

Передаточним відношенням зубчастого механізму називають відношення кутових швидкостей вхідної і вихідної ланок.

Одна пара зубчастих коліс (ступінь) забезпечує обмежені (геометричними розмірами) значення передаточних відношень. **Передаточне відношення** (U_{12}) пари зубчастих коліс описується формулою

$$|U_{12}| = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

Таким чином, передаточне відношення залежить від числа зубців коліс, для отримання мінімальних розмірів передач число зубців Z_1 має бути найменшим. Найменше число зубців $Z_{1\min}$ обмежується явищем підрізання та найменшим допустимим коефіцієнтом перекриття $\varepsilon_{12} = 1,15$. Отже, слід вибирати $Z_{1\min} = 12 \dots 20$. На більшому колесі треба виходити з габаритних розмірів та маси конструкції передачі і зазвичай вибирають $Z_{2\max} = 125 \dots 150$. У практиці машинобудування для механічних передач приймають значення передаточних відношень $U_{12} = 1 \dots 6$, а для ручних передач $U_{12} = 10 \dots 12$.

При проектуванні зубчастих механізмів машин і приладів виникає потреба забезпечення великих передаточних відношень при значних міжосьових відстанях. У таких випадках використовують **багатоланкові (багатоступінчасті) зубчасті механізми**. Коли зубчастий механізм має $U_{12} = 1$ його називають **паразитним механізмом** (він служить для забезпечення міжосьових відстань), коли зубчастий механізм має $U_{12} > 1$ його називають **редуктором**, а якщо зубчастий механізм має $U_{12} < 1$ його називають **мультиплікатором**.

Усі багатоланкові зубчасті механізми поділяють на **два основних види**:

- 1) зубчасті механізми з **нерухомими осями всіх коліс**;
- 2) зубчасті механізми з **рухомими осями** окремих коліс; (**диференціальні механізми і епіциклічні або планетарні передачі**);

2.1) зубчасті механізми з **рухомими осями** окремих коліс з двома і більше ступенями вільності називають **диференціальними механізмами**.

2.2) зубчасті механізми з **рухомими осями** окремих коліс, які мають одну ступінь вільності називають **епіциклічні або планетарні передачі**;

2.3) **комбіновані (багатоланкові) зубчасті механізми з рухомими осями** окремих коліс;

2.4) **замкнуті (багатоланкові) диференціальні зубчасті механізми**.

1.2. Зубчасті механізми з нерухомими осями коліс

Загальне передаточне відношення багатоланкових зубчастих механізмів, зображених на рис. 1.1 можна визначити як відношення швидкостей

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = \frac{n_1}{n_6} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_{23}} \cdot \frac{\omega_{23}}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_6} \right) = \left(\frac{n_1}{n_{23}} \cdot \frac{n_{23}}{n_4} \cdot \frac{n_4}{n_5} \cdot \frac{n_5}{n_6} \right)$$

$$U_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5} = \frac{n_1}{n_5} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_{23}} \cdot \frac{\omega_{23}}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} \right) = \left(\frac{n_1}{n_{23}} \cdot \frac{n_{23}}{n_4} \cdot \frac{n_4}{n_5} \right)$$

Знак « - » приймають для зовнішнього зачеплення (колеса обертаються у різних напрямках), знак « + » приймають для внутрішнього зачеплення (колеса обертаються у одному напрямку).

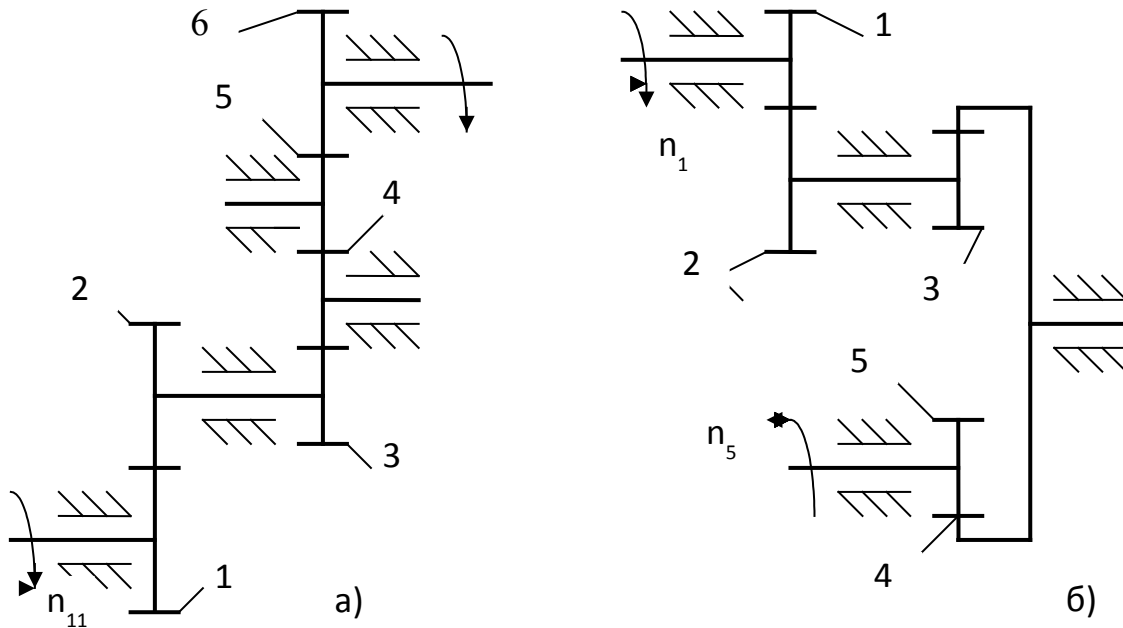


Рис.1.1.

Таким чином **загальне передаточне відношення (U_{1n}) багатоланкового зубчастого механізму з нерухомими осями коліс є добуток передаточних відношень, взятих із своїм знаком, окремих його ступенів.**

Отже, у загальному випадку, коли в зачепленні перебувають n зубчастих коліс передаточне відношення (U_{1n}) розраховувати за формулою

$$U_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{n_1}{n_n} = (-1)^m \cdot U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} \dots U_{(n-1)n}$$

де m - число пар зовнішнього зачеплення.

Передаточне відношення кожної пари зубчастих коліс (ступені) визначають через обернено пропорційне відношення чисел зубів коліс

$$U_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{n_1}{n_n} = (-1)^m \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} \cdot \dots \cdot \frac{Z_n}{Z_{(n-1)}}$$

Якщо до складу багатоланкового зубчастого механізму з нерухомими осями коліс входять кінчні зубчасті колеса (рис.1.2) то значення передаточного

відношення визначають так само, як і для циліндричних зубчастих механізмів. Знак передаточного відношення визначають тільки тоді коли осі коліс будуть паралельні.

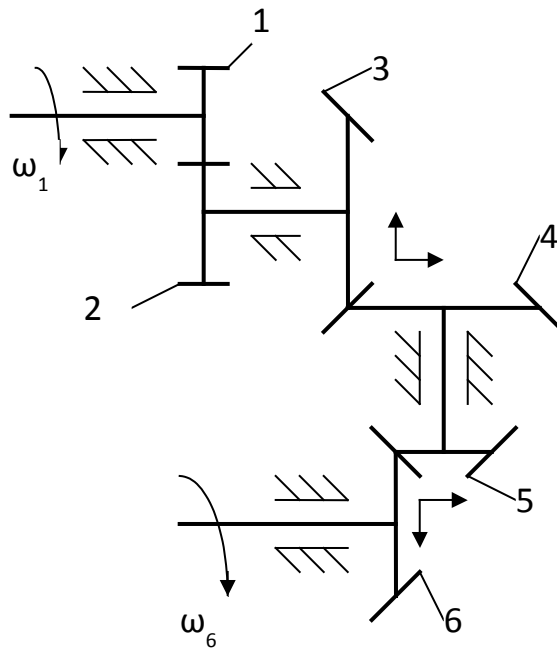


Рис.1.2

У випадку конічних коліс знак передаточного відношення знаходять за напрямками обертання вхідного й вихідного коліс. Для зручності замість кругових стрілок проставляють прямі стрілки. У місці зачеплення коліс 3 і 4, 5 і 6 проводять дві стрілки від зачеплення (вони показують рух зубців на видимому боці коліс). Так чергуємо від зачеплення до зачеплення. Якщо напрямки стрілок вхідного й вихідного коліс збігаються, знак передаточного відношення слід вважати додатним, коли стрілки не збігаються слід вважати від'ємним.

