Министерство образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет

Кафедра «Техническая эксплуатация и ремонт автомобилей»

В.С. МАЛКИН

Теоретические основы технической эксплуатации автомобилей

Конспект лекций для студентов специальности 1502.00
«Автомобили и автомобильное хозяйство» заочной формы обучения

Тольятти - 2004

ВВЕДЕНИЕ

Техническую эксплуатацию автомобилей (ТЭА) можно представить как область практической деятельности и как науку, которая определяет пути и методы наиболее эффективного управления техническим состоянием автомобильного парка с целью обеспечения регулярности, безопасности и экономичности перевозок.

Инженер по специальности «Автомобили и автомобильное хозяйство» должен не только знать существующие технологии технической эксплуатации автомобилей, но и уметь разрабатывать их самостоятельно, принимать при необходимости нестандартные решения с учетом их последствий. Творческое решение проблем автомобильного транспорта возможно только путем овладения теоретическими знаниями и их умелого применения.

Знание теоретических основ ТЭА предусмотрено ГОС по специальности «Автомобили и автомобильное хозяйство» направления подготовки «Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования»

Предлагаемый для изучения раздел дисциплины «Техническая эксплуатация автомобилей» базируется на изученной ране дисциплине «Теоретические основы надежности и диагностики автомобилей» и является ее логическим продолжением. В разделе рассмотрены вопросы обработки результатов испытаний долговечности деталей, на основании которых определяются нормы расхода запасных частей для ремонта автомобилей. Даны методики определения периодичности технического обслуживания, изложены основы теории массового обслуживания.

1. ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ПАРАМЕТРЫ ПРОЦЕССОВ ТЭА

1.1. Общие принципы описания случайных величин

Процессы, происходящие в природе и технике, можно подразделить на две большие группы:

1. Процессы, описываемые функциональными зависимостями, когда имеется жесткая связь между аргументом и функцией (например, всем известный закон Ома).
2. Случайные или вероятностные процессы, когда функция отражает аргумент с некоторой вероятностью (можно напомнить, что вероятность события - это отношение числа случаев, благоприятствующих наблюдению события к общему числу возможных случаев).

В практике ТЭА в большинстве случаев приходится иметь дело с вероятностными процессами. Например, диаметр цилиндров двигателя вследствие износа увеличивается не одинаково по мере наработки, тем более для разных двигателей той же модели (Рис. 1).

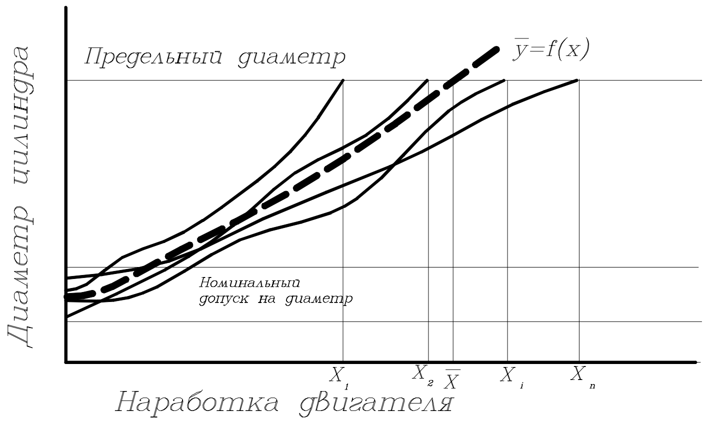


Рис. 1.

Во многих случаях достаточно знать не функцию (регрессию) $\bar{y} = f(x)$, а числовые характеристики совокупности случайных величин x_1, x_2, x_3 и т.д. Основными числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \sum x_i \cdot p_i$, и среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, где n - число анализируемых случайных величин, а p_i - вероятность наблюдения случайной величины. Если анализируется не вся генеральная совокупность случайных величин, а только некоторая выборка из этой совокупности, то в качестве меры рассеяния случайной величины используют оценку среднего квадратического отклонения $S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$.

Более наглядной характеристикой рассеянности (разброса) случайных величин является коэффициент вариации $v=\frac{\sigma}{\bar{x}}$.

Наиболее полно случайная величина описывается законом распределения вероятностей. Распределение вероятностей может быть представлено таблицей, графиком или формулой. Существенное значение для распределения вероятностей имеет характер случайной величины, которая может быть дискретной (количество пассажиров в автобусе может быть только целым) или непрерывной (наработка между очередными проколами колеса).

На рис.2 а показано распределение вероятностей $P(x_i)$ дискретной случайной величины x_i (например, расхода запасных частей со склада в течение дня).

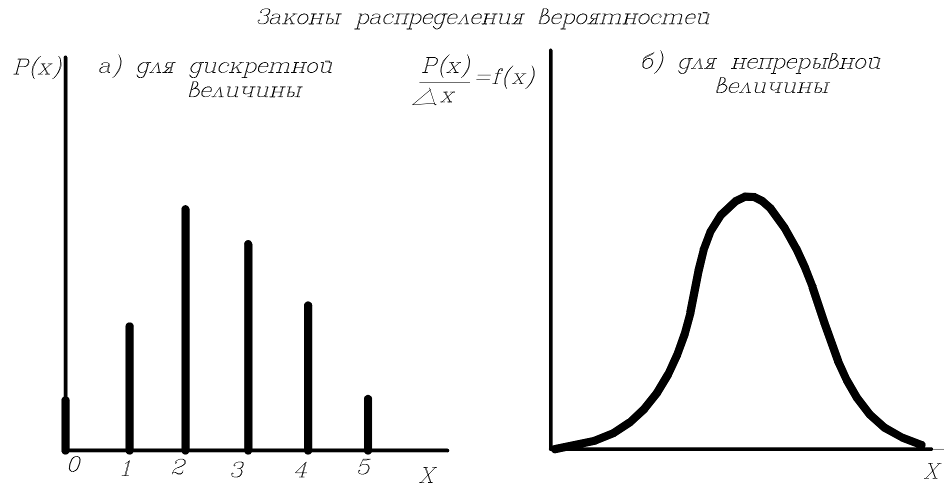


Рис. 2 а. Рис. 2 б.

Если попытаться аналогично изобразить распределение вероятностей непрерывной случайной величины (например, наработки до отказа детали), то возникнет противоречие: конкретное значение x_i - это точка на непрерывной шкале и вероятность отказа именно в это мгновенье очень мала. О реальных величинах вероятности отказа, очевидно, можно говорить только, если рассматривать некоторый интервал наработки Δx. Чем уже интервал, тем меньше вероятность, но отношение $\frac{P(x_i)}{\Delta x_i}=f(x)$ будет конечной величиной, характеризующей определенное значение x. Это отношение называют плотностью вероятности. Плотность вероятности, представленная в виде графика (Рис. 2 б), также позволяет судить о том насколько часто или редко может наблюдаться то или иное значение случайной величины x.

На практике часто важно знать вероятность того что случайная величина равна или меньше некоторого значения, т.е. $P(x \le x_o)$.Для закона распределения дискретной случайной величины $P(x \le x_0) = \sum P(x_i)$ (Рис. 2 в), для непрерывной случайной величины $P(x \le x_0 = \sum P(x_i) = \sum f(x) \cdot \Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то $P(x \le x_0) = F(x) = \int f(x) \cdot dx$. В таком виде закон распределения вероятностей называют интегральным законом (Рис.2 г), а плотность распределения вероятностей часто называют дифференциальным законом распределения вероятностей.

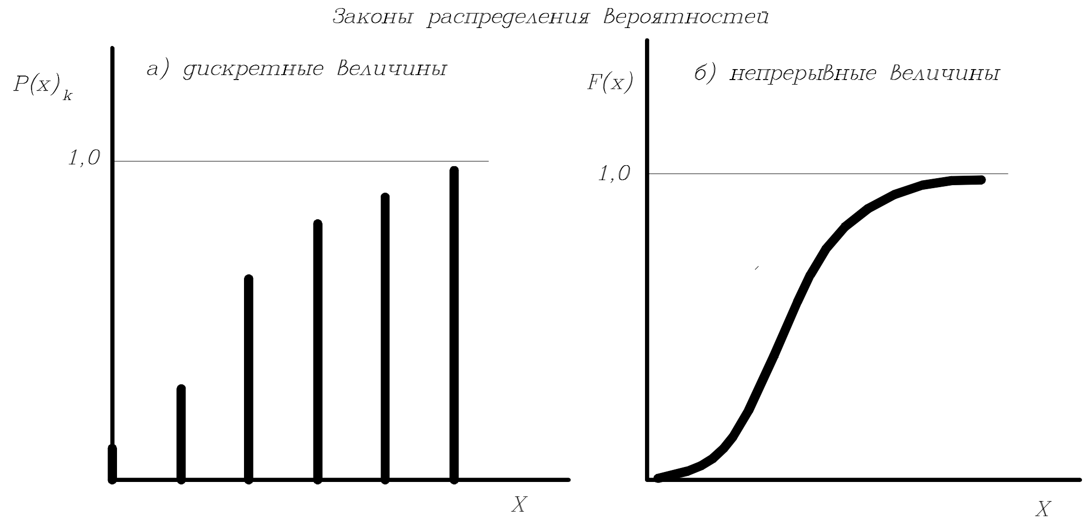


Рис.2 в. Рис. 2 г.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины по рис.2 в могут называть кумулятивной кривой.

1.2. Виды законов распределения вероятностей

Формы кривых распределения могут быть разнообразны, что зависит от особенностей рассматриваемой случайной величины и процесса, в котором рождается эта величина. Главным фактором здесь является степень наличия последействия. Процесс не имеет последействия, если состояние в будущем не зависит от того, как система пришла в настоящее состояние. Например, наработка до прокола колеса и ресурс коленчатого вала являются случайными величинами, но их распределения вероятностей различны. Если мы сегодня установили на двигатель новый коленчатый вал, то завтра он еще новый и даже через месяц работы автомобиля коленчатый вал можно считать новым. Если мы сегодня установили новую камеру в колесо, то никаких особых гарантий отсутствия прокола завтра, потому, что камера новая, нет.

В этих примерах наработка камеры до прокола является случайной величиной, рождаемой процессом без последействия, а ресурс коленчатого вала рождается процессом с хорошо выраженным последействием.

В математике известны многие законы распределения вероятностей случайных величин, из них в практике ТЭА достаточно широко используются пять законов

1.2.1. Экспоненциальный закон

Этот закон описывает непрерывные случайные величины, рождаемые процессом без последействия. Закон выражается формулами

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

где параметром распределения является $\lambda = \frac{1}{\bar{x}}$, здесь $\bar{x}$ - математическое ожидание случайной величины.

Для случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону, коэффициент вариации равен единице, т.е. $\sigma = \bar{x}$. Формы кривых показаны на рис. 3.

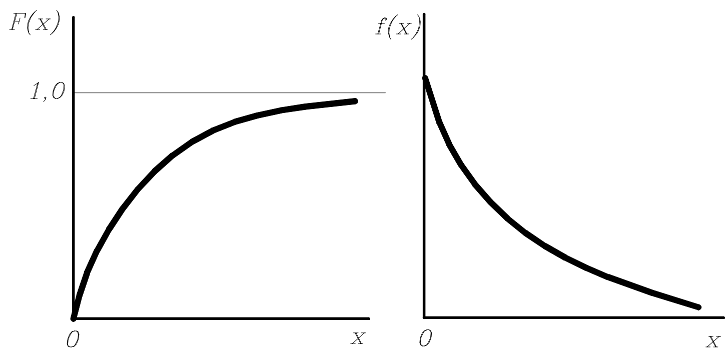


Рис. 3.

Следует отметить, что в окружающей нас действительности очень многие явления можно отнести к процессам без последействия, поэтому наше интуитивное представление часто соответствует экспоненциальному закону (например, человек «привыкает» к опасности, потому что вначале прирост вероятности события большой, а со временем прирост уменьшается).

Случаи применения экспоненциального закона в практике ТЭА:

- наработка на отказ автомобиля при выходе из строя различных деталей;
- наработка на отказ (моменты возникновения потребности в замене) конкретной детали для группы одновременно работающих автомобилей;

- периодичность внезапных отказов деталей из-за аварии, ДТП и т.п. (например, прокол колеса);
- время простоя автомобиля в ремонте при дефиците запасных частей.

1.2.2. Нормальный закон

Этим законом описываются непрерывные случайные величины, рождаемые процессом с хорошо выраженным последействием. По предельной теореме Ляпунова, если случайная величина является суммой многих случайных величин, то она хорошо описывается нормальным законом. Отсюда можно считать, что если на процесс влияет много различных факторов, то рождаемая этим процессом случайная величина будет распределена по нормальному закону, который выражается формулой $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$,

где $\bar{x}$ - математическое ожидание случайной величины;

σ - среднее квадратическое отклонение.

Интегральная функция $F(x) = \int f(x)dx$ не имеет аналитического выражения, поэтому для ее построения пользуются табличными значениями функции $F(z)$, где $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ - квантиль (условный аргумент, позволяющий определять значения вероятностей для любых совокупностей нормально распределенных случайных величин). Следует отметить, что в разных литературных источниках квантиль может обозначаться различными буквами. Формы кривых распределения показаны на рис.4.

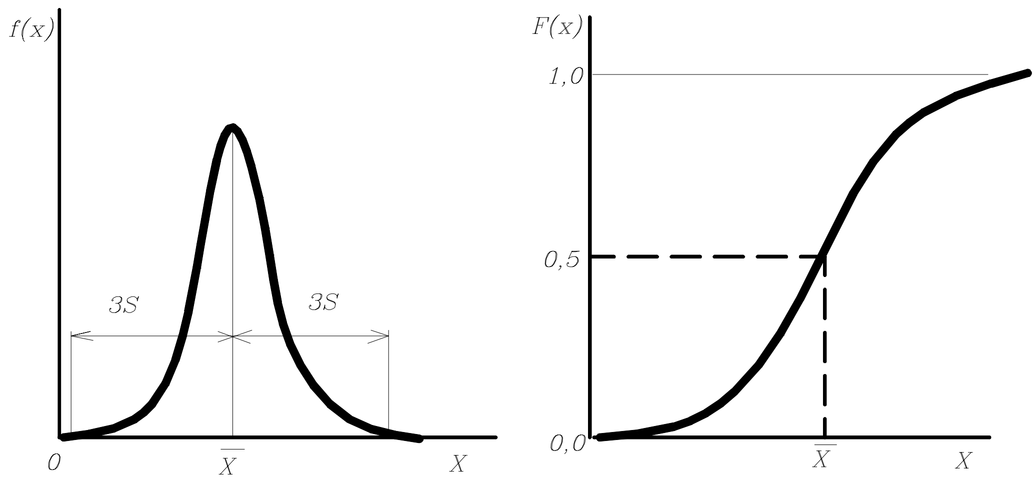


Рис. 4.

Характерной особенностью нормального закона является то, что кривая плотности вероятности симметрична относительно математического ожидания, а кривая интегральной вероятности зеркально симметрична относительно вероятности 0,5. Поскольку с вероятностью 0,997 нормально распределенная случайная величина укладывается в интервал $\bar{x} \pm 3\sigma$, а в реальных условиях отрицательных величин, как правило, не бывает, то математическое ожидание не может быть меньше 3σ, значит, нормально распределенные случайные величины имеют коэффициент вариации $v \leq 0{,}333$. По этому условию выбирают вид закона распределения анализируемых случайных величин.

Случаи применения нормального закона распределения вероятностей в практике ТЭА:

- ресурс нормально изнашиваемых деталей;
- время простоя автомобиля в ТО;
- трудоемкость ТР;
- пробег автомобилей по календарным периодам;
- расход эксплуатационных материалов;
- и т.п.

1.2.3. Закон Вейбулла

Закон описывает непрерывные случайные величины и выражается формулами:

$$F(x) = 1 - e^{(\frac{x}{a})^b}, \qquad f(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b},$$

где a и b - параметры (эмпирические коэффициенты).

В зависимости от соотношения величин эмпирических коэффициентов формы кривых могут быть различны (Рис. 5). Кривая может быть симметричной, близко совпадающей с нормальным законом и несимметричной.

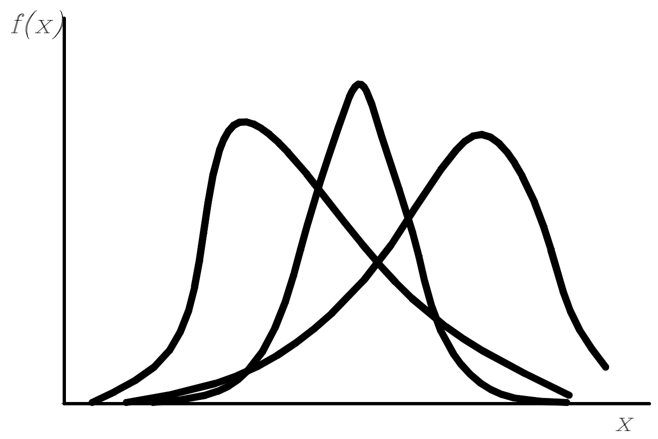


Рис. 5.

Чаще всего закон Вейбулла используют при коэффициенте вариации $0{,}4 \le \nu \le 0{,}9$.

Случаи применения закона в практике ТЭА:

- ресурс деталей, разрушающихся из-за усталости;
- наработка до отказа крепежных деталей;
- простои автомобиля в текущем ремонте;
- и т.п.

1.2.4. Закон равновероятного распределения

Этим законом описываются непрерывные случайные величины, которые достоверно встречаются на некотором интервале от a до b и вероятность наблюдения случайной величины в этом интервале постоянна (Рис.6).

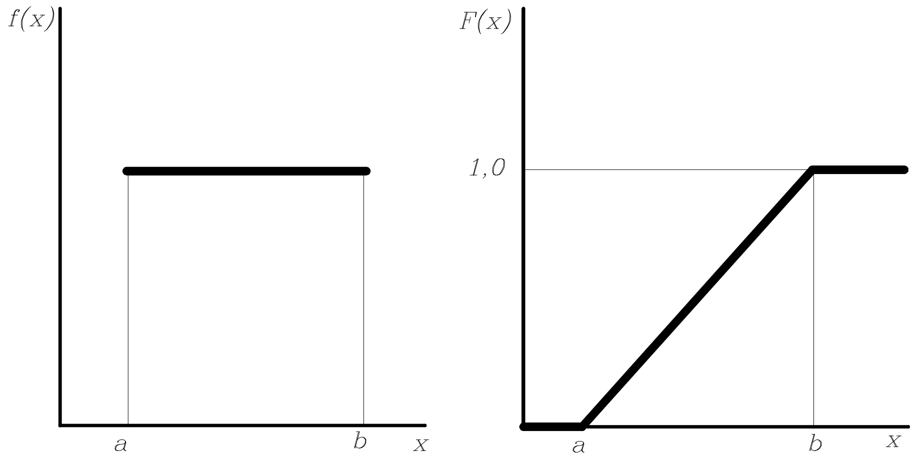


Рис.6.

