

Лекция 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные y', y'', y''', \dots

Символически дифференциальное уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots) = 0.$$

Определение 2. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Определение 3. *Решением* дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая, при подстановке в уравнение, превращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y' , то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y).$$

В этом случае мы говорим, что дифференциальное уравнение разрешено относительно производной.

Определение 4. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C),$$

которая зависит от одного произвольного постоянного C .

Определение 5. *Частным решением* называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем произвольному постоянному C придать определенное значение $C = C_0$.

С геометрической точки зрения *общее решение* представляет собой *семейство кривых* на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C . Частному решению соответствует *одна кривая* этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку.

Рассмотрим несколько видов дифференциальных уравнений первого порядка:

1. 1 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Общий вид:

$$y' = f(x)g(y).$$

Решение. Учитывая то, что $y' = \frac{dy}{dx}$ и $g(y) \neq 0$, преобразуем уравнение к виду $\frac{dy}{g(y)} = \frac{dx}{f(x)}$. Интегрируя левую часть по y , а правую по x , получаем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{f(x)} + C.$$

Пример 1. 1. Найти решение уравнения $y' - xy^2 = 2xy$.

Решение

Выполним следующие преобразования. Заменим $y' = \frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx , в результате уравнение примет вид

$$dy = xy(y + 2)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $y(y + 2) \neq 0$, получим $\frac{dy}{y(y + 2)} = xdx$.

Проинтегрируем обе части равенства $\int \frac{dy}{y(y + 2)} = \int xdx$. В результате

$$\frac{1}{2} \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y + 2| = \frac{x^2}{2} + C \text{ или } \ln \sqrt{\frac{y}{y + 2}} = \frac{x^2}{2} + C.$$

При делении на $y(y + 2)$ могли быть потеряны решения $y = 0$ и $y = -2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = 0$ и $y = -2$ являются особыми решениями уравнения, которые не могут быть получены из общего ни при каких значениях произвольной постоянной C .

$$\text{Ответ: } \ln \sqrt{\frac{y}{y + 2}} = \frac{x^2}{2} + C, \quad y = 0, \quad y = -2.$$

Пример 1. 2. Найти частное решение уравнения $(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение

Приведем уравнение к виду $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$, а затем разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства. Получим

$$\int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}.$$

В результате общее решение имеет вид $y^3 = 3 \operatorname{arctge}^x + 3C$ или

$$y = \sqrt[3]{3 \operatorname{arctge}^x + 3C}.$$

Найдем частное решение, подставив в общее начальные условия $1 = \sqrt[3]{3 \operatorname{arctge}^0 + 3C}$. Отсюда $1 = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} + 3C}$ или $1 = \frac{3\pi}{4} = 3C$. Окончательно,
 $C = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt[3]{3 \operatorname{arctge}^x + 1 - \frac{3\pi}{4}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений:

1. $x\sqrt{3 + y^2} dx + y\sqrt{2 + x^2} dy = 0$,
2. $3^{x+y} + 2^{x-y} \cdot y' = 0$,
3. $(2x + xy^2)dx = (yx^2 + y)dy$,
4. $(1 + e^{2x})yy' = e^{2x}$,
5. $y' \sin x = \frac{y}{\ln y}$.

Решить задачу Коши:

1. $y' = \operatorname{ctgx} + y = 2$; $y(0) = -1$,
2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.

Лекция 2

2. 1 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным относительно x и y , если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y .

Решение. По условию $f(kx, ky) = f(x, y)$, Решение ищем в виде $y = tx$, тогда $y' = t'x + t$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменными, решив которое и сделав в полученном решении замену $t = \frac{y}{x}$, Получим искомый результат.

Пример 2. 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Решение

Это однородное ДУ первого порядка, т. к. при замене x и y соответственно на kx и ky уравнение не меняется.