Так само визначають передаточне відношення багатоланкових зубчастих механізмів з нерухомими осями коліс, якщо до їх складу входять черв'ячні передачі або передачі гвинтовими колесами.

Приклад 1.1. Визначити загальне передаточне відношення, передаточні відношення окремих ступіней, кутові швидкості зубчастих коліс аналітичним та графічним методами, перевірити розрахунки за відносним відсотком похибки.

Задано: - схема багатоланкового зубчастого механізму з нерухомими осями коліс (рис.1.1. а); - число обертів вала вхідного колеса $n_1 = 750 \text{ хв}^{-1}$; - числа зубців коліс $Z_1 = 20$; $Z_2 = 38$; $Z_3 = 15$; $Z_4 = 24$; $Z_5 = 31$; $Z_6 = 43$; - модуль коліс $m = 5.0 \text{ мм}$.

Загальне передаточне відношення (U_{16}) зубчастого механізму дорівнює

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = \frac{n_1}{n_6} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_{23}} \cdot \frac{\omega_{23}}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_6} \right) = \left(\frac{n_1}{n_{23}} \cdot \frac{n_{23}}{n_4} \cdot \frac{n_4}{n_5} \cdot \frac{n_5}{n_6} \right) =$$

$$= (-1)^m \cdot U_{12} \cdot U_{34} \cdot U_{45} \cdot U_{56} = (-1)^4 \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} \cdot \frac{Z_5}{Z_4} \cdot \frac{Z_6}{Z_5} = \frac{Z_2 \cdot Z_6}{Z_1 \cdot Z_3} = \frac{38 \cdot 43}{20 \cdot 15} = 5.45$$

Як видно з розрахунку значення загального передаточного відношення (U_{16}) не залежить від числа зубців проміжних коліс 4 і 5, такі колеса в техніці називають *паразитними*.

Визначаємо передаточні відношення окремих ступіней

$$U_{12} = \frac{\omega_{23}}{\omega_1} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{38}{20} = -1,9; \quad U_{34} = \frac{\omega_{23}}{\omega_4} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_4}{Z_3} = -\frac{24}{15} = -1,6;$$

$$U_{45} = \frac{\omega_5}{\omega_4} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_5}{Z_4} = -\frac{31}{24} = -1,29; \quad U_{56} = \frac{\omega_6}{\omega_5} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_6}{Z_5} = -\frac{43}{31} = -1,39;$$

Загальне передаточне відношення перевіримо за формулою

$$U_{16} = (-1)^4 \cdot U_{12} \cdot U_{34} \cdot U_{45} \cdot U_{56} = 1,9 \cdot 1,6 \cdot 1,29 \cdot 1,39 = 5,45.$$

Визначаємо, аналітичним методом, кутові швидкості кожного колеса

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5c^{-1}; \quad \omega_6 = \frac{\omega_1}{U_{16}} = \frac{78,5}{5,45} = 14,4c^{-1};$$

$$\omega_{23} = \frac{\omega_1}{U_{12}} = \frac{78,5}{-1,9} = -41,3c^{-1}; \quad \omega_4 = \frac{\omega_{23}}{U_{34}} = \frac{-41,3}{-1,6} = 25,8c^{-1};$$

$$\omega_5 = \frac{\omega_4}{U_{45}} = \frac{25,8}{-1,29} = -20,0c^{-1}; \quad \omega_6 = \frac{\omega_5}{U_{56}} = \frac{-20,0}{-1,39} = 14,4c^{-1};$$

Кінематичне дослідження багатоланкових зубчастих механізмів можна здійснювати графічним методом за допомогою побудови картин швидкостей.

З теоретичної механіки відомо, що при обертанні ланки (зубчастого колеса) відносно нерухомої осі (миттєвого центра обертання) швидкості точок ланки пропорціональні радіусам обертання. **Пряма лінія, що проходить через миттєвий центр обертання, називається законом лінійних швидкостей точок ланки.**

Для побудови *картини лінійних швидкостей* багатоланкового зубчастого механізму з нерухомими осями коліс (рис.1.1. а), треба побудувати його схему використавши масштабний коефіцієнт довжини μ_l (рис.1.3.).

Визначаємо радіуси початкових кіл, як рівні ділильним за формулою

$$R_{wi} = R_i = 0,5 \cdot m \cdot Z_i / 1000, м$$

Розрахуємо масштабний коефіцієнт довжини, та перерахуємо радіуси кіл в міліметри для креслення схеми механізму. Наприклад, для коліс 6 і 1

$$R_6 = 0,5 \cdot m \cdot Z_6 / 1000 = 0,5 \cdot 5 \cdot 43 / 1000 = 0,1075 \text{ м}.$$

$$\mu_\ell = \frac{R_6}{R_6} = \frac{0.1075}{21.5} = 0.005 \text{ м/мм}.$$

$$\overline{R_1} = \frac{R_1}{\mu_\ell} = \frac{0.05}{0.005} = 10 \text{ мм}.$$

Розрахунки зводимо до таблиці 1.1.

Таблиця 1.1. Геометричні параметри схеми механізму

Колесо	Вимір	1	2	3	4	5	6
Зубців	шт.	20	38	15	24	31	43
Модуль	мм	5,0					
Радіус	м	0,05	0,095	0,0375	0,06	0,0775	0,1075
Радіус	мм	10	19	7,5	12	15,5	21,5

Знаходимо швидкість точки P_{12} полюса зачеплення коліс 1 і 2 за формулою

$$V_{P_{12}} = \omega_1 \cdot R_1 = 78.5 \cdot 0.05 = 3.925 \text{ м/с}.$$

Масштабний коефіцієнт картини лінійних швидкостей

$$\mu_V = \frac{V_{P_{12}}}{V_{P_{12}}} = \frac{3.925}{39.25} = 0.1 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

На схемі механізму де зображені ділильні кола зубчастих коліс, у напрямку кутової швидкості ω_1 з точки P_{12} відкладаємо відрізок швидкості $\overline{V}_{P_{12}} = 39.25 \text{ мм}$ перпендикулярно вертикальному радіусу колеса 1. З'єднуємо миттєвий центр обертання O_1 з кінцем вектора швидкості і одержимо закон лінійних швидкостей для точок радіуса колеса 1, цю пряму називаємо Z'_1 .

Закони лінійних швидкостей, прямі $Z'_{2,3}$, Z'_4 , Z'_5 , Z'_6 , проводимо через миттєві центри обертання $O_{2,3}$, O_4 , O_5 , O_6 визначивши відрізки лінійних швидкостей точок полюсів зачеплення $P_{3,4}$, $P_{4,5}$, $P_{5,6}$.

Для визначення передаточних відношень зручно використовувати **картину кутових швидкостей**, яку будуємо так (рис.1.3).