Например, если автобусы идут по маршруту с интервалом 15 минут, то время ожидания автобуса человеком, пришедшим на остановочный пункт в случайный момент времени, будет находиться в интервале от 0 до 15 минут и распределено по закону равной вероятности.

Описывается этот закон следующим образом:

$f(x) = 0$ при x меньше a;

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ при } a \le x \le b;$$

$f(x) = 0$ при x больше a;

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ при } a \le x \le b.$$

Случаи применения закона в практике ТЭА:

- время простоя отказавшего технологического оборудования до прихода мастера по ремонту, если заявка в течение смены обязательно выполняется;
- время ожидания маршрутного транспортного средства;
- и т.п.

1.2.5. Закон Пуассона

Закон описывает дискретные случайные величины и является приближенным выражением более общего закона Бернулли. По формуле, предложенной Пуассоном, можно определять вероятность попадания в выборку $n \leq 0{,}1N$, где N - объем партии, x объектов с определенным свойством, например, бракованных. При этом должно выполняться условие, что вероятность наблюдения бракованных изделий в партии должна быть менее 0,1.

Распределение выражается формулой $P(x) = \frac{a^x}{x!} \cdot e^{-a}$, где параметр распределения является математическим ожиданием случайной величины $a = \bar{x}$.

Случаи применения закона Пуассона в практике ТЭА:

- число отказов для группы одновременно работающих автомобилей в течение заданного промежутка времени (или наработки);
- количество аварий или дорожно-транспортных происшествий;
- число дефектных изделий, попадающих в выборку из партии изделий;
- количество клиентов, обращающихся на пункт обслуживания в единицу времени;
- количество запасных частей, забираемых со склада;
- и т.п.

Вопросы для самоконтроля по первому разделу

1. Что дает более полное представление о разбросе случайной величины: среднее квадратическое отклонение или ее коэффициент вариации?
2. Почему плотность распределения вероятностей случайной величины называют дифференциальным законом распределения? Может ли этот закон описывать дискретные случайные величины?
3. Каким законам распределения описывается наработка на отказ автомобиля и наработка до предельного износа коленчатого вала?
4. Почему нормальным законом описываются значения ресурса нормально изнашиваемых деталей автомобиля?
5. Каким законом распределения может быть описан ресурс детали, если его среднее значение в два раза больше среднего квадратического отклонения?

6. Каким законом распределения, обычно, описывается ресурс рессор отказывающих из-за усталостных трещин?
7. В чем разница закона распределения, представленного как $F(x)$ и $f(x)$?

2. ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ АВТОМОБИЛЕЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

2.1. Организация испытаний автомобилей в условиях АТП

Показатели надежности автомобилей могут быть определены только по результатам испытаний, которые могут быть сориентированы на определения одного или нескольких показателей (чаще всего это показатели долговечности или безотказности).

Объектами испытаний могут быть:

- образцы материалов (масел, присадок, покрытий и т.д.);
- детали (оцениваются конструктивные и технологические факторы, режимы обработки и т.д.);
- агрегаты автомобиля;
- автомобили;
- системы машин (учитывается взаимодействие с механизмами погрузки, грузами, прицепами и т.п.).

В зависимости от решаемых задач испытания различают:

- исследовательские (проводят для изучения факторов, влияющих на надежность);
- контрольные (оценивают достигнутый уровень надежности данного изделия).

По месту проведения испытания различают:

- стендовые (обеспечивают хорошие условия для быстрого получения результатов и сопоставимости сравнительных испытаний, однако распространение результатов стендовых испытаний на условия реальной эксплуатации пробематично);
- полигонные (имеют преимущества стендовых испытаний в части сравнимости сравнительных испытаний и дают хорошую сопоставимость с реальными условиями эксплуатации);
- эксплуатационные (дают наиболее достоверные результаты, но требуют много времени на испытания).

Перед проведением испытаний в условиях АТП, АРЗ или другой организации необходимо:

1. Разработать методику испытаний с указанием технологии измерений и обработки получаемых данных.
2. Издать приказ (распоряжение) по предприятию с указанием сроков проведения испытаний, ответственных исполнителей, утвердить методику испытаний.
3. Провести инструктаж (обучение) всех участвующих в испытаниях.

В процессе проведения испытаний необходимо фиксировать наиболее полно всю полезную информацию:

- вид отказа,
- наработку изделия,
- момент отказа (астрономическое время),
- причину отказа,
- условия среды в момент отказа (температуру, манипуляции водителя),
- влияние отказа на работоспособность других агрегатов и автомобиля,
- затраты времени и средств на устранение отказа.

Для фиксации результатов испытаний заводят специальный журнал, обработку получаемых статистических данных полезно вести с использованием компьютерных программ.

2.2. Обработка результатов испытаний безотказности

Определение показателей безотказности автомобиля производят при наблюдении группы автомобилей в условиях реальной эксплуатации. В журнале фиксируют наработку (по спидометру) и наименование отказавших деталей и систем. На основании журнала полезно составить гистограмму частот отказов по интервалам, определить среднее число отказов, приходящихся на один автомобиль за весь период испытаний, например 25 тыс. км. Путем деления среднего пробега (по принятому примеру 25 тыс. км) на среднее число отказов на один автомобиль находят среднюю наработку на отказ $\bar{x}$ автомобиля в процессе испытаний.

Поскольку отказы различных деталей, как правило, не связаны друг с другом, наработка на отказ является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Параметр закона распределения $\lambda = \frac{1}{x}$, а вероятность наработки до отказа $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Например, при средней наработке на отказ $\bar{x} = 2{,}7$ тыс. км интенсивность потока отказов

$\lambda = 0{,}37$ ^{1}/тыс. км и вероятность наработки на отказ $F(x) = 1 - e^{-0{,}37x}$. Используя полученную формулу, можно найти безотказность автомобиля $R(x) = 1 - F(x)$. По нашему примеру $R(x) = e^{-0{,}37x}$. Безотказность, обычно, представляют графиком, наглядно показывающим, с какой вероятностью автомобиль будет оставаться безотказным при разных значениях наработки.

2.3. Оценка долговечности деталей автомобиля на основе полностью завершенных испытаний

Наблюдая за группой автомобилей, на которых установлены испытуемые детали, можно зафиксировать их ресурсы $x_1, x_2, x_3, ... x_n$, т.е. случайные величины наработки от начала их эксплуатации до предельного состояния. Располагая полученными значениями ресурсов, можно найти средний ресурс $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ и оценку среднего квадратического отклонения $S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$.

Для определения гамма процентного ресурса нужно располагать кривой безотказности $R(x) = 1 - F(x)$. Выбор закона распределения вероятностей производят на основе априорной информации о характере анализируемой случайной величины, а также по величине коэффициента вариации

$\nu = \frac{S}{\bar{x}}$. Если коэффициент вариации меньше 0,33, то можно принять нормальный закон, если он больше – то закон Вейбулла. Построение кривых производят с помощью специальных таблиц, приведенных в справочной литературе по математической статистике (Приложение 1).

2.4. Обработка результатов усеченных испытаний

Многие испытания автомобилей связанные с определением ресурса их деталей и агрегатов весьма продолжительны и, за счет большого рассеяния ресурсов, наработка до отказа последнего автомобиля в подконтрольной группе может быть в несколько раз больше наработки до отказа первого автомобиля. Такая растянутость моментов наблюдения отказов и желание получить как можно скорее результат обусловила разработку методов определения числовых характеристик случайных величин на основе приостановленных (усеченных) испытаний.

Если при обработке полностью завершенных испытаний вначале находят числовые характеристики случайной величины и по ним строят кривую закона распределения вероятностей, то при обработке усеченных испытаний вначале строят кривую вероятности отказа и по ней находят числовые характеристики (средний ресурс или гамма процентный ресурс).

Без существенного снижения точности определении среднего ресурса, испытания долговечности автомобилей можно прекращать (усекать) после отказа 60…70% числа испытуемых автомобилей n. Располагая результаты испытаний $x_1, x_2, x_3, ... x_k$ в порядке нарастания ресурсов, можно рассчитать вероятности отказов, соответствующие полученным значениям случайных величин, деля порядковый номер случайной величины на число испытуемых автомобилей $F(x_i)=\frac{i}{n}$. Нанося на график точки вероятностей и проводя через них кривую, можно получить закон распределения вероятностей.

При малом числе n испытуемых автомобилей кривая закона может оказаться существенно смещенной (в предельном случае при $n=1$ $F(x_1)=1$, т.е. наблюдаемое значение ресурса как бы является самым большим, но логичнее предположить, что в испытаниях участвует автомобиль со средним ресурсом, тогда должна быть вероятность $F(x)=0{,}5$). Чтобы исключить смещение кривой закона распределения вероятностей, следует рассчитывать вероятности по формуле $F(x_i)=\frac{i}{n+1}$.

Вторым приемом, повышающим точность результатов испытаний, является использование специальной вероятностной бумаги, когда кривая закона распределения вероятностей наносится на график с нелинейными шкалами. Порядок построения нелинейных шкал определяется видом закона распределения вероятностей. Для нормального закона шкала ординат линейная, а шкала абсцисс (вероятностей) – нелинейная. Эту шкалу можно построить по специальной таблице (Приложение 2), или непосредственно графическим построением, как на рис.7.

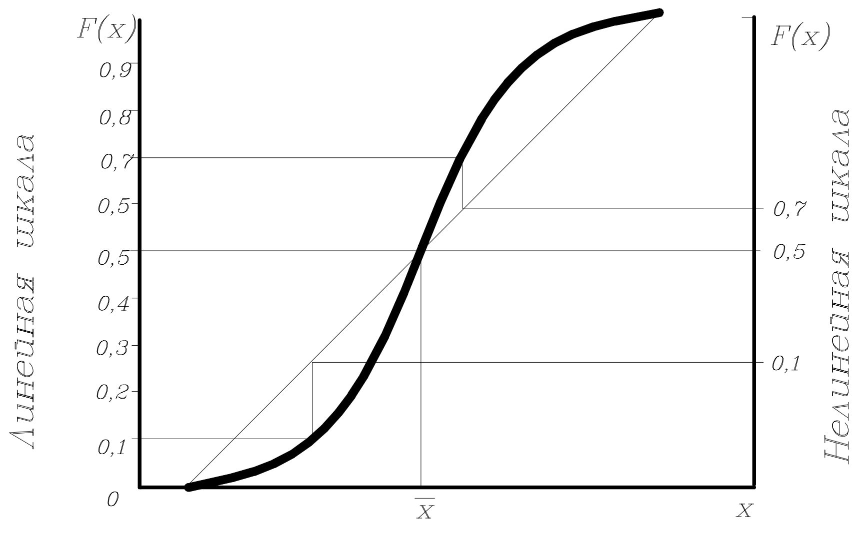


Рис. 7.

Нанося величины $F(x_i)$ против соответствующих значений x_i на вероятностную бумагу и проводя через полученные точки прямую линию, получим искомое распределение вероятностей. Следует помнить, что при обработке усеченных испытаний следует заранее знать, каким законом описываются подобные случайные величины, т.е. иметь некоторый опыт проведения подобных испытаний.

Числовые характеристики получаемого распределения случайных величин определяют по положения линии распределения относительно осей координат на графике. Например, для нормального закона при испытании долговечности средний ресурс соответствует вероятности 0,5 (см. рис.7).

2.5. Обработка незавершенных или многократно усеченных испытаний по методу Джонсона.

При определении ресурса агрегатов и деталей в эксплуатационных условиях возможны вынужденные прекращения испытаний некоторых автомобилей. Момент прекращения испытаний, обычно, случайный и наработка незавершенных испытаний бывает различна для разный автомобилей. Это является существенным отличием от усеченных испытаний, когда они прекращаются по заранее продуманному плану и все автомобили с не отказавшими испытуемыми агрегатами имеют наработку, единую для всех автомобилей.

Для обработки незавершенных испытаний может быть использован комбинаторный метод, или, как его называют, метод Джонсона [8]. Поясним идею метода на примере.

Для оценки долговечности кузова взяты под наблюдение 6 автобусов. Моментом отказа считается появление усталостных трещин на несущих лонжеронах кузова.

В процессе испытаний автобусов фиксируемые по мере пробега события развивались, как указано в таблице 1.

Таблица 1

№	Пробег, тыс. км	Состояние автобуса	
1	112	Отказ	F_1
2	213	Попал в аварию	S_1
3	250	Отказ	F_2
4	484	Сгорел	S_2
5	500	Попал в аварию	S_3
6	572	Отказ	F_3

По результатам испытаний видно, что отказ кузова наблюдался только у трех из шести автобусов. Если отбросить несостоявшиеся испытания, то выборка будет состоять только из трех случайных величин, что не может обеспечить высокой точности определения числовых характеристик распределения вероятностей. В то же время пренебрегать информацией по четвертому и пятому автобусам, которые оставались в работоспособном состоянии при наработках 484 и 500 тыс. км, представляется явно нелогичным.

Общая последовательность результатов испытаний будет представлена рядом состояний: $F_1, S_1, F_2, S_2, S_3, F_3$

Если обрабатывать результаты по трем отказам, как полностью завершенным испытаниям, то вероятности отказа будут равны:

$$F(x = 112) = \frac{1}{3}, \qquad F(x = 250) = \frac{2}{3}, \qquad F(x = 572) = \frac{3}{3}.$$

Если принимать во внимание все 6 автобусов, то, естественно,

$F(x = 112) = \frac{1}{6}$, а далее или $F(x = 250) = \frac{2}{6}$, или $F(x = 250) = \frac{3}{6}$, в зависимости от наработки до отказа автобуса, выбывшего из испытаний при пробеге 213 тыс. км (она могла быть больше или меньше 250 тыс. км). Таким образом, отказ при 250 тыс. км может находиться на втором или третьем месте, в первом приближении можно принять среднее место 2,5.

Для более точного определения ожидаемого места отказа следует рассмотреть все возможные варианты его расположения.

Определим число возможных исходов испытания автобусов, если отказ при 250 тыс. км будет находиться на втором месте в ряду состояний:

$F_1, F_2, S_1, S_2, S_3, F_3$; $F_1, F_2, S_2, F_3, S_3, S_1$; и т. д. - в 24-х случаях (по числу перестановок из четырех элементов S_1, S_2, S_3, F_3: $P = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

Если отказ при 250 тыс. км будет находиться на третьем месте, то число возможных исходов событий будет выражаться следующим набором состояний: $F_1, S_1, F_2, S_2, S_3, F_3$; $F_1, S_1, F_2, F_3, S_2, S_3$; и т. д. – в $P = 3! = 6$ случаях. Таким образом, всего имеется 24+6=30 вариантов исхода испытаний, математическое ожидание места отказа при 250 тыс. км $n_2 = \frac{2 \cdot 24 + 3 \cdot 6}{30} = 2{,}2$.

Третий отказ автобуса при пробеге 572 тыс. км мог бы занять 3-е, 4-е, 5-е или 6-е место в ряду отказов, если бы в наших исследованиях все испытания были завершены. Рассмотрим возможные варианты исходов испытаний:

А) $F_1, F_2, F_3, S_1, S_2, S_3$; $F_1, F_2, F_3, S_3, S_2, S_1$; … в 3!=6-ти случаях;

Б) $F_1, S_1, F_2, F_3, S_2, S_3$; $F_1, F_2, S_1, F_3, S_2, S_3$; … в 8-ми случаях;

В) $F_1, S_1, F_2, S_2, F_3, S_3$; $F_1, F_2, S_1, S_2, F_3, S_3$; … в 8-ми случаях;

Г) $F_1, S_1, S_2, F_2, S_3, F_3$; $F_1, F_2, S_1, S_2, S_3, F_3$; … в 8-ми случаях.

Число возможных исходов может быть определено обычным перебором комбинаций, но следует помнить, что S_2 и S_3 не могут быть поставлены ранее F_2, поскольку в наших испытаниях эти автобусы уже проработали более 250 тыс. км.

Математическое ожидание места наблюдаемого в наших испытаниях третьего отказа $n_3 = \dfrac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 8}{6 + 8 + 8 + 8} = 4{,}6$.

Джонсон предложил для расчета ожидаемого места отказа формулу:

$$n_i = n_{i-1} + \frac{N + 1 - n_{i-1}}{N + 1 - m_{i-1}}$$

где n_i - ожидаемое место отказа при наработке x_i;

n_{i-1} - место предшествующего отказа;

m_{i-1} - число предшествующих отказавших и выбывших из испытаний объектов;

N - количество испытуемых объектов.

Для нашего примера $N = 6$, место отказа при наработке 112 тыс. км $n_1 = 1$, при наработке 250 тыс. км - $n_2 = 1 + \dfrac{6+1-1}{6+1-2} = 2{,}2$ и при 572 тыс. км - $n_3 = 2{,}2 + \dfrac{6+1-2{,}2}{6+1-5} = 4{,}6$. Расчеты полностью совпадают с результатами комбинаторных вычислений.

Зная ожидаемые места отказов, находят несмещенные значения вероятностей $F(x_i) = \dfrac{n_i}{N+1}$, которые так же, как при обработке усеченных испытаний, наносят на вероятностную бумагу (график с нелинейными шкалами). По точкам вероятностей проводят прямую, являющуюся законом распределения вероятностей, по которой можно найти числовые характеристики случайной величины.

Для рассмотренного примера испытания ресурса лонжеронов автобуса следует принять закон Вейбулла, поскольку разрушения имеют усталостный характер. На основании проведенных расчетов найден средний ресурс 414 тыс. км и среднее квадратическое отклонение 297 тыс. км.

