Однофазні ланцюги sin струму

Електричні пристрої sin (змінного) струму знаходять широке використання в різних галузях народного господарства.

Сучасна енергетика використовує передачу енергії на великі відстані за допомогою електричного струму.

Обов’язковою умовою при цьому є можливість використання простого з малими утратами електроенергії перетворювання струму (напруги).

Таке перетворювання здійснюється тільки тоді, коли використовуються електротехнічні пристрої змінного струму – трансформатори.

Великим стимулом для розробки та розвитку електротехнічних пристроїв синусоїдального струму є можливість одержання джерел електричної енергії великої потужності.

До більш простих та дешевих електричних двигунів відносяться асинхронні двигуни синусоїдального струму, в яких не має рухливих електричних контактів.

В електричних пристроях країн СНГ та Європи прийнята частота що дорівнює 50 Гц. В США – 60 Гц.

Частоти між 50÷60 Гц це оптимальні. Зниження частоти менш ніж 50 Гц викликає помітне блимання ламп. Підвищення більш ніж 60 Гц викликає зріст Е.П.С. самоіндукції, що дуже негативно впливає на передачу енергії по дротам та роботу багатьох електромеханічних пристроїв.

Джерела електричної енергії синусоїдального струму

Промисловими джерелами синусоїдального струму є електромеханічні генератори, в яких механічна енергія парових та гідравлічних турбін перетворюється в електричну.

Принципова конструкція простого електромеханічного генератора буде мати вигляд:

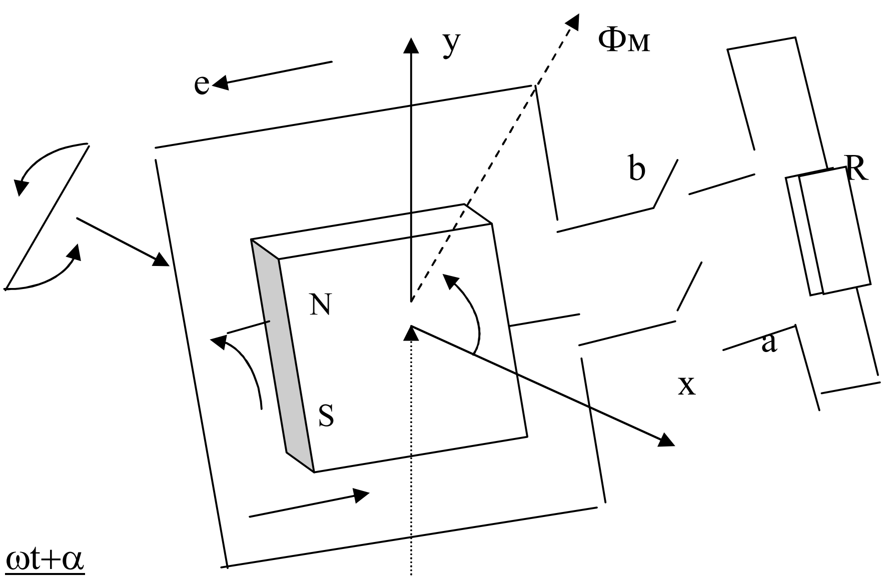


Рисунок 1.1 Принципова конструкція простого електромеханічного генератора

Принципова конструкція простого електромеханічного генератора складається з плоского розімкненого витка з проводами a і b.

Постійний магніт обертається з постійною частотою f, або з постійною кутовою частотою $\omega=2\pi f$, рад/с.

Нехай магнітний потік постійного магніту дорівнює Фм.

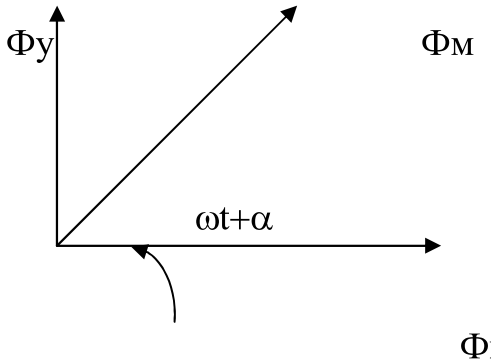


Рисунок 1.2 Магнітний потік постійного магніту

З малюнка видно, що миттєве значення магнітного потоку в проекції на ось Х:

$$Фх=Фм\cos(\omega t+\alpha)=Фм\sin(\omega t+\pi/2+\alpha)=Фм\sin(\omega t+\Psi_{Ф})$$

де Фм – максимальне значення (амплітуда магнітного потоку);

α - початковий кут, або кут в момент часу t=0, який прийнятий за початок обліку;

$\Psi_{Ф}=\pi/2+\alpha$ - кут просторового розташування постійного магніту відносно осі Х, або початкова фаза магнітного потоку;

$\omega t+\Psi_{Ф}$ – фаза магнітного потоку.

Коли магніт переміщується відносно провідника, у провіднику індукується Е.Р.С. (правило буравчика).

<u>Позитивний напрям Е.Р.С.</u> співпадає з напрямом обертання руків'я буравчика що вгвинчується в напрямі магнітного потоку Фх.

e – миттєве значення Е.Р.С.

$$e=-\frac{dФФ}{dt}=-Фм\omega\cos(\omega t+\Psi_{Ф})$$

перетворимо cos на sin:

$$e=Фм\omega\sin(\omega t+\Psi_{Ф}-\frac{\pi}{2})=E_M\sin(\omega t+\Psi_e)$$

$$e=E_M\sin(\omega t+\Psi_e)$$

E_M – амплітуда Е.Р.С.;

Ψ_e – початкова фаза Е.Р.С.;

$\omega t+\Psi_e$ - фаза Е.Р.С.

Намалюємо амплітуди магнітного потоку та Е.Р.С.