Масштабний коефіцієнт картини кутових швидкостей

$$\mu_\omega = \frac{\mu_V}{\mu_\ell \cdot KP_\omega} = \frac{0.1}{0.005 \cdot 20} = 1.0 \frac{\text{с}^{-1}}{\text{мм}}.$$

На продовжені лінії $U-U$ відкладаємо відрізок KP_ω , у нашому випадку доцільно $KP_\omega = 20 \text{ мм}$. Проводимо через точку K горизонтальну лінію ω , а з точки P_ω проводимо промені $P_\omega 1 // Z'_1$, $P_\omega 23 // Z'_{2,3}$, $P_\omega 4 // Z'_4$, $P_\omega 5 // Z'_5$, $P_\omega 6 // Z'_6$, до

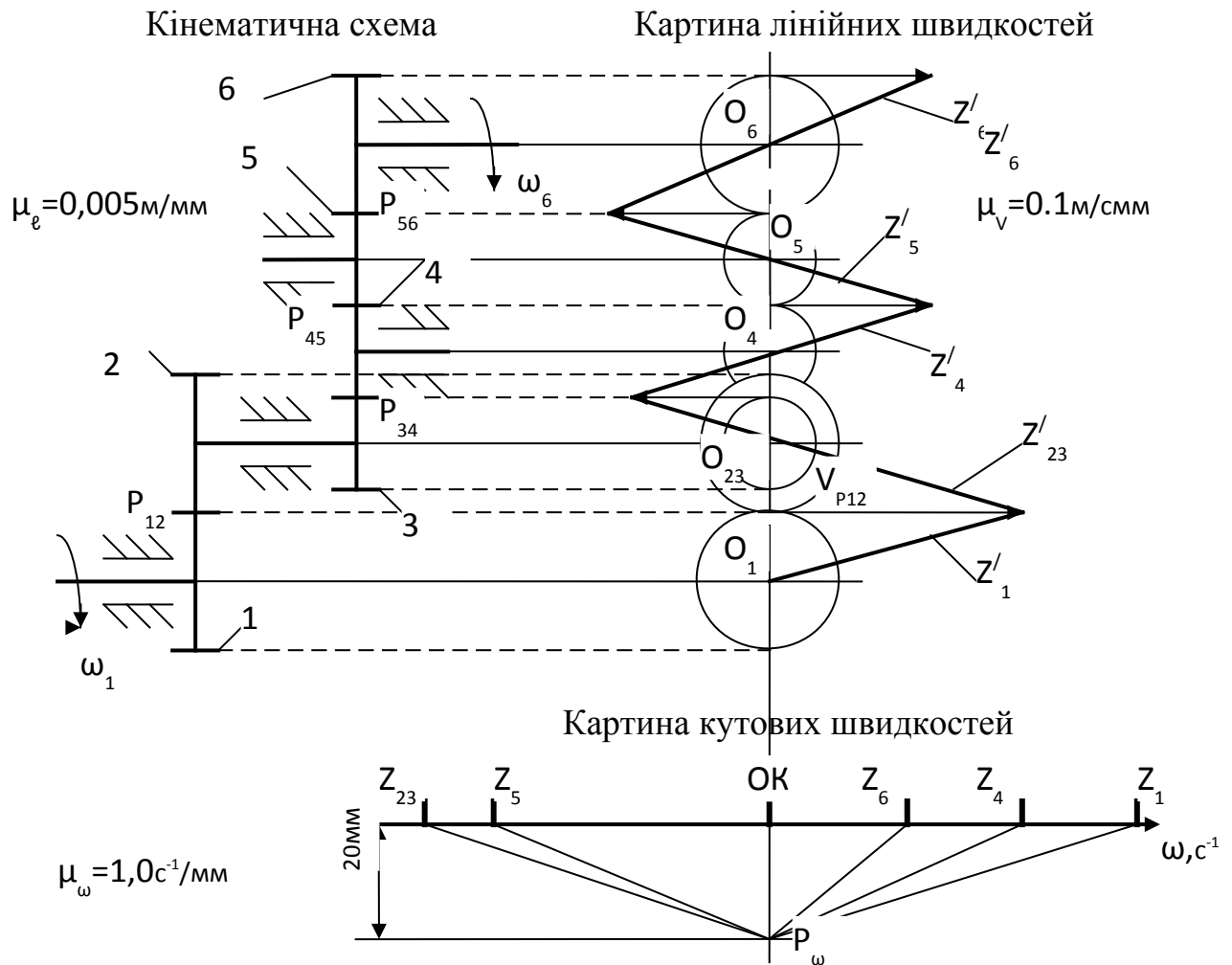


Рис.1.3.

перетину з координатою ω , одержані точки позначимо відповідно $Z_1, Z_{23}, Z_4, Z_5, Z_6$. Відрізки $KZ_1, KZ_{23}, KZ_4, KZ_5, KZ_6$ зображують у масштабі μ_ω кутові швидкості відповідно коліс 1, 23, 4, 5, 6.

Отже, загальне передаточне відношення (U_{16}^{GP}) зубчастого механізму за графічним методом можна розрахувати як відношення відрізків. Якщо відрізки кутових швидкостей знаходяться з одного боку від точки К, передаточне відношення додатне, і навпаки, коли з різних боків від точки К, то воно від'ємне.

$$U_{16}^{GP} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = \frac{KZ_1 \cdot \mu_\omega}{KZ_6 \cdot \mu_\omega} = \frac{KZ_1}{KZ_6} = \frac{82}{15} = 5,467.$$

Графічним методом кутові швидкості розраховуємо за формулою

$$\omega_i = KZ_i \cdot \mu_\omega, \text{с}^{-1}.$$

Наприклад, $\omega_1 = KZ_1 \cdot \mu_\omega = 82 \cdot 1,0 = 82,0, \text{с}^{-1}$,

Відсоток похибки загального передаточного відношення дорівнює

$$\Delta U\% = \left| \frac{U_{16} - U_{16}^{TP}}{U_{16}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{5,45 - 5,467}{5,45} \right| \cdot 100 = 0,31\% \leq 4\% .$$

Результати кінематичного дослідження зводимо до таблиці 1.2.

Таблиця 1.2. Результати кінематичного дослідження механізму

№	Вимір	1	2	3	4	5	6	U_{16}	U_{16}^{TP}
Зубців	шт.	20	38	15	24	31	43	5,45	5,467
$\omega_{АН}$	C^{-1}	78,5	-41,3	-41,3	25,8	-20,0	14,4		
$\omega_{ГР}$	C^{-1}	82	-42	-42	27,0	-20	15		

1.3. Зубчасті механізми з рухомими осями окремих коліс з двома і більше ступенями вільності (диференціальні механізми).

У деяких багатоланкових зубчастих механізмів осі окремих коліс є рухомими. На рис. 1.4 зображено зубчастий механізм Давида, в якому колеса X і Y називають центральними, колеса 1 і 2 – сателітами, ланку Н називають – водило. Нехай колеса X, Y, 1 і 2 обертаються з кутовими швидкостями $\omega_X, \omega_Y, \omega_{12}$, а водило Н має кутову швидкість - ω_H .

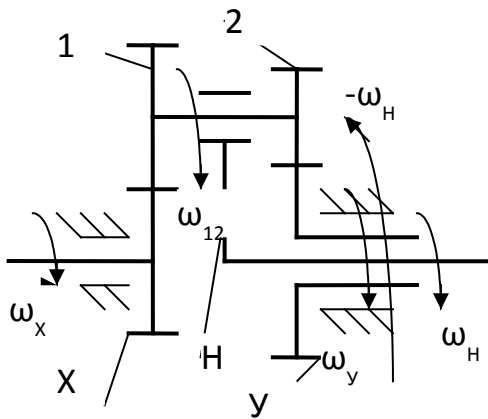


Рис. 1.4.

Визначимо число ступенів вільності механізму, число рухомих ланок $n=4$, число обертових пар п'ятого класу $p_1=4$. Це пари (X,0), (Y,0), (Y,H) та (12,H), де 0 – стояк. Зубчасті колеса в місцях зачеплення утворюють вищі кінематичні пари четвертого класу $p_2=2$. Це пари (X,1) та (Y,2). Отже, за формулою Чебишова маємо

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_1 - p_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2 .$$

Таким чином, для визначення руху ланок механізму він повинен мати заданими закони руху двох ланок, тобто мати дві узагальнені координати.

Для визначення передаточних відношень багатоланкових зубчастих механізмів з рухомими осями окремих коліс не можна безпосередньо скористатися формулами для зубчастих механізмів з нерухомими осями. Виведення залежності між кутовими швидкостями та числом зубів зубчастих коліс таких механізмів ґрунтується на використанні метода оборотності (інверсії)

руху. Метод полягає в тому, що всім ланкам механізму надається кутова швидкість – ω_H . Тоді ланки механізму матимуть кутові швидкості які показані у таблиці 1.3.

