,3389 | 22,3071 | 24,9958 | 30,5779 |

Таблиця Б.2 – Критичні значення коефіцієнта парної кореляції при  $\alpha = 0,05$

| Число ступенів свободи $f$ | Критичне значення $r$ | Число ступенів свободи $f$ | Критичне значення $r$ | Число ступенів свободи $f$ | Критичне значення $r$ |
|----------------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1                          | 0,097                 | 9                          | 0,602                 | 17                         | 0,456                 |
| 2                          | 0,950                 | 10                         | 0,576                 | 18                         | 0,444                 |
| 3                          | 0,878                 | 11                         | 0,553                 | 19                         | 0,433                 |
| 4                          | 0,811                 | 12                         | 0,532                 | 20                         | 0,423                 |
| 5                          | 0,754                 | 13                         | 0,514                 | 30                         | 0,349                 |
| 6                          | 0,707                 | 14                         | 0,497                 | 50                         | 0,273                 |
| 7                          | 0,666                 | 15                         | 0,482                 | 100                        | 0,195                 |
| 8                          | 0,632                 | 16                         | 0,468                 |                            |                       |

Таблиця Б.3 – Таблиця значень критерію Стюдента ( $t$ -критерію) для різних рівнів значимості та числа ступенів свободи  $f$

| $f$ | Рівень значимості $\alpha$ (двостороння критична область) |          |        |        |         |         |
|-----|---|----------|--------|--------|---------|---------|
|     | 0,10  | 0,05     | 0,02   | 0,01   | 0,005   | 0,001   |
| 1   | 6,3130  | 12,7060  | 31,820 | 63,656 | 127,656 | 636,619 |
| 2   | 2,9200  | 4,3020   | 6,964  | 9,924  | 14,089  | 31,599  |
| 3   | 2,35340   | 3,182    | 4,540  | 5,840  | 7,458   | 12,924  |
| 4   | 2,13180   | 2,776    | 3,746  | 4,604  | 5,597   | 8,610   |
| 5   | 2,01500   | 2,570    | 3,649  | 4,0321 | 4,773   | 6,863   |
| 6   | 1,943   | 2,4460   | 3,1420 | 3,7070 | 4,316   | 5,958   |
| 7   | 1,8946  | 2,3646   | 2,998  | 3,4995 | 4,2293  | 5,4079  |
| 8   | 1,8596  | 2,3060   | 2,8965 | 3,3554 | 3,832   | 5,0413  |