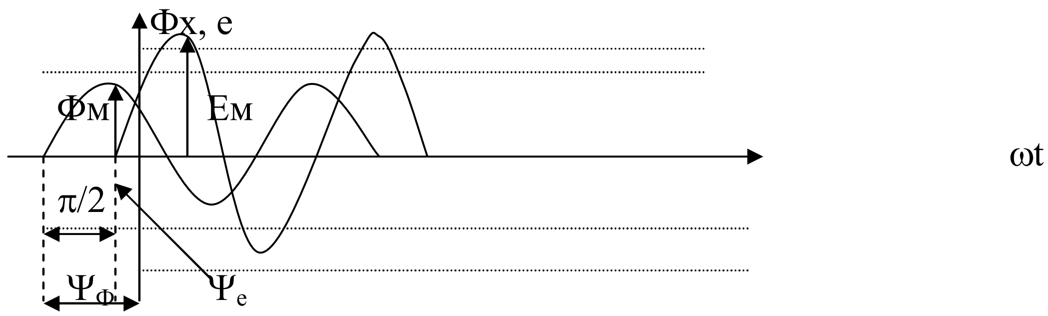


Рисунок 1.3 Амплітуди магнітного потоку та Е.Р.С.

Якщо розглянути струм та напругу, то ми можемо записати в загальному вигляді що:

$$i = I_M \sin(\omega t \pm \Psi_i)$$

де $I_м$ – амплітуда струму;

Ψ_i – початкова фаза струму.

$$U = U_M \sin(\omega t \pm \Psi_U)$$

Початкова фаза визначає зміщення синусоїдальної величини відносно початку координат.

Початкова фаза завжди починає відлік по осі абсцис від ближчого до початку координат нульового значення синусоїдальної величини, при її переході від негативного значення до позитивного до початку координат.

Значення синусоїдальних величин

e, u, i – миттєві значення

Два рази за період миттєве значення приймає найбільше (амплітудне) значення Ем, Uм, Iм.

Про величину синусоїдального струму, напруги та Е.Р.С. судять по їх дійсним значенням E, U, I.

Дійсне значення синусоїдального струму дорівнює такому значенню постійного струму, котрий за період Т викликає таку ж теплову або електродинамічну дію, що і струм змінний:

$$RI^2T = \int_0^T Ridt$$

енергія за період Т в ланцюзі постійного стуму

енергія за період Т в ланцюзі змінного синусоїдального струму

Миттєве значення струму буде мати значення:

$$i = I_M \sin \omega t$$

при Ψ_i =0:

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 d^2}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_M^2\sin^2\omega t dt}=I_M\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt}$$

Тому що
$$\int_0^T dt=T$$

$$\int_0^T\cos 2\omega t dt=0$$

тоді

$$I=I_M\sqrt{\frac{1}{T}T\frac{1}{2}-0}=I_M\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

$$I=\frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Для напруги або Е.Р.С. будемо мати залежність:

$$U=\frac{U_M}{\sqrt{2}};\ E=\frac{E_M}{\sqrt{2}}$$

Вираз синусоїдальної величини аналітичне рівнянням з тригонометричною функцією.

Ці рівняння для миттєвих значень Е.Р.С. струму та напруги будуть мати вигляд:

$$e=E_M\sin(\omega t\pm\Psi_e)$$
$$U=U_M\sin(\omega t\pm\Psi_U)$$
$$i=I_M\sin(\omega t\pm\Psi_i)$$

Кут $(\omega t\pm\Psi_i)$ під знаком sin має назву фаза синусоїдальної величини. Вона визначає значення sin величини в будь який момент часу.

Намалюємо графіки струму для різних значеннях початкової фази.

Приклад 1.

$$i=I_M\sin\omega t;\Psi_i=0$$

Графік будується з початку координат

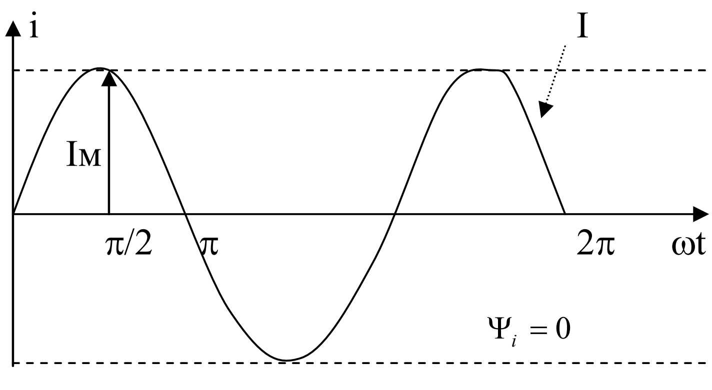


Рисунок 1.4 График струму

Приклад 2.

$$i=I_M\sin(\omega t+10^\circ)$$

$\Psi_i=\pm 10^\circ$ - початкова фаза

якщо ωt=0, то

$$i = I_M \sin 10^\circ = i_0$$

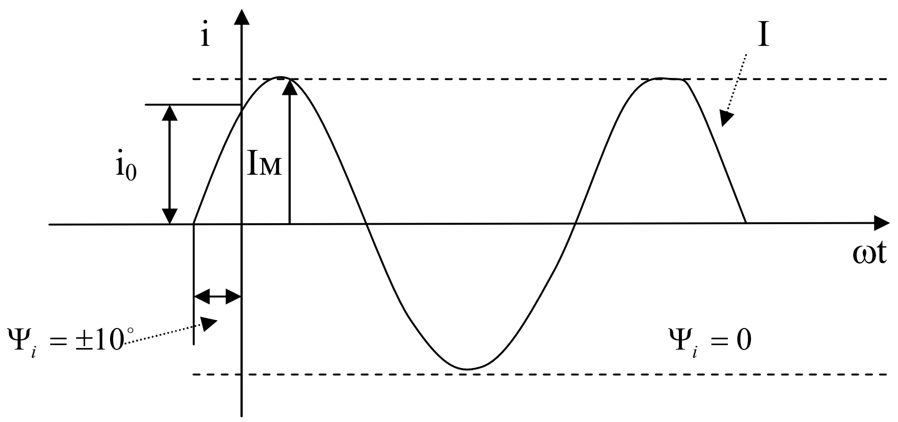


Рисунок 1.5 График струму

<u>Висновок:</u> Позитивна початкова фаза здвигає графік наліво від початку координат (або до нас).