Таблиця 1.3. Кутові швидкості ланок механізму

Назва механізму	Ланки механізму			
	Колесо X	Колесо Y	Сателіти 1, 2	Водило H
Диференціальний механізм	ω_X	ω_Y	ω_{12}	ω_H
Обернений механізм	$\omega_X - \omega_H$	$\omega_Y - \omega_H$	$\omega_{12} - \omega_H$	$\omega_H - \omega_H = 0$

Після надання ланкам механізму додаткового обертання з кутовою швидкістю – ω_H ланка H буде нерухомою, а диференціал перетворено в звичайний зубчастий багатоланковий механізм з нерухомими осями коліс (обернений механізм). Передаточне відношення оберненого механізму визначається формулою

$$U_{XY}^H = \frac{\omega_X^H}{\omega_Y^H} = \frac{\omega_X - \omega_H}{\omega_Y - \omega_H} = \frac{n_X - n_H}{n_Y - n_H}.$$

Щоб знати, при якій нерухомій ланці визначено передаточне відношення, біля його позначення ставимо верхній індекс тієї ланки, яка являється нерухомою. Одержана формула називається **формулою Віллїса** для диференціальних механізмів.

У загальному вигляді при n кількості коліс формула Віллїса має вигляд

$$U_{XYn}^H = \frac{\omega_X - \omega_H}{\omega_{Yn} - \omega_H} = \frac{n_X - n_H}{n_{Yn} - n_H} = (-1)^m \frac{Z_2}{Z_X} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} \cdot \frac{Z_6}{Z_5} \dots \frac{Z_{Yn}}{Z_{Yn-1}}.$$

1.4. Зубчасті механізми з рухомими осями окремих коліс (епіциклічні, планетарні передачі)

Епіциклічні або планетарні передачі є окремим випадком диференціальних механізмів, коли одне з центральних коліс зробити нерухомим. Число ступенів вільності такого механізму завжди дорівнює $W = 1$. На рис.1.5 зображено чотири основні схеми багатоланкових зубчастих механізмів з рухомими осями окремих коліс (епіциклічні, планетарні передачі).

Такі механізми передають рух у двох напрямках:

- від рухомого центрального колеса на водило H;
- від водила H на рухоме центральне колесо.

У першому випадку - рух передається від рухомого центрального колеса на водило H передаточне відношення розраховують за формулами

$$U_{XH}^y = \frac{\omega_x^y}{\omega_H^y} = 1 - U_{XV}^H = 1 - \frac{\omega_x - \omega_H}{\omega_y - \omega_H}.$$

$$U_{yH}^x = \frac{\omega_y^x}{\omega_H^x} = 1 - U_{yX}^H = 1 - \frac{\omega_y - \omega_H}{\omega_x - \omega_H}.$$

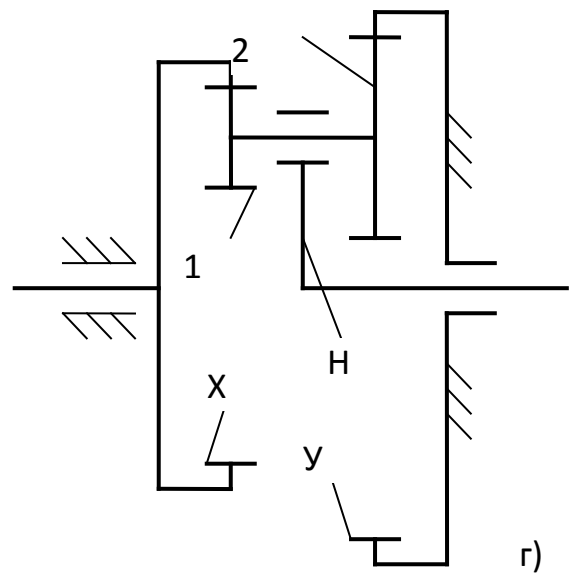
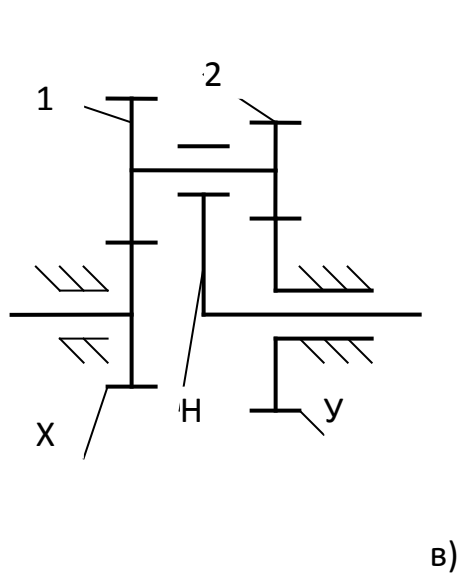
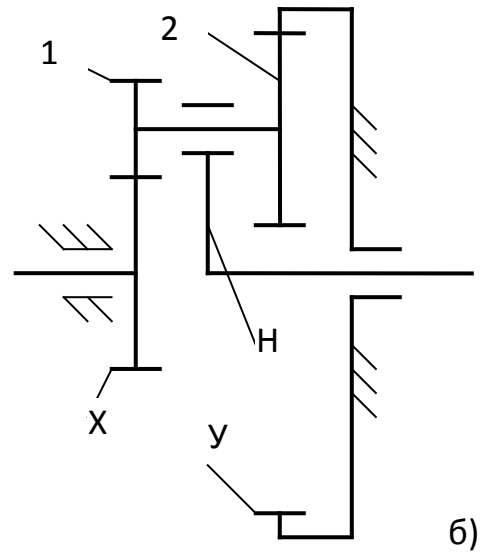
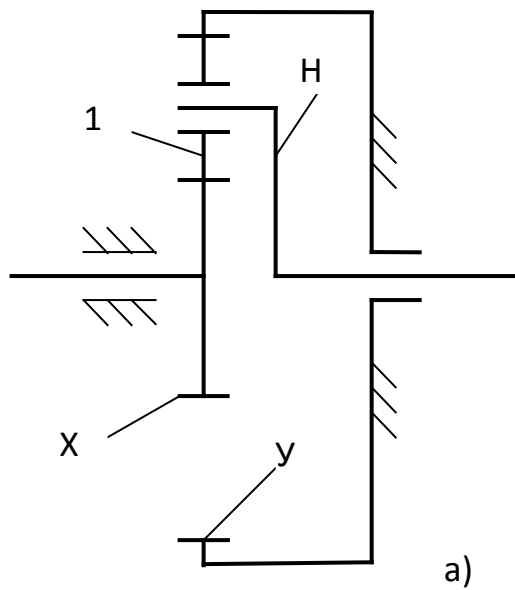


Рис. 1. 5.

У другому випадку - *рух передається від водила Н на рухоме центральне колесо* передаточне відношення розраховують за формулами

$$U_{HX}^y = \frac{\omega_H^y}{\omega_x^y} = \frac{1}{U_{XH}^y} = \frac{1}{1 - U_{XV}^H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_x - \omega_H}{\omega_y - \omega_H}}; \quad U_{Hv}^x = \frac{\omega_H^x}{\omega_y^x} = \frac{1}{U_{yH}^x} = \frac{1}{1 - U_{yX}^H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_y - \omega_H}{\omega_x - \omega_H}};$$

Якщо до складу багатоланкового зубчастого механізму з рухомими осями коліс входять конічні зубчасті колеса то значення передаточного відношення визначають так само, як і для циліндричних зубчастих механізмів.

У випадку конічних коліс (рис.1.6) знак передаточного відношення знаходять за напрямками обертання вхідної й вихідної ланки. Для зручності замість кругових стрілок проставляють прямі стрілки у місці зачеплення коліс X і 1. Так чергуємо від зачеплення до зачеплення. Якщо напрямки стрілок вхідної й вихідної ланки збігаються, знак передаточного відношення слід вважати додатним, коли стрілки не збігаються слід вважати від'ємним.

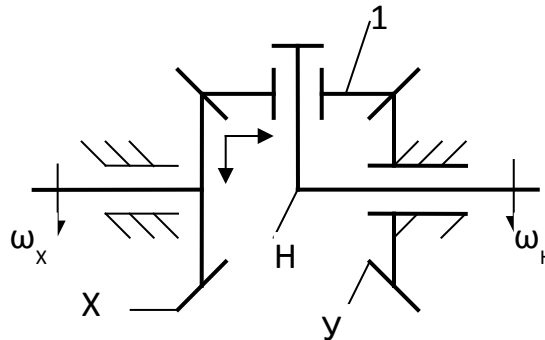


Рис.1.6.

