Учебный центр «Резольвента»

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по разделу

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

- Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое определяется по формуле

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

- Пусть

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

– декартовы координаты векторов. Тогда формула для скалярного произведения векторов в трехмерном случае имеет вид

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

а в двумерном случае

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 .$$

- Длина вектора

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})},$$

причем в трехмерном случае

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

а в двумерном случае

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

- Зная декартовы координаты векторов, можно найти угол между ними по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\vec a\cdot\vec b)}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

- Ортогональная проекция вектора $\vec a$ на направление, заданное вектором $\vec b$, вычисляется по формуле

$$\text{пр}_{\vec b}\ \vec a=\frac{(\vec a\cdot\vec b)}{|\vec b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Пример 1.1. Даны два вектора $\vec a$ и $\vec b$, причем $|\vec a|=\sqrt3$, $|\vec b|=1$, а угол φ между ними равен 30^0. Найти длину вектора $\vec p=\vec a-2\vec b$.

Решение.

$$|\vec p|=\sqrt{(\vec a-2\vec b)^2}=\sqrt{\vec a^2-4(\vec a\cdot\vec b)+\vec b^2}=\sqrt{|\vec a|^2-4|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi+4|\vec b|^2}=$$

$$=\sqrt{3-4\cdot\sqrt3\cdot1\cdot\cos30^0+4\cdot1}=\sqrt{3-4\sqrt3\cdot\frac{\sqrt3}{2}+4}=\sqrt{7-6}=1.$$

Пример 1.2. Даны два вектора $\vec a$ и $\vec b$, причем $|\vec a|=\sqrt3$, $|\vec b|=1$, а угол φ между ними равен 30^0. Найти угол γ между векторами

$$\vec p=\vec a-2\vec b \quad\text{и}\quad \vec q=3\vec a+4\vec b.$$

Решение. Поскольку

$$|\vec q|=\sqrt{(3\vec a+4\vec b)^2}=\sqrt{3|\vec a|^2+24|\vec a|\cdot|\vec b|\cos30^0+16|\vec b|^2}=$$

$$=\sqrt{3\cdot3+24\sqrt3\cdot1\cdot\frac{\sqrt3}{2}+16\cdot1}=\sqrt{9+36+16}=\sqrt{61},$$

а в примере 1.2. установлено, что $|\vec p|=1$, то

$$(\vec p\cdot\vec q)=(\vec a-2\vec b)\cdot(3\vec a+4\vec b)=3\vec a\cdot\vec a-6\vec a\cdot\vec b+4\vec a\cdot\vec b-8\vec b\cdot\vec b=3\vec a^2-2\vec a\cdot\vec b-8\vec b^2=$$

$$=3|\,\vec{a}\,|^2-2|\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot\cos 30^0-8\,|\,\vec{b}\,|^2=3\cdot 3-2\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-8\cdot 1=9-3-8=-2.$$

Следовательно

$$\cos\gamma=\frac{(\vec{p}\cdot\vec{q})}{|\,\vec{p}\,|\cdot|\,\vec{q}\,|}=\frac{-2}{1\cdot\sqrt{61}}=-\frac{2}{\sqrt{61}}.$$

Поэтому

$$\gamma=\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{61}}\right)=\pi-\arccos\frac{2}{\sqrt{61}}.$$

Пример 1.3. Пусть $A(4;-2)$, $B(10;6)$, $C(5;-4)$ – декартовы координаты вершин треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины C.

Решение. Найдем сначала координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=(10-4;\,6+2)=(6;\,8),$$

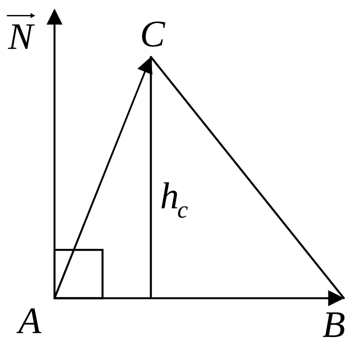
$$\overrightarrow{AC}=(5-4;\,-4+2)=(1;\,-2).$$

Рассмотрим произвольный вектор $\overrightarrow{N}$, перпендикулярный вектору $\overrightarrow{AB}$, например, $\vec{N}=(8;\,-6)$.

Тогда

$$h_c=|\,\text{пр}_{\overrightarrow{N}}\overrightarrow{AC}\,|=\left|\frac{(\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\,\overrightarrow{N}\,|}\right|=\left|\frac{8\cdot 1-6\cdot(-2)}{\sqrt{64+36}}\right|=\frac{8+12}{\sqrt{100}}=\frac{20}{10}=2\ .$$

Ответ: длина высоты, опущенной из вершины C, равна 2.



2. СМЕШАННОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

- Пусть

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

– декартовы координаты трех векторов. Смешанным произведением этих векторов называется число, которое определяется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

- Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, то эти векторы образуют правую тройку (ориентированы так же, как и базисные векторы трехмерной системы координат).
- Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, то три вектора образуют левую тройку.
- Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, то три вектора лежат в одной плоскости (компланарны).
- Если в треугольной пирамиде SABC с вершиной S $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, то объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|.$$

- Если на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ построен параллелепипед, то его объем

$$V = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|.$$

- Пусть

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

– декартовы координаты двух векторов. Векторным произведением этих векторов называется вектор, который определяется по формуле

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

где символами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ обозначены единичные базисные векторы декартовой трехмерной системы координат.

- Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.
- Векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы лежат на одной прямой (коллинеарны).
- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ в указанном порядке образуют правую тройку векторов.
- Справедливо соотношение

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi,$$

где через φ обозначен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- Площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

- Смешанное произведение трех векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ связано с векторным и скалярным произведениями векторов по формуле:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\ .$$

Пример 2.1. Пусть $P(-4;-2;3)$, $A(-1;0;2)$, $B(3;-3;4)$, $C(-4;5;6)$ – декартовы координаты вершин пирамиды. Найти:

а) длину высоты пирамиды, опущенной из вершины *P*;

б) объем пирамиды.

Решение. Найдем сначала какой-нибудь вектор, перпендикулярный плоскости ABC. В частности, таким вектором является вектор

$$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & 2\\ -3 & 5 & 4\end{vmatrix}=-22\vec{i}-22\vec{j}+11\vec{k}=(-22;\ -22;\ 11).$$

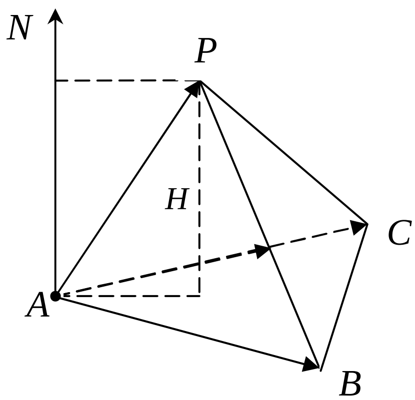
Поскольку $\overrightarrow{AP}=(-3;-2;\ 1)$, то длина высоты пирамиды, опущенной из вершины P, вычисляется по формуле:

$$H=\left|\ \text{пр}_{\vec{N}}\overrightarrow{AP}\ \right|=\frac{\left|\ (\vec{N}\cdot\overrightarrow{AP})\ \right|}{\left|\ \vec{N}\ \right|}=\frac{\left|\ -22(-3)-22(-2)+11\cdot 1\ \right|}{\sqrt{(-22)^2+(-22)^2+11^2}}=\frac{\left|\ 66+44+11\ \right|}{11\sqrt{4+4+1}}=\frac{121}{11\cdot 3}=\frac{11}{3}.$$

Найдем теперь объем пирамиды:

$$V_{PABC}=\frac{1}{6}\ \left|\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right)\ \right|=\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ -3 & 5 & 4\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{11}{6}.$$

Ответ: $H=\dfrac{11}{3}, V=\dfrac{11}{6}$.



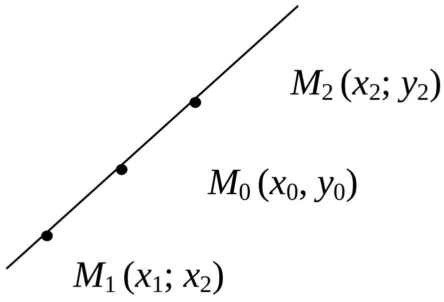
3. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

- Если точка $M_0=M_0\left(x_0;y_0\right)$ лежит на отрезке M_1M_2 ($M_1=(x_1;\ x_2)$, $M_2=(x_2;\ y_2)$), причем

$$\lambda=\frac{M_1M_0}{M_0M_2},$$

то

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$



- Общее уравнение прямой L на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0.$$

- Вектор $\overrightarrow{N} = (A; B)$ перпендикулярен прямой L.
- Вектор $\overrightarrow{M} = (-B; A)$ параллелен прямой L.
- Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(x_0; y_0)$ и параллельной вектору $\vec{l} = (m; n)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

- Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1 = (x_1;\, x_2)$ и $M_2 = (x_2;\, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

- Прямая может быть задана уравнением

$$y = kx + b,$$

в котором угловой коэффициент $k = tg\alpha$, где α – угол наклона прямой к положительному направлению оси OX.

- Уравнение прямой, пересекающей оси координат OX и OY в точках с координатами $(a;0)$ и $(0;b)$, имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Это уравнение называется уравнением прямой в отрезках.

- Неравенства

$$Ax+By+C>0 \text{ и } Ax+By+C<0$$

задают полуплоскости.

- Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$d(M_0;L)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

- Две прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1)$ и $\overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2)$ коллинеарны.

- Две прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1)$ и $\overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2)$ перпендикулярны. В этом случае $A_1A_2+B_1B_2=0$.

- Угол φ между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ находится с помощью соотношения

$$\cos\varphi=\frac{\left|\left(\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

- Если две прямые заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то угол между ними находится с помощью соотношения:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Пример 3.1. Прямая L задана уравнением $5x+4y-1=0$. Составить уравнения прямой L_1, проходящей через точку $M_0(3;-7)$ и параллельной прямой L.