Приклад 3.

$$i = I_M \sin(\omega t - 10^\circ)$$

$\Psi_i = -10^\circ$ - початкова фаза

якщо ωt=0, то

$$i = I_M \sin(-10^\circ) = -i_0$$

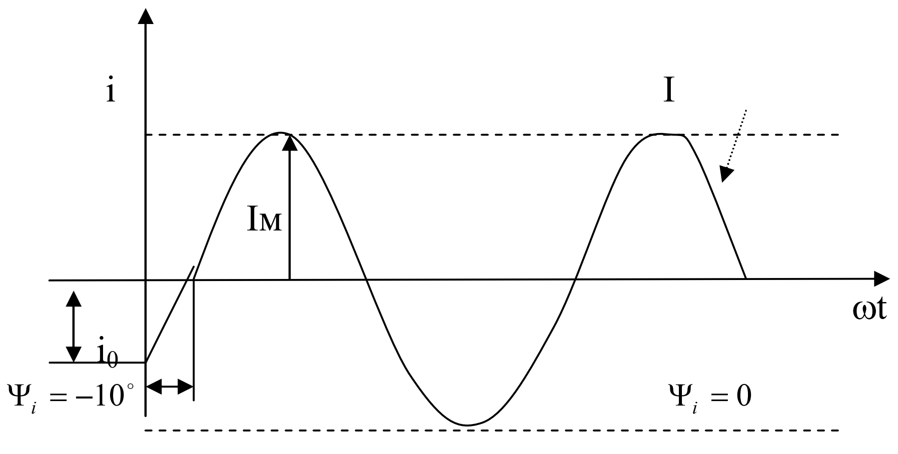


Рисунок 1.6 График струму

<u>Висновок:</u> Негативна початкова фаза здвигає графік вправо від початку координат.

<u>Уявлення синусоїдальних величин обертаючими векторами</u>

Щоб уявити синусоїдальну змінну величину струму $i = I_M \sin(\omega t + \Psi_i)$ побудуємо радіус-вектор Ім під кутом Ψ_I до горизонтальної вісі. Це буде початкове положення в момент відліку часу.

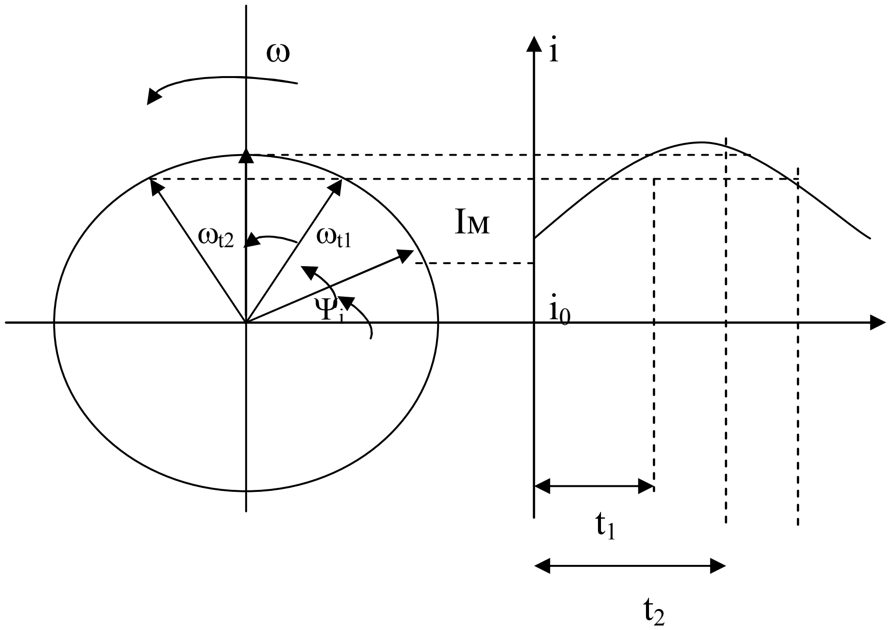


Рисунок 1.7Радіус-вектор Ім під кутом Ψ_I до горизонтальної вісі

Припустимо, що радіус-вектор обертається з постійною кутовою частотою

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f ,$$

де f – частота обертання.

Проекції вектора в кожнім положенні на вісь координат буде дорівнювати миттєвим значенням струму:

$i_0 = I_M \sin \Psi_i$ - проекція до початку,

$i_1 = I_M \sin(\omega t + \Psi_i)$ - проекція струму повернутого на кут ωt.

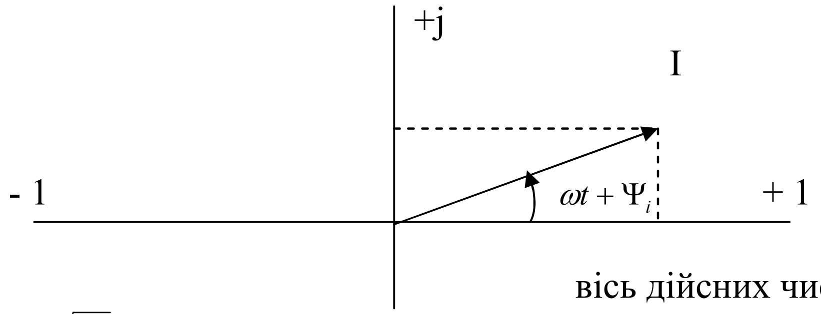
<u>Висновок:</u> Таким чином ми довели, що э взаємодія обертаючого вектора та синусоїди.

<u>Сукупність</u> векторів декількох синусоїдальних величин однієї частоти має назву <u>векторної діаграми.</u>

Використання обертаючих векторів дає можливість наочно подати на малюнку сукупність різних синусоїдальних величин однакової частоти.