2.6. Обработка результатов испытаний долговечности, усеченных слева

В рассмотренных ранее методах определения показателей долговечности агрегатов или деталей автомобиля наблюдение за их работой производилось с момента установки на автомобиль до отказа. Возможные приостановы (усечения) испытаний происходили по общепринятому направлению оси абсцисс на графике, как бы, справа. В данном методе результаты испытаний усечены слева, т. е. наблюдается момент отказа, а момент начала работы испытуемого агрегата или детали неизвестен.

Идею такого метода можно пояснить условным примером. Марсиане прилетели на Землю и хотят узнать, что такое человек. В соответствие с традиционным методом организации эксперимента они должны подойти к роддому, дождаться рождения ребенка и наблюдать за ним в течение всей его жизни. Такой эксперимент будет очень длительным. Скорее всего, марсиане выберут оживленный перекресток и будут наблюдать одновременно за большой группой людей состоящей из взрослых, стариков, детей и т.п. Очевидно, что достаточно быстро на основании такого наблюдения можно получить представление о человеке как таковом.

По аналогии, наблюдая за большой группой разновозрастных автомобилей одной модели на сравнительно небольшом отрезке времени или наработки, можно получить информацию о долговечности их агрегатов или деталей.

Например, нас интересует долговечность ведомого диска сцепления и мы наблюдаем за большой группой автомобилей на протяжении промежутка времени T (для простоты рассуждения примем, что это один год). Этот промежуток должен быть достаточно большим, чтобы можно было иметь отказы диска сцепления, но при этом вероятность последовательных двух и более отказов на одном автомобиле должна быть крайне мала. Поскольку для построения закона распределения вероятностей достаточно 6…8 точек, то можно величину T выбирать примерно равной 0,25 предполагаемого среднего срока службы детали.

Результаты наблюдения заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Возраст автомобилей в периодах T	Количество наблюдаемых отказов деталей m_i	Количество автомобилей в возрастной группе n_i
1	m_1	n_1
2	m_2	n_2
3	m_3	n_3
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Разбивая возможный срок службы на интервалы T, мы будем иметь гистограмму (рис.8), характеризующую вероятности наблюдения отказов P_i в интервалах T_i. Если распределение вероятностей близко к нормальному закону, то при большом сроке службы вероятности отказов уменьшаются, так как основная доля деталей уже отказала ранее. Практически, у старых автомобилей детали отказывают чаще, чем у новых. Это объясняется тем, что в числе отказывающих деталей присутствуют не только первые (установленные на заводе) детали, но и установленные при проведенных ремонтах.

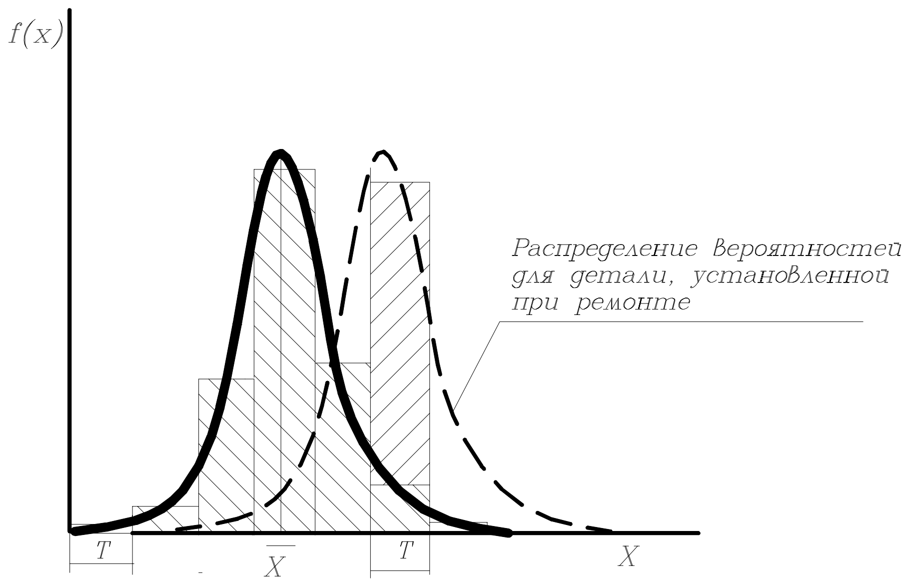


Рис.8.

Таким образом, для построения закона распределения вероятностей необходимо из наблюдаемого количества отказов исключить отказы деталей установленных при ремонтах или скорректировать наблюдаемые (опытные) вероятности $P_i^0 = \dfrac{m_i}{n_i}$,

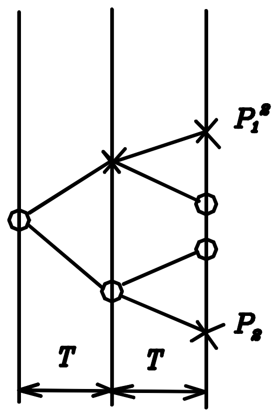
где m_i - количество отказавших деталей,

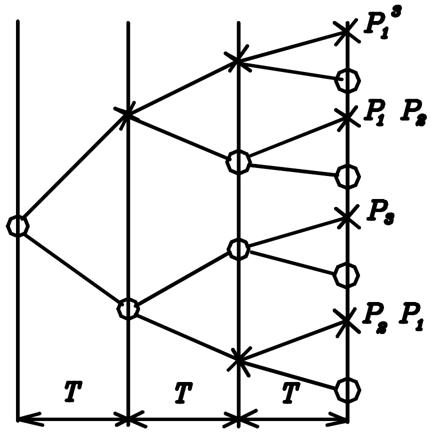
n_i - количество автомобилей в T_i-ой возрастной группе.

Для вывода формулы, позволяющей корректировать опытные вероятности, рассмотрим граф возможных исходов событий для объектов (деталей), имеющих различную наработку или срок службы (рис.9).

На графе состояние отказа обозначено крестиком, а работоспособное состояние – кружочком, вероятность отказа за первый интервал T обозначено P_1, за второй интервал - P_2, за третий - P_3 и т. д.

Рис.9.





Очевидно, вероятность отказа детали в первом периоде будет совпадать с опытной вероятностью, которая определяется по результатам наблюдения за группой новых автомобилей, $P_1 = P_1^0 = \frac{m_1}{n_1}$.

Вместо отказавшей детали при ремонте автомобиля будет установлена другая деталь, которая также может отказать во втором периоде T. Вероятность двух отказов подряд выразится произведением вероятностей отказов и будет равна P_1^2. Во втором периоде с вероятностью P_2 может наблюдаться отказ детали, установленной на заводе, срок службы которой мы ищем.

Таким образом, опытная вероятность отказов детали в возрастной группе автомобилей 2θ будет равна $P_2^0 = P_1^2 + P_2$. Отсюда $P_2 = P_2^0 - P_1^2$, или можно записать $P_2 = P_2^0 - P_1 \cdot P_1^0$. Для последующего вывода полезно выразить $P_1^2 = P_2^0 - P_2$.

Аналогично для третьего периода можно записать $P_3^0 = P_1^3 + 2P_1P_2 + P_3$. Представим $P_1^3 = P_1 \cdot P_1^2$, и, подставляя выражение квадрата вероятности, получим $P_1^3 = P_1P_2^0 - P_1P_2$. Вставим эту зависимость в выражение опытной вероятности третьего периода $P_3^0 = P_1P_2^0 - P_1P_2 + 2P_1P_2 + P_3$. Отсюда можно выразить вероятность отказа детали в третьем периоде $P_3 = P_3^0 - P_1P_2^0 - P_2P_1^0$ (напомним, что $P_1 = P_1^0$).

Сопоставляя полученные выражения вероятностей отказа по периодам, можно заметить общую тенденцию и для любого периода T_k можно записать $P_k = P_k^0 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot P_{k-i}^0$. Здесь вычитаемая сумма, по сути, исключает отказы деталей, которые устанавливались при ремонтах до момента наблюдения за автомобилями в течение периода T.

Полученные значения вероятностей можно представить в виде гистограммы, или в виде кумулятивной кривой закона распределения вероятностей $F(T_k) = \sum_{i-1}^{k} P_i$, по которой удобнее находить средний срок службы контролируемого объекта. Для повышения точности построения, следует точки вероятностей наносить на вероятностную бумагу (график с нелинейными шкалами), как и при обработке усеченный испытаний. По шкале ординат откладывают значения T_k, а по шкале абсцисс $F(T_k)$ (Приложение 2).

Достоинством рассмотренного метода оценки долговечности деталей и агрегатов автомобилей является то, что, придя в АТП с большим разновозрастным парком автомобилей, инженер уже после года работы имеет возможность определить средний срок службы всех деталей. Зная средний годовой пробег автомобилей по среднему сроку службы легко определить средний ресурс, что позволяет оценивать надежность автомобилей и планировать расход запасных частей.

Вопросы для самоконтроля по второму разделу

1. Какова общая процедура организации испытаний надежности автомобилей в условиях автотранспортного предприятия или авторемонтного завода?
2. Какие данные фиксируются в испытаниях безотказности автомобиля?
3. Как определяют гамма процентный ресурс детали по результатам полностью завершенных испытаний?
4. С какой целью проводят усеченные испытания долговечности деталей? В чем отличия этих испытаний от полностью завершенных испытаний?
5. Как находят средний ресурс по результатам незавершенных испытаний, когда часть испытуемых объектов выбывает из испытаний?
6. Можно ли в АТП, имеющем большой парк разновозрастных автомобилей, через год наблюдений получить информацию о среднем сроке службы деталей?

3. НОРМИРОВАНИЕ ЗАПАСНЫХ ЧАСТЕЙ ДЛЯ РЕМОНТА АВТОМОБИЛЕЙ

3.1. Расчет средних норм расхода запасных частей.

Средние нормы запасных частей, используемых для текущего ремонта автомобилей, определяются из следующих соображений.

За весь срок службы автомобиля до списания t_a его общая наработка (амортизационный пробег) X_a при среднем годовом пробеге $\overline{X}_Г$ составит $X_a = \overline{X}_Г \cdot t_a$. Замена детали или агрегата (в общем случае – части) производится с некоторой периодичностью. Обычно части автомобиля, поступающего в эксплуатацию с завода, служат дольше, чем части, устанавливаемые на автомобиль пре его текущем ремонте. Если наработка автомобиля до первой замены части в среднем равна $\overline{X}_1$, то наработка (средний ресурс)до второй и последующих замен $\overline{X}_2 = \eta \overline{X}_1$, где $\eta \le 1$- коэффициент, учитывающий уменьшение ресурса деталей вследствие общего старения автомобиля и несовершенства технологического процесса текущего ремонта.

Принимая значение коэффициента η постоянным, можно определить число второй и последующих замен части делением соответствующего отрезка наработки автомобиля $X_a - \overline{X}_1$ на средний ресурс части $\overline{X}_2$ (условно будем считать, что результат деления будет целым числом). Начиная счет с первой замены можно найти количество запасных частей, устанавливаемых на автомобиль за весь срок его службы до списания (при списании новая часть не устанавливается)

$$N_a = \frac{X_a - \overline{X}_1}{\overline{X}_2} = \frac{X_a - \overline{X}_1}{\eta \overline{X}_1}.$$

Зная N_a, можно определить годовую потребность автомобиля в запасных частях $N_Г = \frac{\overline{X}_Г t_a - \overline{X}_1}{\eta \overline{X}_1 t_a} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\overline{X}_Г}{\overline{X}_1} - \frac{1}{t_a}\right)$. Если в конструкции автомобиля используется n однотипных деталей, то годовая потребность в запасных частя может быть представлена как средняя норма запасных частей, которая обычно дается не на один, а на 100 автомобилей:

$$H = \frac{100n}{\eta}\left(\frac{\overline{X}_Г}{\overline{X}_1} - \frac{1}{t_a}\right),$$

где H - средняя годовая норма запасных частей;
n - число нормируемых частей на одном автомобиле;
$\overline{X}_Г$ - средний годовой пробег автомобиля;
$\overline{X}_1$ - средний ресурс части в начальный период эксплуатации;
η - коэффициент, учитывающий уменьшение ресурса частей, установленных на автомобиль при его текущем ремонте;
t_a - срок службы автомобиля.

На основании полученной расчетной формулы составляют номенклатурные справочники норм расхода запасных частей по моделям автомобилей. Этой работой занимается Центральная научно-исследовательская лаборатория Министерства автомобильного транспорта.

3.2. Расчет норм запасных частей исходя из заданной вероятности отсутствия простоев (при установившемся потоке отказов)

Расчет позволяет определить такие нормы запаса частей, которые с любой наперед заданной вероятностью гарантируют отсутствие простоев автомобиля из-за нехватки частей в течение планируемого периода. Метод расчета приемлем при любом количестве автомобилей, если ресурс частей описывается экспоненциальным законом (отказы носят внезапный характер, например, разбивание лобового стекла и т. п.), а также может быть распространен на большие группы автомобилей, разнородных по наработке и сроку службы, когда ресурс описывается любым законом распределения вероятностей.

В первом и втором случае, когда отказы нормируемых деталей происходят на разных автомобилях и не связаны друг с другом, количество отказов за планируемый промежуток времени описывается законом Пуассона $P(k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}$, где параметр распределения a - это средний расход запасных частей за планируемый период. При запасе H_α частей вероятность, что случайное число отказов будет меньше этого запаса, выразится суммой вероятностей
$\alpha = P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)+\cdots+P(k=H_\alpha)$. Используя закон Пуассона, можно записать $\alpha = e^{-a}\sum_{k=0}^{H_\alpha}\frac{a^k}{k!}$, для удобства расчета перепишем формулу, перенося постоянный множитель в левую часть равенства $\alpha\cdot e^a = \sum_{k=0}^{H_\alpha}\frac{a^k}{k!}$.

Зная средний расход запасных частей, и задаваясь требуемой вероятностью отсутствия простоев из-за нехватки запасных частей подсчитывают левую часть равенства, а затем начинают считать сумму правой части последовательным перебором числа k до момента, когда величина суммы достигнет значения левой части равенства. То число k, при котором будет достигнуто равенство, и будет искомой нормой запасных частей H_α.

На основании рассмотренных формул составлены таблицы относительных норм $\rho = \frac{H_\alpha}{a}$ запасных частей, обеспечивающих заданную вероятность отсутствия простоев из-за их нехватки. Рассмотрим фрагмент такой таблицы со значениями относительных норм ρ (Таблица 3)

Таблица 3

Вероятность α	Средний расход запасных частей, a				
	25	100	….	1000	5000
0,900	1,24	1,18	….	1,04	1,02
….					
0,998	1,6	1,29	….	1,09	1,04

Анализируя табличные значения, можно заметить очень важную закономерность: чем больше средний расход запасных частей, тем ближе значение ρ к единице, т.е. при больших средних расходах незначительное превышение средних запасов гарантирует высокую вероятность отсутствия простоев из-за нехватки запасных частей. Таким образом, склады должны находиться не на входе в производство, а на выходе производства. Для гарантии отсутствия простоев АТП с небольшим парком автомобилей должно иметь запас подшипников в несколько раз превышающий их средний расход, а на складе подшипникового завода излишних запасов иметь не надо, при незначительном превышении среднего расхода запросы всех потребителей будут удовлетворены с очень высокой гарантией.

Тем не менее, рассмотренный метод расчета норм запасных частей крайне необходим при организации работы автомобилей вдали от баз, при ограничениях в поставке запасных частей (северный завоз и т. п.).

3.3. Расчет норм запасных частей при неустановившемся потоке отказов

Область применения метода может выть наглядно определена следующим примером.

В планируемый год в АТП предусмотрено получение 50-ти новых автомобилей. Средний ресурс двигателя данной модели автомобилей $\overline{X} = 125$ тыс. км при $\sigma = 25$ тыс. км. Требуется запланировать потребность в капитальных ремонтах двигателей при годовом пробеге автомобилей $X_Г = 50$ тыс. км.

Если запланировать количество капитальных ремонтов как среднюю норму, то $H \cong \frac{nX_Г}{\overline{X}} = \frac{50 \cdot 50}{125} = 20$ шт. Очевидно, что такая норма не будет соответствовать действительности, поскольку мы имеем дело с новыми автомобилями и вероятность потребности в капитальном ремонте на протяжении 50-и тыс. км будет мала.

В этом примере, когда в эксплуатацию вступают одновременно все рассматриваемые автомобили, поток отказов будет явно не установившимся.

Автомобиль представляет собой систему, работоспособность которой после отказа может многократно восстанавливаться путем замены или ремонта агрегата, узла, детали и т. п. Эксплуатация вновь поставленной части начинается с момента отказа предыдущей. Общая наработка автомобиля до отказа k-ой части является случайной величиной $X_{OK} = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, математическое ожидание этой величины может быть выражено суммой средних ресурсов $\overline{X}_{OK} = \sum_{i=1}^{k} \overline{X}_i$, а среднее квадратическое отклонение (дисперсия) $\sigma_{OK}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2$.

При малых наработках автомобилей для точного выражения ожидаемого числа отказов необходимо использовать функцию потока отказов, суммирующую не только целочисленные значения отказов, но и как бы их доли, выраженные вероятностями отказов, $\Omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F(x)_{OK}$.

Расчет норм запасных частей при неустановившемся потоке отказов может быть произведен графоаналитическим методом на основе композиции распределений. Поясним применение метода на примере.

Парк автомобилей на начало планируемого периода состоит из двух групп, первая из которых (100 авт.) не имеет начального пробега, вторая

(200 авт.) на начало планируемого периода имеет пробег в среднем 65 тыс. км. Планируемый годовой пробег 80 тыс. км, квартальный – 20 тыс. км.

Новые двигатели имеют средний ресурс $\overline{X}_H = 150$ тыс. км и $\sigma_H = 30$ тыс. км, капитально отремонтированные двигатели имеют $\overline{X}_P = 105$ тыс. км и $\sigma_P = 25$ тыс. км.

Рассчитаем числовые характеристики композиции распределений:

$$\overline{X}_1 = \overline{X}_H = 150; \qquad \sigma_1 = \sigma_H = 30;$$

$$\overline{X}_2 = 150 + 105 = 255; \qquad \sigma_2 = \sqrt{30^2 + 25^2} = 39{,}05;$$

$$\overline{X}_3 = 150 + 2 \cdot 105 = 360; \qquad \sigma_3 = \sqrt{30^2 + 2 \cdot 25^2} = 46{,}37;$$

$$\overline{X}_4 = 150 + 3 \cdot 105 = 465; \qquad \sigma_4 = \sqrt{30^2 + 3 \cdot 25^2} = 52{,}68;$$

(далее считать не имеет смысла, поскольку нас интересует интервал наработки до 80 тыс. км, на котором вероятность капитального ремонта более четырех двигателей на одном автомобиле очень мала).