Решение. Пусть точка $M_1(x;y)$ лежит на прямой L_1. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x-3;y+7)$ лежит на прямой L_1 и перпендикулярен вектору $\vec{N}=(5;4)$. Поэтому

$$L_1:5(x-3)+4(y+7)=0, \text{ т.е. } L_1:5x+4y+13=0.$$

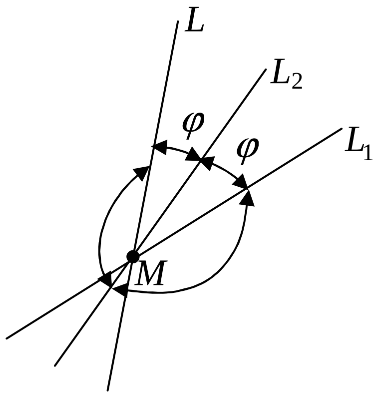
Пример 3.2. Прямая L задана уравнением $5x+4y-1=0$. Составить уравнения прямой L_1, проходящей через точку $M_0(3;-7)$ и перпендикулярной прямой L.

Решение. Пусть точка $M_1(x;y)$ лежит на прямой L_1. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x-3;y+7)$ лежит на прямой L_1 и перпендикулярен вектору $\vec{l}=(4;-5)$. Поэтому

$$L_1:4(x-3)-5(y+7)=0, \text{ т.е. } L_1:4x-5y-47=0.$$

Пример 3.3. Даны прямые $L_1:x-y+2=0$ и $L_2:2x-y+1=0$. Составить уравнение прямой L такой, что прямая L_2 будет биссектрисой угла, образованного прямыми L_1 и L.

Решение.



Найдем сначала координаты точки пересечения M прямых L_1 и L_2:

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow M=(1;\ 3).$$

Обозначим теперь угловые коэффициенты прямых L_1, L_2 и L через k_1, k_2 и k соответственно.

Поскольку

$$k_1=1, k_2=2,$$

то из соотношения

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{k - k_2}{1 + kk_2}$$

(см. рисунок) можно найти угловой коэффициент k.

Действительно,

$$\frac{2-1}{1+2} = \frac{k-2}{1+2k},$$

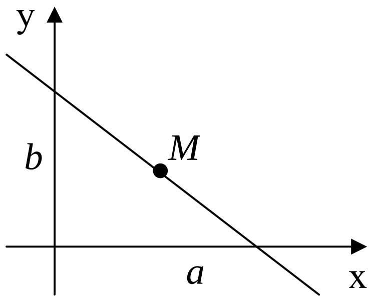
$$\frac{1}{3} = \frac{k-2}{1+2k},$$

$$1 + 2k = 3k - 6 \Rightarrow k = 7.$$

Так как прямая L проходит через точку $M = (1;\ 3)$, то

$$L: y - 3 = 7(x - 1), \text{ т.е. } \ L: 7x - y - 4 = 0.$$

Пример 3.4. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(6;4)$ и отсекающих от координатных углов треугольники площади 6.



Решение. Воспользовавшись уравнением прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

перепишем условие задачи в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + \dfrac{4}{b} = 1, \\ \dfrac{|\ a \cdot b\ |}{2} = 6. \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} 4a+6b=a\cdot b, \\ a\cdot b=\pm 12. \end{cases}$$

Рассмотрим 1-й случай:

$$\begin{cases} 4a+6b=ab, \\ ab=12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+6b=12, \\ b=\dfrac{12}{a}. \end{cases} \Rightarrow 2a+\frac{36}{a}=6,$$

$$a^2-3a+18=0, \quad D=9-72<0.$$

Поскольку уравнение корней не имеет, то этот случай не имеет места.

Рассмотрим 2-й случай:

$$\begin{cases} 4a+6b=ab, \\ ab=-12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+6b=-12, \\ b=-\dfrac{12}{a}, \end{cases} \Rightarrow 2a-\frac{36}{a}=-6,$$

$$a^2+3a-18=0, \; a_1=3, \; a_2=-6.$$

Следовательно

$$b_1=-\frac{12}{a_1}=-4, \; b_2=-\frac{12}{a_2}=2.$$

Ответ: $L_1: \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=1$, $L_2: \dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{2}=1$.

Пример 3.5. Дан треугольник с вершинами $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(0;-6)$. Найти:

а) координаты точки A_1, симметричной точке A относительно прямой BC;

б) координаты точки P пересечения медианы, проведенной из вершины B, и высоты, проведенной из вершины A;

в) площадь треугольника ABC;

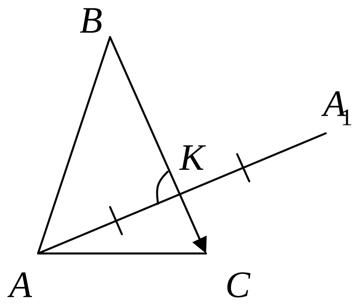
г) длину высоты, проведенной из вершины A;

д) систему неравенств, задающих треугольник ABC с границей;

е) где расположена точка D(-2;1)? (Внутри треугольника, на границе, вне треугольника?)

Решение.

