

## Лекция № 1

### Тема: Комплексные числа

До сих пор мы имели дело с так называемыми действительными числами, которые состояли из чисел рациональных и иррациональных.

Напомню, что рациональные (разумные) числа это числа целые (положительные и отрицательные), дробные (положительные и отрицательные) и число 0.

Например,  $-5$ ;  $17$ ;  $3/5$ ;  $-7/9$  и т. д.

Эти числа обладают интересным свойством: каждое из них можно представить в виде обыкновенной дроби. Например,  $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}$ ;  $0 = \frac{0}{1}$ ;  $-6 = \frac{6}{-1}$  и т. д.

Но это не все: оказывается всякую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной дроби. При этом возможны два случая: десятичная дробь получается конечной, а может оказаться бесконечной, но тогда периодической.

В связи с этим возникает вопрос. А если мы рассмотрим десятичную бесконечную, но непериодическую дробь? Получается так, что среди рациональных чисел нет числа ей соответствующего. Вот это и привело к необходимости введения **иррациональных** (неразумных) чисел. Повторюсь: это десятичные бесконечные непериодические дроби. Например:  $\pi = 3, 14\dots$ ;  $\sqrt{2} = 1,414\dots$ ;  $\sqrt{5} = 2,236\dots$  и т. д.

Напомню, что вместе рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел, с которыми вы неоднократно имели дело, изучая школьный курс математики.

Это множество устроено **почти** идеально. Все арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над этими числами дают в результате действительное число. Откуда же присутствие слова «почти»?

Дело в том, что операция извлечения квадратного корня из действительного числа не всегда выполнима. Например,  $\sqrt{-4}$ . Ведь извлечение квадратного корня предполагает нахождение такого числа, которое в результате возведения во вторую степень дает подкоренное выражение. Ну, нет среди действительных чисел числа, которое в квадрате даст нам  $-4$ .

Помните, как в школе при решении квадратных уравнений получив отрицательный дискриминант, хором кричали: «Уравнение не имеет корней», а надо было говорить: «Уравнение не имеет действительных корней». Потому что все квадратные уравнения имеют два корня, но не зная того, что вы скоро узнаете, вы не умели их найти.

Это подтолкнуло ученых к введению новых особых чисел вида  $\sqrt{-a}$ , где  $a > 0$ . И логично их название: **мнимые** числа, если все ранее известные были действительными. А число  $\sqrt{-1} = i$  называли **мнимой единицей**.

Причем,  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$ ;  $i^4 = 1$ .

**Определение 1.** Комплексным числом называется число вида  $z = a + bi$ .  
Причем  $a$  - действительная его часть,  $bi$  - мнимая.

**Определение 2.** Два комплексных числа **равны** между собой, если они имеют одинаковые действительные и мнимые части.

**Определение 3.** Число вида  $z_1 = a - bi$  называется **сопряженным** для числа  $z = a + bi$ .

(Обратите внимание: они отличаются знаком перед мнимой частью).

Над комплексными числами можно выполнять все известные арифметические операции. Посмотрим, как это делается.

Пусть заданы два комплексных числа  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$ . Тогда:

1. **Сумма**  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ . Проще это звучит так: для того, чтобы сложить два комплексных числа, нужно сложить их действительные части и мнимые.

## 2. Разность

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

## 3. Произведение

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + cb)i.$$

**Примечание 1.** При получении формулы воспользовалась тем, что  $i^2 = -1$ .

**Примечание 2.** При умножении сопряженных чисел всегда получается действительное число (убедитесь сами).

$$4. \text{ Частное } \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

**Пример 1. 1.** Заданы два комплексных числа  $z_1 = 2 + 3i$  и  $z_2 = 1 - 4i$ .  
Найти для них все, что мы только что нашли в общем виде.