Используя численные значения квантилей нормального закона для различных вероятностей $F(z)$ в диапазоне от 0 до 1, находим соответствующие наработки $X_k = z \cdot \sigma_k + \overline{X}_k$ и строим композицию распределений (рис. 10).

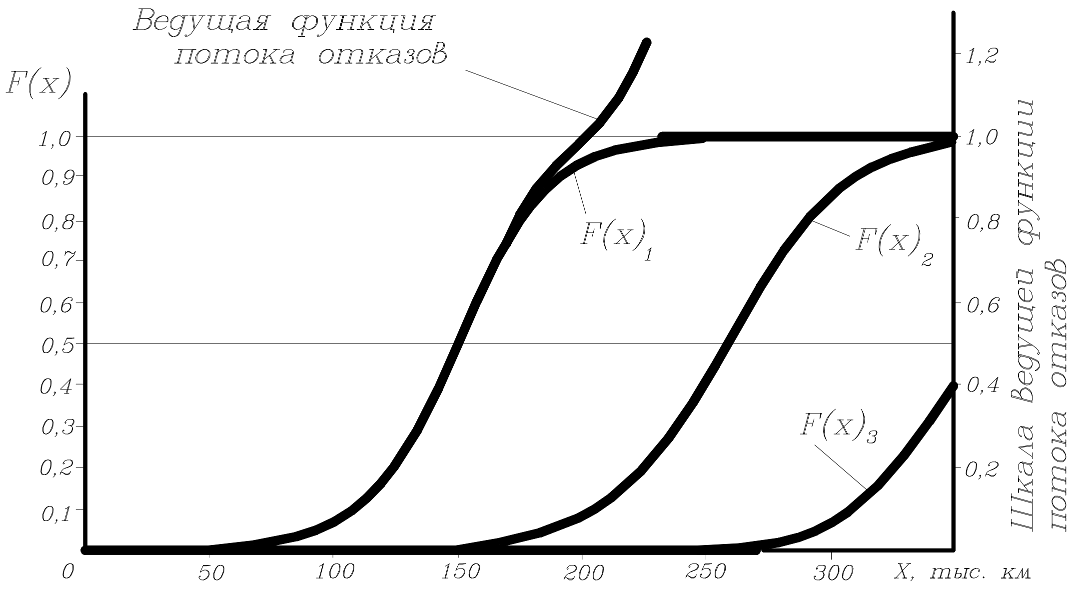


Рис. 10.

Функцию потока отказов $\Omega(x)$ находим суммированием ординат всех изображенных на графике кривых вероятностей отказов для одинаковых значений наработки x. Естественно, что при малых наработках кривая функции потока отказов мало отличается от кривой вероятности отказа первого двигателя.

Определив приращение функции потока отказов по мере наработки в течение квартала (для первой группы автомобилей начиная с нуля, а для второй – с 65 тыс. км) можно найти ожидаемое количество капитальных ремонтов двигателей по группам автомобилей. Расчет сведен в таблицу 4.

Таблица 4.

Кол-во автом. n	Ведущая функция и число замен по кварталам								Число замен за год
	1-й квартал		2-й квартал		3-й квартал		4-й квартал		
	$\Delta\Omega$	$n\Delta\Omega$	$\Delta\Omega$	$n\Delta\Omega$	$\Delta\Omega$	$n\Delta\Omega$	$\Delta\Omega$	$n\Delta\Omega$	
100	0,00	0,0	0,00	0,0	0,00	0,0	0,01	1,0	1,0
200	0,01	2	0,05	10	0,15	30	0,28	56	98
Итого:		2		10		30		57	99

Проведенный расчет показывает, что из группы новых автомобилей можно ожидать только один капитальный ремонт двигателя в конце года, всего следует планировать 99 капитальных ремонтов.

3.4. Формирование оптимального склада запасных частей с минимальной стоимостью и максимальной безотказностью.

Одним из условий эффективного функционирования ремонтных служб АТП или СТО является наличие требуемых для ремонта автомобиля запасных частей, которые наиболее быстро могут быть получены со склада предприятия. Очевидно, безотказность склада будет тем выше, чем больше частей хранится на складе. Однако чрезмерное увеличение числа запасных частей приводит к возрастанию экономических издержек, связанных с их приобретением и хранением.

Количество запасных частей, потребность в которых возникает наиболее часто, должно быть больше количества редко запрашиваемых частей. В то же время, целесообразно учитывать стоимость хранимых частей, так как излишние запасы дорогих частей менее выгодны, чем запасы дешевых частей, при одинаковой безотказности склада.

Количество забираемых со склада запасных частей за определенный промежуток времени является случайной величиной с распределением вероятностей по закону Пуассона $P(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$,

где k - случайное число забираемых со склада запасных частей;
a - средний расход запасных частей за планируемый период (имеется в виду деталь определенного наименования).

При наличии на складе H_i запасных частей определенного i-го наименования, потребность в части будет удовлетворена при $k \le H_i$. Вероятность α_i, что склад будет безотказным по i-ой части, можно найти как сумму вероятностей: $\alpha_i = \sum_{k=0}^{H_i} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$.

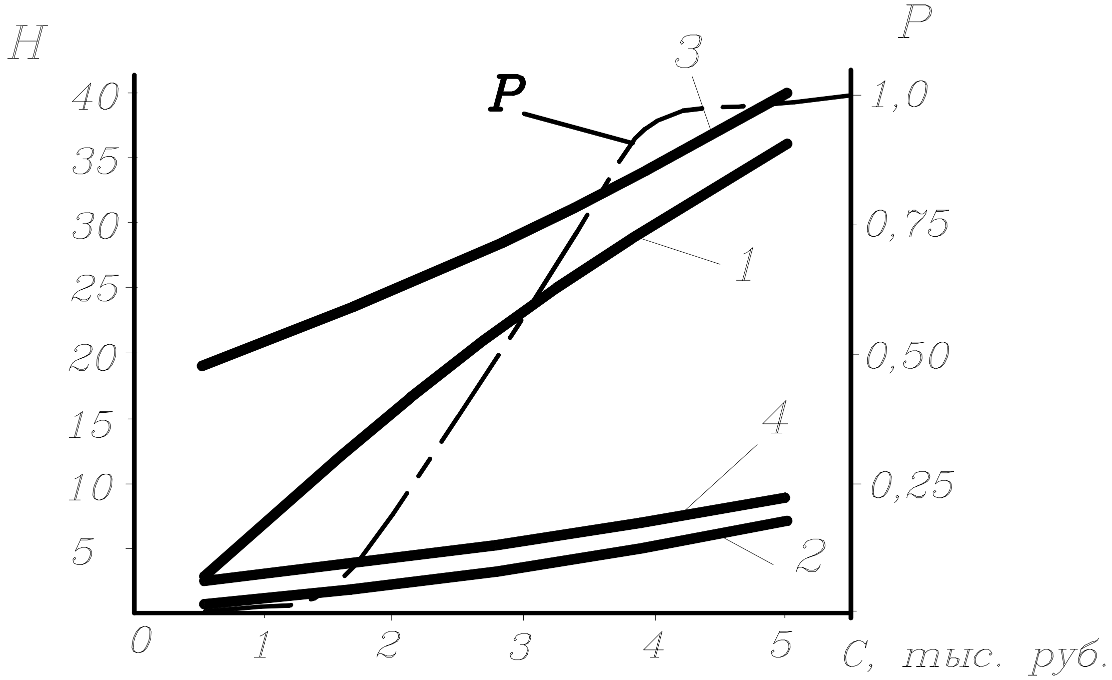
При хранении на складе n видов (наименований) запасных частей, безотказность склада α_C равна произведению безотказностей по каждому виду части: $\alpha_C = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Увеличение нормы хранимых на складе частей приводит к увеличению безотказности склада и стоимости хранимых частей (стоимости склада). Эффективность увеличения H_i до H_i+1 при стоимости рассматриваемой части C_i можно оценить по отношению $\frac{\Delta\alpha_i}{C_i}$, где $\Delta\alpha_i = \alpha(H_i+1) - \alpha(H_i)$ - прирост безотказности при увеличении нормы запаса на одну часть.

Для удобства расчета введем величину $R_i = \ln\alpha_i$, т.к. если безотказность α_i меняется в диапазоне от 0 до1, то R_i меняется в более широком диапазоне от -∞ до 0. Прирост безотказности заменим величиной $\Delta R_i = R(H_i+1) - R(H_i)$, т.к. $R_i = \ln\alpha_i$, то $\Delta R_i = \ln\sum_{k=0}^{H_i+1}\frac{a_i^k}{k!} - \ln\sum_{k=0}^{H_i}\frac{a_i^k}{k!}$. Преобразовав сумму путем вынесения за скобку общих множителей, расчет можно вести по циклической программе на ЭВМ.

Определив значения сумм, находим относительную величину $\frac{\Delta R_i}{C_i}$ по всей номенклатуре хранимых на складе частей, сравнивая получаемые значения, выбираем наибольшее, фиксируя номер (наименование) соответствующей части. Увеличение нормы хранения выбранной части дает наибольший прирост безотказности склада на рубль затрат на приобретение частей. Увеличиваем эту норму на одну часть и определяем общую стоимость склада $C = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot H_i$. Если стоимость склада меньше заданной по условиям расчета общей стоимости, то расчет повторяется, т. е. опять отыскивается номер той части, которая дает наибольший прирост безотказности склада на рубль затрат. Если стоимость склада сравнивается с заданной общей стоимостью, то расчет прекращается. После этого дается распечатка норм хранения всей номенклатуры частей.

Вторым вариантом расчета может быть определение норм хранения частей исходя из заданной общей безотказности склада при наименьшей его



общей стоимости.

Рис. 11.

На рис. 11 приведены результаты расчета для 4-х частей, средний расход которых и стоимость отличаются на порядок в соответствие с таблицей 5.

Таблица 5

№ части	Средний расход a_i	Стоимость части, руб.
1	20	100
2	2	100
3	20	10
4	2	10

Если склад будет сформирован по среднему числу расходуемых частей, то его стоимость составит $C_a = 100 \cdot 20 + 100 \cdot 2 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 2 = 2420$ руб. Оптимальный по безотказности склад должен иметь при той же общей стоимости другое соотношение количества запасных частей: дешевых частей с большим расходом – больше средней нормы, а дорогих – меньше средней нормы. При уменьшении общей стоимости склада разница в численности дешевых и дорогих частей становится еще больше. Для рассматриваемого примера безотказность склада приближается к единице только при стоимости склада в два раза превышающей стоимость C_a.

3.5. Методика формирования запасов станций технического обслуживания автомобилей.

В рыночных условиях СТО легковых автомобилей испытывают жесткую конкуренцию, что вынуждает их принимать меры к более полному удовлетворению потребностей клиента, в первую очередь – это сокращение времени ремонта при высоком качестве работ. Значительное число операций устранения отказов автомобилей сопряжено с заменой деталей. Наличие этих деталей на СТО сокращает время выполнения ремонтов, что уменьшает число переходов клиентов к конкурентам.

При отсутствии запасной части клиент с некоторой вероятностью может покинуть СТО, что приведет к утере ее дохода, или согласится воспользоваться услугами СТО при условии, что будет произведена экстренная доставка части. Исходя из этих соображений могут быть определены экономические потери $C_{ОЧ}$ от отсутствия запасной части.

$$C_{ОЧ} = \lambda(1-\alpha)\left\lfloor P_{УК} \cdot C_{Д} + (1-P_{УК}) \cdot C_{Э} \right\rfloor,$$

где λ - интенсивность потока требований на конкретный вид запасной части;

α - вероятность наличия запасной части;

$P_{УК}$ - вероятность ухода клиента;

$C_Д$ - утерянный доход от заявки (ухода клиента);

$C_Э$ - затраты на экстренную доставку части.

Хранение запасных частей на СТО также требует определенных денежных затрат $C_{ХР}$, обусловленных омертвлением капитала (стоимости части) и затратами на содержание склада (в расчете на конкретную часть). Если хранится H запасных частей, то затраты на хранение частей данного наименования $C_{ХЧ}$ можно выразить $C_{ХЧ} = C_{ХР} \cdot H$.

Вероятность наличия запасной части α зависит от нормы запаса H и среднего расхода запасной части a, и может быть выражена из формулы Пуассона, как в п. 3.2 $\alpha = \sum_{k=0}^{H} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$. С учетом того, что $\lambda = a$, можно записать общие затраты СТО от отсутствия и хранения запасных частей

$$C_{ОЗ} = a \cdot \left(1 - e^{-a} \sum_{k=0}^{H} \frac{a^k}{k!}\right) \cdot \left[P_{УК} \cdot C_Д + (1 - P_{УК}) \cdot C_Э\right] + C_{ХР} \cdot H .$$

Оптимальную норму хранения запасных частей можно найти численным решением из условия $C_{ОЗ} \to \min$ в соответствие с рис.11

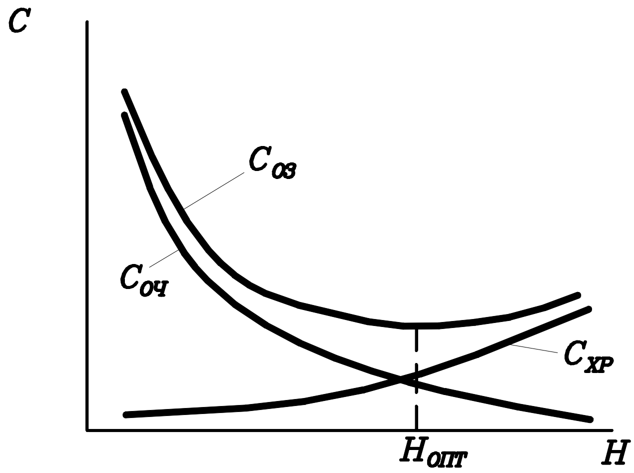


Рис.11.

Очевидно, что увеличение средних расходов запасных частей и затрат, связанных с экстренной доставкой части, приводит к необходимости увеличивать запасы частей, особенно, если они дешевые. При наличии сильной конкуренции со стороны других СТО и больших доходов, получаемых от ремонтных работ, количество хранимых частей также следует увеличивать.

Расчеты по выведенной зависимости позволяют найти конкретное значение нормы хранения запасных частей.

Вопросы для самоконтроля по третьему разделу

1. Что нужно знать для расчета средней годовой нормы запасных частей?
2. Можно ли рассчитать норму запасных частей, гарантирующих отсутствие простоев из-за нехватки запасных частей с заданной вероятностью?
3. Почему, имея средний запас частей, крупное предприятие страдает от их нехватки реже, чем мелкое?
4. Почему средние нормы запасных частей неприемлемы для новых автомобилей? Какой метод расчета запасных частей в этом случае может пригодиться?
5. На основании чего формируется оптимальный склад запасных частей с минимальной стоимостью и максимальной безотказностью?
6. На основании чего могут быть определены оптимальные нормы запасных частей, хранимых на станции технического обслуживания?

4. ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ АВТОМОБИЛЕЙ

4.1. Общие принципы разработки режимов ТО автомобилей.

Существует два способа обеспечения работоспособности автомобилей в процессе их эксплуатации:

1. Восстановление работоспособности после наступления отказа - это называют текущим ремонтом (ТР).
2. Поддержание работоспособности путем планово-предупредительных воздействий – это называют техническим обслуживанием (ТО).

К техническому обслуживанию относят также уборочно-моечные работы по поддержанию внешнего вида и комфорта автомобилей.

Основой построения системы ТО автомобилей являются:

- цель, которая поставлена перед автомобилем (спортивный автомобиль должен обслуживаться не так, как представительский; транспортный – не так, как военный);
- условия эксплуатации автомобилей (климатические, дорожные и т. п.);
- уровень исходной надежности и качества;
- организационно-технические ограничения (бессмысленно рекомендовать выполнение технологических операций ТО при отсутствии требуемого для них оборудования, и т. п.).

Основной задачей при формировании системы ТО является разработка оптимальных режимов, т. е. определение требуемого перечня и последовательности операций ТО, оптимальной периодичности их выполнения, с учетом конкретных условий эксплуатации автомобиля.

Общую последовательность разработки режимов ТО для новой модели автомобиля можно представить схемой, показанной на рис.12.

Разработка режимов ТО предполагает владение обширными знаниями по конструкции автомобилей, условиям их эксплуатации, технологии выполнения работ по смазке, регулировке и ремонту агрегатов и систем автомобилей, конструкции технологического оборудования и многому другому. Специфическим вопросом технической эксплуатации автомобилей является выбор периодичности ТО.

Рис. 12.

4.2. Методы определения периодичности ТО.

Определение периодичности плановых технических воздействий на автомобиль с целью предотвращения и отдаления моментов возникновения отказов и неисправностей его агрегатов и систем является важным этапом разработки режимов ТО. Можно выделить следующие методы определения периодичности ТО.

1. Метод аналогий и уточнений
2. Визуально-диагностический метод.
3. Метод определения периодичности ТО по допустимому уровню безотказности.
4. Технико-экономический метод.

Метод аналогий и уточнений – применение нормативов ТО с автомобилей прототипов. Этот метод базируется на аксиоме о полезности учебы на ошибках других, но во многих случаях этот метод может давать существенные ошибки. Например, в схожих по конструкции двигателях могут использоваться масла, произведенные из разной нефти; периодичность замены масла в этом случае не обязательно должна быть одинаковой. Кроме того, мы не всегда можем быть уверены, что режимы обслуживания автомобиля прототипа являются оптимальными.

Визуально-диагностический метод – периодичность ТО определяется на основе внешнего осмотра или диагностики (долив масла, моечные операции, крепежные операции и т. п.). Этот метод приемлем только для легко и постоянно наблюдаемых объектов.

Метод определения периодичности ТО по допустимому уровню безотказности. Этот метод может быть применен при известных законах распределения вероятностей наработки до отказа обслуживаемой системы. Например, необходимость регулировки теплового зазора в ГРМ возникает при уменьшении зазора до нулевого значения. Наработка до этого момента зависит от интенсивности изменения зазора в процессе эксплуатации и является случайной величиной, распределенной по некоторому закону, показанному на рис.13.