| 9   | 1,8331  | 2,2622   | 2,8214 | 3,2498 | 3,6897  | 4,780   |
| 10  | 1,8125  | 2,2281   | 2,7638 | 3,1693 | 3,5814  | 4,5869  |
| 11  | 1,795   | 2,201    | 2,718  | 3,105  | 3,496   | 4,437   |
| 12  | 1,7823  | 2,1788   | 2,6810 | 3,0845 | 3,4284  | 4,178   |
| 13  | 1,7709  | 2,1604   | 2,6503 | 3,1123 | 3,3725  | 4,220   |
| 14  | 1,7613  | 2,1448   | 2,6245 | 2,976  | 3,3257  | 4,140   |
| 15  | 1,7530  | 2,1314   | 2,6025 | 2,9467 | 3,2860  | 4,072   |
| 16  | 1,7450  | 2,1190   | 2,5830 | 2,9200 | 3,2520  | 4,0150  |
| 17  | 1,7396  | 2,1098   | 2,5668 | 2,8982 | 3,2224  | 3,965   |
| 18  | 1,7341  | 2,1009   | 2,5514 | 2,8784 | 3,1966  | 3,9216  |
| 19  | 1,7291  | 2,0930   | 2,5395 | 2,8609 | 3,1737  | 3,8834  |
| 20  | 1,7247  | 2,08600  | 2,5280 | 2,8453 | 3,1534  | 3,8495  |
| 21  | 1,7200  | 2,2,0790 | 2,5170 | 2,8310 | 3,1350  | 3,8190  |
| 22  | 1,7117  | 2,0739   | 2,5083 | 2,8188 | 3,1188  | 3,7921  |
| 23  | 1,7139  | 2,0687   | 2,4999 | 2,8073 | 3,1040  | 3,7676  |
| 24  | 1,7109  | 2,0639   | 2,4922 | 2,7969 | 3,0905  | 3,7454  |
| 25  | 1,7081  | 2,0595   | 2,4851 | 2,7874 | 3,0782  | 3,7251  |
| 26  | 1,705   | 2,059    | 2,478  | 2,778  | 3,0660  | 3,7060  |
| 27  | 1,7033  | 2,0518   | 2,4727 | 2,7707 | 3,0565  | 3,6896  |
| 28  | 1,7011  | 2,0484   | 2,4671 | 2,7633 | 3,0469  | 3,6739  |
| 29  | 1,6991  | 2,0452   | 2,4620 | 2,7564 | 3,0360  | 3,8494  |
| 30  | 1,6973  | 2,0423   | 2,4573 | 2,7500 | 3,0298  | 3,6460  |
| 32  | 1,6930  | 2,0360   | 2,4480 | 2,7380 | 3,0140  | 3,6210  |
| 34  | 1,6909  | 2,0322   | 2,4411 | 2,7284 | 3,9520  | 3,6007  |
| 36  | 1,6883  | 2,0281   | 2,4345 | 2,7195 | 9,490   | 3,5821  |
| 38  | 1,6860  | 2,0244   | 2,4286 | 2,7116 | 3,9808  | 3,5657  |
| 40  | 1,6839  | 2,0211   | 2,4233 | 2,7045 | 3,9712  | 3,5510  |
| 42  | 1,682   | 2,018    | 2,418  | 2,6980 | 2,6930  | 3,5370  |
| 44  | 1,6802  | 2,0154   | 2,4141 | 2,6923 | 3,9555  | 3,5258  |
| 46  | 1,6767  | 2,0129   | 2,4102 | 2,6870 | 3,9488  | 3,5150  |
| 48  | 1,6772  | 2,0106   | 2,4056 | 2,6822 | 3,9426  | 3,5051  |
| 50  | 1,6759  | 2,0086   | 2,4033 | 2,6778 | 3,9370  | 3,4060  |
| 60  | 1,6706  | 2,0003   | 2,3901 | 2,6603 | 3,9146  | 3,4602  |
| 70  | 1,6689  | 1,9944   | 2,3808 | 2,6479 | 3,8987  | 3,4350  |
| 80  | 1,6640  | 1,9900   | 2,3730 | 2,6380 | 2,8870  | 3,4160  |
| 90  | 1,6620  | 1,9867   | 2,3885 | 2,6316 | 2,8779  | 3,4019  |
| 100 | 1,6602  | 1,9840   | 2,3642 | 2,6259 | 2,8707  | 3,3905  |
| 500 | 1,6470  | 1,9640   | 2,3330 | 2,7850 | 2,8190  | 3,3100  |