## Решение

$$1. z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 4i = 3 - i.$$

$$2. z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 + 4i = 1 + 7i.$$

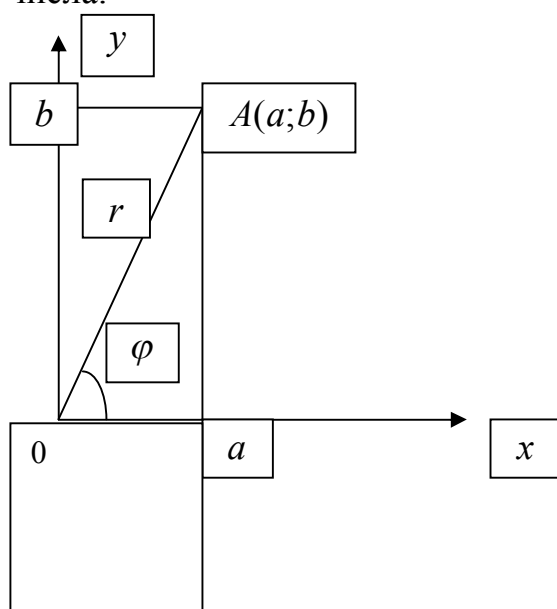
$$3. z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - 4i) = 2 + 3i - 8i + 9i^2 = 2 + 3i - 8i - 9 = -7 - 5i.$$

$$4. \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{2+3i+8i+12i^2}{17} = \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i.$$

Обратите внимание, что выполнили простейшие арифметические операции над комплексными числами. А как же возведение в степень, извлечение корней? Видимо все не так уж и просто. Но выход есть. И он в другой форме представления комплексных чисел.

### Тригонометрическая форма комплексного числа

Всякое комплексное число  $z = a + bi$  можно изобразить на координатной плоскости  $XOY$  в виде точки  $A$  с координатами  $(a; b)$  и наоборот всякая точка плоскости является геометрическим образом комплексного числа.



Рассмотрим прямоугольный треугольник  $OAB$ . Из школьного курса тригонометрии известно, что  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$ . Поэтому в тригонометрической форме число  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Причем  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  является модулем комплексного числа, а  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$  его аргументом.

**Пример 1. 2.** Представить число  $z = 2 + 2i$  в тригонометрической форме.

#### Решение

Найдем модуль и аргумент данного числа:  $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \text{ Окончательно } z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

**Примечание.** Такой переход желательно сопровождать геометрической картинкой, чтобы быть уверенным в правильности нахождения аргумента. Например, для числа  $z_1 = -2 - 2i$   $\operatorname{arctg} \frac{-2}{-2} = 1$ , но соответствующий геометрический образ данного числа находится в третьей четверти, поэтому  $\varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ . Окончательно  $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$ .

Над комплексными числами в тригонометрической форме удобно выполнять операции **умножения** и **деления**.

Пусть заданы два числа  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Чтобы найти их **произведение**, достаточно воспользоваться формулой

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1.1)$$

Иначе говоря, модули их надо перемножить, а аргументы сложить.

**Пример 1. 3.** Даны два числа  $z_1 = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$  и  $z_2 = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ . Найти их произведение.

**Решение**

$$z_1 z_2 = 10\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

Чтобы найти **частное** от деления комплексных чисел в тригонометрической форме, надо воспользоваться формулой

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (1.2)$$

Словами сформулировать это действие попробуйте сами.

Теперь нетрудно будет решить вопрос о **возведении в целую степень** комплексного числа. Я запишу без всяких пояснений готовую формулу, так как уверена, что если вы внимательно разобрали предыдущий материал, вам будет все понятно.

Итак, пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , тогда

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.3)$$

**Пример 1. 4.** Число  $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$  возвести в третью степень.

**Решение**

Воспользуемся формулой (1. 3) при  $n=3$ . В результате  $z^3 = 16\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ .

Рассмотрим **извлечение корня** из комплексного числа. Для этого используем формулу Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \text{ где } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1. 4)$$

**Пример 1. 5.** Извлечь кубический корень из числа  $z = 8(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ .

**Решение**

Воспользуемся формулой (1. 4) при  $n=3$ .

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\text{При } k=0 \quad z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

$$\text{При } k=1 \quad z_2 = 2 \left( \cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right).$$

$$\text{При } k=2 \quad z_3 = 2 \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел  $z_1 = 4 + 2i$  и  $z_2 = 2 - i$ .
2. Найти тригонометрическую форму числа  $z = 1 + i$ . Возвести его в пятую степень.
3. Перемножить и разделить два числа  $z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$  и  $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ .
4. Извлечь корень четвертой степени из числа  $z = 16(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ .

## Лекция № 2

### Линейная алгебра

#### Определители и их свойства.

**Определение 2. 1** Квадратной матрицей размерностью  $2 \times 2$  называется таблица чисел вида  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , где  $a_{ij}$ , где первый индекс номер строки, а второй – номер столбца, являются элементами матрицы.

Каждой квадратной матрице  $2 \times 2$  может быть поставлено в соответствие число  $|A|$ , называемое определителем 2 - ого порядка.

**Определение 2. 2.** Определителем (детерминантом) 2-го порядка называется

$$\text{число вида } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Числа  $a_{ij}$  - элементы определителя.

Элементы  $a_{11}$  и  $a_{22}$  - образуют главную диагональ определителя, элементы  $a_{12}$  и  $a_{21}$  образуют побочную диагональ.

**Пример 2.1.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ .

**Решение**

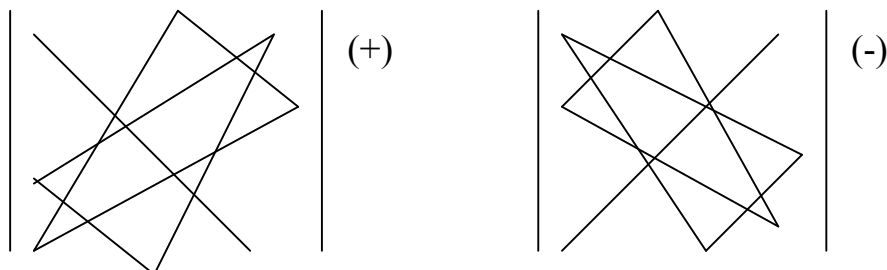
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-5) = 23.$$

Аналогично вводится понятие об определителе третьего порядка, соответствующего матрице размерности  $3 \times 3$ , т. е. квадратной матрице, имеющей три строки и три столбца.

**Определение 2. 3.** Определителем 3 -го порядка называется число вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Запомнить эту формулу легко с помощью правила Саррюса:



**Пример 2. 2.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 4 + 0 + 24 - 1 = 47.$$

**Определение 2. 4** Минором  $M_{ij}$ , соответствующим элементу  $a_{ij}$  определителя 3 -го порядка, называется определитель 2-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием  $i$  - ой строки и  $j$  - ого столбца, на пересечении которых находится элемент  $a_{ij}$ .

**Пример 2. 3.**

$$\text{Дан определитель } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}. \text{ Найти } M_{12} \text{ и } M_{22}.$$

**Решение**

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -15, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16.$$

**Определение 2. 5** Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма индексов четная, и со знаком «-», если нечетная, т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

**Пример 2.4.** Для определителя  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$  найти  $A_{12}$  и  $A_{22}$ .

**Решение**

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 15.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

Сравнив результаты решений примеров 2. 3 и 2. 4, можно сделать вывод о том, что если сумма индексов элемента определителя четна, от минор и алгебраическое дополнение этого элемента совпадают, а если нечетна, то они отличаются знаком.

### Свойства определителей

**Свойство 1.** Величина определителя не изменится, если его строки заменить соответствующими столбцами.

#### Доказательство

Возьмем уже знакомый нам определитель  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ .

А теперь рассмотрим другой определитель, заменив в исходно строки на соответствующие столбцы.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ . Оказалось, что величина определителя не изменилась, что и требовалось доказать.

**Примечание 1.** Это свойство указывает на равноправность строк и столбцов, поэтому далее формулируя какое либо утверждение относительно строк определителя, мы должны помнить, что это верно и для столбцов.

**Примечание 2.** Первое свойство мы доказали для определителя 2 – го порядка и сделали это для простоты доказательства. Не сомневайтесь в том, что это верно для определителей любого порядка. А если сомнения присутствуют, самостоятельно убедитесь в правильности свойства 1 на примере определителя 3 – го порядка. Удачи!