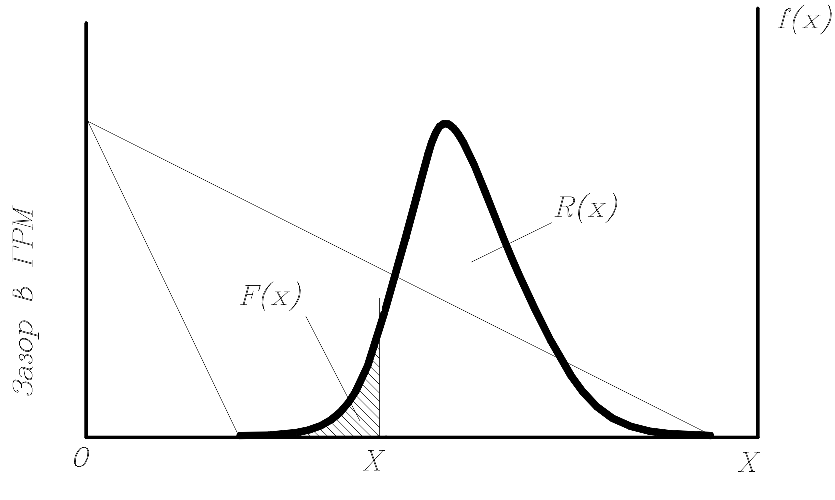


Рис. 13.

При выбранном значении X_{TO} существует некоторая вероятность $F = \int_0^{X_{TO}} f(x)dx$ отказа ГРМ (уменьшения зазора до нулевого значения), а вероятность безотказной работы $R = 1 - F$. Принято считать, что безотказность систем автомобиля, отвечающих за его безопасность, должна быть не менее 0,95, а всех остальных систем – 0,8. Задаваясь требуемой безотказностью, по кривой закона распределения вероятностей всегда можно найти требуемую периодичность ТО. Можно заметить, что выбор величины безотказности во многом субъективен, и метод не учитывает многих весьма существенных других условий эксплуатации автомобиля.

Технико-экономический метод основан на минимизации суммарных затрат на техническое обслуживание и ремонт автомобиля. Затраты на техническое обслуживание C_{TO} и ремонт C_P для установленной технологии выполнения работ являются некоторыми постоянными величинами. Периодичность обслуживания X_{TO} является искомой величиной, а ресурс обслуживаемого агрегата X_P является некоторой функцией периодичности обслуживания (чем реже будет производиться техническое обслуживание агрегата, тем меньше будет его ресурс). Характер изменения удельных затрат $C^У_{TO} = \dfrac{C_{TO}}{X_{TO}}$ и $C^У_P = \dfrac{C_P}{X_P}$ показан на рис.14.

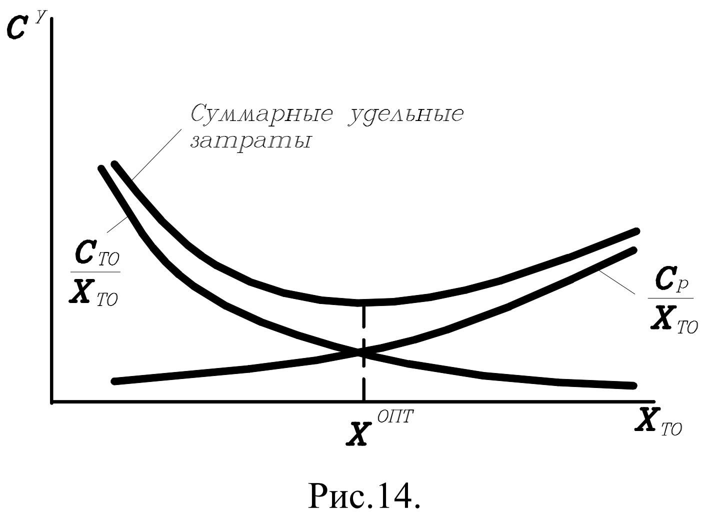


Рис.14.

По минимуму суммарных удельных затрат $C_\Sigma = C^У_{TO} + C^У_P$ можно найти оптимальную периодичность технического обслуживания $X^{ОПТ}_{TO}$, обеспечивающую минимальные издержки на обслуживание и ремонт автомобиля. Аналитически оптимальную периодичность ТО можно найти как экстремум целевой функции суммарных затрат из условия $\dfrac{dC_\Xi}{dX_{TO}} = 0$.

Конкретный расчет оптимальной периодичности ТО зависит от особенностей обслуживаемой системы. Можно считать, что автомобиль состоит из основных и вспомогательных систем. Основные обеспечивают выполнение автомобилем своих функций как транспортного средства (колеса, подвеска, двигатель, трансмиссия и т. п.), а вспомогательные системы обеспечивают условия нормального функционирования основных систем (смазка, фильтры, и т. п.). Не трудно заметить, что при ТО воздействуют, главным образом, на вспомогательные системы, которые по своему влиянию на безотказность автомобиля можно разделить на параллельно или последовательно включенные (по аналогии с елочной гирляндой).

Вспомогательные системы, при отказе которых автомобиль не теряет работоспособности, но начинает быстрее ухудшать свои эксплуатационные показатели, можно считать включенными параллельно. Вспомогательные системы, при отказе которых автомобиль тоже отказывает, можно считать последовательно включенными. По мере работы автомобиля вспомогательные системы могут менять свои характеристики постепенно (плавно) или скачкообразно (дискретно).

Предложенная классификация вспомогательных систем позволяет получить три расчетные формулы, с помощью которых можно определять оптимальную периодичность ТО многих реальных систем автомобиля.

4.2.1. Определение периодичности ТО параллельно включенных вспомогательных систем, плавно меняющих свои характеристики.

Рассмотрим в качестве примера определение периодичности замены масла в двигателе. По мере работы двигателя смазочные свойства залитого в картер масла постепенно ухудшаются, что приводит к увеличению интенсивности износа деталей двигателя. Выразим величину износа формулой $I = a \cdot x^b$, где x - наработка автомобиля (масла), a и b - эмпирические коэффициенты. Если заменять масло через X_{TO} километров, то при каждой замене характер нарастания износа будет повторяться (следует понимать, что это только более или менее удачная модель реально протекающего процесса) в соответствие с рис. 15.

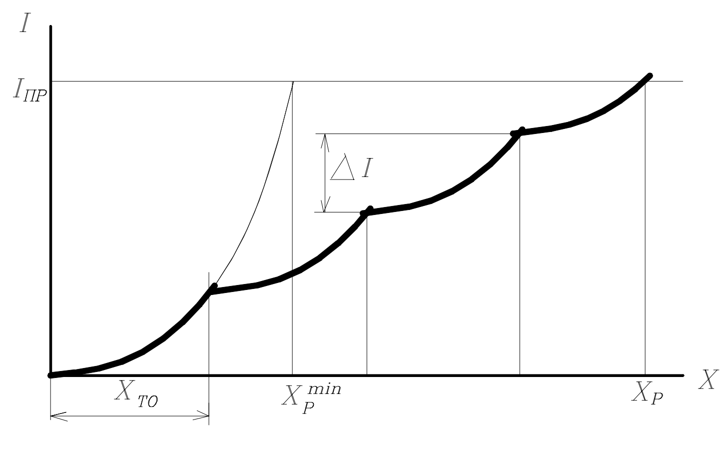


Рис.15.

Согласно технико-экономическому методу определения периодичности ТО, целевая функция удельных затрат $C_{\Sigma} = \frac{C_{TO}}{X_{TO}} + \frac{C_P}{X_P}$. Определим неизвестный нам ресурс двигателя из следующих соображений. Если за время до замены масла двигатель изнашивается на величину $\Delta I = a \cdot X_{TO}^b$, то предельный по техническим условиям износ $I_{ПР}$ будет достигнут при наработке

$X_P = \frac{I_{ПР}}{\Delta I} \cdot X_{TO} = \frac{I_{ПР}}{aX_{TO}^{b-1}}$. Подставляя в целевую функцию значение ресурса, получим формулу с одним искомым неизвестным – периодичностью технического обслуживания: $C_{\Sigma} = \frac{C_{TO}}{X_{TO}} + \frac{C_P}{I_{ПР}} \cdot aX_{TO}^{b-1}$. Берем производную от этой формулы по X_{TO} и приравниваем ее нулю

$$-\frac{C_{TO}}{X_{TO}^2} + (b-1)\frac{C_P}{I_{ПР}}aX_{TO}^{b-2} = 0.$$

Отсюда выражаем оптимальную периодичность замены масла

$X_{TO}^{ОПТ} = \sqrt[b]{\frac{C_{TO}}{C_P} \cdot \frac{I_{ПР}}{a} \cdot \frac{1}{b-1}}$. Полученную формулу можно упростить, введя значение минимального ресурса двигателя работающего без замены масла. Из условия $I_{ПР} = a \cdot \left(X_P^{\min}\right)^b$ выразим $X_P^{\min} = \sqrt[b]{\frac{I_{ПР}}{a}}$ и подставим в формулу оптимальной периодичности технического обслуживания параллельно включенных вспомогательных систем, плавно меняющих свои характеристики,

$$X_{TO}^{ОПТ} = X_P^{\min} \cdot \sqrt[b]{\frac{C_{TO}}{C_P} \cdot \frac{1}{b-1}}.$$

Для определения оптимальной периодичности замены масла в двигателе необходимо знать стоимость замены масла и стоимость капитального ремонта двигателя, а также минимальный ресурс двигателя, работающего без замены масла, и эмпирический коэффициент, определяющий крутизну нарастания износа по мере ухудшения смазочных свойств работающего масла.

Ресурс и коэффициент следует находить экспериментально в процессе наблюдения за двигателем, работающим без замены масла. В процессе эксперимента с некоторой периодичностью по наработке производят контроль износа (по концентрации железа в масле, методом вырезанных лунок, по компрессии и т. п.) и получают систему уравнений:

$$I_1 = a \cdot x_1^b,$$
$$I_2 = a \cdot x_2^b,$$
$$\cdots\cdots\cdot$$
$$I_n = a \cdot x_n^b$$

Для удобства решения уравнения можно прологарифмировать, представляя в виде $\lg I_k = \lg a + b \cdot \lg x_k$, после чего, разбивая на две примерно равные группы, можно получить систему из двух уравнений, из которых находят коэффициент b.

Например, ресурс двигателя, работающего без замены масла $X_P^{\min} = 85$ тыс. км, коэффициент $b = 1{,}6$, стоимость ремонта двигателя $C_P = 350$ у.е. и стоимость замены масла $C_{TO} = 3{,}5$ у.е. Подставляя принятые значения в формулу, получим $X_{TO}^{ОПТ} = 85 \cdot \sqrt[1{,}6]{\dfrac{3{,}5}{350} \cdot \dfrac{1}{1{,}6 - 1}} = 6{,}57$ тыс. км.

На основании полученной формулы можно найти периодичность замены масла в агрегатах трансмиссии, замены смазки в ступицах колес, периодичность очистки системы охлаждения от накипи и т. п.

4.2.2. Определение периодичности ТО параллельно включенных систем с дискретным изменением характеристик.

В качестве примера рассматриваемой системы может быть принят полно поточный фильтр для очистки масла, который отказывает при механическом разрушении фильтрующего элемента или его забивании, когда масло начинает проходить через редукционный клапан неочищенным.

Рассмотрим характер нарастания износа деталей двигателя по мере наработки (рис. 16). При отказавшем фильтре интенсивность износа высокая и предельный износ двигателя (кривая 1) может быть достигнут при наработке $X_P^{\min}$, если фильтр гарантированно работает, то интенсивность износа низкая (кривая 2) и двигатель сможет проработать $X_P^{\max}$.

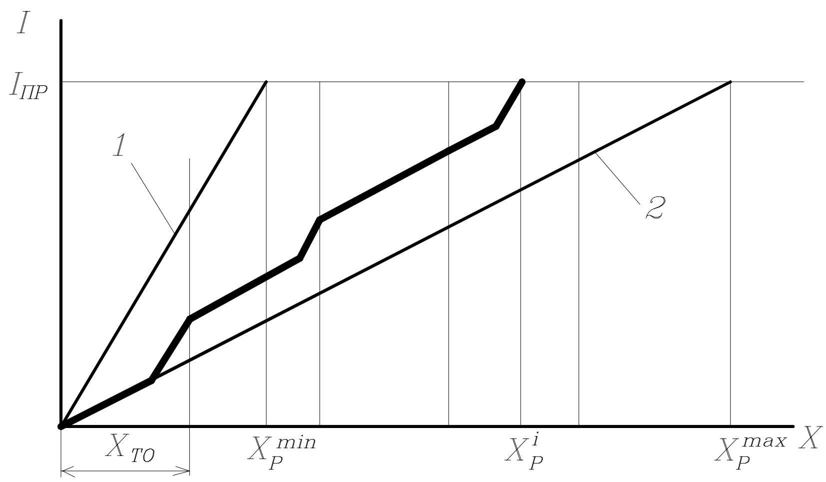


Рис. 16.

Фильтры часто изготавливают неразборными и заменяются в плановом порядке с периодичностью X_{TO}, в течение которой фильтр может отказать. Для конкретного двигателя нарастание износа будет выражено ломаной линией I_i, а его ресурс будет случайной величиной X_i.

Найдем оптимальную периодичность замены фильтра, используя целевую функцию суммарных удельных затрат

$$C_{\Sigma} = \frac{C_{TO}}{X_{TO}} + \frac{C_P}{X_P}.$$

Очевидно, что если $X_{TO} \to 0$, то $X_P \to X_P^{\max}$, если $X_{TO} \to \infty$ (фильтры не заменяются), то $X_P \to X_P^{\min}$. Кроме периодичности ТО, на ресурс двигателя будет сказываться и надежность самого фильтра на периоде X_{TO}, которую можно представить кривой безотказности (рис. 17).

По мере работы автомобиля, вероятность безотказной работы фильтра будет меняться от 1 до $R(X_{TO})$, среднюю безотказность фильтра можно определить по равновеликой площади под кривой безотказности путем интегрирования $\overline{R}(X_{TO}) = \frac{1}{X_{TO}} \int_0^{X_{TO}} R(x)dx$. Зная безотказность фильтра можно

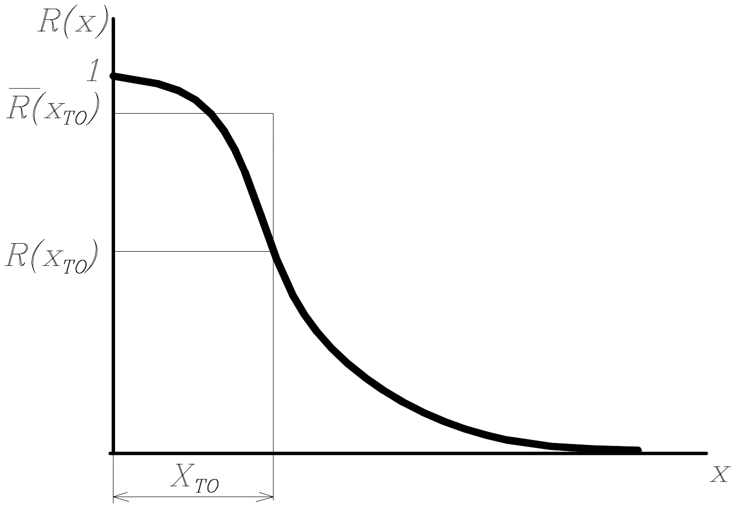


Рис. 17.

найти средний ресурс двигателя, как математическое ожидание (напомним, что $\overline{x} = \sum x_i \cdot p_i$) по двум значениям $X_P^{\min}$ и $X_P^{\max}$

$$X_P = X_P^{\max} \cdot \overline{R}(X_{TO}) + X_P^{\min} \cdot \left[1 - \overline{R}(X_{TO})\right]$$

Подставляя значение ресурса в целевую функцию затрат, получим

$$C_{\sum} = \frac{C_{TO}}{X_{TO}} + \frac{C_p}{X_p^{\max} \cdot \overline{R}(X_{TO}) + X_p^{\min}\left(1 - \overline{R}(X_{TO})\right)}.$$

Оптимальную периодичность ТО можно определить по минимуму затрат из условия $\frac{dC_{\sum}}{dX_{TO}} = 0$. Поскольку аналитическое решение выполнить сложно, можно использовать численное решение, находя среднюю безотказность фильтра по площади под кривой на заданном отрезке X_{TO}. Перебирая с некоторым шагом величины X_{TO}, можно найти такое значение, которое даст минимальные суммарные затраты.

Пример. Известно, что стоимость ремонта двигателя $C_p = 250$ у.е., стоимость замены фильтра $C_{TO} = 1{,}5$ у. е. При гарантированно работающем фильтре ресурс двигателя $X_p^{\max} = 316$ тыс. км, при неработающем фильтре

$X_p^{\min} = 55$ тыс. км. Распределение наработки фильтра на отказ подчинено закону Вейбулла с математическим ожиданием 56 тыс. км и коэффициентом вариации 0,681.

По этим числовым характеристикам была вычерчена кривая безотказности, используя которую находили среднюю безотказность фильтра при разных периодичностях замены, и рассчитывали суммарные затраты. Результаты расчетов сведены в таблицу 6.

Таблица 6.

Показатели	Периодичность технического обслуживания, тыс. км						
	9	12	15	18	21	24	27
$\overline{R}(X_{TO})$	0,978	0,967	0,954	0,940	0,926	0,911	0,895
$C_{\sum}$	0,972	0,938	0,922	0,915	0,914	0,917	0,922

Из таблицы по минимуму суммарных затрат можно определить оптимальную периодичность замены фильтра $X_{TO}^{ОПТ} = 20$ тыс. км (округленно).

На практике для определения периодичности замены фильтра нужно было бы провести эксперименты с автомобилями, работающими с поврежденным фильтром (находим $X_p^{\min}$), а также, для определения $X_p^{\max}$ и числовых характеристик надежности фильтров, нужно было бы оборудовать автомобили датчиками, сигнализирующими о моменте отказа фильтра.

4.2.3. Определение периодичности ТО последовательно включенных систем.