Приклад 1.2. Визначити всі можливі передаточні відношення і кутові швидкості ланок зубчастого механізму з рухомими осями коліс.

Задано: - схема багатоланкового зубчастого механізму з рухомими осями коліс (рис.1.5. б); - число обертів вала вхідного колеса $n_x = 750 \text{ хв}^{-1}$; - числа зубців коліс $Z_x = 30$; $Z_1 = 18$; $Z_2 = 45$; $Z_y = 93$.

Для розрахунку визначаємо передаточне відношення оберненого механізму

$$U_{xy}^H = \frac{\omega_x^H}{\omega_y^H} = \frac{\omega_x - \omega_H}{\omega_y - \omega_H} = \frac{n_x - n_H}{n_y - n_H} = (-1)^1 \frac{Z_1}{Z_x} \cdot \frac{Z_y}{Z_2} = -\frac{18}{30} \cdot \frac{93}{45} = -1,24.$$

Передаточне відношення за схемою (U_{xH}^y) зубчастого механізму дорівнює

$$U_{xH}^y = \frac{\omega_x^y}{\omega_H^y} = 1 - U_{xy}^H = 1 - (-1,24) = 2,24.$$

Можливі передаточні відношення:

$$U_{yH}^x = \frac{\omega_y^x}{\omega_H^x} = 1 - U_{yx}^H = 1 - \frac{1}{U_{xy}^H} = 1 - \frac{1}{(-1,24)} = 1 + 0,806 = 1,806.$$

$$U_{HX}^y = \frac{\omega_H^y}{\omega_x^y} = \frac{1}{U_{xH}^y} = \frac{1}{2,24} = 0,446.$$

$$U_{HY}^x = \frac{\omega_H^x}{\omega_y^x} = \frac{1}{U_{yH}^x} = \frac{1}{1,806} = 0,554.$$

Розрахунок кутових швидкостей ланок при різних передаточних відношеннях представляємо у вигляді таблиці 1.4.

Синтез (епіциклічних) планетарних механізмів враховує етап вибору чисел зубців коліс для забезпечення заданого передаточного відношення. При виборі числа зубців для заданої схеми механізму і передаточного відношення треба витримувати наступні умови:

- умова співвісності центральної осі механізму;
- умова сусідства сателітів механізму;
- умова можливості складання механізму;
- умова усунення підрізання й інтерференції зубчастих коліс та самогальмування зубчастої передачі.

Для дотримання вказаних умов, вибрані числа зубців коліс слід перевірити за формулами згідно таблиці 1.5 і 1.6.

Таблиця 1.5. Умови перевірки зубців коліс механізмів

Сема механізму	Умова співвісності	Умова сусідства	Умова Складання
Рис. 1.5. а	$Z_x + Z_1 = Z_y - Z_1$	$(Z_x + Z_1) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_1 + 2$	$Q = \frac{Z_x + Z_y}{p}$
Рис. 1.5. б	$Z_x + Z_1 = Z_y - Z_2$	$(Z_x + Z_1) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_1 + 2$ $(Z_y - Z_2) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_2 + 2$	$Q = \frac{Z_x + Z_y}{p}$
Рис. 1.5. в	$Z_x + Z_1 = Z_y + Z_2$	$(Z_x + Z_1) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_1 + 2$ $(Z_y + Z_2) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_2 + 2$	$Q = \frac{Z_x + Z_y}{p}$
Рис. 1.5. г	$Z_x - Z_1 = Z_y - Z_2$	$(Z_x - Z_1) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_1 + 2$ $(Z_y - Z_2) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_2 + 2$	$Q = \frac{Z_x + Z_y}{p}$

У таблиці 1.5 $p \geq 2$ - число сателітів механізму; Q – довільне ціле число.

У таблиці 1.6 наведено допустимі значення чисел зубців меншого Z_M і більшого Z_B коліс, при яких не буде підрізання й інтерференції зубців для коліс, нарізаних без зміщення ($X = 0$; $h_a^* = 1$).

Таблиця 1.6. Допустимі числа зубців коліс

Зовнішнє зачеплення		Внутрішнє зачеплення			
Z_M	Z_B	Z_M	Z_B	Z_M	Z_B
13	< 17	17	∞	23	>41
14	< 27	18	>144	24	>38
15	< 48	19	>81	25	>36
16	< 112	20	>60	26	>35
17	Будь – яке	21	>50	27 – 79	> $Z_M + 8$
Більше 17	Будь – яке	22	>44	80 і більше	> $Z_M + 7$

1.5. Комбіновані (багатоланкові) зубчасті механізми з рухомими осями окремих коліс

У практиці машинобудування часто зустрічаються зубчасті механізми, що складаються з різних видів зубчастих механізмів (ступінчастих, паразитних, планетарних). Такі механізми називають *комбінованими (багатоланковими)*.

Для визначення передаточного відношення таких механізмів треба спочатку проаналізувати кінематичну схему передачі, визначити передаточні відношення кожного складового механізму і потім записати формулу для загального передаточного відношення.

Приклад 1.3. Визначити загальне передаточне відношення, передаточні відношення складових механізмів, кутові швидкості зубчастих коліс аналітичним та графічним методами, перевірити розрахунки за відносним відсотком похибки.

Задано: - схема комбінованого (багатоланкового) зубчастого механізму з рухомими осями коліс (рис.1.7.); - число обертів вала вхідного колеса $n_4 = 750 \text{ об}^{-1}$; - число обертів вала вихідного водила $n_H = 76,5 \text{ об}^{-1}$; - числа зубців коліс $Z_4 = 16$; $Z_5 = 20$; - модуль коліс; - число сателітів $p = 3$.

Згідно кінематичної схеми, цей комбінований механізм складається із одної пари зубчастих коліс (ступені) і планетарної передачі.

Загальне передаточне відношення такого комбінованого механізму дорівнює

$$U_{4H} = U_{45} \cdot U_{XH} = \frac{n_4}{n_H} = \frac{750}{76.5} = 9.8.$$

Передаточне відношення ступені 4 – 5 розраховуємо за формулою

Таблиця 1.4. Кутові швидкості ланок, (с⁻¹)

Передаточне відношення	Центральне колесо Х	Центральне колесо У	Сателіти 1,2	Водило Н
$U_{ХУ}^H = -1,24$	$\omega_x = \frac{\pi \cdot n_x}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5$	$\omega_y = \frac{\omega_x}{U_{ХУ}^H} = \frac{78,5}{-1,24} = -63,3$	$\omega_{12} = -\frac{\omega_x \cdot Z_x}{Z_1} = \frac{\omega_y \cdot Z_y}{Z_2} = -\frac{78,5 \cdot 30}{18} = -130,8$	$\omega_H = 0$
$U_{ХН}^y = 2,24$	$\omega_x = \frac{\pi \cdot n_x}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5$	$\omega_y = 0$	$\omega_{12} = \frac{\omega_x \cdot Z_x}{(Z_1 + Z_2)} = \frac{\omega_H \cdot (Z_x + Z_1)}{Z_2} = \frac{78,5 \cdot 30}{18 + 45} = 37,38$	$\omega_H = \frac{\omega_x}{U_{ХН}^y} = \frac{78,5}{2,24} = 35,0$
$U_{УН}^x = 1,806$	$\omega_x = 0$	$\omega_y = \frac{\pi \cdot n_y}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5$	$\omega_{12} = \frac{\omega_y \cdot Z_y}{(Z_1 + Z_2)} = \frac{\omega_H \cdot (Z_y - Z_2)}{Z_1} = \frac{43,47 \cdot (93 - 45)}{18} = 115,9$	$\omega_H = \frac{\omega_y}{U_{УН}^x} = \frac{78,5}{1,806} = 43,47$
$U_{НХ}^y = 0,446$	$\omega_x = \frac{\omega_H}{U_{НХ}^y} = \frac{78,5}{0,446} = 176,0$	$\omega_y = 0$	$\omega_{12} = \frac{\omega_x \cdot Z_x}{(Z_1 + Z_2)} = \frac{\omega_H \cdot (Z_x + Z_1)}{Z_2} = \frac{78,5 \cdot 30}{18 + 45} = 37,38$	$\omega_H = \frac{\pi \cdot n_H}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5$
$U_{НУ}^x = 0,554$	$\omega_x = 0$	$\omega_y = \frac{\omega_H}{U_{НУ}^x} = \frac{78,5}{0,554} = 141,7$	$\omega_{12} = \frac{\omega_y \cdot Z_y}{(Z_1 + Z_2)} = \frac{\omega_H \cdot (Z_y - Z_2)}{Z_1} = \frac{43,47 \cdot (93 - 45)}{18} = 115,9$	$\omega_H = \frac{\pi \cdot n_H}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5$

