

## 1.4 Побудова планів швидкостей і прискорень

Будувати план швидкостей починаємо з точок А, К, швидкість котрих нуль, тому вони знаходяться в полюсі плану  $P_v$ . Згідно з структурною формулою визначимо швидкість точки В.

$$\frac{\bar{V}_B}{\perp AB} = \frac{\bar{V}_A}{0} + \frac{\bar{V}_{BA}}{\perp AB} \quad (1.6)$$

де:  $\bar{V}_B$  – швидкість точки, яку маємо побудувати;  $\bar{V}_A$  – швидкість точки А, яку вибрано за полюс плану;  $\bar{V}_{BA}$  – швидкість точки В, яка обертається навколо полюса точки А.

$$V_{B1} = V_{B2} = V_{BA} = \omega_1 \cdot \ell_{BA} = 25 \cdot 0,05 = 1,25 \text{ м/с} \quad (1.7)$$

З довільно взятої точки  $P_v$  (полюса плану швидкостей) відкладемо відрізок  $\bar{P}_{VB} = 100$  мм. (рис. 1.3), перпендикулярний до кривошипу АВ на плані положення механізму. Масштабний коефіцієнт плану швидкостей дорівнює

$$\mu_v = V_{B1} / \bar{P}_{VB} = 1,25 / 100 = 0,0125 \text{ м/смм.} \quad (1.8)$$

Для визначення швидкості точки С скористаємося рівняннями

$$\frac{\bar{V}_{C2}}{\perp CK} = \frac{\bar{V}_{B2}}{\perp AB} + \frac{\bar{V}_{CB}}{\perp CB}; \quad (1.9) \quad \frac{\bar{V}_{C3}}{\perp CK} = \frac{\bar{V}_K}{0} + \frac{\bar{V}_{C3K}}{\perp CK} \quad (1.10)$$

Проаналізувавши рівняння  $V_{C3}$ , побудуємо рівняння  $V_{C2}$ . Отже, згідно з рівнянням з точки В плану швидкостей проводимо лінію, перпендикулярну до ланки СВ на плані механізму, а із полюса плану швидкостей проводимо лінію

перпендикулярну до коромисла СК. На перетині цих перпендикулярів дістанемо точку С. З'єднавши полюс плану  $P_V$  з точкою С, знайдемо вектор абсолютної швидкості точки С, зображеної у масштабі  $\mu_v$ .

Оскільки при обертальному русі швидкості точок дорівнюють  $V = \omega \cdot r$ , тобто пропорційні радіусу обертання точки, то з пропорції визначимо вектор  $V_H$ , крім того  $V_{H3} = V_{H4}$ ;

$$\frac{V_{H3}}{V_C} = \frac{KH}{KC} = \frac{\overline{P_V C}}{\overline{P_V h}}; \quad (1.11)$$

Для визначення швидкості точки Е, скористаємося рівнянням  $V_{E4} = V_{E5}$ ;

$$\frac{V_M}{\parallel X-X} = \frac{V_E}{\parallel X-X} = \frac{V_H}{\perp KH} + \frac{V_{EH}}{\perp EH} \quad (1.13)$$

Виходячи з цього рівняння, точку Е плану швидкостей знаходимо на перетині ліній, які проводимо  $\parallel X - X$  з полюсу  $P_V$  і  $\perp$  ланки HE механізму з точки h. Відрізок  $\overline{P_V e}$  – це вектор швидкості точки Е, зображеної у масштабі  $\mu_v$ .

Для визначення швидкостей центрів мас ланок точки  $S_2, S_3, S_4$ , скористаємося пропорціями про обертальний рух точок, наприклад

$$\frac{V_{S2B}}{V_{CB}} = \frac{S_2B}{CB} = \frac{\overline{S_2B}}{\overline{CB}}; \quad (1.14) \quad \overline{S_2B} = \frac{\overline{CB} \cdot S_2B}{CB} = \frac{\overline{CB} \cdot 37,5}{75} = \frac{\overline{CB}}{2} \quad (1.15)$$

Тому розділивши відрізок  $\overline{BC}$  пополам, позначимо точку  $S_2$ . Проводимо вектор  $P_V S_2$ , який у масштабі  $\mu_v$  зображує швидкість точки центра мас ланки  $S_2$ .