а)



Составим уравнение прямой AA_1, перпендикулярной к прямой BC. Так как $\overrightarrow{BC}=(-4;-5)$, то

$$AA_1: -4(x-2)-5(y-3)=0\,.$$

Таким образом, прямая AA_1 имеет уравнение

$$4x+5y-23=0\,.$$

Прямая BC проходит чрез точку B в направлении вектора $\overrightarrow{BC}$. Поэтому ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-4}{-4}=\frac{y+1}{-5}\,,$$

что эквивалентно уравнению

$$5x-4y-24=0\,.$$

Найдем координаты точки пересечения прямых AA_1 и BC (точка K):

$$K:\begin{cases}4x+5y-23=0\\5x-4y-24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+5y=23\\5x-4y=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16x+20y=92\\25x-20y=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}41x=212\\41y=19\end{cases}.$$

Таким образом,

$$K=\left(\frac{212}{41};\frac{19}{41}\right).$$

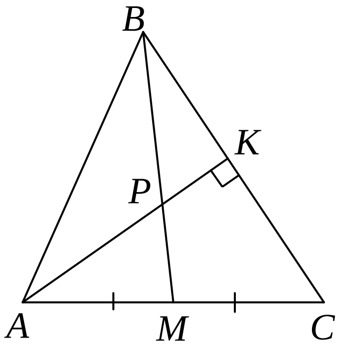
Теперь можно найти координаты точки A_1:

$$A_1=A+2\cdot\overline{AK}=(2;3)+2\cdot\left(\frac{212}{41}-2;\frac{19}{41}-3\right)=\left(\frac{342}{41};-\frac{85}{41}\right).$$

Итак,

$$A_1=\left(\frac{342}{41};\;-\frac{85}{41}\right).$$

б)



Найдем координаты середины стороны AC (точка M):

$$M=\left(\frac{2+0}{2};\frac{3-6}{2}\right)=\left(1;-\frac{3}{2}\right).$$

Найдем уравнение медианы BM:

$$\frac{x-4}{1-4}=\frac{y+1}{-\frac{3}{2}+1} \text{ или } x-6y-10=0.$$

Теперь можно найти координаты точки пересечения прямых AK и BM (точка P):

$$\begin{cases}4x+5y=23\\ x-6y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+5y=23\\ 4x-24y=40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+5y=23\\ 29y=-17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}29x=188\\ 29y=-17\end{cases}.$$

Следовательно,

$$P=\left(\frac{188}{29};\ -\frac{17}{29}\right).$$

в)

Первый способ. Поскольку

$$\overline{AK}=\left(\frac{212}{41}-2;\frac{19}{41}-3\right)=\left(\frac{130}{41};-\frac{104}{41}\right),$$

$$\overrightarrow{BC}=(-4;-5),$$

то

$$\left|\overrightarrow{AK}\right| = \frac{1}{41}\cdot\sqrt{130^2+104^2} =, \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{41}\,.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AK\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{130^2+104^2}{41^2}}\cdot\sqrt{41} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{130^2+104^2}{41}} = 13.$$

Второй способ. Поскольку

$$\overrightarrow{AB} = (2;\ -\ \ 4),\ \overrightarrow{AC} = (-2;\ -9)\,,$$

то, воспользовавшись свойствами векторного произведения, получим

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ \right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 0\\ -2 & -9 & 0\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left|-26\vec{k}\right| = 13\,.$$

г)

Первый способ. Воспользовавшись формулой для расстояния от точки до прямой, получим

$$h_A = d(A;BC) = \frac{|5\cdot 2-4\cdot 3-24|}{\sqrt{25+16}} = \frac{26}{\sqrt{41}}.$$

Второй способ.

$$\left|\overrightarrow{AK}\right| = \sqrt{\frac{130^2+104^2}{41^2}} = \sqrt{\frac{676}{41}} = \frac{26}{\sqrt{41}}.$$

д)

Составим уравнение границ треугольника ABC:

$$AB: \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} \Leftrightarrow 2x+y-7=0,$$
$$BC: 5x-4y-24=0,$$
$$AC: \frac{x-2}{0-2} = \frac{y-3}{-6-3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-4} \Leftrightarrow 9x-2y-12=0.$$

Для установления знаков неравенств подставим в уравнения сторон треугольника ABC координаты противоположных им вершин:

$$AB\ (C) = 2\cdot 0-6-7 = -13 < 0;$$

$$BC\ (A) = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 24 = -26 < 0;$$

$$AC\ (B) = 9 \cdot 4 - 2\cdot(-1) - 12 = 26 > 0.$$

Получим систему неравенств, задающих ΔABC вместе с границами:

$$\begin{cases} 2x + y - 7 \le 0, \\ 5x - 4y - 24 \le 0, \\ 9x - 2y - 12 \ge 0. \end{cases}$$

е)

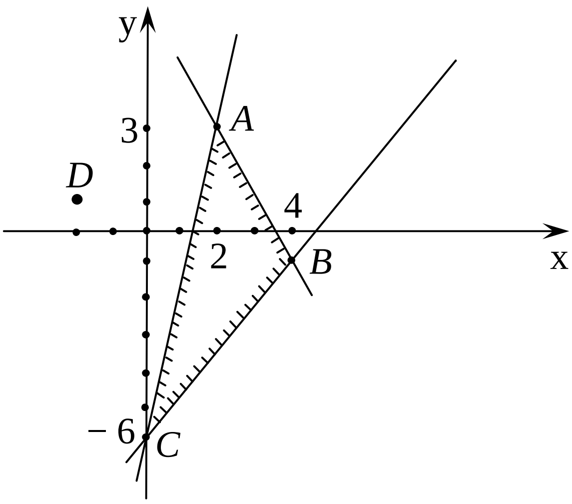
Расположение точки $D = (-2;1)$ относительно ΔABC установим с помощью результатов подстановки в уравнения сторон треугольника координат противоположных им вершин и координат точки D:

$$AB\ (C) = -13 < 0, \qquad AB\ (D) = -10 < 0;$$

$$BC\ (A) = -26 < 0, \qquad BC\ (D) = -38 < 0;$$

$$AC\ (B) = 26 > 0, \qquad AC\ (D) = -32 < 0.$$

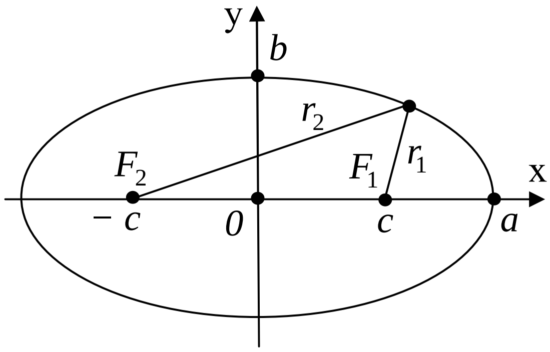
Из того, что знаки в третьих неравенствах различаются, вытекает, что точки D и B лежат в разных полуплоскостях, на которые прямая AC разбивает плоскость ABC. Следовательно, точка D лежит вне ΔABC.



4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

- Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$



числа a и b положительные и называются полуосями;

если $a > b$, то эллипс вытянут в направлении оси OX;,

в этом случае $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ − фокусное расстояние;

точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ − фокусы;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ − эксцентриситет, причем у эллипса $\varepsilon < 1$;

r_1 и r_2 − фокальные радиусы;

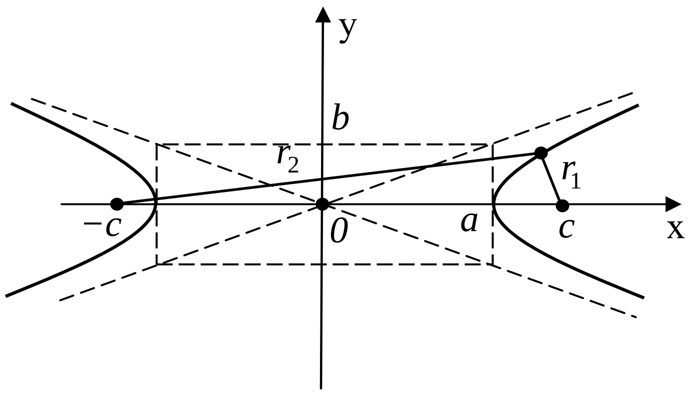
фокальные радиусы удовлетворяют соотношению $r_1 + r_2 = 2a$;

в случае $a = b = R$ эллипс превращается в окружность

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

- Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$



числа a и b называются действительной и мнимой полуосями гиперболы соответственно;

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ − фокусное расстояние;

точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ − фокусы;

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ − эксцентриситет, причем у гиперболы $\varepsilon > 1$;

r_1 и r_2 − фокальные радиусы;

фокальные радиусы удовлетворяют соотношению $|r_2 - r_1| = 2a$;

прямые линии $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы;

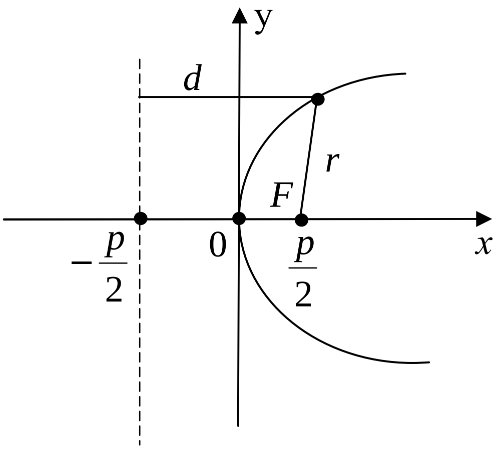
если в случае $a = b = \sqrt{2k}$ (равносторонняя гипербола) сделать замену переменных

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \end{cases},$$

то уравнение гиперболы примет «более знакомый» вид

$$xy = k .$$

- Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$;



точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус параболы;

$\frac{p}{2}$ − фокусное расстояние;

прямая $x = -\frac{p}{2}$ − директриса;

расстояние r от точки параболы до фокуса называется фокальным радиусом;

число $\varepsilon = \frac{r}{d}$, где d – расстояние от точки параболы до директрисы, называется эксцентриситетом параболы;

эксцентриситет параболы ε=1.

Пример 4.1. Составить уравнение эллипса, если его эксцентриситет 0.6 , фокусное расстояние 3, а фокусы расположены на оси OX симметрично относительно начала координат.

Решение. Запишем условие задачи в виде системы уравнений

$$\begin{cases} c=\sqrt{a^2-b^2}=3 \\ \varepsilon=\dfrac{c}{a}=0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\sqrt{a^2-b^2}=3 \\ a=\dfrac{c}{\varepsilon}=\dfrac{3}{0,6}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{25-b^2}=3 \\ a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25-b^2=9 \\ a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=5 \end{cases}.$$

Таким образом, уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Пример 4.2. Составить уравнение и определить тип кривой, для каждой точки которой расстояние до точки $K\,(-2;\,0)$ в 2 раза больше расстояния до точки $N\,(1;\,3)$.