**Свойство 2.** При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

#### Доказательство



Рассмотрим хорошо знакомый нам определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \text{ Составим новый определитель } \Delta_1,$$

переставив, например, строки исходного определителя.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21} = -\Delta.$$

Что и требовалось доказать.

**Свойство 3.** Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен 0.

Убедитесь в этом на примере  $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$

**Свойство 4.** Общий Множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

#### Доказательство

Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = ka_{11} \cdot a_{22} - ka_{12} \cdot a_{21} = k(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

Примечание. Это свойство позволяет значительно облегчить вычисления определителей. Подтвердим это на примере вычисления определителя 2 – го порядка, но напомним, что это верно для определителей любого порядка.

**Пример 2. 5.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 15 & 45 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 15 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 60(-2 - 3) = -300.$$

**Свойство 5.** Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны 0, то определитель тоже равен 0.

**Свойство 6.** Величина определителя не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число.

### Доказательство

Рассмотрим определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ .

Домножим элементы второго столбца на число  $k$  и прибавим к соответствующим элементам первого столбца. В результате получим определитель

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ka_{12}) \cdot a_{22} - a_{12} \cdot (a_{21} + ka_{22}) = \\ &= a_{11}a_{22} + ka_{12}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{12}a_{22} = \Delta. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим две важные теоремы об определителях, которые помогут значительно упростить их вычисление.

**Теорема 1.** Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

### Доказательство

Напомним, что величина определителя 3 – го порядка находится по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Теорема утверждает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \dots$$

Я выбрала первую строку для разложения, хотя могла выбрать любую другую, как и любой столбец.

Продолжим доказательство теоремы.

$$\begin{aligned}
 a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
 &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \dots = \Delta.
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Сумма произведений элементов любой строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0.

Попробуйте доказать теорему 2 самостоятельно.

### Пример 2. 6

Вычислим определитель примера 2. 2 с помощью теоремы 1. Итак,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 20 - 1 + 4 + 24 = 47.$$

Как видим результаты совпали, что не удивительно, поскольку мы все сделали правильно.

Мы затратили бы меньше усилий, если бы для разложения использовали первый столбец или вторую строку (почему?).

### Пример 2.7.

Вычислить определитель 
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

### Решение

Если вы знаете ответ на заданный в предыдущем примере вопрос, то поймете, почему стоит выполнить преобразования определителя, основываясь на свойстве 6. Я предлагаю третью строку сохранить, а затем, умножив ее на 3, прибавить ко второй строке. Затем, умножив ее же на -4, прибавить к первой строке. Моя цель – получить два 0 в третьем столбце и разложить определитель по этому столбцу.

$$\text{Итак, } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 11 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 14 & 11 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -70 + 44 = 26.$$

### Задание для самостоятельной работы

Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$  тремя способами:

1. по определению;
2. разложив по элементам второй строки;
3. преобразовав определитель с целью получения двух нулей.

Надеюсь, не надо предупреждать о том, что во всех трех случаях вы должны получить один и тот же результат? Если результаты совпадут, это будет сигналом о том, что в этой теме Вы разобрались. Успехов!

## ЛЕКЦИЯ № 3

### ТЕМА: Применение определителей для решения систем линейных уравнений

#### 1. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Общий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

Решим эту системы методом сложения, который известен из школьного курса математики. Для этого умножим первое уравнение на  $a_{22}$ , а второе на  $-a_{12}$ . (Цель – уравнять коэффициенты перед неизвестной  $x$ ). Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x - a_{22}a_{12}y = -b_2a_{12} \end{cases}.$$

Сложим два уравнения и получим  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$ .

Отсюда  $x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ . Заметим, что выражения в числителе и знаменателе полученной дроби ни что иное как определители вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Тогда  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ .

Аналогичные действия относительно неизвестной  $y$  приводят к формуле

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Причем  $\Delta \neq 0$ . Надеюсь вам понятно такое

ограничение?

Данный метод решения систем линейных уравнений носит имя швейцарского математика Крамера (1704 -1861 г.).