Таблиця Б.4 – Значення критерію Фішера  $F(\alpha; f_1; f_2)$ , де  $\alpha$  – рівень значущості,  $\alpha=0,05$ ;  $f_1$  – число ступенів свободи більшої дисперсії;  $f_2$  – число ступенів свободи меншої дисперсії

| $f_2 \backslash f_1$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 8      | 12     | 24     | $\infty$ |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| 1                    | 161,45 | 199,50 | 215,72 | 224,57 | 230,17 | 233,97 | 238,89 | 243,91 | 249,04 | 254,32   |
| 2                    | 18,51  | 19,00  | 19,16  | 19,25  | 19,30  | 19,33  | 19,37  | 19,41  | 19,45  | 19,50    |
| 3                    | 10,13  | 9,55   | 9,28   | 9,12   | 9,01   | 8,94   | 8,84   | 8,74   | 8,64   | 8,53     |
| 4                    | 7,71   | 6,94   | 6,59   | 6,39   | 6,26   | 6,16   | 6,04   | 5,91   | 5,77   | 5,63     |
| 5                    | 6,61   | 5,79   | 5,41   | 5,19   | 5,05   | 4,95   | 4,82   | 4,68   | 4,53   | 4,36     |
| 6                    | 5,99   | 5,14   | 4,76   | 4,53   | 4,39   | 4,28   | 4,15   | 4,00   | 3,84   | 3,67     |
| 7                    | 5,59   | 4,74   | 4,35   | 4,12   | 3,97   | 3,87   | 3,73   | 3,57   | 3,41   | 3,23     |
| 8                    | 5,32   | 4,46   | 4,07   | 3,84   | 3,69   | 3,58   | 3,44   | 3,28   | 3,12   | 2,93     |
| 9                    | 5,12   | 4,26   | 3,86   | 3,63   | 3,48   | 3,37   | 3,23   | 3,07   | 2,90   | 2,71     |
| 10                   | 4,96   | 4,10   | 3,71   | 3,48   | 3,33   | 3,22   | 3,07   | 2,91   | 2,74   | 2,54     |
| 11                   | 4,84   | 3,98   | 3,59   | 3,36   | 3,20   | 3,09   | 2,95   | 2,79   | 2,61   | 2,40     |
| 12                   | 4,75   | 3,88   | 3,49   | 3,26   | 3,11   | 3,00   | 2,85   | 2,69   | 2,50   | 2,30     |
| 13                   | 4,67   | 3,80   | 3,41   | 3,18   | 3,02   | 2,92   | 2,77   | 2,60   | 2,42   | 2,21     |
| 14                   | 4,60   | 3,74   | 3,34   | 3,11   | 2,96   | 2,85   | 2,70   | 2,53   | 2,35   | 2,13     |
| 15                   | 4,54   | 3,68   | 3,29   | 3,06   | 2,90   | 2,79   | 2,64   | 2,48   | 2,29   | 2,07     |
| 20                   | 4,35   | 3,49   | 3,10   | 2,87   | 2,71   | 2,60   | 2,45   | 2,28   | 2,08   | 1,84     |
| 30                   | 4,17   | 3,32   | 2,92   | 2,69   | 2,53   | 2,42   | 2,27   | 2,09   | 1,89   | 1,62     |
| $\infty$             | 3,84   | 2,99   | 2,60   | 2,37   | 2,21   | 2,09   | 1,94   | 1,75   | 1,52   | 1,00     |

Таблиця Б.5 – Значення критерію Фішера  $F(\alpha; f_1; f_2)$ , де  $\alpha$  – рівень значущості,  $\alpha=0,01$ ;  $f_1$  – число ступенів свободи більшої дисперсії;  $f_2$  – число ступенів свободи меншої дисперсії

| $f_2 \backslash f_1$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 12  | 24  | 36  |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1                    | 405 | 499 | 540 | 562 | 576 | 585 | 610 | 623 | 636 |
| 2                    | 98  | 99  | 99  | 99  | 99  | 99  | 99  | 99  | 99  |
| 3                    | 34  | 30  | 29  | 28  | 28  | 27  | 27  | 26  | 26  |
| 4                    | 21  | 18  | 16  | 16  | 15  | 15  | 14  | 13  | 13  |
| 5                    | 16  | 13  | 12  | 11  | 11  | 10  | 9,9 | 9,5 | 9,0 |
| 6                    | 13  | 10  | 9,8 | 9,2 | 8,8 | 8,5 | 7,7 | 7,3 | 6,9 |
| 7                    | 12  | 9,6 | 8,5 | 7,9 | 7,5 | 7,2 | 6,5 | 6,1 | 5,7 |
| 8                    | 11  | 8,7 | 7,6 | 7,0 | 6,6 | 6,4 | 5,7 | 5,3 | 4,9 |
| 9                    | 10  | 8,0 | 7,0 | 6,4 | 6,1 | 5,8 | 5,1 | 4,7 | 4,3 |
| 10                   | 10  | 7,6 | 6,6 | 6,0 | 5,6 | 5,4 | 4,7 | 4,3 | 3,9 |
| 11                   | 9,7 | 7,2 | 6,2 | 5,7 | 5,3 | 5,1 | 4,4 | 4,0 | 3,6 |
| 12                   | 9,3 | 6,9 | 6,0 | 5,4 | 5,1 | 4,8 | 4,2 | 3,8 | 3,4 |
| 13                   | 9,1 | 6,7 | 5,7 | 5,2 | 4,9 | 4,6 | 4,0 | 3,6 | 3,2 |
| 14                   | 8,9 | 6,5 | 5,6 | 5,0 | 4,7 | 4,5 | 3,8 | 3,4 | 3,0 |
| 15                   | 8,7 | 6,4 | 5,4 | 4,9 | 4,6 | 4,3 | 3,7 | 3,3 | 2,9 |
| 20                   | 8,1 | 5,9 | 4,9 | 4,4 | 4,1 | 3,9 | 3,2 | 2,9 | 2,4 |
| 30                   | 7,6 | 5,4 | 4,5 | 4,0 | 3,7 | 3,5 | 2,8 | 2,5 | 2,0 |
| 60                   | 7,1 | 5,0 | 4,1 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,5 | 2,1 | 1,6 |
| $\infty$             | 6,6 | 4,6 | 3,8 | 3,3 | 3,0 | 2,8 | 2,2 | 1,8 | 1,0 |