Решение. Пусть $M\,(x;\,y)$ – точка кривой, тогда $MK=2MN$. Поэтому

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}.$$

Преобразуем это соотношение:

$$x^2+4x+4+y^2=4x^2-8x+4+4y^2-24y+36,$$
$$3x^2-12x+3y^2-24y+36=0,\ x^2-4x+y^2-8y+12=0,$$
$$x^2-4x+4-4+y^2-8y+16-16+12=0.$$

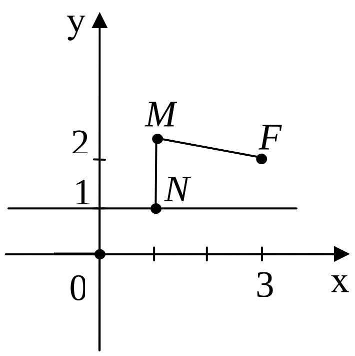
Получилось уравнение

$$(x-2)^2+(y-4)^2=8,$$

задающее окружность радиусом $R=2\sqrt{2}$ с центром в точке (2; 4).

Пример 4.3. Составить уравнение, привести к каноническому виду и определить тип кривой, для каждой точки M которой отношение расстояния до точки F (3; 2) к расстоянию до прямой $y=1$ равно $\sqrt{3}$.

Решение.



По условию задачи

$$\frac{MF}{MN}=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}}{|y-1|}=\sqrt{3},$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{3}\,|y-1|.$$

Возводя последнее соотношение в квадрат, получим:

$$(x-3)^2+y^2-4y+4=3y^2-6y+3,$$

$$(x-3)^2-2y^2+2y+1=0,$$

$$(x-3)^2-2\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}=0,$$

$$(x-3)^2-2(y-\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{(x-3)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)}-\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)}=-1,$$

$$\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)}-\frac{(x-3)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)}=1.$$

Если в последнем уравнении сделать замену переменных

$$\begin{cases} x=Y \\ y=X \end{cases},$$

то получится уравнение

$$\frac{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)}-\frac{(Y-3)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)}=1,$$

задающее гиперболу с центром в точке $\left(\frac{1}{2};3\right)$, действительной полуосью $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, мнимой полуосью $b=\sqrt{\frac{3}{2}}$ и фокусами, расположенными на прямой $X=\frac{1}{2}$.

5. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Общее уравнение плоскости L в пространстве имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0$$

- Вектор $\overrightarrow{N}=(A;B;C)$ перпендикулярен плоскости L. Этот вектор также называют нормальным вектором плоскости.

- Две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$ коллинеарны.

- Две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$ перпендикулярны. В этом случае $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

- Угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ находится с помощью соотношения

$$\cos\varphi=\frac{\left|\left(\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

- Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$d(M_0;L)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{l}=(a;b;c)$, имеет вид

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

- Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

- Уравнение плоскости, пересекающей оси координат OX, OY и OZ в точках с координатами $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ и $(0;0;c)$, имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Это уравнение называют уравнением плоскости в отрезках.

- Неравенства

$$Ax+By+Cz+D>0 \text{ и } Ax+By+Cz+D<0$$

задают полупространства.

- Уравнение прямой линии в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и параллельной вектору $\vec{l}=(a;b;c)$, имеет вид

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

- Уравнение прямой линии в пространстве, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

- Прямая линия в пространстве, проходящая через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и параллельная вектору $\vec{l}=(a;b;c)$, может быть задана при помощи параметрических уравнений

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0, \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

где параметр t принимает все значения $-\infty<t<+\infty$.

Пример 5.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; −2; 3), M_2 (0; 1; 5) и M_3 (4; −1; 2).

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через 3 точки:

$$0=\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 0-1 & 1+2 & 5-3 \\ 4-1 & -1+2 & 2-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель, например, по первой строке, получим

$$0=-5(x-1)-5(y+2)-10(z-3).$$

Производя упрощения, находим уравнение плоскости:

$$x+y+2z-5=0.$$

Пример 5.2. Составить канонические уравнения прямой, заданной пересечением плоскостей Π_1: $x-2y+3z=0$ и Π_2: $4x-y+2z-7=0$.

Решение. Найдем координаты $(x_0;y_0;z_0)$ какой-нибудь точки M_0, лежащей на прямой. Для этого положим, например, что $z_0=0$. Тогда из уравнений плоскостей получаем:

$$\begin{cases} x_0-2y_0=0 \\ 4x_0-y_0=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \end{cases}.$$

Следовательно, $M_0=(2;\ 1;\ 0)$. Найдем направляющий вектор прямой, вычислив векторное произведение векторов $\overrightarrow{N_1}=(1;-2;3)$, $\overrightarrow{N_2}=(4;-1;2)$, перпендикулярных плоскостям Π_1 и Π_2:

$$\vec{l}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-1;\ 10;\ 7).$$

Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через точку и параллельной заданному вектору, получаем:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{10}=\frac{z}{7}.$$

Пример 5.3. Даны точки $A(2;1;-1)$, $B(3;4;1)$, $C(5;0;3)$ и $D(-1;2;2)$. Требуется:

а) убедиться в том, что эти точки не лежат в одной плоскости;

б) найти проекцию D_1 точки D на плоскость ABC;

в) найти расстояние от точки D до плоскости ABC;

г) найти площадь ΔABC;

д) составить уравнение плоскости *П*, проходящей через прямую AD и перпендикулярной плоскости ABC.