<u>Уявлення синусоїдальних величин комплексними числами</u>

Розглянемо комплексну площину



вісь дійсних чисел вісь уявних чисел, або вісь $\sqrt{-1} = i$ - j

Рисунок 1.8 Комплексна площина

Спроектируємо вектор на вісі, тоді будемо мати:

$$\dot{I}_M = I_M cos(\omega t + \Psi_i) + jI_M \sin(\omega t + \Psi_i)$$

З математики відоме рівняння Ейлера

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha$$

тоді будемо мати залежність:

$$\dot{I}_M = I_M cos(\omega t + \Psi_i) + j\sin(\omega t + \Psi_i)$$

$$\dot{I}_M = I_M e^{j(\omega t + \Psi_i)}$$

де Iм – модуль вектора струму;

$\omega t + \Psi_i$ - фаза струму.

Запишемо значення вектора струму в вигляді:

$$\dot{I}_M = I_M e^{j\omega t} \cdot e^{j\Psi_i}$$

Множник $e^{j\omega t}$ показує, що вектор обертається з кутовою швидкістю ω=2πf=const.

Всі вектори електричного ланцюга обертаються з однією і тою ж швидкістю, тому множник $e^{j\omega t}$ можна зневажити. Тоді вектор струму буде мати вигляд:

$$\dot{I}_M = I_M \cdot e^{j\Psi_i}$$

При розрахунках в електричних ланцюгах використовують не амплітудне, а дійсне значення струму тому вектор струму можемо записати в вигляді:

$$\dot{I}_M = I_M \cdot e^{j\Psi_i}$$

Правило зображення синусоїдальних електричних величин комплексного числа в показовій формі

$$i = I_M \sin(\omega t + \Psi_i) = Ie^{j\Psi i}$$

Щоб перейти від миттєвого значення синусоїдальної величини до зображення цієї величини комплексним числом, необхідно за модуль комплексного числа взяти діюче значення синусоїдальної величини, а аргументом числа взяти початкову фазу синусоїдальної величини.

Довжина вектора в масштабі дорівнює діючому значенню синусоїдальної величини, а місцезнаходження вектора відносно вісі (+1) знаходиться кутом Ψ_i.

Приклад:

$$i_1 = I_{M1}\sin(\omega t + \Psi_{i1}) = 20\sin(\omega t + 15^\circ)$$

$$i_2 = I_{M2}\sin(\omega t - \Psi_{i2}) = 15\sin(\omega t - 10^\circ)$$

Вектори струмів знайдуться

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\Psi_1} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{+j15^\circ}$$

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\Psi_2} = \frac{15}{\sqrt{2}} e^{-j10^\circ}$$

Намалюємо вектори:

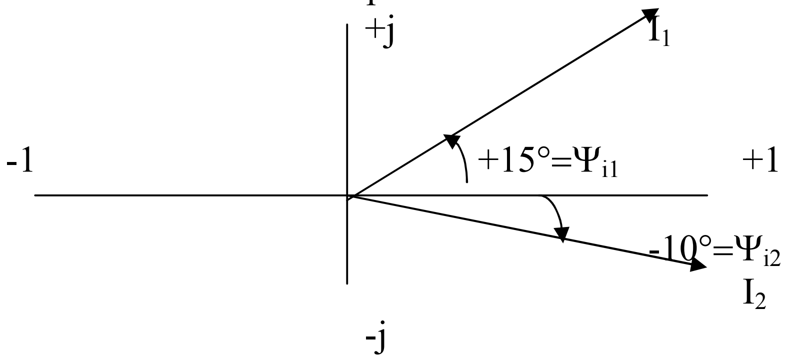


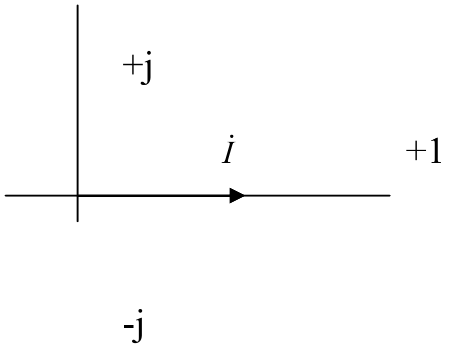
Рисунок 1.9 Векторна діаграма

<u>Висновок:</u> Позитивна початкова фаза повертає вектор проти годинникової стрілки від вісі +1, негативна початкова фаза повертає вектор по годинниковій стрілці.

<u>Окремі випадки</u>

1) $\Psi_i = 0$

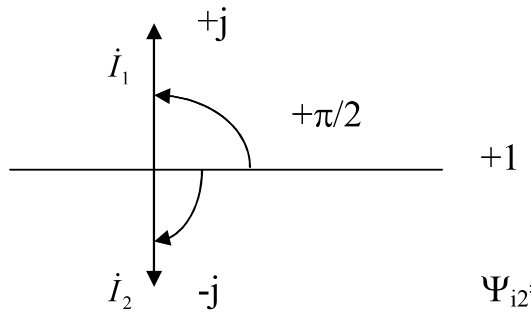
тоді $\dot{I} = Ie^{j0^\circ} = I$ дійсна частина комплексного числа.



2) $\Psi_{i1} = +\pi/2$

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = \pm j$$

тоді $\dot{I}_1 = Ie^{+j\frac{\pi}{2}} = jI$



$\Psi_{i2}=-\pi/2$

$$\dot{I}_2 = Ie^{-j\frac{\pi}{2}} = -jI$$

Закон Ома в комплексній формі для резистивного, індуктивного та ємкісного елементів

1. Резистивний елемент

Виберемо позитивний напрям синусоїдального струму.

$$i_r = I_{rM}\sin(\omega t + \Psi_i)$$

Напрям струму співпадає з позитивним напрямом синусоїдальної напруги, що прикладена до елементу.

В цьому випадку для миттєвого значення справедливо співвідношення, яке знаходиться законом Ома:

$$u_r = ri_r$$

або $u_r = rI_{rM}\sin(\omega t + \Psi_i = U_{rM}\sin(\omega t + \Psi_u)$

$$U_{rM} = rI_{rM}$$

миттєве значення $U_r = U_{rM}\sin(\omega t + \Psi_u)$

тому: $\Psi_i = \Psi_u$

Тобто струм і напруга в резистивнім елементі співпадають по фазі.