Підрахуємо кутові швидкості ланок механізму  $\omega_1 = 25 \text{ c}^{-1}$

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{\ell_{CB}} = \frac{\overline{BC} \cdot \mu_V}{BC \cdot \mu_\ell} = \frac{76 \cdot 0,0125}{75 \cdot 0,002} = 6,3 \text{ c}^{-1} \quad (1.16)$$

$$\omega_3 = \frac{V_C}{\ell_{CK}} = \frac{\overline{P_{VC}} \cdot \mu_V}{CK \cdot \mu_\ell} = \frac{114 \cdot 0,0125}{50 \cdot 0,002} = 14,25 \text{ c}^{-1} \quad (1.17)$$

$$\omega_4 = \frac{V_{EH}}{\ell_{EH}} = \frac{\overline{eh} \cdot \mu_V}{EH \cdot \mu_\ell} = \frac{12 \cdot 0,0125}{55 \cdot 0,002} = 1,4 \text{ c}^{-1} \quad (1.18)$$

Складаємо розрахункову таблицю 1.2 результатів, в яку швидкості порахуємо за формулою  $V_i = \mu_V \cdot \overline{P_{vi}}$ , наприклад

$$V_C = \mu_V \cdot \overline{P_{Vc}} = 0,0125 \cdot 114 = 1,425 \text{ м/с} \quad (1.19)$$

Таблиця 1.2 – Розрахункова таблиця швидкостей

Швидкість		$V_B$	$V_{CB}$	$V_C$	$V_{S2B}$	$V_{S2}$	$V_H$	$V_{S3}$
Вектор,	мм	100	76	114	38	100	57	57
Значення,	м/с	1,25	0,95	1,4	0,47	1,25	0,71	0,71
$V_{EH}$	$V_{S4H}$	$V_E$	$V_{S4}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
12	6	60	58	–	–	–	–	–
0,15	0,07	0,75	0,72	25	6,3	14,25	1,4	0

Будувати план прискорень починаємо з точок А, К, прискорення котрих дорівнює нулю, тому вони знаходяться в полюсі  $P_a$  плана прискорень. Згідно з структурною формулою механізму визначимо прискорення точки В за векторним рівнянням

$$\bar{a}_B = \frac{\bar{a}_A}{=0} + \frac{\bar{a}_{BA}^\tau}{\perp AB} + \frac{\bar{a}_{BA}^n}{//AB} \quad (1.20)$$

де:  $a_B$  – прискорення точки, яку маємо побудувати;  $a_A$  – прискорення точки А, яку вибираємо за полюс плану;  $a_{BA}^\tau$  – тангенціальне прискорення точки В при обертанні навколо точки А;  $a_{BA}^n$  – нормальне, або доцентрове прискорення точки В при обертанні навколо точки А. Оскільки кутова швидкість кривошипу дорівнює  $\omega_1 = 25 \text{ с}^{-1} = \text{const}$ , прискорення мають значення

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot \ell_{AB} = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot \ell_{AB} = 0; \quad (1.21)$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot \ell_{AB} = 25^2 \cdot 0,05 = 31,25 \text{ м/с}^2. \quad (1.22)$$

З довільно взятої точки Р<sub>а</sub> (полюса плану прискорень) відкладаємо відрізок  $\bar{P}_{aB} = 78,12 \text{ мм}$  (рис.1.4) паралельно кривошипу АВ, у напрямі від В до А. Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень дорівнює

$$\mu_a = a_{BA}^n / \bar{P}_{aB} = 31,25 / 78,12 = 0,4 \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}. \quad (1.23)$$

Для визначення прискорення точки С, що виконує складний рух, використаємо теорему про складний рух

$$\frac{\bar{a}_C}{+} = \frac{\bar{a}_B}{+} + \frac{\bar{a}_{CB}}{+} = \frac{\bar{a}_B}{+} + \frac{\bar{a}_{CB}^n}{//CB} + \frac{\bar{a}_{CB}^\tau}{\perp CB} \quad (1.24)$$

$$\frac{\bar{a}_C}{=0} = \frac{\bar{a}_K}{=0} + \frac{\bar{a}_{CK}}{=0} = \frac{\bar{a}_K}{=0} + \frac{\bar{a}_{CK}^n}{//CK} + \frac{\bar{a}_{CK}^\tau}{\perp CK} \quad (1.25)$$

Тобто, прискорення точки С визначили, як геометричну

суму прискорення полюса і відносного прискорення точки при обертанні її навколо полюса, один раз прийнявши за полюс точку В, другий раз – точку К. Відносні прискорення  $a_{CB}^n$  і  $a_{CK}^n$  – невідомі ні за напрямом, ні за модулем. Тому для розв’язання рівнянь відносні прискорення розкладемо на дві складові – нормальне і тангенціальне, перші з яких за модулем можемо визначити таким чином;

$$a_{CB}^n = \omega^2 \cdot r_{CB} = 6,3^2 \cdot 0,15 = 5,9 \text{ м/с}^2; \quad (1.26)$$

$$a_{CK}^n = \omega^2 \cdot r_{CK} = 6,3^2 \cdot 0,1 = 40,2 \text{ м/с}^2. \quad (1.27)$$