К последовательно включенным системам относятся агрегаты и системы автомобиля, отказ которых приводит к потере работоспособности автомобиля без серьезных повреждения других систем, - это приборы системы питания, зажигания, пуска и т. п.

Обслуживание и ремонт последовательно включенных систем по потребности (после отказа) приводит к большим затратам $C_{ОТК}$, включающим возможные штрафы за срывы рейса, необходимость буксирования автомобиля в гараж и т. д. Регламентированные ТО этих систем в условиях АТП или СТО требуют затрат $C_{TO} \leq C_{ОТК}$.

Определим оптимальную периодичность ТО последовательно включенной системы, используя закон распределения вероятностей ее наработки на отказ (рис. 18).

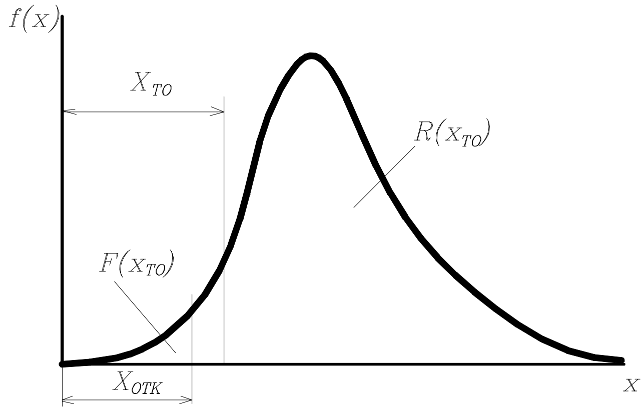


Рис.18.

При назначенной периодичности X_{TO} вероятность отказа системы в дорожных условиях $F(X_{TO}) = \int_0^{X_{TO}} f(x)dx$, вероятность, что отказ будет предотвращен при плановом ТО, $R(X_{TO}) = 1 - F(X_{TO})$.

Отказ может наблюдаться в интервале $0 \le x \le X_{TO}$, в среднем отказ будет происходить при наработке, которую можно найти по формуле

$$X_{OTK} = \int_0^{X_{TO}} x \cdot f(x)dx .$$

Таким образом, часть автомобилей будет отказывать и обслуживаться, в среднем, при наработке X_{OTK}, а часть – при наработке X_{TO}. Можно найти среднюю наработку, при которой будут обслуживаться последовательно включенные системы, как математическое ожидание:

$$\overline{X} = X_{OTK} \cdot F(X_{OTK}) + X_{TO} \cdot R(X_{TO}) .$$

Аналогично можно найти средние затраты на обслуживание системы:

$$\overline{C} = C_{OTK} \cdot F(X_{TO}) + C_{TO} \cdot \left[R(X_{TO}) + kF(X_{TO})\right],$$

где $0 \le k \le 1$ - коэффициент, учитывающий обслуживание при очередном ТО системы, которая отказывала ранее и обслуживалась по потребности.

Если все системы обслуживаются в плановом порядке, то $k = 1$, если в плановом порядке обслуживаются только те системы, которые до этого не отказывали и не обслуживались по потребности, то $k = 0$.

Зная средние затраты на обслуживание и среднюю наработку, при которой проводится обслуживание можно записать удельные суммарные затраты, т. е. целевую функцию для определения периодичности ТО,

$$C_{\Sigma} = \frac{C_{OTK} \cdot F(X_{TO}) + C_{TO} \cdot \left[R(X_{TO}) + kF(X_{TO})\right]}{X_{OTK} \cdot F(X_{TO}) + X_{TO} \cdot R(X_{TO})} .$$

Периодичность ТО, при которой удельные затраты будут минимальными, является оптимальной.

Проведем качественный анализ удельных затрат:

при $X_{TO} \to 0$ вероятности $F(X_{TO}) \to 0$, $R(X_{TO}) \to 1$ и $C_{\Sigma} \to \infty$;

при $X_{TO} \to \infty$, т. е. система не будет обслуживаться в плановом порядке, $F(X_{TO}) \to 1$, $R(X_{TO}) \to 0$ и $C_\Sigma \to \frac{C_{OTK}}{\overline{X}_{OTK}}$.

Оптимальную периодичность ТО можно найти численным решением, располагая величинами затрат на ТО в плановом порядке и средней стоимостью устранения отказов системы, а также кривой закона распределения вероятностей отказа системы. Характер изменения удельных затрат показан на рис. 19.

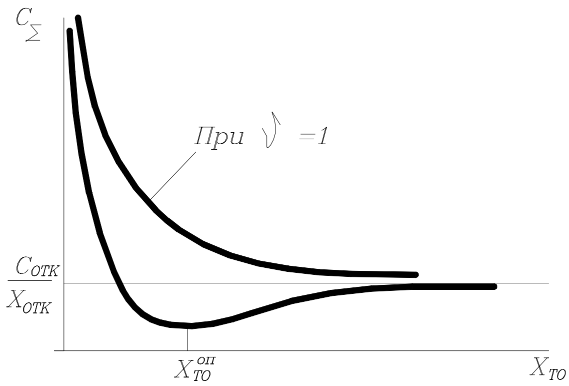


Рис.19.

Из анализа кривых удельных затрат на обслуживание последовательно включенных систем можно сделать важные выводы:

1) Чем больше коэффициент вариации наработки на отказ обслуживаемой системы, тем менее четко выражен экстремум удельных затрат.
2) При коэффициенте вариации равном единице (экспоненциальный закон распределения наработок на отказ системы) экстремума удельных затрат нет и обслуживание таких систем в плановом порядке экономически нецелесообразно.
3) Если кривая в некоторой зоне экстремума пологая, то любую периодичность ТО в рамках этой зоны можно считать приемлемой.

Рассмотренный метод определения периодичности ТО применим во многих случаях: зачистка контактов прерывателя-распределителя, регулировка зазоров в конических подшипниках, крепежные работы и т. д.

Вопросы для самоконтроля по восьмому разделу

1. В какой последовательности разрабатывают режимы ТО новой модели автомобиля?
2. Какие известны методы определения периодичности ТО?
3. Что лежит в основе технико-экономического метода определения периодичности ТО?
4. Что нужно знать для определения оптимальной периодичности замены масла в коробке передач автомобиля?

5. Какие агрегаты и системы автомобиля с позиции их технического обслуживания можно отнести к параллельно или последовательно включенным?
6. Какие агрегаты и системы автомобиля с позиции их технического обслуживания можно отнести к параллельно включенным с непрерывным или дискретным изменением характеристик?
7. В каких случаях плановое ТО последовательно включенных систем нецелесообразно?
8. Всегда ли необходимо строго выполнять заданную периодичность ТО?
9. Всегда ли увеличение стоимости смазочного масла должно приводить к увеличению периодичности его замены? Почему?

5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

5.1. Основные понятия теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания (ТМО) - это сравнительно новое направление теории вероятностей, ее предметом изучения являются системы массового обслуживания (СМО), в которых заявки на обслуживание поступают в случайные моменты времени и время обслуживания является величиной случайной.

Авторы многих работ по прикладным вопросам ТМО часто приводят готовые расчетные формулы, не показывая, как они были получены. Поскольку реальные процессы технического обслуживания являются очень сложными, а их вероятностная интерпретация - лишь приближенной моделью, инженеры, обычно, не могут с уверенностью использовать готовые формулы ТМО для своих конкретных задач. В то же время вывод многих формул ТМО не требует знаний, выходящих за рамки математической подготовки инженера.

Признаками СМО (заявки на обслуживание поступают в случайные моменты времени и время обслуживания случайно) обладают очень многие системы, которые можно классифицировать следующим образом [4,5]:

1. По характеру случайных потоков
   – простейшие (Пуассоновские, Марковские);
   – с произвольными потоками (не Марковские).
2. По характеру связи потока заявок с потоком обслуживаний
   – разомкнутые (число заявок велико и не связано с обслуживанием, например, АЗС на автомобильной дороге);
   – замкнутые (поток заявок связан с обслуживанием, например, АЗС в крупном АТП).
3. По числу каналов обслуживания – однородных по устройству и функциям участков, предназначенных для выполнения определенной

работы

– одноканальные;

– многоканальные.

4. По прядку прохождения каналов

– однофазные;

– многофазные (заявки поочередно проходят несколько каналов).

5. По характеру обслуживания

– СМО с отказами (если заявка поступает в момент, когда все каналы заняты, то она уходит из системы не обслуженной);

– с очередями (если все каналы заняты, то вновь поступившая заявка встает в очередь, которая может быть ограниченной по числу заявок или времени ожидания, или неограниченной);

– СМО с приоритетами (разные заявки обслуживаются по разным организационным процедурам).

Наиболее просто аналитически описываются СМО с простейшими потоками, когда число заявок, поступающих в систему в единицу времени, является случайной величиной распределенной по закону Пуассона, а время обслуживания заявки описывается экспоненциальным законом распределения вероятностей. Располагая характеристиками СМО и зная интенсивности потоков заявок и обслуживаний с помощью теории массового обслуживания можно найти такие важные показатели функционирования СМО, как пропускную способность, вероятности различных состояний, величину средней очереди, время ожидания в очереди и т. д.

5.2. Описание СМО графами, обоснование установившегося режима СМО с дискретным состоянием и временем.

Во многих случаях состояние систем меняется непрерывно с большей или меньшей скоростью, однако, на практике часто принимаются во внимание только хорошо количественно различимые состояния, и это позволяет рассматривать изменение состояний как дискретное. Например, автомобиль может находиться в работоспособном состоянии или в состоянии отказа, работать или ремонтироваться и т. п.

Изменение состояний может носить закономерный или случайный характер и происходить в строго определенный или любой произвольный момент времени. Случайный процесс изменения состояний в строго определенный и заранее известный момент называют процессом с дискретным временем (количество пассажиров в автобусе всегда меняется только на остановках, когда открываются двери). Процесс, в котором состояние может изменяться в любой наперед неизвестный момент времени, называют случайным процессом с непрерывным временем.

Большинство задач, связанных с техническим обслуживанием и ремонтом автомобилей, базируются на случайных процессах с непрерывным временем, однако для формирования навыков решения задач ТМО целесообразно вначале рассмотреть случайный процесс с дискретным временем.

Пример. В гараже имеется два компрессора для накачки колес. Возможные состояния: S_0 - оба компрессора исправны, S_1 - один компрессор исправен, а другой неисправен, S_2 - оба компрессора неисправны. Очевидно, состояния могут меняться в моменты использования компрессоров, поэтому будем считать, что это система с дискретным состоянием и дискретным временем. Для большей наглядности изобразим систему графически, показывая стрелками возможные переходы состояний с указанием величин вероятностей таких переходов (рис. 20).

Указанные на рис. 20 вероятности означают:

P_{00} - вероятность, что при использовании компрессоров они останутся в исправном состоянии;

P_{01} - вероятность, что один компрессор откажет;

P_{10} - вероятность того, что отказавший компрессор будет восстановлен;

P_{02} - вероятность, что откажут оба компрессора;

… - и т. д..

P_{22} - вероятность, что компрессоры останутся в неисправном состоянии.

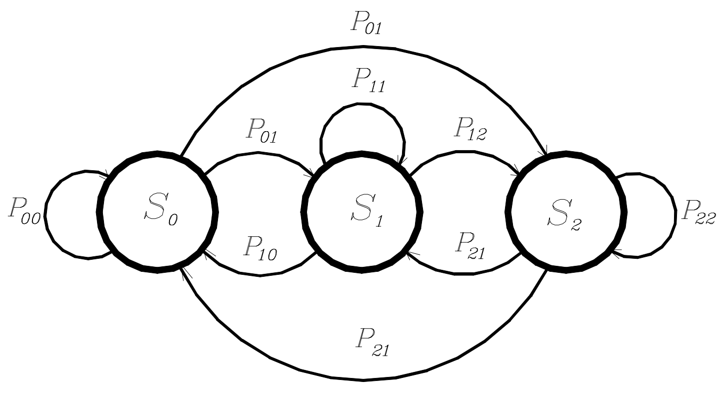


Рис. 20.

Подобное показанному на рис. 20 условное изображение состояний системы и их возможных переходов называют графом СМО. Из условия вероятности полной группы событий, можно записать:

$$P_{01} + P_{02} + P_{00} = 1,$$

$$P_{01} + P_{11} + P_{21} = 1,$$

…. и т. д. в соответствии с мнемоническим правилом «сколько вытекает, столько и втекает»;

$P_0 + P_1 + P_2 = 1$- сумма вероятностей всех возможных состояний равна единице.

Полезно обратить внимание на то, что на графе принято состояние S_1, когда один компрессор исправен, а другой неисправен. Здесь мы не учитываем, какой именно компрессор исправен, поскольку для обслуживания заявки (накачать колесо) это не имеет значения. Таким образом, описывая реальную систему графом, мы создаем модель с набором тех параметров, которые нас интересуют.

Рассмотрим физическую модель восстанавливающейся системы. Это тарельчатый диск, упруго закрепленный под потолком спортивного зала. В центре тарелки с обеих сторон нарисован кружок, на который может быть положена монетка. Рассмотрим два варианта закрепления тарелки:

а) выпуклостью вверх (вверх дном),

б) выпуклостью вниз.

Для обоих вариантов в кружок кладут монетку и снизу бросают в тарелку мяч, стараясь выбить монетку из кружка. Возможны два состояния: S_0 - монетка лежит в кружке, S_1 - монетка находится за пределами кружка. Допустим, вероятность попадания в тарелку равна 0,3, тогда вероятность, что систем не будет менять свое состояние при броске $P_{00} = 0{,}7$.

Определим для варианта а) вероятность P_0, что монетка будет оставаться в кружке:

- после первого броска $P_0^{(1)} = 0{,}7$;
- после второго броска $P_0^{(2)} = P_0^{(1)} \cdot P_{00} = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$;
- после третьего броска $P_0^{(3)} = P_0^{(2)} \cdot P_{00} = 0{,}343$;
- и т. д.

Очевидно, что рассматриваемый вариант является физической моделью невосстанавливающейся системы (монетка при колебаниях тарелки скатывается вниз и не возвращается в кружок).

Для варианта б) кружок и монетка находятся в нижней части тарелки. При попаданиях мячом в тарелку монетка будет выбрасываться из кружка, при повторных попаданиях монетка может сползти вниз и вновь попасть в кружок. Такую систему можно считать восстанавливающейся, ее граф показан на рис. 21. Следует подчеркнуть, что это только модель, поскольку мы считаем, что монетка при попадании мяча перемещается только один раз.

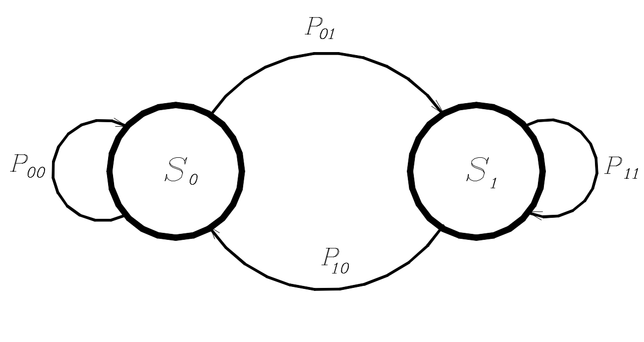


Рис. 21.

Примем, что вероятность перехода $P_{10} = 0{,}8$, и определим вероятности нахождения монетки в кружке после серии бросков, если вначале $P_0 = 1$:

- после первого броска $P_0^{(1)} = 1 \cdot P_{00} = 0{,}7$, $(P_1^{(1)} = 0{,}3)$;
- после второго броска $P_0^{(2)} = P_0^{(1)} \cdot P_{00} + P_1^{(1)} \cdot P_{10} = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}73$;
- после третьего броска $P_0^{(3)} = P_0^{(2)} \cdot P_{00} + P_1^{(2)} \cdot P_{10} = 0{,}727$;
- после четвертого броска $P_0^{(4)} = 0{,}7245$;
- и т. д.
- после n-го броска $P_0^{(n)} = 0{,}72727272....$

Из анализа полученных значений можно сделать вывод о том, что вначале функционирования восстанавливающейся системы наблюдается значительное «раскачивание» вероятностей состояний, которые со временем стабилизируются.

5.3. Определение вероятностей состояний системы с дискретным состоянием и непрерывным временем (вывод формулы Эрланга)

Для восстанавливающейся системы с непрерывным временем переход системы из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, которые заранее точно указать невозможно. Например, диспетчер автовокзала дает справки по телефону. Если телефон диспетчера занят, то клиент получает отказ, если свободен, то принимается на обслуживание.

С позиции ТМО рассматриваемый пример является системой, которая может находиться в двух состояниях: S_0 - диспетчер свободен, и заявка клиента может быть принята на обслуживание; S_1 - диспетчер занят обслуживанием заявки, и вновь поступающая заявка получает отказ. Граф СМО можно представить такой же схемой, как и в ранее рассмотренном примере, когда переходы состояний происходили в дискретные моменты времени (рис. 49).

Для системы с непрерывным временем вероятности перехода состояний будут иметь конечное значение только при рассмотрении системы на протяжении некоторого конечного времени Δt. Определим вероятность того, что диспетчер будет свободен в момент времени $t + \Delta t$, для этого, также как и в ранее рассмотренном примере, можно записать

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot P_{00}(\Delta t) + P_1(t) \cdot P_{10}(\Delta t),$$

где $P_0(t)$ - вероятность, что диспетчер свободен в момент времени t;

$P_{00}(\Delta t)$ - вероятность, что за время Δt заявка не поступит и диспетчер останется свободным;

$P_1(t)$ - вероятность, что к моменту времени t диспетчер может быть занят;

$P_{10}(\Delta t)$ - вероятность, что за время Δt диспетчер закончит обслуживание заявки и освободится.

Обозначим интенсивность потока заявок (количество заявок в единицу времени) λ, а интенсивность потока обслуживаний - μ. Количество заявок, поступающих на обслуживание, является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона $\left(P(x)=\frac{a^x}{x!}\cdot e^{-a}\right)$. В нашем случае среднее число заявок, поступающих за рассматриваемый промежуток времени, можно записать $a=\lambda\cdot\Delta t$. Вероятность, что не поступит ни одной заявки,

$$P(x=0)=P_{00}(\Delta t)=\frac{(\lambda\Delta t)^0}{0!}\cdot e^{-\lambda\Delta t}=e^{-\lambda\Delta t}.$$

Время обслуживания заявок является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону $\left(F(x)=1-e^{-\mu x}\right)$. Вероятность, что фактическое время обслуживания заявки окажется меньше рассматриваемого промежутка времени можно найти $F(x\le\Delta t)=P_{10}(\Delta t)=1-e^{-\mu\Delta t}$.