Решение.

а) Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}=(1;3;2)$, $\overrightarrow{AC}=(3;-1;4)$, $\overrightarrow{AD}=(-3;1;3)$ и найдем их смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 4\\ -3 & 1 & 3\end{vmatrix}=-70\neq 0.$$

Отсюда следует, что точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

б) Составим уравнение плоскости ABC. Для этого сначала найдем нормальный вектор плоскости ABC:

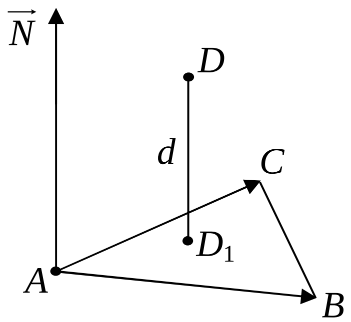
$$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=(14;2;-10).$$

Так как точка $A(2;1;-1)$ лежит на плоскости, то уравнение плоскости можно представить в виде

$$14(x-2)+2(y-1)-10(z+1)=0,$$

или, произведя упрощение, – в виде

$$7x+y-5z-20=0.$$



Прямая DD_1 проходит через точку D и перпендикулярна плоскости ABC. Отсюда можно найти параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases}x=7t-1,\\ y=t+2,\\ z=-5t+2.\end{cases}$$

Подставив эти выражения в уравнение плоскости

ABC, найдем значение параметра t:

$$7(7t-1)+(t+2)-5(-5t+2)-20=0,$$

$$75t=35,\ t=\frac{7}{15}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x=\dfrac{49}{15}-1=\dfrac{34}{15}, \\ y=\dfrac{7}{15}+2=\dfrac{37}{15}, \\ z=-\dfrac{7}{3}+2=-\dfrac{1}{3}. \end{cases} \quad D_1=\left(\frac{34}{15};\ \frac{37}{15};\ -\frac{1}{3}\right).$$

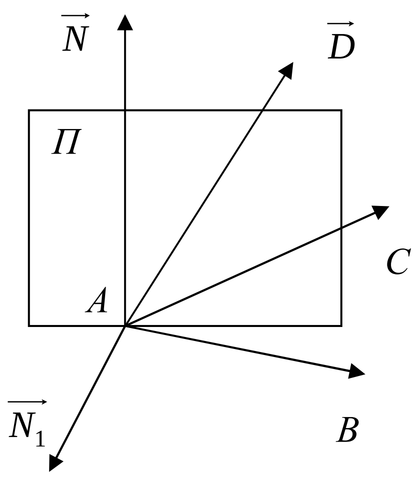
в) Воспользовавшись формулой для расстояния от точки до плоскости, получим:

$$d\left(D;\ ABC\right)=\frac{\left|7(-1)+2-5\cdot 2-20\right|}{\sqrt{49+1+25}}=\frac{35}{\sqrt{75}}=\frac{7}{\sqrt{3}}.$$

г) Найдем площадь ΔABC:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{N}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{14^2+2^2+(-10)^2}=\sqrt{49+1+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}.$$

д)



Найдем нормальный вектор $\overrightarrow{N_1}$ плоскости *П*:

$$\overrightarrow{N_1}=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 3 \\ 14 & 2 & -10 \end{vmatrix}=\left(-16;12;-20\right).$$

Поскольку плоскость *П* проходит через точку *A* и перпендикулярна к вектору $\overrightarrow{N_1}$, получаем:

$$-16(x-2)+12(y-1)-20(z+1)=0,$$

$$4x-3y+5z=0.$$

6. ПОНЯТИЕ О ПОВЕРХНОСТЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА. СФЕРА И ЭЛЛИПСОИД

- Поверхностью второго порядка в трехмерном пространстве $OXYZ$ называется множество точек, координаты $(x;y;z)$ которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второго порядка относительно переменных $(x;y;z)$.

- Простейшими из поверхностей второго порядка являются сфера и эллипсоид.

- Сферой радиуса R в трехмерном пространстве называется множество всех точек трехмерного пространства, находящихся на расстоянии R от некоторой точки $M_1(x_0;y_0;z_0)$, которая называется центром сферы.

- Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_1(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \qquad (6.1)$$

которое можно переписать в форме

$$\frac{(x-x_0)^2}{R^2}+\frac{(y-y_0)^2}{R^2}+\frac{(z-z_0)^2}{R^2}-1=0 \qquad (6.2)$$

- Если точка $M(x;y;z)$ лежит вне сферы, то ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{(x-x_0)^2}{R^2}+\frac{(y-y_0)^2}{R^2}+\frac{(z-z_0)^2}{R^2}-1>0. \qquad (6.3)$$

- Если точка $M(x;y;z)$ лежит внутри сферы, то ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{(x-x_0)^2}{R^2}+\frac{(y-y_0)^2}{R^2}+\frac{(z-z_0)^2}{R^2}-1<0. \qquad (6.4)$$

- Эллипсоидом в трехмерном пространстве называется множество всех точек трехмерного пространства $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-1=0 \qquad (6.5)$$

- Положительные числа a, b, c называются полуосями эллипсоида.

- Точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ является центром симметрии эллипсоида и называется центром эллипсоида.

- Если точка $M(x;y;z)$ лежит вне эллипсоида, то ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-1>0. \qquad (6.6)$$

- Если точка $M(x;y;z)$ лежит внутри эллипсоида, то ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-1<0. \qquad (6.7)$$

- Если у эллипсоида все три полуоси равны, то эллипсоид представляет собой сферу.

- Если у эллипсоида две из трех полуосей равны, то эллипсоид называется эллипсоидом вращения.

Пример 6.1. Составить уравнение сферы с центром в точке $M_1(-1;2;-4)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Решение. Воспользовавшись формулой (6.1), получаем

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=5.$$

Пример 6.2. Определить тип и геометрические свойства поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$x^2+2y^2+3z^2+2x+8y+12z=0. \qquad (6.8)$$

Решение. Выделим в соотношении (6.8) полные квадраты по каждой из переменных x, y и z:

$$\begin{gathered}
x^2+2y^2+3z^2+2x+8y+12z= \\
=\left(x^2+2x\right)+\left(2y^2+8y\right)+\left(3z^2+12z\right)= \\
=\left(x^2+2x\right)+2\left(y^2+4y\right)+3\left(z^2+4z\right)= \\
=\left(x^2+2x+1-1\right)+2\left(y^2+4y+4-4\right)+3\left(z^2+4z+4-4\right)= \\
=\left(x^2+2x+1\right)-1+2\left(y^2+4y+4\right)-8+3\left(z^2+4z+4\right)-12= \\
=(x+1)^2+2(y+2)^2+3(z+2)^2-21=0.
\end{gathered}$$

Далее получаем:

$$\begin{gathered}
(x+1)^2+2(y+2)^2+3(z+2)^2=21, \\
\frac{(x+1)^2}{21}+\frac{2(y+2)^2}{21}+\frac{3(z+2)^2}{21}=1, \\
\frac{(x+1)^2}{21}+\frac{(y+2)^2}{\left(\frac{21}{2}\right)}+\frac{(z+2)^2}{7}=1.
\end{gathered}$$

Таким образом, уравнение (6.8) задает эллипсоид с полуосями

$$a=\sqrt{21},\ b=\sqrt{\frac{21}{2}},\ c=\sqrt{7},$$

центр которого находится в точке $M_1(-1;-2;-2)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется скалярным произведением векторов?
2. Что называется смешанным произведением векторов?
3. Что называется векторным произведением векторов?
4. Каким свойством обладают два вектора, если их скалярное произведение равно нулю?
5. Каким свойством обладают два вектора, если их векторное произведение равно нулю?
6. Каким свойством обладают три вектора, если их смешанное произведение равно нулю?
7. Что называется уравнением прямой на плоскости в отрезках?
8. Что называется параметрическими уравнениями прямой на плоскости?
9. Как найти координаты нормального вектора к прямой на плоскости по ее уравнению?
10. Какова формула расстояния от точки до прямой на плоскости?
11. Что называется уравнением плоскости в отрезках?
12. Как составить уравнение плоскости, проходящей через три точки?
13. Как составить уравнение плоскости, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через заданную точку?
14. Как найти координаты нормального вектора к плоскости по ее уравнению?
15. Как найти угол между плоскостями?
16. Какими способами можно задать прямую в пространстве?
17. Что такое эллипс?
18. Что такое парабола?
19. Что такое гипербола?
20. Что такое эксцентриситет эллипса?
21. Что такое эксцентриситет параболы?

22. Что такое эксцентриситет гиперболы?
23. Что такое фокусы и фокальные радиусы эллипса?
24. Что такое фокусы и фокальные радиусы гиперболы?
25. Что такое фокус и фокальный радиус параболы?
26. Что такое директриса параболы?
27. Каково уравнение сферы?
28. Что такое эллипсоид?
29. Что такое полуоси эллипсоида?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

В пространстве $Oxyz$ заданы три точки:

$$A(0;-2;-4),\quad B(2;1;2),\quad C(-3;4;-6).$$

Найти:

1. Длину отрезка BC;
2. Уравнение плоскости ABC;
3. Площадь треугольника ABC;
4. Объем пирамиды $OABC$;
5. Уравнение прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскости ABC;
6. Угол между прямыми OA и OB;
7. Расстояние от точки $(1;1;-7)$ до плоскости ABC;
8. Расстояние от точки B до прямой AC;
9. Угол между плоскостями OAB и ABC;
10. Уравнение сферы с центром в точке C, касающейся плоскости OAB.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2006.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ, 2003.
4. Привалов И.И. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов. - СПб.: Издательство «Лань», 2005.

Дополнительная:

5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2002.
6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - СПб.: Издательство «Лань», 2005.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - СПб.: Издательство «Лань», 2005.
9. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2002.