Используя замену $y = tx$, получаем

$$t'x + t = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad t'x = -\frac{1 + t^2}{2t};$$
$$\frac{2tdt}{1 + t^2} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2tdt}{1 + t^2} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln(1 + t^2) = -\ln|x| + \ln 2C.$$

Окончательно,

$$1 + u^2 = \frac{2c}{x}, \quad 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2C}{x}, \quad x^2 + y^2 = 2Cx.$$

Ответ: $x^2 + y^2 = 2Cx$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений:

1. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy,$

4. $x^3 y' = y(y^2 + x^2),$

$$2. xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2},$$

$$5. \left(x \operatorname{ctg} \frac{y}{x} - y \right) + xy' = 0,$$

$$3. y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}},$$

$$6. y^2 + x^2 y' = xy y'.$$

2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение (ДУ) вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (7.1)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — известные функции, называется линейным ДУ.

Решение: Решение ищем в виде произведения двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, т. е. $y = uv$. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + v'u$ в уравнение (7.1), получаем

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

Или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \quad (7.2)$$

Функцию v подберем так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$v' = -p(x)v, \quad \frac{dv}{dx} = -p(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx, \quad \ln|v| = -\int p(x)dx, \quad v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив найденную функцию в уравнение (7.2), получим

$$u' = q(x)v^{-1}, \quad u' = q(x)e^{\int p(x)dx}, \quad u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Окончательно,

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример 7.4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' = y + 3x^2.$$

Решение

Сделаем замену $y = uv$, $y' = u'v + v'u$. Тогда $x(u'v + v'u) + uv = 3x^2$ или

$$xu'v + u(xv' + v) = 3x^2. \quad (7.3)$$

Приравняем скобку 0, получим уравнение $xv' + v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, получаем $v = \frac{1}{x}$. Подставляем его в уравнении (7. 3) и решаем полученное уравнение

$$xu' \frac{1}{x} = 3x^2, \quad u' = 3x^2, \quad u = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

Итак, общее решение $y = (x^3 + C) \frac{1}{x}$.

Ответ:

$$y = (x^3 + C) \frac{1}{x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений:

$$1. \quad y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2x,$$

$$2. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$3. \quad xy' + y = x \sin x,$$

$$4. \quad y' - \frac{y}{x+2} = x^2 = 3x,$$

$$5. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x.$$

Лекция 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3. 1 Дифференциальные уравнения, не содержащие явным образом искомую функцию y .

Общий вид: $y'' = f(x, y')$.

Решение: Введем замену $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда $y'' = p'$. Подставляя выражения производных в исходное уравнение, получаем уравнение первого порядка

$$p' = p(x, C)$$

относительно неизвестной функции $p = p(x)$. Решив это уравнение, получим общее решение

$$p = p(x, C_1),$$

А затем из соотношения $y' = p$ получаем общее решение исходного уравнения

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

Пример 3. 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 0$.

Решение

Пусть $y' = p$, $y'' = p'$. Понижаем порядок ДУ и приходим к ДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$p' + p = 0.$$

Находим его решение

$$\frac{dp}{dx} = -p, \quad \frac{dp}{p} = -dx, \quad \int \frac{dp}{p} = -\int dx, \quad \ln|p| = -x + \ln C_1, \quad p = C_1 e^{-x}.$$

Поскольку $y' = p$, получаем

$$y' = C_1 e^{-x}, \quad y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2, \quad y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

Ответ:

$$y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

Задачи для самостоятельного решения

$$1. xy'' + 2y' = 0,$$

$$4. 2xy'y'' = (y')^2 + 1,$$

$$2. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x},$$

$$5. x(y'' + 1) + y' = 0,$$

$$3. y'' \operatorname{tg} x = y' + 1,$$

$$6. xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}.$$

3. 2 Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие явно независимую переменную x

Общий вид: $y'' = f(y, y')$.