Таблиця Б.6 – Значення критерію Фішера  $F(\alpha; f_1; f_2)$ , де  $\alpha$  – рівень значущості,  $\alpha = 0,05$ ;  $f_1$  – число ступенів свободи більшої дисперсії;  $f_2$  – число ступенів свободи меншої дисперсії

| $f_2 \backslash f_1$ | 1   | 2   | 3    | 4    | 5    | 6    | 12   | 24   | 36   |
|----------------------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| 1                    | 9,5 | 12  | 13,1 | 13,7 | 15,0 | 14,3 | 14,9 | 15,2 | 15,6 |
| 2                    | 3,6 | 4,0 | 4,2  | 4,6  | 4,3  | 4,3  | 4,4  | 4,4  | 4,5  |
| 3                    | 2,7 | 2,9 | 2,9  | 3,0  | 3,0  | 3,0  | 3,0  | 3,0  | 3,0  |
| 4                    | 2,4 | 2,5 | 2,5  | 2,5  | 2,5  | 2,5  | 2,5  | 2,4  | 2,4  |
| 5                    | 2,2 | 2,3 | 2,3  | 2,2  | 2,2  | 2,2  | 2,2  | 2,2  | 2,1  |
| 6                    | 2,1 | 2,1 | 2,1  | 2,1  | 2,1  | 2,1  | 2,0  | 2,0  | 2,0  |
| 7                    | 2,0 | 2,0 | 2,0  | 2,0  | 2,0  | 2,0  | 1,9  | 1,9  | 1,8  |
| 8                    | 2,0 | 2,0 | 2,0  | 1,9  | 1,9  | 1,9  | 1,8  | 1,8  | 1,7  |
| 9                    | 1,9 | 1,9 | 1,9  | 1,9  | 1,9  | 1,8  | 1,8  | 1,7  | 1,7  |
| 10                   | 1,9 | 1,9 | 1,9  | 1,8  | 1,8  | 1,8  | 1,7  | 1,7  | 1,6  |
| 11                   | 1,9 | 1,9 | 1,8  | 1,8  | 1,8  | 1,8  | 1,7  | 1,6  | 1,6  |
| 12                   | 1,8 | 1,8 | 1,8  | 1,8  | 1,7  | 1,7  | 1,7  | 1,6  | 1,5  |
| 13                   | 1,8 | 1,8 | 1,8  | 1,8  | 1,7  | 1,7  | 1,6  | 1,6  | 1,5  |
| 14                   | 1,8 | 1,8 | 1,8  | 1,7  | 1,7  | 1,7  | 1,6  | 1,6  | 1,5  |
| 15                   | 1,8 | 1,8 | 1,8  | 1,7  | 1,7  | 1,7  | 1,6  | 1,5  | 1,5  |
| 30                   | 1,7 | 1,7 | 1,6  | 1,6  | 1,6  | 1,5  | 1,5  | 1,4  | 1,3  |
| $\infty$             | 1,6 | 1,6 | 1,6  | 1,5  | 1,5  | 1,4  | 1,3  | 1,2  | 1,0  |