Представимо синусоїдальні струм та напругу резистивного елемента комплексними числами:

$$\dot{I}_r = I_r e^{j\Psi_i}$$

$$\dot{U}_r = U_r e^{j\Psi_u} = RI_r e^{j\Psi_u} = RI_{rM} e^{j\Psi_i}$$

Тому що $U = rI_r$ (миттєве значення), а $\Psi_u = \Psi_i$, то будемо мати закон Ома в комплексній формі:

$$\dot{U}_r = R\dot{I}_r$$

Ці співвідношення для резистивного елемента можна побачити в слідую чому вигляді:

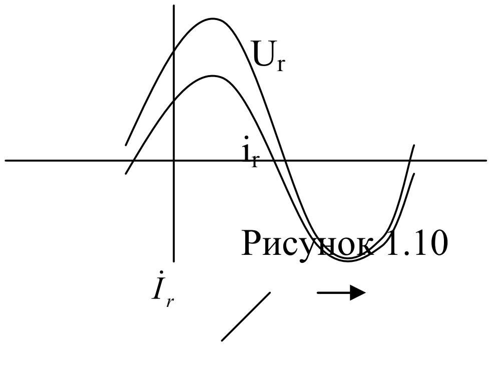


Рисунок 1.10

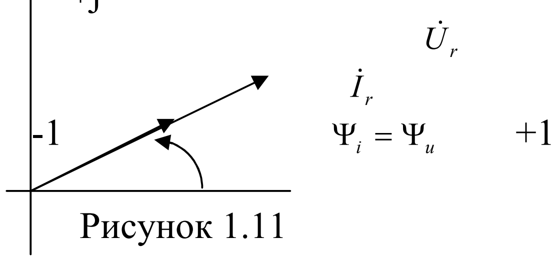


Рисунок 1.11

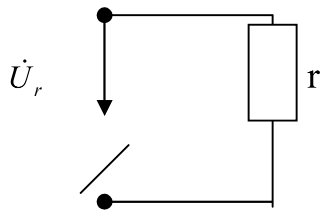
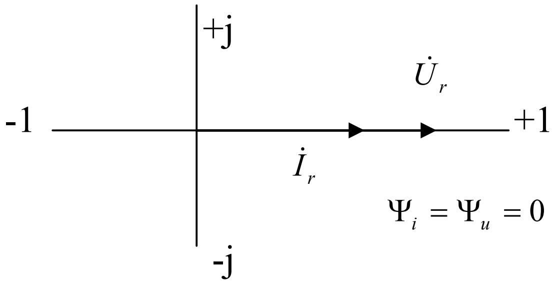


Рисунок 1.12

Увага!

Якщо $\Psi_i = \Psi_u = 0$ то вектори $\dot I_r$ та $\dot U_r$ співпадають з віссю +1.



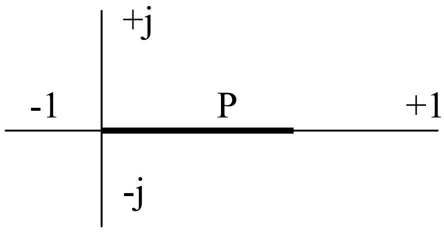
Для ланцюга з резистивним елементом повна комплексна потужність буде дорівнювати:

$$\widetilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I}$$

де
$$\dot{I} = Ie^{j\Psi_i} = Ie^{j\Psi_u}$$

$\overset{*}{I} = Ie^{-j\Psi_i} = Ie^{-j\Psi_u}$ - спряжений комплексний вектор струму.

$\widetilde{S} = \dot{U}_r \overset{*}{I}_r = U_r e^{j\Psi_u} \cdot I_r e^{-j\Psi_u} = U_r I_r e^{j0} = U_a I = P$ активна потужність



2. Електричні ланцюги з індуктивним елементом

Індуктивним елементом будемо називати катушку з великим числом витків, нагрівом яких зневажимо.

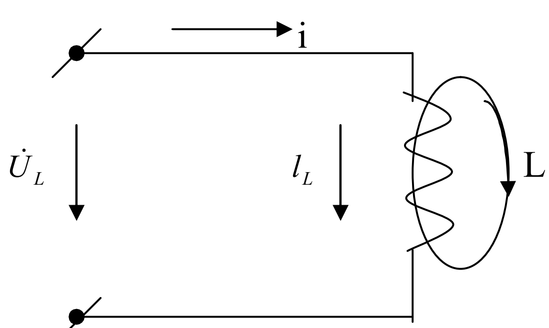


Рисунок 1. 13 Електричний ланцюг з індуктивним елементом

Рівняння струму буде мати вигляд:

$$i = I_M \sin(\omega t + \Psi_i)$$

комплексний струм:

$$\dot{I} = Ie^{j\Psi_i}$$

При проходженні струму в ланцюзі виникає Е.Р.С. самоіндукції

$$l_L = -L\frac{di}{dt}$$

Миттєве значення напруги:

$$u_L = -l_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{dI_M \sin(\omega t + \Psi_i)}{dt} = \omega LI_M \cos(\omega t + \Psi_i)$$

Введемо позначки:

$\omega L = X_L$ - реактивний індуктивний опір

$$\omega LI_M = X_L I_M = U_{LM}$$

таким чином

$$U_L = U_{LM} \cos(\omega t + \Psi_i) = U_{LM} \sin(\omega t + \Psi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$\Psi_i + \frac{\pi}{2} = \Psi_u$$

таким чином

$$\Psi_u = \Psi_i + \frac{\pi}{2}$$

або $\Psi_u > \Psi_i$ на $\angle\frac{\pi}{2}$

або $\angle\varphi = U_L \hat{} I_L = \Psi_u - \Psi_i = \Psi_i + \frac{\pi}{2} - \Psi_i = +\frac{\pi}{2}$

<u>Висновок:</u> В ланцюзі з індуктивним елементом напруга випереджає струм по фазі на кут π/2.