**Пример 3. 1** Решить систему 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 4y = 5 \end{cases}.$$

**Решение**

Составим определитель системы  $\Delta$  из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11 \neq 0, \quad \text{значит систему можно решить методом Крамера.}$$

Составим вспомогательные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 15 = -47; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2.$$

Окончательно,  $x = \frac{-47}{-11} = \frac{47}{11}; \quad y = \frac{2}{-11} = -\frac{2}{11}.$

**Примечание.** А если  $\Delta = 0$ ? В этом случае методом Крамера систему решить невозможно, но это не значит, что ее нельзя решить другими методами. Об этом далее...

## 2. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Общий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Решение осуществим по тем же формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

**Пример 3.2** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

**Решение**

Вычислим определитель системы и вспомогательные определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

Ответ:

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \quad x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \quad x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$

**Задание для самостоятельного решения**

1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = 3; y = 1; z = 1.$$

2. Решить систему и сделать проверку

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

## ЛЕКЦИЯ 4

### МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

**Определение 4. 1.** Числовой матрицей размерности  $m \times n$  называется прямоугольная таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m, \text{ содержащая } m \text{ строк и } n \text{ столбцов.}$$

Числа  $a_{ij}$  являются элементами матрицы, где  $i$  - номер строки,  $j$  - номер столбца.

**Определение 4. 2.** Две матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если их соответствующие элементы равны.

#### Виды матриц

1. **Матрица - строка** ( $1 \times n$ )

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{1n}).$$

2. **Матрица – столбец** ( $m \times 1$ )

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

3. **Нулевая** матрица это матрица, у которой все элементы равны 0.

4. **Квадратной** матрицей называется матрица размерности  $(n \times n)$ , то есть матрица, у которой количество строк и столбцов совпадает. При этом число  $n$  называется порядком матрицы. (Мы с такими матрицами встречались при изучении определителей).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Набор элементов  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образует главную диагональ квадратной матрицы.

5. Квадратная матрица, все элементы которой за исключением элементов главной диагонали, равны 0, называется **диагональной**.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

6. Диагональная матрица, все элементы которой равны 1, называется **единичной**.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Квадратная матрица  $A$  соответствующий определитель которой  $|A| \neq 0$ , называется **невырожденной**. В противном случае матрица вырожденная.

### Линейные операции над матрицами

#### 1. Сложение

Суммой двух матриц одинаковой размерности является матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц. Иначе говоря, если  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ , то  $A + B = C(c_{ij})$ , где  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

#### 2. Вычитание

Разностью двух матриц одинаковой размерности является матрица той же размерности, элементы которой равны разности соответствующих элементов слагаемых матриц. Иначе говоря, если  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ , где

$i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ , то  $A - B = D(d_{ij})$ , где  $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .

#### 3. Умножение матрицы на число (скаляр)

Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число, т. е. если Суммой двух матриц одинаковой размерности является матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц. Иначе говоря, если  $A = (a_{ij})$  и  $k$  - число, то  $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$ .

**Пример 4.1** Заданы матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти матрицу  $C = 2A - 3B$ .

**Решение**



$$C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 10 & 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -6 & 15 \\ 9 & 18 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -7 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

### Произведение матриц

Пусть заданы две матрицы:  $A = (a_{ij})$  размерности  $(m \times n)$  и  $B = (b_{ij})$  размерности  $(n \times k)$ . **Произведением матриц  $A$  и  $B$**  называется матрица  $C = A \cdot B = (c_{ij})$ , у которой элемент  $c_{ij}$  равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  и  $j$ -ого столбца матрицы  $B$ .

**Примечание.** Обратите внимание на то, что количество столбцов матрицы  $A$  должно совпадать с количеством строк матрицы  $B$ . Если это условие не выполняется, то произведение матриц найти невозможно.

**Пример 4. 2.** Найти произведение матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ .

#### Решение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}.$$

**Пример 4. 3.** Перемножить матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

#### Решение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 17 & 13 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Примечание.** В общем случае  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Убедитесь в этом на примере. Найди произведение матриц  $B \cdot A$ , заданных в примере 4. 2.