Таблиця Б.7 – Значення критерію Кохрена при  $\alpha = 0,05$

| Кількість оцінок дисперсії ( $N$ ) | Число ступенів свободи $f = r - 1$ |       |       |       |       |       |       |
|------------------------------------|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                    | 1                                  | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| 2                                  | 0,999                              | 0,975 | 0,939 | 0,906 | 0,877 | 0,853 | 0,833 |
| 3                                  | 0,967                              | 0,871 | 0,798 | 0,746 | 0,707 | 0,677 | 0,653 |
| 4                                  | 0,907                              | 0,768 | 0,684 | 0,629 | 0,590 | 0,560 | 0,637 |
| 5                                  | 0,841                              | 0,684 | 0,598 | 0,544 | 0,507 | 0,478 | 0,456 |
| 6                                  | 0,781                              | 0,616 | 0,532 | 0,480 | 0,445 | 0,418 | 0,398 |
| 7                                  | 0,727                              | 0,561 | 0,480 | 0,431 | 0,397 | 0,373 | 0,354 |
| 8                                  | 0,680                              | 0,516 | 0,438 | 0,391 | 0,360 | 0,336 | 0,319 |
| 9                                  | 0,639                              | 0,478 | 0,403 | 0,358 | 0,329 | 0,307 | 0,290 |
| 10                                 | 0,602                              | 0,445 | 0,373 | 0,331 | 0,301 | 0,232 | 0,267 |
| 12                                 | 0,541                              | 0,392 | 0,326 | 0,238 | 0,262 | 0,244 | 0,230 |
| 15                                 | 0,471                              | 0,335 | 0,276 | 0,242 | 0,220 | 0,203 | 0,191 |
| 20                                 | 0,389                              | 0,271 | 0,221 | 0,192 | 0,174 | 0,160 | 0,150 |

Таблиця Б.8 – Значущі ранги для множинного рангового критерію Дункана при  $\alpha = 0,05$

| $n_D$ | $p$  |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|       | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| 1     | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 |
| 2     | 6,09 | 6,09 | 6,09 | 6,09 | 6,09 | 6,09 | 6,09 | 6,09 | 6,09 |
| 3     | 4,50 | 4,50 | 4,50 | 4,50 | 4,50 | 4,50 | 4,50 | 4,50 | 4,50 |
| 4     | 3,93 | 4,01 | 4,02 | 4,02 | 4,02 | 4,02 | 4,02 | 4,02 | 4,02 |
| 5     | 3,64 | 3,74 | 3,79 | 3,83 | 3,83 | 3,83 | 3,83 | 3,83 | 3,83 |
| 6     | 3,46 | 3,58 | 3,64 | 3,68 | 3,68 | 3,68 | 3,68 | 3,68 | 3,68 |
| 7     | 3,35 | 3,47 | 3,54 | 3,58 | 3,60 | 3,61 | 3,61 | 3,61 | 3,61 |
| 8     | 3,25 | 3,39 | 3,47 | 3,52 | 3,55 | 3,56 | 3,56 | 3,56 | 3,56 |
| 9     | 3,20 | 3,34 | 3,41 | 3,47 | 3,50 | 3,52 | 3,52 | 3,52 | 3,52 |
| 10    | 3,15 | 3,30 | 3,37 | 3,43 | 3,46 | 3,47 | 3,47 | 3,47 | 3,47 |

Таблиця Б.9 – Значення інтегральної функції нормального закону для нормованої й центрованої випадкової величини  $t$

| $t$   | $\Phi(t)$ | $t$   | $\Phi(t)$ | $t$  | $\Phi(t)$ | $t$  | $\Phi(t)$ |
|-------|-----------|-------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| -0,00 | 0,500     | -2,10 | 0,017     | 0,10 | 0,539     | 2,20 | 0,986     |
| -0,10 | 0,460     | -2,20 | 0,013     | 0,20 | 0,579     | 2,30 | 0,989     |
| -0,20 | 0,420     | -2,30 | 0,010     | 0,30 | 0,617     | 2,40 | 0,991     |
| -0,30 | 0,382     | -2,40 | 0,008     | 0,40 | 0,655     | 2,50 | 0,993     |
| -0,40 | 0,344     | -2,50 | 0,006     | 0,50 | 0,691     | 2,60 | 0,995     |
| -0,50 | 0,308     | -2,60 | 0,004     | 0,60 | 0,725     | 2,70 | 0,996     |
| -0,60 | 0,274     | -2,70 | 0,003     | 0,70 | 0,758     | 2,80 | 0,997     |
| -0,70 | 0,242     | -2,80 | 0,002     | 0,80 | 0,788     | 2,90 | 0,998     |
| -0,80 | 0,211     | -2,90 | 0,0017    | 0,90 | 0,815     | 3,00 | 0,998     |
| -0,90 | 0,184     | -3,00 | 0,0014    | 1,00 | 0,841     | 3,10 | 0,999     |
| -1,00 | 0,158     | -3,00 | 0,0010    | 1,10 | 0,864     | 3,20 | 0,999     |
| -1,10 | 0,135     | -3,10 | 0,0007    | 1,20 | 0,884     | 3,30 | 0,9995    |
| -1,20 | 0,116     | -3,20 | 0,0005    | 1,30 | 0,903     | 3,40 | 0,9997    |
| -1,30 | 0,096     | -3,30 | 0,0003    | 1,40 | 0,919     | 3,50 | 0,9998    |
| -1,40 | 0,080     | -3,40 | 0,0002    | 1,50 | 0,933     | 3,60 | 0,9998    |
| -1,50 | 0,066     | -3,50 | 0,0002    | 1,60 | 0,945     | 3,70 | 0,9999    |
| -1,60 | 0,054     | -3,60 | 0,0001    | 1,70 | 0,955     | 3,80 | 0,9999    |
| -1,70 | 0,044     | -3,70 | 0,0001    | 1,80 | 0,964     | 3,90 | 1,0000    |
| -1,80 | 0,035     | -3,80 | 0,0000    | 1,90 | 0,971     |      |           |
| -1,90 | 0,028     | -3,90 | 0,0000    | 2,00 | 0,977     |      |           |
| -2,00 | 0,022     | 0,00  | 0,500     | 2,10 | 0,982     |      |           |