Амплітудне значення напруги:

$U_{LM} = \omega LI_M = X_L I_M$ - закон Ома

Діюче значення напруги:

$$U_L = \frac{U_{LM}}{\sqrt{2}} = \frac{X_L I_{LM}}{\sqrt{2}} = X_L I$$

де $X_L = \omega L = 2\pi fL$ - реактивний індуктивний опір.

Напруга в комплексному вигляді:

$$\dot{U}_L = U_L e^{j\Psi_u} = U_L e^{j(\Psi_i + \frac{\pi}{2})} = U_L e^{j\Psi_i} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} =$$
$$= jU_l e^{j\Psi_i} = jX_L I_L e^{j\Psi_i} = jX_L \dot{I}$$

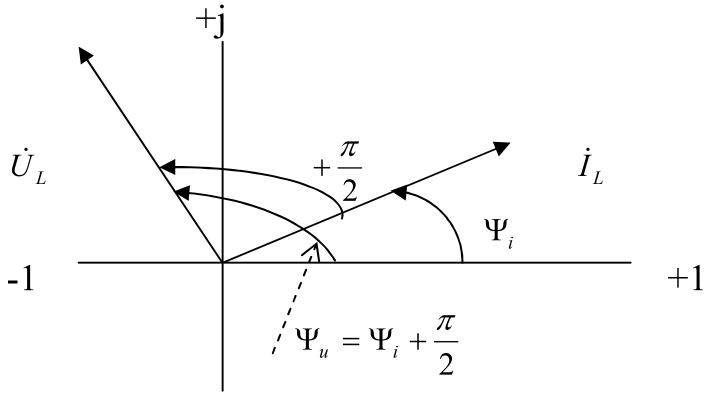
$$\dot{U}_L = jX_L \dot{I}$$

Множник $e^{j\frac{\pi}{2}}$ показує, що вектор напруги вивернений відносно вектора струму на кут $\frac{\pi}{2}$ в позитивному напрямі.

<u>Векторна діаграма ланцюгів</u>

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\Psi_i}$$

$$\dot{U}_L = U_L e^{j\Psi_i + \frac{\pi}{2}} = jX_L\dot{I}$$

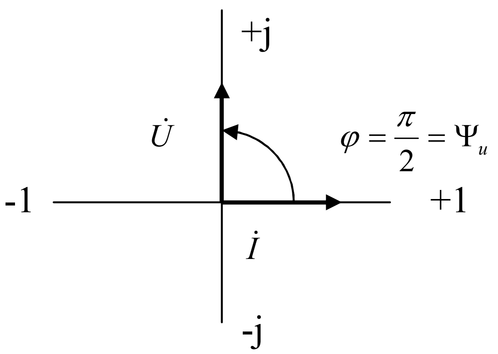


при $\quad \dot{U}_L \ +\frac{\pi}{2} \ \dot{I}_L$

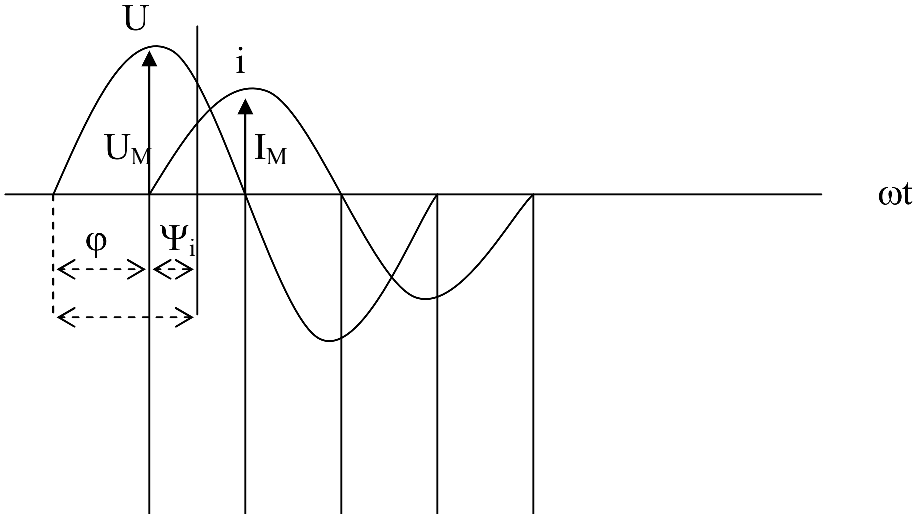
$$\Psi_i = 0$$

$$\dot{I} = Ie^{j0^\circ} = I$$

$$\dot{U}_L = U_L e^{j(0^\circ + \frac{\pi}{2})} = U_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jU_L$$



В індуктивному елементі середнє значення потужності за період дорівнює нулю, тобто енергія не перетворюється в теплову. Індуктивний елемент тільки <u>обмінюється</u> електричною енергією з джерелом.



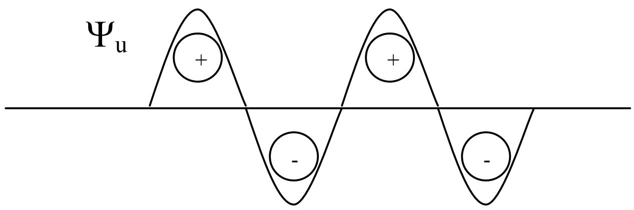


Рисунок 1.14 Графіки напруги і струму

При збільшенні струму потужність <u>позитивна</u> тому, що електрична енергія споживається індуктивним елементом для створення магнітного поля.

При зменшенні струму магнітне поле індуктивного елемента зменшується і електрична енергія повертається до джерела.

Це дуже добре видно на діаграмі.