Подставим полученные выражения вероятностей переходов системы в формулу искомой вероятности

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot e^{-\lambda\Delta t}+P_1(t)\cdot(1-e^{-\mu\Delta t}).$$

Преобразуем степенные выражения, используя известную формулу

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots.$$

Учитывая, что мы рассматриваем малый промежуток времени, и факториал в знаменателе нарастает очень быстро, можно пренебречь малыми величинами и записать приближенно $e^{-\lambda\Delta t}\cong 1-\lambda\Delta t$, $e^{-\mu\Delta t}\cong 1-\mu\Delta t$.

Подставим эти выражения в полученную формулу искомой вероятности

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\cdot\mu\Delta t.$$

Раскроем скобки и перепишем полученное выражение следующим образом

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda\cdot P_0(t)+\mu\cdot P_1(t).$$

В левой части равенства мы видим отношение прироста вероятности к приросту времени, если $\Delta t\to 0$, то это производная вероятности свободного состояния системы по времени (как бы скорость изменения вероятности)

$$\frac{dP_0}{dt}=-\lambda\cdot P_0+\mu\cdot P_1.$$

Данную формулу Эрланг вывел в 1907 году и тем самым положил начало теории массового обслуживания. Как было показано в п.5.2, восстанавливающиеся системы имеют переменные значения вероятностей только в начале функционирования, а затем вероятности приходят к установившемуся режиму, когда скорости изменения вероятностей становятся равными нулю. При установившемся режиме дифференциальное уравнение Эрланга превращается в алгебраическое уравнение $-\lambda\cdot P_0+\mu\cdot P_1=0$. Для нахождения двух неизвестных вероятностей следует воспользоваться еще одним условием $P_0+P_1=1$.

Колмогоров обобщил подход Эрланга и обосновал возможность описания СМО непосредственно по графу, на котором вместо вероятностей переходов указывают интенсивности потоков, по мнемоническому правилу «сколько вытекает, столько и втекает». Для рассмотренного примера с диспетчером автовокзала граф СМО показан на рис.22.

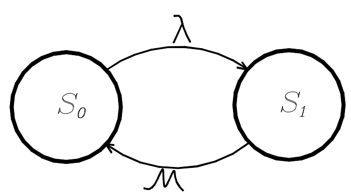


Рис. 22.

По предложенному правилу поочередно рассматривают все состояния. Производную вероятности состояния приравнивают сумме произведений интенсивности потока на вероятность состояния. Если стрелка «вытекает» из значка состояния, то перед произведением ставят знак минус, а если «втекает», то знак плюс. Для описания установившихся режимов, вместо производной сразу можно писать ноль.

5.4. Примеры анализа эффективности систем массового обслуживания.

5.4.1. Одноканальная СМО с отказами.

Примером такой СМО может служить диспетчер автовокзала, который обслуживает по телефону поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0{,}8$ мин $^{-1}$. Если среднее время обслуживания одной заявки 1 мин, то интенсивность потока обслуживания $\mu = 1$ мин $^{-1}$. Граф СМО представлен рис.50, по которому можно написать уравнения Эрланга для установившегося режима

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0\,, \qquad P_0 + P_1 = 1\,.$$

Отсюда можно выразить вероятности состояний СМО

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{0{,}8+1} = 0{,}555\,, \qquad P_1 = 1 - P_0 = 0{,}445\,.$$

Заявка принимается на обслуживание только тогда, когда диспетчер свободен. Относительная пропускная способность СМО $q = P_0 = 0{,}555$. Абсолютная пропускная способность СМО $A = q \cdot \lambda = 0{,}555 \cdot 0{,}8 = 0{,}444$ мин $^{-1}$. Таким образом, за час диспетчер обслужит $N = 60A = 60 \cdot 0{,}444 = 26{,}64$ заявки.

5.4.2. Многоканальная СМО с отказами.

Если в системе имеется несколько равнозначных постов (каналов) обслуживания, которые могут принимать поступающие в систему в случайные моменты времени заявки, то такая система – многоканальная. Если при занятых каналах заявки будут уходить из системы не обслуженными, то это СМО с отказами. Граф СМО с n каналами показан на рис.23, где S_0 - заявок нет, все каналы свободны, S_1 - один канал занят, … и т. д., λ - интенсивность потока заявок, а μ - интенсивность потока обслуживания одним каналом. Естественно, что если одновременно работают несколько каналов, то скорость обслуживания пропорционально возрастает.

Запишем уравнения Эрланга при установившемся режиме для S_0

$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$, отсюда $P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 = \alpha P_0$, здесь $\dfrac{\lambda}{\mu} = \alpha$ - относительная интенсивность случайных потоков. Для следующего состояния можно записать

$-\lambda P_1 + 2\mu P_2 = 0$, отсюда $P_2 = \dfrac{\alpha^2}{2} P_0$; далее можно записать $-\lambda P_2 + \mu P_3 = 0$,

и $P_3 = \dfrac{\alpha^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} P_0$. Очевидно, что вероятность любого состояния выражается

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \quad \text{и} \quad P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 .$$

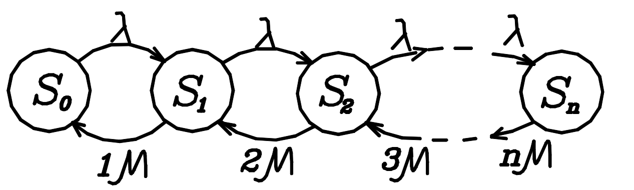


Рис. 23.

Как видно из полученных формул, все вероятности СМО выражаются через вероятность свободного состояния, которую можно найти из условия $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$. Подставляя в сумму выражения вероятностей и вынося за скобку общий множитель, можно записать

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}.$$

Теперь, зная P_0, можно определить вероятность любого состояния СМО.

Пример. На автовокзале справки по телефону дают два диспетчера (телефоны работают по принципу справочной службы «09»). Интенсивность потока заявок $\lambda = 0{,}8$, интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1$ (как в ранее рассмотренном примере). Требуется оценить пропускную способность системы.

Находим относительную интенсивность потоков $\alpha = 0{,}8$ и вероятности

$$P_0 = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}} = \frac{1}{1 + 0{,}8 + \frac{0{,}8^2}{2}} = 0{,}472; \qquad P_1 = \alpha P_0 = 0{,}8 \cdot 0{,}472 = 0{,}378; \qquad P_2 = 0{,}151.$$

Отсюда вероятность отказа СМО (клиент не может дозвониться до диспетчера), примерно, равна 0,15; относительная пропускная способность СМО $q = P_0 + P_1 = 1 - P_2 = 0{,}85$; количество клиентов, обслуживаемых в час $N = \lambda \cdot q \cdot 60 = 0{,}8 \cdot 0{,}85 \cdot 60 = 40{,}8$.

Сравнивая с ранее рассмотренным примером одноканальной СМО, можно видеть, что увеличение числа каналов вдвое привело к увеличению пропускной способности только в 1,53 раза. Расхождение результата с интуитивным восприятием ситуации объясняется тем, что мы рассматривали СМО с отказами, в реальной жизни мы чаще сталкиваемся с системами, в которых могут быть очереди.

5.4.3. Многоканальные СМО с очередью.

В большинстве реальных систем массового обслуживания заявка, прибывшая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и дожидается освобождения канала обслуживания. Порядок организации очередей может быть различным, мы остановимся на наиболее типичном «первый пришел, первый обслужился». На рис. 24показан граф СМО, имеющей n каналов и m мест для очереди, если очередь не ограничена, то $m \to \infty$.

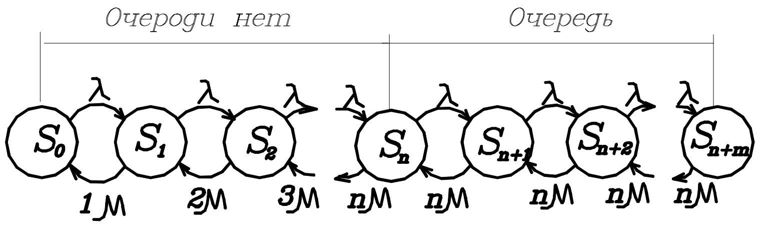


Рис.24.

Вероятности состояний при отсутствии очереди выражаются также, как в п. 5.3.2: $P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0$. Для определения вероятностей состояний, при наличии очереди, запишем уравнения:

$-\lambda P_n + n\mu P_{n+1} = 0$, откуда $P_{n+1} = \dfrac{\alpha}{n} P_n$;

$-\lambda P_{n+1} + n\mu P_{n+2} = 0$, откуда $P_{n+2} = \dfrac{\alpha}{n} P_{n+1} = \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2 P_n$ и т. д. $P_{n+i} = \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^i P_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^i P_0$.

Для определения P_0 воспользуемся условием, что $P_0 + P_1 + \cdots = 1$, тогда

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^i}.$$

Вторая сумма в знаменателе является суммой геометрической прогрессии, которая выражается известной формулой $\sum\limits_{i=1}^{m} a^i = \dfrac{a - a^{m+1}}{1-a}$. В нашем случае всегда $a = \dfrac{\alpha}{n} \le 1$, а число мест в очереди, обычно, не ограничено $m \to \infty$ и

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}.$$

Зная вероятность свободного состояния, можно найти все другие вероятности, после чего можно найти величину средней очереди $\bar{r}$ как математическое ожидание (напомним, что $\overline{X} = \sum X_i \cdot p_i$)

$$\bar{r} = 1 \cdot P_{n+1} + 2 \cdot P_{n+2} + 3 \cdot P_{n+3} + \cdots + m \cdot P_{n+m}.$$

$\bar{r} = 1\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^1 P_0 + 2\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2 P_0 + 3\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^3 P_0 + \cdots + m\dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^m P_0$. Вынесем за скобку общий множитель и перепишем

$$\bar{r} = \frac{\alpha^{n+1}}{n! \cdot n} P_0 \left[1 + 2\frac{\alpha}{n} + 3\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha}{n}\right)^3 + \cdots + m\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{m-1}\right].$$

Анализируя коэффициенты и степени слагаемых в скобке, можно заметить, что это производные геометрической прогрессии. Взяв производную от формулы суммы геометрической прогрессии, с учетом того, что $\frac{\alpha}{n} \le 1$ и $m \to \infty$, получим в окончательном виде формулу средней очереди

$$\bar{r} = \frac{\alpha^{n+1} P_0}{n!n\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2} .$$

Зная среднюю очередь легко найти среднее время ожидания в очереди – это время, которое требуется, чтобы «набежала» средняя очередь

$$\bar{t}_r = \frac{\bar{r}}{\lambda} .$$

Рассмотрим применение выведенных формул на примере. Автозаправочная станция (АЗС) с двумя колонками $(n = 2)$ обслуживает поток автомобилей интенсивностью $\lambda = 0{,}8$ мин $^{-1}$. Среднее время заправки одного автомобиля 2 мин ($\mu = 0{,}5$ мин $^{-1}$).

Оценим рассматриваемую СМО на предельное состояние сравнением интенсивностей потока заявок и потока обслуживаний, который будет делиться на две колонки, их общая пропускная способность $2\mu = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \ge 0{,}8$, значит, очереди будут иметь конечную величину.

Относительная интенсивность потоков $\alpha = 1{,}6$, вероятность свободного состояния $P_0 = \left[1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{0{,}5\alpha}{1 - 0{,}5\alpha}\right]^{-1} = [1 + 1{,}6 + 1{,}28 + 5{,}12]^{-1} = 0{,}111$.

Вероятность, что на АЗС будет находиться один автомобиль $P_1 = \alpha P_0 = 0{,}178$.

Вероятность, что на АЗС будет находиться два автомобиля $P_2 = 0{,}142$.

Вероятность, что не будет очереди $P_0 + P_1 + P_2 = 0{,}111 + 0{,}178 + 0{,}142 = 0{,}431$.

Средняя очередь $\bar{r} = \frac{1{,}6^3 \cdot 0{,}111}{2 \cdot 2 \cdot 0{,}2^2} = 2{,}84$.

Среднее время ожидания в очереди $\bar{t}_r = \frac{2{,}84}{0{,}8} = 3{,}55$ мин.

Среднее время пребывания автомобиля на АЗС будет складываться из среднего времени обслуживания и ожидания, что составит 2+3,55=5,55 мин.

5.4.4. Замкнутые системы массового обслуживания

В практике эксплуатации автомобилей часто встречаются СМО, в которых обслуживание оказывает непосредственное влияние на поток заявок. Например, в АТП имеется N автомобилей, которые ремонтируются n ремонтными рабочими. Потребность в ремонте у каждого автомобиля возникает в случайные моменты времени с интенсивностью λ, производительность (пропускная способность) одного рабочего пусть будет μ_1.

Труд рабочих может быть организован различным образом. Если каждый рабочий работает индивидуально, то мы будем иметь дело с многоканальной СМО (число каналов n равно числу рабочих). Если рабочие работают в единой бригаде, то можно считать, что СМО одноканальная, а интенсивность потока обслуживаний $\mu = n\mu_1$.

Когда все автомобили исправны и работают, то суммарный поток отказов (заявок на ремонт) будет равен $N\lambda$, если один автомобиль откажет, то в работоспособном состоянии останется меньшее количество автомобилей и поток заявок станет равным $(N-1)\lambda$. Граф одноканальной замкнутой СМО показан на рис. 25.

Выразим вероятности состояний с помощью уравнений Эрланга

$-N\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$, отсюда $P_1 = \dfrac{N\lambda}{\mu} P_0 = N\alpha P_0$;

$-(N-1)\lambda P_1 + \mu P_2 = 0, \qquad P_2 = \dfrac{(N-1)\lambda}{\mu} P_1 = N(n-1)\alpha^2 P_0$;

$-(N-2)\lambda P_2 + \mu P_3 = 0, \qquad P_3 = N(N-1)(N-2)\alpha^3 P_0$;

. . . .

$$P_N = N(N-1)(N-2)(N-3)\cdots 1\alpha^N P_0 = N!\alpha^N P_0.$$

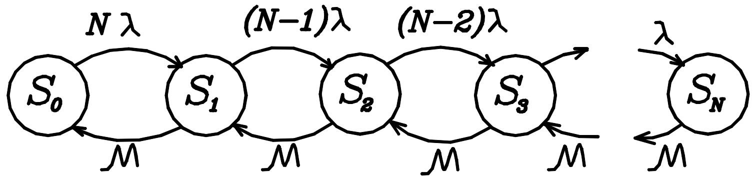


Рис.25.

Используя условие $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_N = 1$, найдем вероятность P_0

$$P_0 = \frac{1}{1 + N\alpha + N(N-1)\alpha^2 + N(N-1)(N-2)\alpha^3 + \cdots + N!\alpha^N}.$$

Непосредственный счет знаменателя по этой формуле невозможен, поскольку факториал нарастает очень быстро, а величина α^k, при $\alpha \le 1$, быстро уменьшается. Выражение можно преобразовать, поочередно вынося за скобки общие множители, после чего получим

$$P_0 = \frac{1}{((\cdots(\alpha+1)2\alpha+1)3\alpha+1)4\alpha+1)\cdots)N\alpha+1}.$$

Среднее число неисправных автомобилей можно найти как математическое ожидание $\overline{w} = 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3 + \cdots + N\cdot P_N$.

Для определения среднего числа автомобилей в очереди, будем рассуждать следующим образом. Общее число неисправных автомобилей $\bar{w}$ складывается из числа автомобилей в очереди $\bar{r}$ и числа автомобилей, находящихся в ремонте $\bar{z}$. Если бригада ремонтных рабочих небольшая по численности, им работать вместе удобнее, т. е. когда они заняты, то ремонтируют один автомобиль. Отсюда среднее число ремонтируемых автомобилей найдем как математическое ожидание $\bar{z} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot (1 - P_0) = 1 - P_0$. Величина средней очереди в этом случае $\bar{r} = \bar{w} - (1 - P_0)$.

Среднее время ожидания в очереди можно найти так же, как и в п. 10.4.3, путем деления величины средней очереди на среднюю интенсивность потока отказов, которая будет равна $\bar{\lambda} = (N - \bar{w}) \cdot \lambda$, тогда

$$\bar{t}_r = \frac{\bar{w} + P_0 - 1}{(N - \bar{w})\lambda}.$$

Пример. В АТП планируется приобрести 50 автомобилей с газобаллонной системой питания и принять на работу специалиста по обслуживанию таких систем. Оценить показатели функционирования СМО, если известно, что необходимость обслуживания системы возникает, в среднем, через 4500 км, средний суточный пробег автомобилей 150 км, среднее время на обслуживание (ремонт) системы 0,5 часа, продолжительность рабочей смены 7 часов.

Зная наработку на отказ и суточный пробег, можно найти, через сколько дней системы будут отказывать и, с учетом продолжительности рабочей смены, найти интенсивность потока отказов $\lambda \cong 0{,}005$ час$^{-1}$. Интенсивность потока обслуживаний $\mu = 2$ час$^{-1}$, относительная интенсивность потоков $\alpha = 0{,}0025$.

По выведенной формуле определим вероятность свободного состояния рабочего $P_0 = 0{,}875$, а затем найдем значения других вероятностей:

$P_1 = N\alpha P_0 = 0{,}109$, $P_2 = (N-1)\alpha P_1 = 0{,}0134$, $P_3 = 0{,}0016$, $P_4 = 0{,}00018$ и т. д.

Зная вероятности, находим среднее число неисправных автомобилей

$$\bar{w} = 0{,}109 + 0{,}0268 + 0{,}0048 + 0{,}0007 + 0{,}00001 \cong 0{,}15.$$

Средняя очередь автомобилей, ожидающих ремонта системы питания,

$$\bar{r} = \bar{w} - (1 - P_0) = 0{,}15 - 0{,}125 = 0{,}025.$$

Среднее время ожидания в очереди находим по формуле

$$\bar{t}_r = \frac{\bar{r}}{(N - \bar{w})\lambda} = \frac{0{,}025}{(50 - 0{,}15)0{,}005} = 0{,}1 \text{ час.}$$

Таким образом, мы оценили основные показатели функционирования СМО, зная которые можно определять оптимальное число каналов (рабочих) из условия минимума потерь от простоев автомобилей и затрат на заработную плату рабочим.