Таблиця Б.10 – Значення ймовірностей закону Пірсона залежно від числа ступенів свободи  $f$  і значення хі-квадрата  $\chi^2$   $P(\chi^2, f)$

| $\chi^2$ | Число ступенів свободи $f$ |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|          | 1                          | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     |
| 1        | 0,317                      | 0,606 | 0,801 | 0,909 | 0,962 | 0,985 | 0,994 | 0,998 |
| 2        | 157                        | 367   | 572   | 735   | 849   | 919   | 959   | 981   |
| 3        | 083                        | 223   | 391   | 557   | 700   | 808   | 885   | 934   |
| 4        | 045                        | 135   | 261   | 406   | 549   | 676   | 779   | 857   |
| 5        | 025                        | 082   | 171   | 287   | 415   | 543   | 660   | 757   |
| 6        | 014                        | 049   | 111   | 199   | 306   | 423   | 539   | 647   |
| 7        | 008                        | 030   | 071   | 135   | 220   | 320   | 428   | 536   |
| 8        | 004                        | 018   | 046   | 091   | 156   | 238   | 332   | 433   |
| 9        | 002                        | 011   | 029   | 061   | 109   | 173   | 252   | 343   |
| 10       | 001                        | 006   | 018   | 040   | 075   | 124   | 188   | 265   |
| 11       | 000                        | 004   | 011   | 026   | 051   | 088   | 138   | 201   |
| 12       |                            | 002   | 007   | 017   | 034   | 062   | 100   | 151   |
| 13       |                            | 001   | 004   | 011   | 023   | 043   | 072   | 111   |
| 14       |                            | 000   | 002   | 007   | 014   | 029   | 051   | 081   |
| 15       |                            |       | 001   | 004   | 010   | 020   | 036   | 059   |
| 16       |                            |       | 001   | 003   | 006   | 013   | 025   | 042   |
| 17       |                            |       | 000   | 001   | 004   | 009   | 017   | 030   |
| 18       |                            |       |       | 001   | 002   | 006   | 012   | 021   |
| 19       |                            |       |       |       | 001   | 004   | 008   | 014   |
| 20       |                            |       |       |       | 001   | 002   | 005   | 010   |
| 21       |                            |       |       |       |       | 001   | 003   | 007   |
| 22       |                            |       |       |       |       | 001   | 002   | 004   |
| 23       |                            |       |       |       |       |       | 001   | 003   |
| 24       |                            |       |       |       |       |       | 001   | 002   |
| 25       |                            |       |       |       |       |       |       | 001   |

$$\chi^2 = \sum \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i}.$$

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Дугельний Володимир Миколайович

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ ІЗ ДИСЦИПЛІНИ  
«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»  
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.070106  
«АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»)**

Підписано до випуску 18.03.2013 р. Гарнітура Times New.  
Умов. друк. арк. 4,75. Зам. № 71.

---

Державний вищий навчальний заклад  
«Донецький національний технічний університет»  
Автомобільно-дорожній інститут  
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51  
E-mail: druknf@rambler.ru

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів  
видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007 р.