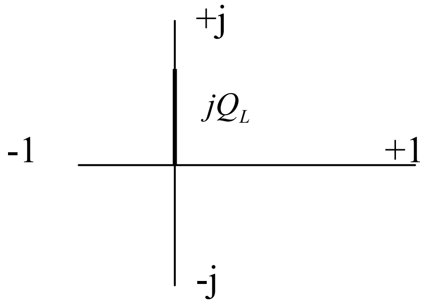
Амплітудне коливання потужності має назву <u>реактивна індуктивна потужність.</u>

$$Q[BAp] \quad \text{- Вольт-ампер реактивний}$$

Повна комплексна потужність:

$$\widetilde{S} = \dot{U}_L \overset{*}{I}_L = U_L e^{j\Psi_u} \cdot I_i e^{-j\Psi_i} = U_L I_L e^{j(\Psi_i + \frac{\pi}{2})} e^{-j\Psi_i} = U_L I_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jQ_L$$

або на комплексній площині



<u>3. Ємкісний елемент</u>

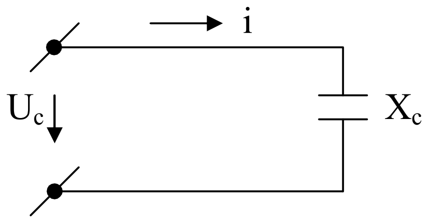


Рисунок 1.15 Електричний ланцюг з ємкісним елементом

Якщо напруга буде змінюватись по синусоїдальному закону $u_c = U_{cM}\sin(\omega t + \Psi_u)$ то синусоїдальне значення струму буде дорівнювати:

$$i_c = c\frac{du_c}{dt} = c\frac{dU_{cM}\sin(\omega t + \Psi_u)}{dt}$$

або $i_c = c \cdot \omega \cdot U_{cM} \cos(\omega t + \Psi_u) = \frac{1}{X_c} U_{cM} \cos(\omega t + \Psi_u)$

введемо заміну: $\frac{U_{cM}}{X_c} = I_{cM}$

$$i_c = I_{cM} \cos(\omega t + \Psi_u) = I_{cM} \sin(\omega t + \Psi_u + \frac{\pi}{2})$$

$$i_c = I_{cM} \sin(\omega t + \Psi_i)$$

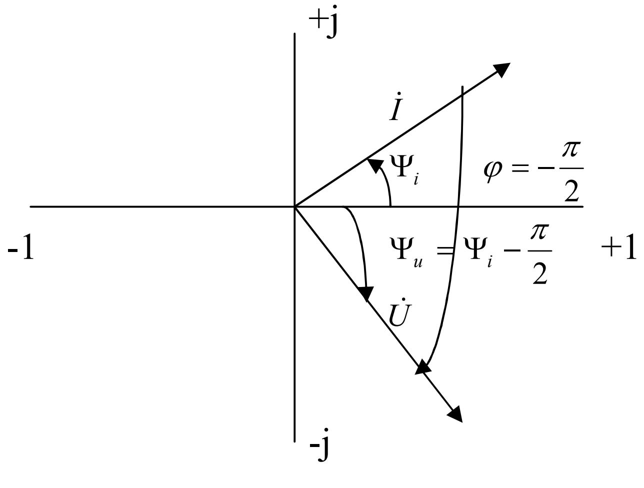
або $\Psi_i = \Psi_u + \frac{\pi}{2}$

$$\Psi_u = \Psi_i - \frac{\pi}{2}$$

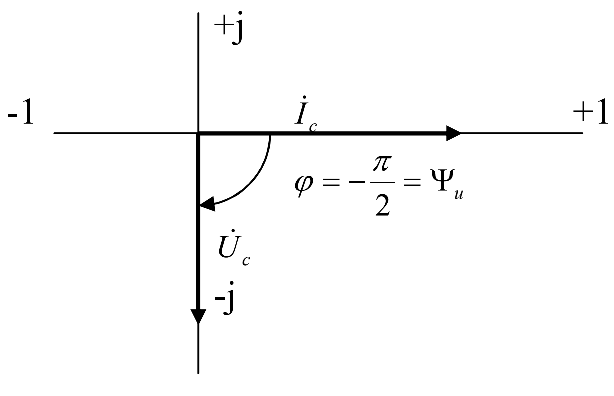
<u>Висновок:</u> В ланцюзі з ємністю струм випереджає по фазі напругу на кут $\angle\frac{\pi}{2}$.

$$\angle\varphi = \hat{U_c I} = \Psi_u - \Psi_i = \Psi_i - \frac{\pi}{2} - \Psi_i = -\frac{\pi}{2}$$

Векторна діаграма ланцюга буде мати вигляд:



При $\Psi_i = 0$ векторна діаграма буде мати вигляд:



В ланцюзі з ємкісним опором:

$$\dot{U}_c = U_c e^{j(\Psi_i - \frac{\pi}{2})} = U_c e^{j\Psi_i} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_c I e^{j\Psi_i} = -jX_c \dot{I}$$

Тоді закон Ома буде записаний у вигляді: $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}_c}{-jX_c}$

або $\dot{U}_c = -jX_c \dot{I}$

Графіки напруги і струму для ємкісного елемента будуть мати вигляд:

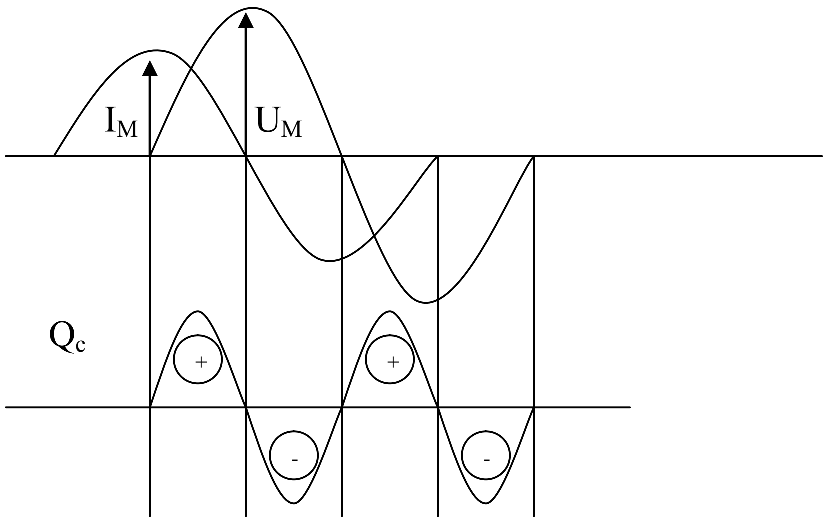


Рисунок 1. 16 Графіки напруги і струму

Середнє значення потужності за період

P=0

Таким чином ємкісний елемент не перетворює електричну енергію в інші види енергії, а він тільки обмінюється енергією з джерелом.