5.4.5. Многофазные системы массового обслуживания.

В практике технической эксплуатации автомобилей широко используется поточное (многофазное) техническое обслуживание, когда автомобиль последовательно передается с поста на пост.

Поскольку время обслуживания в каждой фазе является величиной случайной, прохождение автомобиля, или заявки (требования), через всю систему обслуживания будет носить вероятностный характер.

Рассмотрим простейший вариант многофазной СМО на примере линии для мойки автомобилей, включающей посты для подкапотной и наружной мойки. Интенсивность потоков обслуживаний на первом посту μ_1 и на втором посту - μ_2. Характерной особенностью рассматриваемой СМО является то, что очередь не разрешается, т. е. если первый пост занят, то вновь поступившая заявка уходит не обслуженной.

Граф состояний и переходов (рис.26) построен на основе следующих рассуждений. Из состояния S_{00}, когда обе фазы свободны, СМО за счет потока заявок с интенсивностью λ может быть переведена в состояние S_{10}, т. е. в СМО поступит заявка, и в первой фазе начнется обслуживание. С интенсивностью μ_1 заявка может быть переведена в состояние S_{01}. После этого в СМО с интенсивностью λ может поступить вторая заявка на освободившееся место в первой фазе (состояние S_{11}). Обслужив первую заявку во второй фазе с интенсивностью μ_2, СМО прейдет в состояние S_{10}.

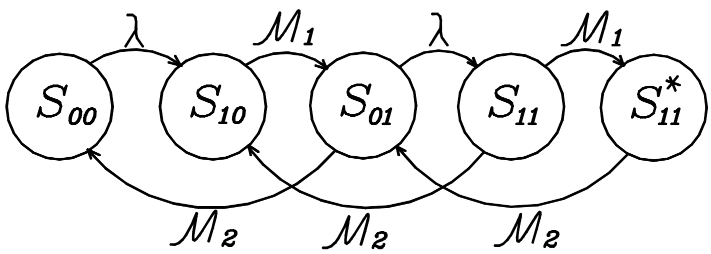


Рис.26.

Если новая (вторая) заявка не поступит в СМО, когда она находится в состоянии S_{01}, то СМО с интенсивностью μ_2 перейдет в состояние S_{00}.

Из состояния S_{11}, когда обе фазы заняты и работают, возможен переход еще в одно состояние S_{11}^*, когда в первой фазе обслуживание закончено, а вторая еще занята, т. е. это состояние вынужденного простоя первой фазы. Переход из S_{11} в S_{11}^* будет происходить с интенсивностью μ_1, а из S_{11}^* с интенсивностью μ_2 - в состояние S_{01}, т. е. как только вторая фаза освободится, она сразу же примет новую заявку из первой фазы.

Записывая для установившегося режима уравнения Эрланга и решая их, можно определить вероятности состояний. Практический интерес представляет пропускная способность СМО. Поскольку заявки принимаются на обслуживание только в двух случаях, когда обе фазы свободны и когда свободна первая фаза, а вторая фаза занята, то относительную пропускную способность можно выразить

$$q = P_{00} + P_{01} = \frac{\mu_2 + \lambda}{\mu_2 + \lambda \dfrac{\mu_2}{\mu_1} + \dfrac{\lambda^2 \mu_2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} + \lambda + \dfrac{\lambda^2}{\mu_2}}.$$

Абсолютная пропускная способность пропорциональна интенсивности потока заявок $A = q\lambda$.

Интересно проанализировать, как сказывается на пропускную способность СМО соотношение производительностей ее фаз (постов) при условии $\mu_1 + \mu_2 = const$. Результаты расчетов по условному примеру приведены на рис. 27.

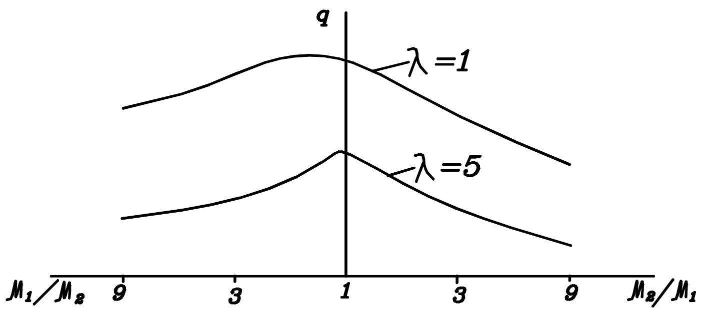


Рис.27.

Из графика видно, что уменьшение интенсивности потока заявок увеличивает относительную пропускную способность, поскольку СМО становится менее загруженной (абсолютная пропускная способность, естественно, становится меньше). Примечательно, что максимальная пропускная способность двухфазной СМО с отказами может быть достигнута, когда интенсивность потока обслуживаний в первой фазе выше интенсивности обслуживания во второй фазе. Чем меньше поток заявок, тем больше должна быть разница в производительности постов.

Если СМО допускает неограниченную очередь, то максимальная пропускная способность достигается при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Максимальная интенсивность потока заявок, который может пропустить СМО, при двух фазах равна $0{,}6666\mu$, при трех фазах - $0{,}5641\mu$, при четырех фазах - $0{,}5115\mu$ [4,9].

Из проведенного анализа следует, что по мере увеличения числа фаз пропускная способность СМО падает. Если в первой фазе очереди не ограничены, то пропускная способность всех фаз должна быть равной, а если имеются ограничения очереди, то первая фаза должна иметь большую пропускную способность, чем последующие фазы.

В практике ТЭА делалось не мало попыток организовать обслуживание и ремонт автомобилей по типу заводского конвейера, однако все они были нежизнеспособны. Это объясняется именно тем, что при ремонте разных автомобилей затрачивается различное (случайное) время, т. е. мы имеем дело с системой массового обслуживания, которая характеризуется рассмотренными здесь особенностями.

5.5. Оценка надежности систем с ненагруженным резервом с помощью теории массового обслуживания.

Повышение надежности автомобиля за счет нагруженного (горячего) резервирования элементов находит ограниченное применения, главным образом в тормозных системах. Типичным примером ненагруженного резерва является запасное колесо и некоторые запасные части, перевозимые на автомобиле. Комплект таких частей водитель формирует интуитивно на основе своего опыта и советах «бывалых» водителей, т. е. субъективно.

С помощью теории массового обслуживания можно объективно оценивать повышение надежности автомобиля в зависимости от количества перевозимых на автомобиле запасных частей. Рассмотрим вывод расчетных зависимостей на примере запасного колеса.

Прокол колеса при эксплуатации автомобиля является примером внезапного отказа, поскольку он практически не зависит от того, сколько колесо проработало с начала эксплуатации или предшествующего прокола. Наработка колеса до прокола является случайной величиной, распределенной по показательному закону, вероятность прокола

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x},$$

где λ_1 - параметр распределения, равный обратной величине средней наработке колеса до прокола.

Автомобиль имеет n колес, условия их работы по проколам можно принять одинаковыми, поэтому суммарная интенсивность потока отказов $\lambda = n\lambda_1$, а вероятность прокола при наработке x можно выразить формулой

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Для оценки влияния запасного колеса на надежность автомобиля представим изменения состояний автомобиля как Марковский процесс, в котором непрерывное время заменено пробегом автомобиля. Обозначим возможные состояния системы:

S_1 - работают «основные» колеса автомобиля, запасное колесо находится в исправном состоянии;

S_2 - после прокола одного из колес, оно заменено на запасное, на место запасного установлено проколотое колесо;

S_3 - проколото еще одно колесо, дальнейшее движение невозможно.

Из состояния S_2 система может перейти в состояние S_1, если после возвращения автомобиля после рейса в гараж проколотое колесо будет заменено исправным колесом из оборотного фонда или будет отремонтировано в межсменное время.

В течение рейса прокол колеса может произойти в любой случайный момент, как в начале, так и в конце рейса. В среднем пробег от прокола до конца рейса будет равным половине длины рейса $\overline{X}_p$, т. е. интенсивность потока восстановления $\mu = \dfrac{1}{0{,}5\overline{X}_p}$. Граф состояний и переходов рассматриваемой системы показан на рис.28.

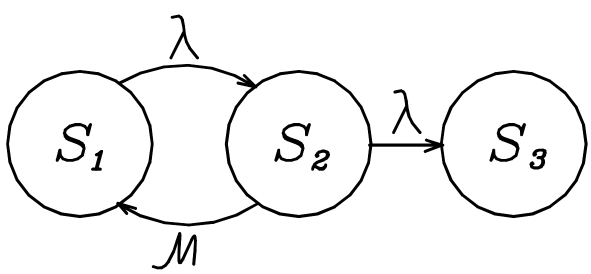


Рис.28.

Пользуясь общим правилом, составим уравнения Эрланга:

$$\frac{dP_1}{dx} = -\lambda P_1 + \mu P_2;$$

$$\frac{dP_2}{dx} = \lambda P_1 - (\lambda + \mu) P_2;$$

$$\frac{dP_3}{dx} = \lambda P_2;$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

В данной задаче бессмысленно рассматривать установившейся режим, поскольку при $x \to \infty$ система обязательно придет в состояние S_3 (рано или поздно будет два прокола колеса за один день и автомобиль окажется в состоянии отказа).

Для решения системы дифференциальных уравнений можно свести их к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 P_1}{dx^2} + (2\lambda + \mu)\frac{dP_1}{dx} + \lambda^2 P_1 = 0.$$

Решение полученного линейного уравнения второго порядка производится по известным в математике методам, подробнее это решение приведено в работе [9]. В результате решения получено распределение вероятностей наработки до отказа $P_3(x)$, а далее, путем интегрирования, найдена величина средней наработки автомобиля с одним запасным колесом до отказа:

$$\overline{X}_1 = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}.$$

Из полученной формулы видно, что при $\mu \to 0$, $\overline{X}_1 \to \frac{2}{\lambda} = 2\overline{X}$, т. е. если после рейса проколотое колесо не менять, то средний пробег автомобиля с запасным колесом будет только в два раза больше среднего пробега до отказа автомобиля без запасного колеса..

Если автомобиль оборудуется несколькими запасными колесами (запасными частями в роли ненагруженного резерва), то среднюю наработку до отказа предлагается рассчитывать по формуле

$$\overline{X}_k = \frac{(k+1)\lambda^k + k\mu^k}{\lambda^{k+1}},$$

где k - число запасных частей, перевозимых на автомобиле;

$\lambda = \left(\overline{X}\right)^{-1}$ - интенсивность потока отказов.

Эта формула получена методом дедукции и является общей для случаев, когда запасного колеса нет, когда одно колесо. Результаты расчета по формуле совпадают с решением дифференциальных уравнений для СМО с двумя запасными частями и результатами статистического моделирования СМО на ЭВМ.

5.6. Общие сведения о методе динамики средних.

Во многих практических задачах удобнее пользоваться не вероятностями состояний СМО, а ее обобщенными характеристиками: средней очередью, средним временем ожидания в очереди, средним числом занятых каналов и т. п. Расчет средних характеристик через конкретные единичные характеристики тем сложнее, чем больше возможных состояний системы. Однако оказывается, что чем больше элементов в СМО, тем точнее оценка средних значений основных характеристик может быть получена по методу динамики средних.

Рассмотрим идею метода на следующем примере. Физическая система состоит из 200 однотипных элементов, пусть автомобилей A. Каждый автомобиль может находиться в одном из двух состояний: A_1 - исправен, A_2 - неисправен. Переход автомобиля из состояния A_1 в состояние A_2 происходит под действием потока неисправностей λ, а из состояния A_2 в состояние A_1 - под действием потока восстановления μ.

Для определения среднего числа автомобилей, находящихся в исправном состоянии, можно рассматривать данную систему как замкнутую СМО. Возможными состояниями системы будут S_0 - все автомобили исправны, S_1 - один автомобиль неисправен, S_2 - два автомобиля неисправны и т. д. до S_n.

Таким образом, общее число состояний системы равно 201, в то время, как каждый автомобиль может находиться только в двух состояниях: A_1 и A_2. Граф состояний и их переходов для автомобиля под действием потоков неисправностей и восстановления может быть представлен рис.29.

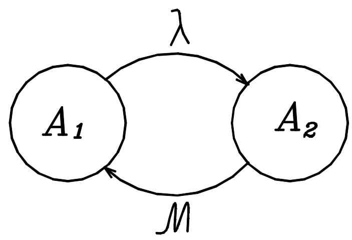


Рис. 29.

Составив по известному правилу уравнения Эрланга, получим

$$\frac{dP_1}{dt} = -\lambda P_1 + \mu P_2,$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\mu P_2 + \lambda P_1.$$

Умножив левую и правую части уравнений на число элементов в системе и введя это число как постоянный множитель под знак производной, получим

$$\frac{d(NP_1)}{dt} = -\lambda NP_1 + \mu NP_2,$$

$$\frac{d(NP_2)}{dt} = -\mu NP_2 + \lambda NP_1.$$

Поскольку $NP_1 = m_1$ и $NP_2 = m_2$ - это средние значения числа исправных и неисправных автомобилей, можно записать дифференциальные уравнения сразу относительно средних численностей состояний системы:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\lambda m_1 + \mu m_2,$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\mu m_2 + \lambda m_1,$$

$$m_1 + m_2 = N.$$

Для определения средних численностей состояний в установившемся режиме по методу средних, вначале следует решить дифференциальные уравнения, а затем рассмотреть предел при $t \to \infty$. Непосредственное приравнивание нулю производных в уравнения Эрланга может давать некорректные результаты.

5.7. Статистическое моделирование систем массового обслуживания

Аналитические описания СМО на основе формул Эрланга базируются на простейших потоках заявок и обслуживания, когда время между моментами изменения событий является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. На практике во многих случаях коэффициент вариации случайных величин может быть меньше единицы, и эти величины описываются другими законами распределения вероятностей. Чем больше эти законы отличаются от экспоненциального, тем менее пригодны для описания СМО выведенные формулы Эрланга, т. е. тем больше будут погрешности результатов расчета. Если время обслуживания распределено по нормальному закону, то расчеты по формулам Эрланга будут давать завышенные значения средних очередей и времени ожидания в очереди, и заниженную пропускную способность СМО.

Для описания СМО с произвольными потоками может быть использован метод вложенных цепей, который основан на том, что сумма нескольких случайных величин является случайной величиной, коэффициент вариации которой меньше коэффициента вариации слагаемых случайных величин. Например, время обслуживания автомобиля часто описывается нормальным законом с коэффициентом вариации меньше одной третьей. В этом случае можно представить время обслуживания суммой нескольких (5…6) случайных отрезков времени, составляющих как бы время обслуживания в многофазной системе. Однако описание многофазных СМО существенно сложнее, чем однофазных, что ограничивает возможность применения этого метода.

Более универсальным и реальным для практического применения является метод статистического моделирования СМО на ЭВМ, когда по особой программе генерируются случайные величины моментов поступления в систему заявки и времени ее обслуживания. В процессе моделирования идет учет возникающих ситуаций с последующей обработкой, позволяющей определять средние очереди, время ожидания в очереди и т. д..

Статистическое моделирование систем массового обслуживания находит все более широкое применение в самых различных областях науки и практики, при исследованиях производственных процессов и функционирования систем управления.

Вопросы для самоконтроля по пятому разделу

1. Можно ли заводской конвейер считать многофазной СМО?
2. Почему ТО-1 обычно проводят на поточной линии, а ТО-2 - на тупиковых постах? Как это объясняется теорией массового обслуживания?
3. Если в однофазной СМО вместо одного канала использовать два таких же канала, то всегда ли пропускная способность СМО возрастет в два раза?
4. Если АЗС с двумя колонками для заправки автомобилей бензином А-76 представить как СМО, то чем будут отличаться графы СМО, описывающие АЗС, расположенную на автомобильной трассе, и АЗС, расположенную на территории автотранспортного предприятия и обслуживающую только автомобили этого предприятия?
5. Как в общем виде рассчитывается средняя очередь заявок в СМО?
6. Во сколько раз изменится средняя наработка автомобиля до отказа по проколу колеса, если запасное колесо на автомобиле будет отсутствовать?

Приложение 1

Значения интегральной функции нормального закона распределения вероятностей случайной величины *F(z)*

z		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0,	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0,	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0,	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0,	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0,	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0,	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7850
0,8	0,	7881	7910	7939	7967	7995	7023	7051	7078	8106	8133
0,9	0,	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0,	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0,	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0,9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5554	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8030	8077	7124	8169
2,1	0,9	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	8500	8537	8574
2,2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	0,99	1802	2024	2240	2451	2656	2657	3053	3244	3431	3613
2,5	0,99	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2,6	0,99	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	0,99	6533	6636	6736	6833	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	0,99	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	0,99	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605
3,0	0,99	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999

Аргументом функции является квантиль $z = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$, при отрицательной квантили $F(-z) = 1 - F(z)$.

Приложение 2

Нелинейная шкала для нормального закона распределения вероятностей

$F(x)$	S_F		$F(x)$	S_F
0,50	0		0,93	71,5
0,52	2,4		0,94	75,4
0,54	4,8		0,95	79,8
0,56	7,3		0,955	82,3
0,58	9,8		0,960	85,0
0,60	12,3		0,965	88,0
0,62	14,8		0,970	91,2
0,64	17,4		0,975	95,1
0,66	20,0		0,980	99,6
0,68	22,7		0,985	106,2
0,70	25,4		0,990	112,9
0,72	28,3		0,991	114,8
0,74	31,2		0,992	116,9
0,76	34,2		0,993	119,0
0,78	37,4		0,994	121,9
0,80	40,8		0,995	124,9
0,82	44,4		0,9955	126,7
0,84	48,2		0,9960	128,7
0,86	52,4		0,9965	131,0
0,88	57,0		0,9970	133,2
0,90	62,2		0,9975	136,2
0,91	65,0		0,9980	139,5
0,92	68,1		0,9985	144,9
0,93	71,5		0,999	150

Для вероятностей меньших 0,5 $S_F = -S_{1-F}$, например, вероятность $F = 0{,}3$ находится на шкале вниз от начальной точки на таком же расстоянии, что и вероятность $F = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.