Визначаємо відрізки цих прискорень у масштабі  $\mu_a$  плану прискорень механізму

$$\overline{BC}^n = a_{CB}^n / \mu_a = 5,9 / 0,4 = 14,75 \text{ мм}, \quad (1.28)$$

$$\overline{PaC}^n = a_{CK}^n / \mu_a = 40,2 / 0,4 = 100,5 \text{ мм}. \quad (1.29)$$

Потім з точки В плану прискорень (рис. 1.4) відкладемо прискорення  $a_{CB}^n$  (відрізок  $\overline{BC}^n$ ) паралельно ВС (зображеному на плані механізму) в напрямі від точки С до В. З точки Pa полюса плану паралельно СК в напрямі від точки С до К – відрізок  $\overline{PaC}^n$ . Провівши з точки С' лінію, перпендикулярну до  $\overline{BC}^n$ , а з точки С'' – перпендикуляр до  $\overline{PaC}^n$  на їх перетині одержимо точку С, що однозначно визначить повне прискорення точки С (відрізок  $\overline{PaC}$ ) і тангенціальні прискорення  $a_{CB}^t$  і  $a_{CK}^t$  (відрізки  $\overline{C'S}$  і  $\overline{C''S}$ ).

Прискорення точки Н на плані прискорень знайдемо виходячи з теореми подібності

$$\overline{Pa_h} = \frac{\overline{Pa_c} \cdot KH}{KC} = \frac{58 \cdot 25}{50} = 29 \text{ мм}, \quad (1.30)$$

Замірявши відрізок  $\overline{Pa_c}$  на плані прискорень, а відрізки КС і КН на плані положення механізму. Прискорення точки Е повзуна знайдемо за рівнянням та розрахунками

$$\frac{\overline{a}_E}{III-X} = \frac{\overline{a}_M}{+} = \frac{\overline{a}_H}{+} + \frac{\overline{a}_{EH}}{+} = \frac{\overline{a}_H}{+} + \frac{\overline{a}_{EH}^n}{II\text{EH}} + \frac{\overline{a}_{EH}^\tau}{\perp\text{EH}} \quad (1.31)$$

$$a_{EH}^n a_{EH}^\pi = \omega_4^2 \cdot \ell_{EH} = 1,4^2 \cdot 0,11 = 0,2 \text{ м/с}^2, \quad (1.32)$$

$$\overline{he} = a_{EH}^n / \mu_a = 0,2 / 0,4 = 0,5 \text{ мм}. \quad (1.33)$$

Відкласти від точки h на плані прискорень відрізок  $\overline{he}$ , за його малим значенням необов'язково. Тому з точки h проводимо перпендикуляр до ланки HE на плані механізму. З точки Pa проводимо лінію паралельну X-X, на її перетині позначаємо точку e.

Прискорення центрів мас ланок точки S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>, S<sub>4</sub> визначаємо користуючись пропорціями про обертальний рух точок, наприклад

$$\frac{a_{S_{2B}}}{a_{CB}} = \frac{S_{2B}}{CB} = \frac{\overline{S_{2B}}}{\overline{CB}}; \quad (1.34) \quad \overline{S_{2B}} = \frac{\overline{CB} \cdot S_{2B}}{CB} = \frac{\overline{CB}}{2}. \quad (1.35)$$

Тому розділивши відрізок  $\overline{CB}$  навпіл, поставимо точку S<sub>2</sub>. Проводимо вектор  $\overline{PaS_2}$ , який у масштабі  $\mu_a$  зображає прискорення точки центра мас ланки BC.

Складаємо розрахункову таблицю 1.3, в яку прискорення

порахуємо за формулою  $a_i = \mu_a \cdot \overline{Pa_i}$ .