Решение: Положим $y' = p$, где $p = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Подставляя выражения производных, получим ДУ первого порядка, решив которой получим $p = p(y, C_1)$. Затем, воспользовавшись тем, что $y' = p$, решим уравнение

$$y' = p(y, C_1).$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение исходного уравнения

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Пример 8. 2. Найти общее решение уравнения $2yy'' = y^2 + (y')^2$.

Решение

Сделаем замену $y' = p$, $y'' = p'p$. Исходное уравнение примет вид

$$2ypp' = y^2 + p^2. \quad (7. 6)$$

Это однородное уравнение первого порядка относительно функции $p = p(y)$. Положим $p = ty$, тогда $p' = t'y + t$. Подставив последние два равенства в уравнение (7. 6), после элементарных преобразований получим уравнение с разделяющимися переменными

$$2tt'y = 1 - t^2.$$

После разделения переменных и интегрирования полученного уравнения получим

$$\int \frac{2tdt}{1-t^2} = \int \frac{dy}{y}.$$

В результате

$$-\ln|1-t^2| = \ln|y| + \ln|C_1| \quad \text{или} \quad \frac{1}{1-t^2} C_1 y.$$

Заменив в последнем равенстве $t = \frac{p}{y}$, после преобразований получим

$$p = \sqrt{y^2 - \frac{y}{C_1}}.$$

Поскольку $y' = p$, то $y' = \sqrt{y^2 - \frac{y}{C_1}}$.

Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \frac{y}{C_1}}} = \int dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{\left(y - \frac{1}{2C_1}\right)^2 - \frac{1}{4C_1}}} = x + C_2.$$

Откуда $\ln\left|y - \frac{1}{2C_1} + \sqrt{y^2 - \frac{y}{C_1}}\right| = x + C_2.$

Ответ: $\ln\left|y - \frac{1}{2C_1} + \sqrt{y^2 - \frac{y}{C_1}}\right| = x + C_2.$

Задачи для самостоятельного решения

1. $2yy'' = (y')^2 + 1$,
2. $yy'' + (y')^2 = 1$,
3. $y'' = 2yy'$,
4. $y'' = \frac{8}{y^3}$,
5. $y''(1+y) = 5(y')^2$,
6. $yy'' = (y')^3$.

Лекция 4

4. 1 Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид: $ay'' + by' + c = 0$, где a, b, c – константы.

Решение: Составляем характеристическое уравнение $ak^2 + bk + c = 0$.

Если характеристическое уравнение имеет два действительных простых корня k_1, k_2 (случай, когда дискриминант $D > 0$), то общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (8.1)$$

Если характеристическое уравнение имеет два действительных равных корня $k_1 = k_2 = k$ (случай, когда дискриминант $D = 0$), то общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \quad (8.2)$$

Если характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ (случай, когда дискриминант $D < 0$), то общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \quad (8.3)$$

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 10 = 0$. Его решение $k_{1,2} = -1 \pm 3i$, т. е. $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Общее решение найдем по формуле (8.3).

Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

Пример 4. 2 Решить задачу Коши $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$. Его решения $k_1 = -2, k_2 = -1$. Общее решение найдем по формуле (8. 1).

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Отсюда $y' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x}$. Воспользуемся начальными условиями, что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 = 2. \end{cases}$$

Получаем $C_1 = -3, C_2 = 4$.

Ответ: $y = -3e^{-2x} + 4e^{-x}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений:

1. $y'' + y' - 2y = 0$,
2. $y'' - 4y' = 0$,
3. $y'' + 6y' + 13y = 0$,

Найти частные решения уравнений:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10$,
2. $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15$,
3. $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$.

Лекция 5

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения
второго порядка с постоянными коэффициентами**

Общий вид: $ay'' + by' + c = f(x)$, где a, b, c – постоянные величины.

Решение: Если правая часть уравнения имеет специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (5.1)$$

то решение ищем в виде $y = \bar{y} + y^*$, где \bar{y} - общее решение соответствующего однородного уравнения $ay'' + by' + c = 0$, а y^* - частное решение исходного неоднородного уравнения.