### Обратная матрица

**Определение.** Обратной матрицей для квадратной матрицы  $A$  называется такая матрица  $A^{-1}$ , которая удовлетворяет условию  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

**Теорема.** Для невырожденной квадратной матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

обратной является матрица  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ , где  $A_{ij}$  -

алгебраические дополнения.

**Примечание.** Если матрица вырождена, т. е.  $|A| = 0$ , то обратная матрица не существует.

**Пример 4. 4.** Найти обратную матрицу, если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Решение**

Воспользуемся формулой  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ .

Вычислим соответствующий определитель  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -26 \neq 0$ .

Вычислим алгебраические дополнения

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 12; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -38. \end{aligned}$$

Итак,  $A^{-1} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 \\ -5 & 1 & 5 \\ 12 & 8 & -38 \end{pmatrix}$ .

### Проверка

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 \\ -5 & 1 & 5 \\ 12 & 8 & -38 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -26 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно.

### Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом

$$\text{Общий вид системы} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

$$\text{Рассмотрим матрицы } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Заметим, что систему можно записать в матричном виде  $A \cdot X = B$ .

Если  $|A| \neq 0$ , то существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Домножим уравнение  $A \cdot X = B$  на  $A^{-1}$ . Получим уравнение  $A^{-1}A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ . Поскольку  $A^{-1}A = E$ , окончательно получаем решение матричного уравнения  $X = A^{-1} \cdot B$ .

$$\text{Пример 4. 5. Решить систему} \quad \begin{cases} 3x + 2z = 9 \\ 5x + 3y + 3z = 20 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \text{ матричным методом.}$$

### Решение

$$\text{Составим матрицы } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда исходная система в матричной форме примет вид  $A \cdot X = B$ . А решение ее найдем по формуле  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Убедимся в том, что обратная матрица существует. Для этого вычислим

определитель матрицы  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 10 - 6 + 9 = 2 \neq 0$ .

Обратную матрицу найдем по формуле  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -8; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9. \end{aligned}$$

Итак, обратная матрица имеет вид  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \\ -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ .

Тогда  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \\ -8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Напомним, что две матрицы одинаковой размерности равны, если равны их соответствующие элементы.

Отсюда ответ:  $x = 1; y = 2; z = -3$ .

**Примечание.** Матричный метод можно применить только тогда, когда существует обратная матрица, а для этого требуется невырожденность матрицы системы. Если же матрица вырождена, это не значит, что система не имеет решения, просто метод не подходит. Есть ли выход? Есть и мы его скоро узнаем.

#### Задание для самостоятельной работы

1. Решить систему  $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ . Сделать проверку.

## Лекция 5 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

### Понятие о миноре и ранге матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размерности  $(m \times n)$ , где  $m < n$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Выделим произвольные  $k$  строк и  $k$  столбцов. Элементы, расположенные на выделенных строках и столбцах, образуют квадратную матрицу размерности  $(k \times k)$ .

**Определение 5. 1.** Минором  $k$ -ого порядка матрицы  $A$  называется определитель квадратной матрицы, полученной из данной матрицы выделением произвольных  $k$  строк и  $k$  столбцов.

**Пример 5.1.** Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 14 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .

Составим миноры 2 – го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}; \dots$$

Составим миноры 3-ого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \dots$$

**Определение 5. 2.** Рангом матрицы называется наибольший порядок минора, отличного от 0.

Ранг матрицы обозначается символом  $r(A)$ .

Если  $r(A) = r(B)$ , то говорят, что матрицы эквивалентны, т. е.  $A \sim B$ .

**Примечание.** Находить ранг матрицы, используя его определение, довольно затруднительно, т. к. надо вычислить достаточно большое количество определителей разного порядка. Избежать этой скучной работы позволят элементарные преобразования матриц, не влияющие на ее ранг.

Вот эти преобразования:

1. Перестановка строк матрицы.
2. Прибавление элементов строки, умноженных на число, к соответствующим элементам другой строки.
3. Вычеркивание чисто нулевой строки.
4. Сокращение на общий множитель элементов строки (столбца).