Наприклад прискорення точки С

$$a_c = \mu_a \cdot \overline{Pac} = 0,4 \cdot 59 = 23,2 \text{ м/с}^2 \quad (1.36)$$

Таблиця 1.3 – Розрахункова таблиця прискорень

Прискорення	$a_B$	$a_C$	$a_{CB}^n$	$a_{CB}^\tau$	$a_{S2}$	$a_H$	$a_{CK}^n$		
Вектор, мм	78,12	59	14,75	21	6,7	33,5	50,5		
Значення, м/с <sup>2</sup>	31,25	23,2	5,9	8,4	26,8	20,2	11,2		
$a_{CK}^\tau$	$a_{S3}$	$a_E$	$a_{EH}^n$	$a_{EH}^\tau$	$a_{S4}$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$
28	33,5	27	0,5	31	23	–	–	–	–
11,2	13,4	10,8	0,2	12,2	9,2	56	112	110,9	0

Порахуємо кутові прискорення ланок механізму  $\varepsilon_1 = \varepsilon_5 = 0$ ,

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}} = \frac{8,4}{0,15} = 56 \text{ с}^2, \quad (1.37)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CK}^\tau}{l_{CK}} = \frac{11,2}{0,1} = 112 \text{ с}^2, \quad (1.38)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{EH}^\tau}{l_{EH}} = \frac{12,2}{0,11} = 110,9 \text{ с}^2. \quad (1.39)$$

## 1.5 Визначення зрівноважувальної сили

Використовуємо правило важеля М.Є. Жуковського, яке можна сформулювати так (рис. 1.5).

Переносимо всі діючі сили у даний момент часу, в тому числі й сили інерції, в однойменні точки повернутого на 90<sup>0</sup> плану швидкостей, не змінюючи при цьому величину і напрямок сил. Розглядаємо повернутий план швидкостей, як жорсткий

важіль, який перебуває в рівновазі відносно полюса плану швидкостей під дією всіх прикладених сил. Тоді сума моментів усіх цих сил, включаючи зрівноважувальну силу, відносно полюса плану швидкостей дорівнює нулю.

Величина сили корисного опору

$$P_1 = (250 + 5 \cdot \varphi_1) = (250 + 5 \cdot 115) = 825 \text{ Н} \quad (1.40)$$

Сили ваги ланок механізму

$$G_5 = m_p \cdot q = 10 \cdot 9,81 = 98,1 \text{ Н},$$

$$G_4 = m_4 \cdot q = 50 \cdot \ell_4 \cdot q = 50 \cdot 0,11 \cdot 9,81 = 53,9 \text{ Н}, \quad (1.41)$$

$$G_2 = m_2 \cdot q = 50 \cdot \ell_2 \cdot q = 50 \cdot 0,15 \cdot 9,81 = 73,6 \text{ Н}.$$

Сили інерції ланок механізму

$$P_{U5} = m_p \cdot a_E = 10 \cdot 10,8 = 108 \text{ Н},$$

$$P_{U4} = m_4 \cdot a_{S4} = 50 \cdot \ell_4 \cdot a_{S4} = 50 \cdot 0,11 \cdot 9,2 = 50,6 \text{ Н}, \quad (1.42)$$

$$P_{U2} = m_2 \cdot a_{S2} = 50 \cdot \ell_2 \cdot a_{S2} = 50 \cdot 0,15 \cdot 26,8 = 201 \text{ Н}.$$

Моменти пар сил інерції ланок механізму

$$\begin{aligned} M_{U4} &= I_4 \cdot \varepsilon_4 = 0,1 \cdot m_4 \cdot \ell_4^2 \cdot \varepsilon_4 = \\ &= 0,1 \cdot 50 \cdot 0,11 \cdot 0,11^2 \cdot 110,9 = 0,74 \text{ Н}\cdot\text{м}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} M_{U2} &= I_2 \cdot \varepsilon_2 = 0,1 \cdot m_2 \cdot \ell_2^2 \cdot \varepsilon_2 = \\ &= 0,1 \cdot 50 \cdot 0,15 \cdot 0,15^2 \cdot 56 = 0,94 \text{ Н}\cdot\text{м}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

Моменти сил інерції ланок замінимо парами сил, які прикладаємо на кінцях ланок

$$F_{U4} = F'_{U4} = \frac{M_{U4}}{\ell_4} = \frac{0,74}{0,11} = 6,7 \text{ Н}, \quad (1.45)$$

$$F_{U2} = F'_{U2} = \frac{M_{U2}}{\ell_2} = \frac{0,94}{0,15} = 6,3 \text{ Н}, \quad (1.46)$$

## Рисунок 1.5 - Схема важеля М.Є. Жуковського

Складаємо суму моментів сил відносно полюса  $P_V$  плану швидкостей

$$\sum M_{P_V}(P) = 0;$$

$$P_{3P} \cdot P_{VB} - F_{U2} \cdot h_1 + P_{U2} \cdot h_2 - F'_{U2} \cdot h_3 + G_2 \cdot h_4 - G_4 \cdot h_5 -$$

$$- P_1 \cdot P_{Ve} + P_{U5} \cdot P_{Ve} + P_{U4} h_6 + F'_{U4} \cdot h_7 - F_{U4} \cdot h_8 = 0; \quad (1.47)$$