Пример 8. 5. Найти общее решение уравнения

$$4y'' + 8y' + 13y = 2x^2 - x + 1.$$

Решение

Решение ищем в виде $y = \bar{y} + y^*$,

Сначала находим \bar{y} . Для этого решаем уравнение $4y'' + 8y' + 13y = 0$.

Соответствующее характеристическое уравнение $4k^2 + 8k + 13 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -1 \pm \frac{3}{2}i$, поэтому $\bar{y} = e^{-x} (C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x)$.

Найдем частное решение y^* по виду правой части. В нашем случае правая часть исходного уравнения является многочленом второй степени. Составим число $r = \alpha + \beta i$. Числа α, β находим, сравнив правую часть нашего уравнения с функцией (8. 4). В нашем случае $\alpha = 0, \beta = 0$, поэтому $r = 0$. Данное значение r не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде $y^* = Ax^2 + Bx + C$.

Найдем $y^{*'} = 2Ax + B$ и $y^{*''} = 2A$ и подставив в исходное уравнение, получим

$$8A + 8(2Ax + B) + 13(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - x + 1.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$13Ax^2 + (16A + 13B)x + 8A + 13C = 2x^2 - x + 1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях последнего равенства, получим систему

$$\begin{cases} 13A = 2 \\ 16A + 13B = -1 \\ 8B + 13C = 1. \end{cases}$$

Решив ее, находим $A = \frac{2}{13}, B = -\frac{45}{169}, C = \frac{529}{2197}$. Тогда частное решение имеет вид $y^* = \frac{2}{13}x^2 - \frac{45}{169}x + \frac{529}{2197}$.

Общее решение $y = e^{-x} (C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x) + \frac{2}{13}x^2 - \frac{45}{169}x + \frac{529}{2197}$.

Пример 5. 1. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$.

Решение

Решение ищем в виде $y = \bar{y} + y^*$,

Сначала находим \bar{y} . Для этого решаем уравнение $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -3$, $k_2 = 1$, поэтому $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

Найдем частное решение y^* по виду правой части. В нашем случае правая часть исходного уравнения является многочленом второй степени, умноженном на e^x . Составим число $r = \alpha + \beta i$. Числа α, β находим, сравнив правую часть нашего уравнения с функцией (8. 4). В нашем случае $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому $r = 1$. Данное значение r является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде $y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x$.

Упростим $y^* = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x$ и найдем первую и вторую производную от этой функции. Подставив функцию и ее производные в исходное уравнение, сократив полученное равенство на $e^x \neq 0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{16}$, $C = \frac{1}{8}$. Тогда

$$y^* = \left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right)e^x.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}x$.

Пример 5.2. Решить задачу Коши для уравнения $y'' + y = -\sin 2x$, если $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

Решение

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$. Поэтому $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Частное решение ищем по виду правой части, учитывая то, что число $r = \alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения.

Итак, $y^* = A \cos 2x + B \sin 2x$. Находим $y^{*'} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$,

$y^{*''} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$ и подставляем в исходное уравнение. Приравняв коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получаем $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$. В результате

частное решение исходного уравнения $y^* = \frac{1}{3} \sin 2x$. Тогда общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.
 $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

$$y(\pi) = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi + \frac{1}{3} \sin 2\pi = 1.$$

Отсюда $C_1 = -1$.

Найдем $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3} \cos 2x$.

$$y'(\pi) = -C_1 \sin \pi + C_2 \cos \pi + \frac{2}{3} \cos 2\pi = 1.$$

Отсюда $C_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$,

5. $y'' - 3y' + 2y = 3 \sin x - \cos x$,

2. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - 3x + 2$,

6. $y'' - 2y' + 5y = \cos 2x$,

3. $y'' + 2y' = x - 3$,

7. $y'' - 4y = (x+1)e^{2x}$,

4. $y'' - 2y' + y = 4xe^x$,

8. $y'' + 6y' + 9y = xe^{-3x}$.