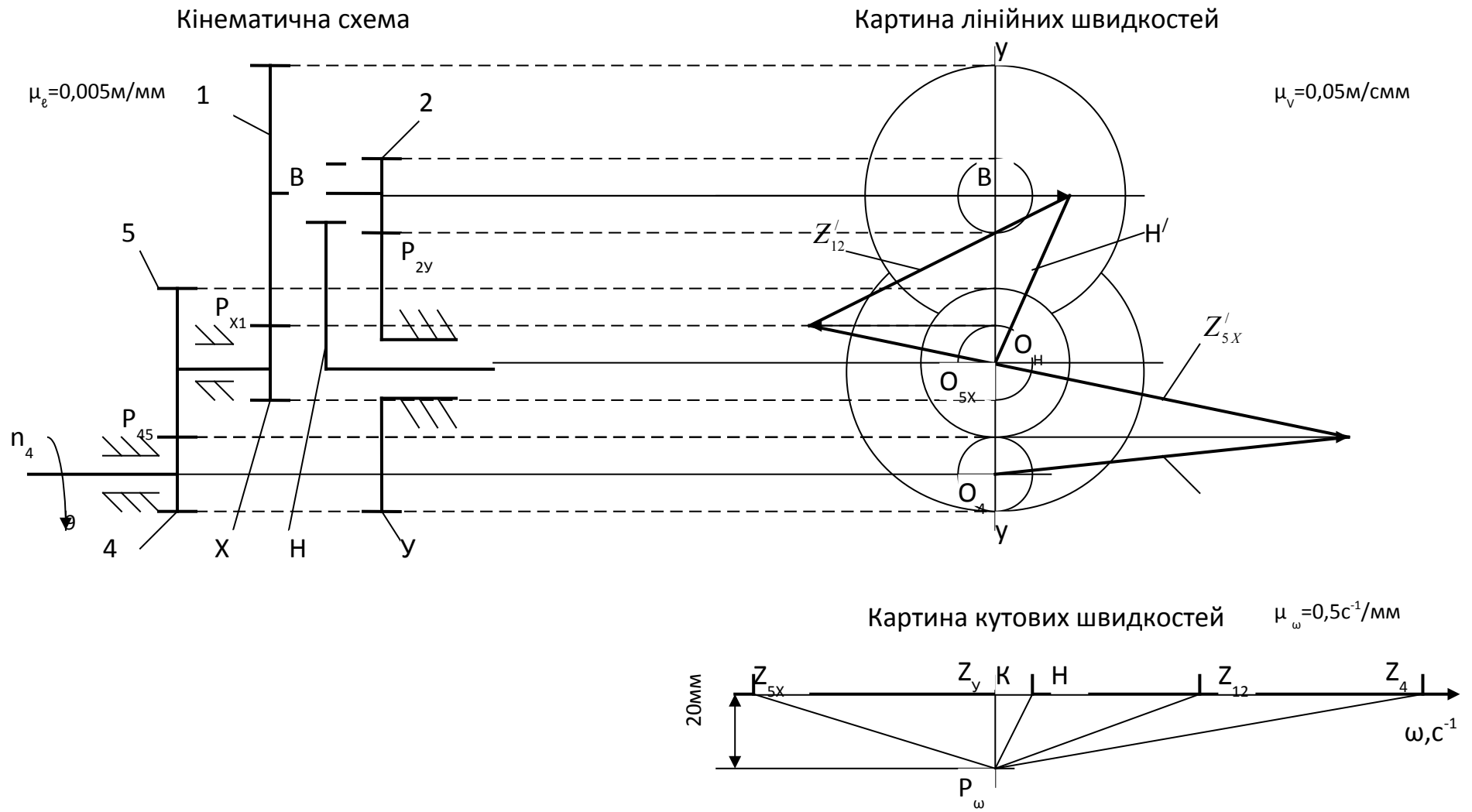


Рис. 1.7.

$$U_{45} = \frac{\omega_5}{\omega_4} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_5}{Z_4} = -\frac{20}{16} = -1,25.$$

Так, як числа зубців коліс на цьому етапі ще не вибрані визначаємо попереднє передаточне відношення планетарної передачі

$$U_{XH}^y = \frac{U_{4H}}{U_{45}} = \frac{9,8}{-1,25} = -7,84$$

Запишемо передаточне відношення планетарної передачі з використанням чисел зубців, та розрахуємо числове значення, що складають відношення чисел зубців коліс

$$U_{XH}^y = \frac{\omega_X^y}{\omega_H^y} = 1 - U_{XV}^H = 1 - \frac{Z_1}{Z_X} \cdot \frac{Z_Y}{Z_2} = -7,84$$

$$\frac{Z_1}{Z_X} \cdot \frac{Z_Y}{Z_2} = 7,84 + 1 = 8,84$$

Приймаємо, що відношення $\frac{Z_Y}{Z_2} = 3$ і розраховуємо значення відношення $\frac{Z_1}{Z_X}$

$$\frac{Z_1}{Z_X} = \frac{8,84}{3} = 2,947$$

Приймаємо число зубців меншого колеса $Z_X = 18$ тоді $Z_1 = 2,947 \cdot Z_X = 53$

Для визначення числа зубців коліс Z_Y і Z_2 скористаємося умовою співвідношення механізму, та співвідношенням $Z_Y = 3 \cdot Z_2$

$$Z_X + Z_1 = Z_Y + Z_2$$

$$Z_X + Z_1 = 3 \cdot Z_2 + Z_2 = 4 \cdot Z_2; \Rightarrow Z_2 = \frac{Z_X + Z_1}{4} = \frac{18 + 53}{4} = 17,75 = 18$$

$$Z_Y = 3 \cdot Z_2 = 3 \cdot 18 = 54$$

Перевіряємо умову співвідношення механізму

$$Z_X + Z_1 = Z_Y + Z_2;$$

$$18 + 53 = 54 + 18;$$

$$71 \neq 72 \text{ умова не виконується}$$

Щоб умова виконувалася додамо один зубець до числа зубців колеса 1

$$Z_1 = 53 + 1 = 54;$$

$$18 + 54 = 54 + 18;$$

71 = 72 – умова співвісності виконується.

Перевіряємо умови сусідства сателітів механізму

$$(Z_x + Z_1) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_1 + 2;$$

$$(Z_y + Z_2) \cdot \sin \frac{180^\circ}{p} \geq Z_2 + 2;$$

$$(18 + 54) \cdot \sin \frac{180^\circ}{3} \geq 54 + 2;$$

$$(54 + 18) \cdot \sin \frac{180^\circ}{3} \geq 18 + 2;$$

62,35 > 56 – умова виконується ;

62,35 > 20 – умова виконується.

Перевіряємо умову складання механізму

$$Q = \frac{Z_x + Z_y}{p} = \frac{18 + 54}{3} = 24 - \text{умова виконується}$$

Остаточно маємо такі числа зубців коліс $Z_x = 18$; $Z_1 = 54$; $Z_2 = 18$; $Z_y = 54$.