З цього рівняння визначаємо величину зрівноважувальної  $P_{3P}$  сили. Плечі  $h_1 \dots h_8$  відповідних сил відносно полюса  $P_V$  слід заміряти з рисунку 1.5.

$$P_{3P} = \frac{F_{U2} \cdot h_1 - P_{U2} \cdot h_2 + F'_{U2} \cdot h_3 - G_2 \cdot h_4 + G_4 \cdot h_5 +$$

$$+ \frac{P_1 \cdot P_{Ve} + P_{U5} \cdot P_{Ve} - P_{U4} \cdot F_6 - P'_{U4} \cdot h_7 + F_{U4} \cdot h_8}{P_{VB} P_V b}}{P_{VB}}$$

$$= \frac{6,3 \cdot 18 - 201 \cdot 50 + 6,3 \cdot 57 - 73,6 \cdot 20 + 53,9 \cdot 6 + 825 \cdot 60 -$$

$$- 108 \cdot 60 - 50,6 \cdot 28 - 6,7 \cdot 25 + 6,7 \cdot 12}{100} = 304,3 \text{ Н} \quad (1.48)$$

Зрівноважу вальний момент на кривошипі

$$M_{3P} = P_{3P} \cdot \ell_{AB} = 304,3 \cdot 0,05 = 15,2 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (1.49)$$

## 1.6 Розрахунок реакції в кінематичній парі

Визначити реакцію  $R_M$  в кінематичній парі  $M$  ( 5,0 ). Накреслимо групу Ассура 4 – 5 в масштабі  $\mu_\ell = 0,002 \text{ м/мм.}$ , і проставимо сили і реакції сил які діють на ланках і в

кінематичних парах структурної групи ( рис. 1.6.)

Рисунок 1.6 – Схема сил групи Ассура 4-5

Сили інерції направимо протилежно прискоренням  $\varepsilon_4, a_{S4}$ .  
Визначимо реакцію за рівнянням  $\Sigma M_H(P) = 0$ ;

$$(G_5 \cdot h_1 - R_M \cdot h_1 - P_1 \cdot h_2 + P_{U5} \cdot h_2 + G_4 \cdot h_3 - P_{U4} \cdot h_4) \cdot \mu_\ell + M_{U4} = 0 \quad (1.50)$$

$$R_M = \frac{(G_5 \cdot h_1 - P_1 \cdot h_2 + P_{U5} \cdot h_2 + G_4 \cdot h_3 - P_{U4} \cdot h_4) \cdot \ell + M_{U4}}{h \mu_\ell} =$$

$$= \frac{(98,1 \cdot 55 - 825 \cdot 21 + 108 \cdot 21 + 53,9 \cdot 30 - 50,6 \cdot 32) \cdot 0,002 + 0,74}{55 \cdot 0,002} =$$

$$= -168,9 \text{ Н} \quad (1.51)$$

Визначаємо реакцію  $R_{34}$ , яку розкладаємо на дві складові: нормальну  $\bar{R}_{34}^n$  і дотичну  $\bar{R}_{34}^\tau$ , тобто

$$\bar{R}_{34} = \bar{R}_{34}^n + \bar{R}_{34}^\tau \quad (1.52)$$

Рівняння рівноваги ланок групи 4 і 5, за принципом Даламбера, має вигляд

$$\bar{G}_5 + \bar{P}_1 + \bar{R}_M + \bar{P}_{U5} + \bar{G}_4 + \bar{P}_{U4} + \bar{R}_{34}^{nr} + \bar{R}_{34} = 0 \quad (1.53)$$

Рішення рівняння може бути побудовано у вигляді плану сил групи (рис.1.7). Для цього визначимо масштабний коефіцієнт  $\mu_F$  плану сил та відрізки, якими зображаємо відомі сили

$$\mu_F = \frac{P_1}{\bar{P}_1} = \frac{825}{82,5 \text{ мм}} = 10 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}; \quad (1.54)$$

$$\bar{G}_5 = \frac{G_5}{\mu_F} = \frac{98,1}{10} = 9,8 \text{ мм}; \quad (1.56) \quad \bar{R}_M = \frac{R_M}{\mu_F} = \frac{220,8}{10} = 22 \text{ мм}. \quad (1.56)$$

Рисунок 1.7 – План сил групи Ассур 4 – 5

За планом сил знаходимо реакцію  $R_{34}$

$$R_{34} = \bar{R}_{34} \cdot \mu_F = 74 \cdot 10 = 740 \text{ Н} \quad (1.57)$$