Цель таких преобразований – приведение матрицы к ступенчатому виду, т.е. виду, когда вторая строка начинается с одного 0, третья - с двух и т. д.

**Определение 5. 3.** Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк матрицы, приведенной к ступенчатому виду.

**Пример 5. 2.** Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -3 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

### Решение

Переставим для удобства 1-ю и 3-ю строки.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

Первую строку сохраним. Домножим ее на  $-2$  и прибавим ко второй и, домножив ее же на  $-3$ , прибавим к третьей строке. Цель – получить в первом столбце два нуля.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Первую и вторую строку сохраним. Затем вторую строку умножим на  $-1$  и прибавим к третьей строке, получим

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Вычеркнем нулевую строку

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Вывод:**  $r(A) = 2$ .

**Примечание.** Не надо путать понятия равные и эквивалентные матрицы.

### Метод Гаусса

Одним из самых распространенных методов решения систем линейных уравнений есть метод последовательных исключений неизвестных. Этот метод предложен немецким математиком Карлом Гауссом (1777 - 1855 г.) и основывается на элементарных преобразованиях системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = C_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = C_m \end{cases} \quad (*)$$

Составим две матрицы:

1. Основная матрица система

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Расширенная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & C_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & C_m \end{pmatrix}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о существовании решения системы (\*) дает теорема Кронекера-Капелли.

**Теорема:** Для того, чтобы система (\*) была совместной (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы равнялся рангу расширенной матрицы, т.е.

$$r(A) = r(B).$$

Причем, если  $r(A) = r(B) = n$ , где  $n$  - число неизвестных, то система имеет единственное решение.

Если  $r(A) = r(B) < n$ , то система имеет множество решений.

**Пример 1.** Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

### Решение

Составим расширенную матрицу и вертикальной чертой выделим столбец, соответствующий правым частям уравнений. Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r(A) = r(B)$  - система совместна.  $r(A) = 2 < 4 \Rightarrow$

система имеет множество решений. Причем  $k = n - r(A)$  - есть число свободных неизвестных.

Полученная матрица соответствует следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10 \end{cases}$$

Число свободных неизвестных  $k = 4 - 2 = 2$ . Пусть это будут  $x_3 = v$  и  $x_4 = u$ .

Тогда  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 - u \\ 5x_2 = 10 + 2v + 3u \end{cases}; \quad x_2 = \frac{2}{5}v + \frac{3}{5}u + 2$

$$x_1 = -3 - u + 2x_2 = -3 - u + \frac{4}{5}v + \frac{6}{5}u + 4;$$

$$x_1 = 1 + \frac{4}{5}v + \frac{1}{5}u$$



$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{4}{5}v + \frac{1}{5}u \\ x_2 = 2 + \frac{2}{5}v + \frac{3}{5}u \\ x_3 = v \\ x_4 = u \end{cases},$$

где  $v$  и  $u$  – любые числа. Давая им произвольные значения, получим множество решений исходной системы.

**Пример 2.** Решить систему

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)(-3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right); r(A) = r(B) = 3 = n. \text{ Вывод: система имеет единственное} \end{aligned}$$

решение. Запишем систему, соответствующую полученной матрице.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 5y - 7z = -7 \\ z = 1 \end{cases} \quad \uparrow$$

$$y = \frac{-7 + 7z}{5} = \frac{-7 + 7}{5} = 0$$

$$x = 3 + 2y - 4z = 3 + 0 - 4 = -1$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

**Пример 3.** Решить систему

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - 6y + 12z = 5 \end{cases}$$

**Решение**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 12 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2), (-3)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right);$$

$r(A) = 2$ ;  $r(B) = 3$ ;  $r(A) \neq r(B) \Rightarrow$  система несовместима.

**Примечание.** Преимущество метода Гаусса над другими изученными нами методами в том, что в нем отсутствует требование невырожденности матрицы системы. Если бы нарушение этого условия делало невозможным применение формул Крамера и матричного метода. Кроме того, этот метод позволяет находить решение систем линейных уравнений с любым количеством уравнений и неизвестных.

### Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

**Подсказка:** Вы должны были решить эту систему методом Крамера. Если Вы это сделали, то ответ Вам известен.