Розраховуємо дійсне загальне передаточне відношення механізму

$$U_{4H} = U_{45} \cdot U_{XH}^y = (-1)^1 \cdot \frac{Z_5}{Z_4} \cdot (1 - (-1)^2 \frac{Z_1}{Z_x} \cdot \frac{Z_y}{Z_2}) = -\frac{20}{16} \cdot (1 - \frac{54}{18} \cdot \frac{54}{18}) = 10$$

Розраховуємо дійсне передаточне відношення планетарної передачі

$$U_{XH}^y = (1 - (-1)^2 \frac{Z_1}{Z_x} \cdot \frac{Z_y}{Z_2}) = (1 - \frac{54}{18} \cdot \frac{54}{18}) = -8,0$$

Відсоток похибки загального передаточного відношення дорівнює

$$\Delta U\% = \left| \frac{U_{4H}^D - U_{4H}}{U_{4H}^D} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{10 - 9,8}{10} \right| \cdot 100 = 2,0\% \leq 4\%.$$

Визначаємо, аналітичним методом, кутові швидкості кожного колеса $\omega_y = 0$

$$\omega_4 = \frac{\pi \cdot n_4}{30} = \frac{3.14 \cdot 750}{30} = 78.5c^{-1};$$

$$\omega_{5X} = \frac{\omega_4}{U_{45}} = \frac{78.5}{-1,25} = -62,8c^{-1};$$

$$\omega_H = \frac{\omega_4}{U_{4H}^D} = \frac{78.5}{10} = 7,85c^{-1};$$

$$\omega_{12} = \frac{\omega_{5X} \cdot Z_X}{(Z_1 - Z_2)} = \frac{62,8 \cdot 18}{(54 - 18)} = 15,7c^{-1}.$$

Для побудови *картини лінійних швидкостей* комбінованого зубчастого механізму з рухомими осями коліс, треба побудувати його кінематичну схему використавши масштабний коефіцієнт довжини μ_ℓ (рис.1.7).

Визначаємо радіуси початкових кіл, як рівні ділильним за формулою

$$R_{wi} = R_i = 0,5 \cdot m \cdot Z_i / 1000, м$$

Розрахуємо масштабний коефіцієнт довжини, та перерахуємо радіуси кіл в міліметри для креслення схеми механізму. Наприклад, для коліс X і 1

$$R_1 = 0,5 \cdot m \cdot Z_1 / 1000 = 0,5 \cdot 5 \cdot 54 / 1000 = 0,135 м.$$

$$\mu_\ell = \frac{R_1}{R_1} = \frac{0.135}{27} = 0.005 м / мм.$$

$$\overline{R}_X = \frac{R_X}{\mu_\ell} = \frac{0.045}{0.005} = 9,0 мм.$$

Розрахунки зводимо до таблиці 1.5.

Таблиця 1.5. Геометричні параметри схеми механізму

Колесо	Вимір	4	5	X	1	2	У
Зубців	шт.	16	20	18	54	18	54
Модуль	мм	5					
Радіус	м	0,04	0,05	0,045	0,135	0,045	0,135
Радіус	мм	8,0	10,0	9,0	27,0	9,0	27,0

Знаходимо швидкість точки P_{45} полюса зачеплення коліс 4 і 5 за формулою

$$V_{P45} = \omega_4 \cdot R_4 = 78.5 \cdot 0.04 = 3,14 м / с.$$

Масштабний коефіцієнт картини лінійних швидкостей

$$\mu_V = \frac{V_{P45}}{V_{P45}} = \frac{3.14}{62,8} = 0.05 \frac{м / с}{мм}.$$

На схемі механізму де зображені ділильні кола зубчастих коліс, у напрямку кутової швидкості ω_4 з точки P_{45} відкладаємо відрізок швидкості $\overline{V}_{P45} = 62,8 мм$ перпендикулярно вертикальному радіусу колеса 4. З'єднуємо миттєвий центр

обертання O_4 з кінцем вектора швидкості і одержимо закон лінійних швидкостей для точок радіуса колеса 4, цю пряму називаємо Z_4' .

Закони лінійних швидкостей, прямі Z_{5X}' , Z_{12}' , H' , проводимо через миттєві центри обертання O_{5X} , P_{2Y} , O_H , визначивши відрізки лінійних швидкостей точки полюса зачеплення P_{X1} , та точки В на осі сателітів 1 і 2.

Для визначення передаточних відношень зручно використовувати *картину кутових швидкостей*, яку будуємо так (рис.1.7).

Масштабний коефіцієнт картини кутових швидкостей

$$\mu_\omega = \frac{\mu_v}{\mu_\ell \cdot KP_\omega} = \frac{0.05}{0.005 \cdot 20} = 0,5 \frac{c^{-1}}{мм}.$$

На продовжені лінії $U-U$ відкладаємо відрізок KP_ω , у нашому випадку доцільно $KP_\omega = 20мм$. Проводимо через точку К горизонтальну координату ω , а з точки P_ω проводимо промені $P_\omega 4 // Z_4'$, $P_\omega 5X // Z_{5X}'$, $P_\omega 12 // Z_{12}'$, $P_\omega H // H'$ до перетину з координатою ω , одержані точки позначимо відповідно Z_4 , Z_{12} , Z_{5X} , H . Відрізки KZ_4 , KZ_{5X} , KZ_{12} , KH зображують у масштабі μ_ω кутові швидкості відповідно коліс 4, 5X, 12, та водила H.

Отже, загальне передаточне відношення (U_{4H}) зубчастого механізму за графічним методом можна розрахувати як відношення відрізків. Якщо відрізки кутових швидкостей знаходяться з одного боку від точки К, передаточне відношення додатне, і навпаки, коли з різних боків від точки К, то воно від'ємне.

$$U_{4X}^{GP} = \frac{\omega_4}{\omega_H} = \frac{KZ_4 \cdot \mu_\omega}{KZ_H \cdot \mu_\omega} = \frac{KZ_4}{KZ_H} = \frac{158}{16} = 9,875.$$

Графічним методом кутові швидкості розраховуємо за формулою

$$\omega_i = KZ_i \cdot \mu_\omega, c^{-1}.$$

Наприклад, $\omega_4 = KZ_4 \cdot \mu_\omega = 158 \cdot 0,5 = 79,0, c^{-1}$,

$$\omega_H = KH \cdot \mu_\omega = 16 \cdot 0,5 = 8,0, c^{-1}.$$

Відсоток похибки загального передаточного відношення дорівнює

$$\Delta U\% = \left| \frac{U_{4H}^D - U_{16}^{GP}}{U_{4H}^D} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{10 - 9,875}{10} \right| \cdot 100 = 1,25\% \leq 4\%.$$

Результати кінематичного дослідження зводимо до таблиці 1.6.

Таблиця 1.6. Результати кінематичного дослідження механізму

№	Вимір	4	5	X	У	1	2	H	U_{4H}^D	U_{4H}^{GP}
Зубців	шт.	16	20	18	54	54	18	-	10	9,875
ω_{AH}	C^{-1}	78,5	-62,8	-62,8	0	15,7	15,7	7,85		
$\omega_{ГP}$	C^{-1}	79,0	- 63	- 63	0	16,0	16,0	8,0		

1.6. Замкнуті (багатоланкові) диференціальні зубчасті механізми.

Якщо в зубчастому диференціальному механізмі зв'язати додатковою (замикаючою) передачею дві ланки, що мають нерухомі осі обертання. Такими ланками можуть бути центральні колеса X та У, або одне центральне колесо й водило Н. У такому випадку ми одержимо зубчастий механізм з одним ступенем вільності, який *називають замкнутим (багатоланковим) диференціальним зубчастим механізмом*.

Передаточні відношення таких механізмів визначають за такими самими методами, як і комбінованих механізмів. При цьому механізм ділять на дві частини: одна – диференціальний механізм; друга – замикаюча передача. Для диференціального механізму записують формулу Вілліса, для замикаючої передачі – формулу передаточного відношення залежно від виду передачі. Розв'язуючи спільно одержані рівняння, знаходимо передаточне відношення замкнутого диференціального механізму.

Приклад 1.4. Визначити передаточне відношення U_{1H} , та кутові швидкості зубчастих коліс аналітичним методом, для замкнутого диференціального механізму, який зображено на рис. 1.8.