При збільшенні напруги джерела потужність позитивна тому, що конденсатор заряджується і споживає електричну енергію від джерела.

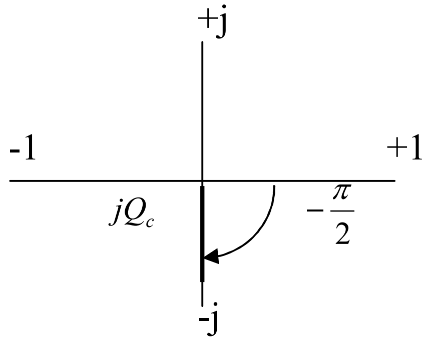
При зменшенні напруги джерела потужність негативна тому, що конденсатор розряджується на джерело.

$Q_c[BAp]$ - реактивна ємкісна потужність.

Повна комплексна потужність в ємкісним елементі:

$$\widetilde{S} = U_c \overset{*}{I}_c = U_c e^{j(\Psi_i - \frac{\pi}{2})} \cdot I_c e^{-j\Psi_i} = U_c I_c e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jQ_c$$

Спряжений комплексний вектор струму:



Ємкісний елемент як і індуктивний обмінюється електричною енергією з джерелом, але коли індуктивність споживає енергію від джерела, тоді ємкість віддає і навпаки.

Звідкіля можемо зробити висновок, якщо індуктивність і ємкість підключити в один електричний ланцюг, то вони будуть обмінюватись енергією між собою.

Електричний ланцюг з активним і індуктивним елементами

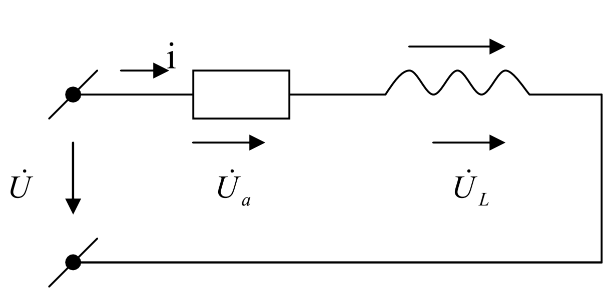


Рисунок 1.17 Електричний ланцюг з активним і індуктивним елементами

Повна напруга:

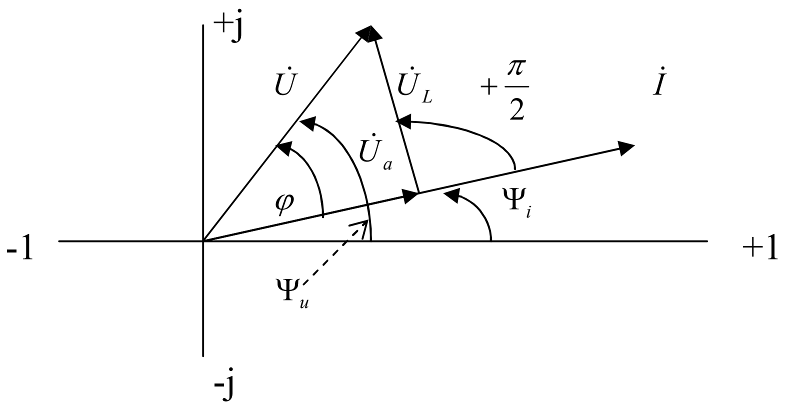
$$\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_L$$

де

$$\dot{U}_a = R\dot{I}$$

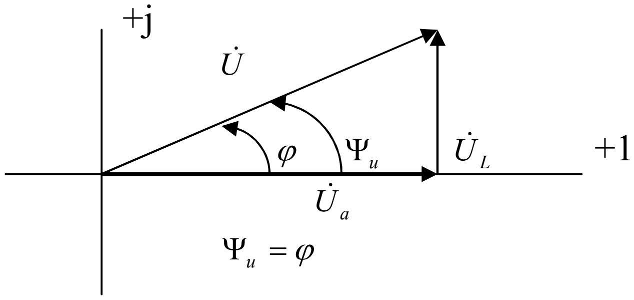
$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I}$$

Зобразимо векторну діаграму напруг відносно вектора струму. Спроектуємо вектори напруги U_a, U_L.



$$\Psi_u = \varphi_i + \varphi$$

при $\Psi_i = 0$ струм співпадає з віссю +1



Висновок: В ланцюзі з активним і індуктивним опорами напруга випереджає струм по фазі на кут φ

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Величина кута залежить від співвідношення величини U_a та U_L, або від співвідношення r та X_L.

Комплексна потужність ланцюга:

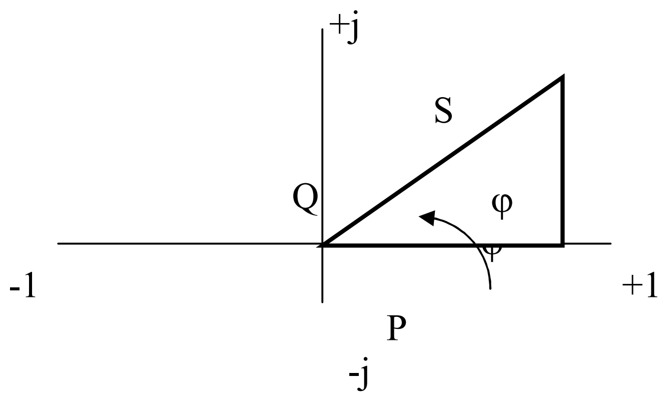
$$\widetilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = Ue^{j\Psi_u} \cdot Ie^{-j\Psi_i} = UIe^{j\Psi_i} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\Psi_i} = Se^{j\varphi}$$ -

показова форма запису потужності

S – модуль повної комплексної потужності;

φ - аргумент повної комплексної потужності.

Зобразимо комплексну площину:



трикутник потужностей

Рисунок 1.18 Трикутник потужностей