Задано: - схема замкнутого диференціального механізму з рухомими осями коліс (рис.1.8); - число обертів вала вхідного колеса $n_1 = 750 \text{ хв}^{-1}$; - числа зубців коліс $Z_1 = 20$; $Z_2 = 40$; $Z_3 = 15$; $Z_4 = 75$; $Z_5 = 25$; $Z_6 = 35$; $Z_7 = 125$.

Згідно кінематичної схеми, цей замкнутий диференціальний механізм складається із диференціального механізму, до складу якого входять колеса 1, 2, 3, 4 і водило Н, та замикаючої передачі, до складу якої входять колеса 5, 6, 7. Замикаюча передача з'єднує центральне колесо 4 і водило Н.

Для диференціального механізму записуємо формулу Вілліса (при нерухомому водилі Н)

$$U_{14}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_4^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3}$$

Передаточне відношення замикаючої передачі записуємо як відношення багатоланкового механізму з нерухомими осями коліс

$$U_{57} = U_{4H} = \frac{\omega_{54}}{\omega_{7H}} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_6}{Z_5} \cdot \frac{Z_7}{Z_6} = -\frac{Z_7}{Z_5}$$

Аналіз кінематичної схеми дозволяє встановити, що $\omega_4 = \omega_5 = \omega_{45}$, та $\omega_H = \omega_7 = \omega_{H7}$.

З формули передаточного відношення замикаючої передачі знаходимо значення кутової швидкості $\omega_{45} = U_{57} \cdot \omega_{H7}$ і підставляємо до формули Вілліса

$$U_{14}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_4^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_{H7}}{U_{57} \cdot \omega_{H7} - \omega_{H7}}.$$

Розділимо чисельник і знаменник на кутову швидкість водила ω_{H7}

$$U_{14}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_{H7}} - 1}{U_{57} - 1},$$

звідки остаточно маємо формулу і значення передаточного відношення замкнутого диференціального механізму

$$\begin{aligned} U_{1H} &= \frac{\omega_1}{\omega_{H7}} = U_{14}^H \cdot (U_{57} - 1) + 1 = \left(-\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3}\right) \cdot \left(-\frac{Z_7}{Z_5} - 1\right) + 1 = \\ &= \left(-\frac{40}{20} \cdot \frac{75}{15}\right) \cdot \left(-\frac{125}{25} - 1\right) + 1 = -10 \cdot (-5 - 1) + 1 = 61. \end{aligned}$$

Кутові швидкості зубчастих коліс аналітичним методом дорівнюють

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3.14 \cdot 750}{30} = 78.5c^{-1}; \quad \omega_{H7} = \frac{\omega_1}{U_{1H}} = \frac{78.5}{61} = 1.28c^{-1};$$

$$\omega_{45} = U_{57} \cdot \omega_{H7} = \left(-\frac{125}{25}\right) \cdot 1.28 = -6.43c^{-1};$$

$$\omega_6 = \frac{\omega_{45}}{U_{56}} = \frac{\omega_{45}}{-\frac{Z_6}{Z_5}} = \frac{-6.43}{-\frac{35}{25}} = 4.59c^{-1};$$

$$\omega_{23} = \frac{\omega_1}{\omega_{45} - 6.43} = \frac{78.5}{-6.43} = -12.2c^{-1}.$$

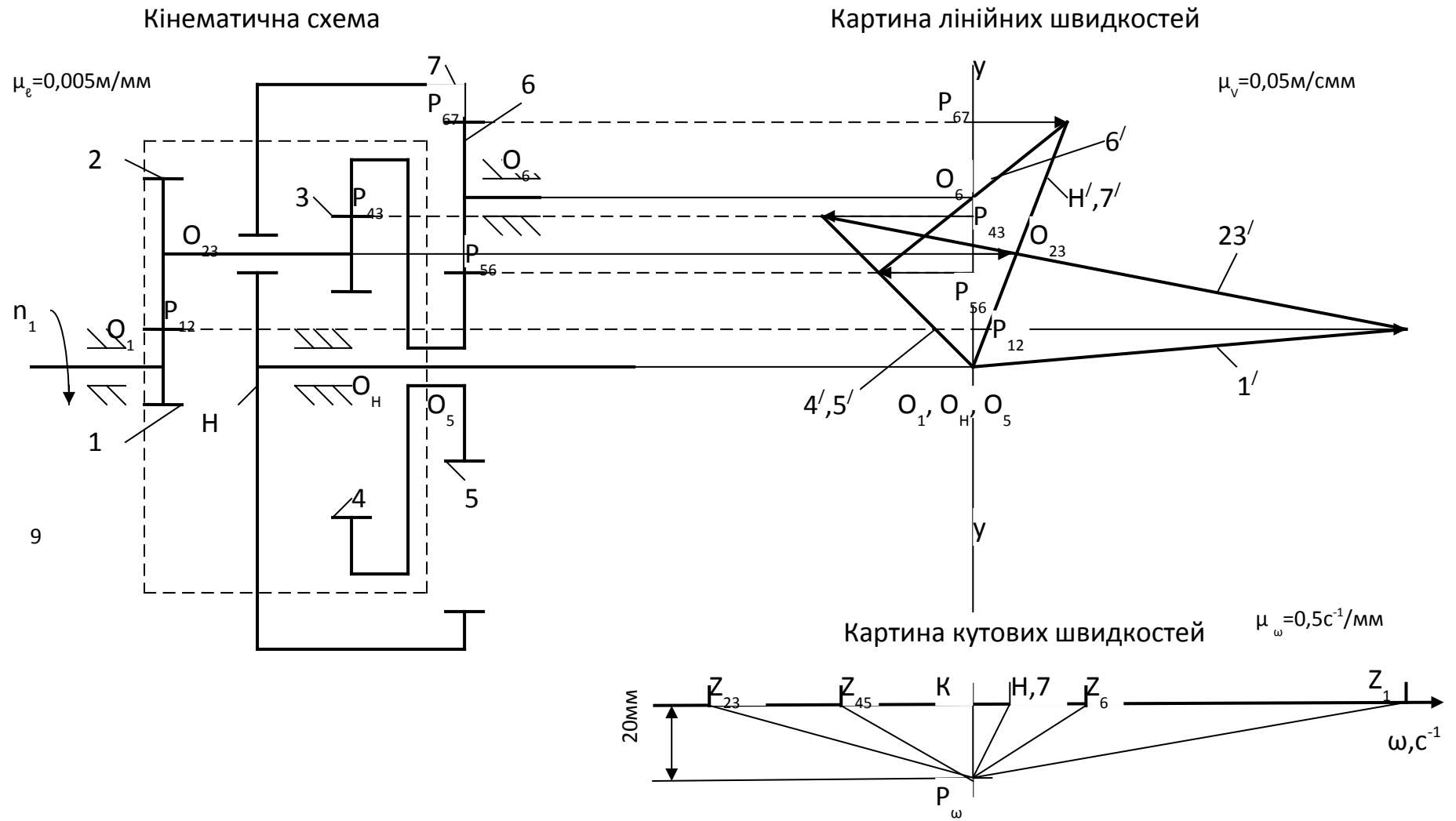


Рис. 1.8.

Для замкнутого диференціального механізму, який зображено на рис. 1.8 визначаємо число ступенів вільності за формулою Чебишова

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1.$$

Тому для побудови картин лінійних та кутових швидкостей такого механізму треба задати одну кутову швидкість наприклад колеса 1. Побудова картин швидкостей нічим не відрізняється від побудов, що виконувались при аналізі комбінованого зубчастого механізму з рухомими осями коліс. Причому побудову зручно починати з лінії $H/7'$ розраховувати лінійну швидкість $V_{P_{67}}$ точки полюса зачеплення коліс 7 і 6. Потім слід будувати лінії у такому порядку $6'$, $4/5'$, $23'$ і $1'$ послідовно визначаючи лінійні швидкості таких точок P_{56} , P_{43} , O_{23} і P_{12} .

СПИСОК ЛІТАРАТУРИ

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 640с.
2. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. – М.: Наука, 1973. – 256с.
3. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 591с.
4. Корейко О.С. Теория механизмов и машин, - К.: Вища шк., 1987, - 206с.
5. Кіницький Я.Т. Теория механизмов и машин. – Київ, видавництво «Наукова думка», 2002. – 660с.