СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§5.1. Определители

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел $1,2,3,\ldots,n$. Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без повторений) как $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$. Напомним, что полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 6.1.1.	Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка,* или *инверсию*), если при $i < j$ имеет место $k_i > k_j$.

Полное число беспорядков в перестановке $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ будем обозначать $Б(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$. Например, $Б(3,1,4,2) = 3$.

Пусть дана квадратная матрица

$$\| A \| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} = \| \alpha_{ij} \|; \quad i, j = [1, n].$$

§5.2. Свойства определителей

Теорема 5.2.4.	**Определитель произведения матриц размера** $n \times n$ **равен произведению их определителей, то есть** $\det(\| A \| \| B \|) = \det \| A \| \cdot \det \| B \|$ **.**

§6.3. Разложение определителей

Выберем в *квадратной* матрице $\|A\|$ строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Определение 6.3.1.	Детерминант квадратной матрицы порядка k, образованной элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором k-го порядка* и обозначается $M^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$.

Определение 6.3.2.	Детерминант квадратной матрицы порядка $n-k$, образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором, дополнительным к минору* $M^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, и обозначается $\overline{M}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$.

Выберем в матрице $\|A\|$ i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых расположен элемент α_{ij}. Удалим из $\|A\|$ выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу $\|A^+\|$ размера $(n-1)\times(n-1)$.

Определение 6.3.3.	Детерминант матрицы $\|A^+\|$ называется *дополнительным минором* $\overline{M}^{j}_{i}$ *элемента* α_{ij}.

Сгруппируем в определении 6.1.2. - детерминанта матрицы $\|A\|$ все $(n-1)!$ слагаемых, содержащих элемент α_{ij}, и вынесем его за скобки. Получим выражение вида $\det\|A\| = \alpha_{ij}D_{ij} + \ldots$.

Определение 6.3.4.	Число D_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента α_{ij}.

Заметим, что в силу определения 6.1.2. имеют место равенства

$$\det\|A\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ij} \ ; \forall i = [1, n] \quad \text{и} \quad \det\|A\| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} D_{kj} \ ; \forall j = [1, n] \qquad (6.3.1.)$$

Теорема 6.3.1.

Справедливо соотношение $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$.

Следствие 6.3.1.

Разложение определителя по i-му столбцу имеет вид $\det\| A\| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \alpha_{ki} \overline{M}_k^i$ или $\det\| A\| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} M_k^i \overline{M}_k^i$.

§5.4. Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j \ ; \ j = [1, n] \qquad (6.4.1.)$$

Или же в матричной форме $\| A\| \| x\| = \| b\|$, где квадратная матрица $\| A\|$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\| x\|$ и $\| b\|$ - соответственно компоненты ξ_i и β_j.

Определение 6.4.1.

Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ будем называть *решением системы линейных уравнений*, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество.

Имеет место

Теорема 6.4.1. (Правило Крамера)

Если $\Delta = \det\| A\| \neq 0$, то существует единственное решение системы линейных уравнений 5.4.1., определяемое формулами

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}\ ;\ i = 1,2,...,n \quad , \quad \text{где } \Delta_i = \det \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \beta_1 & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \beta_2 & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \beta_n & ... & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \\ \begin{matrix} \phantom{\alpha_{11}} & \phantom{\alpha_{12}} & & \uparrow \\ & & & i-\text{й столбец} \end{matrix} \end{array}$$

- определитель матрицы, получаемой из матрицы $\|A\|$, заменой ее i-го столбца на столбец свободных членов $\|b\|$.

Доказательство(при дистанционном образовании можно пропустить):

1°. Получим вначале утверждение теоремы в предположении, что система (6.4.1.) имеет решение $\|x\| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{Vmatrix}$, то есть когда выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j\ ;\ j = [1,n].$$

Умножив последовательно для всех $j = [1,n]$ обе части этих равенств на алгебраическое дополнение D_{jk} и просуммировав результаты умножения по j, получим

$$\sum_{j=1}^{n} D_{jk}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk}\ , \quad \forall k = [1,n] \quad .$$

Изменим порядок суммирования (то есть выполним перегруппировку слагаемых) в левой части этого равенства:

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}D_{jk})\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk}.$$

Но выражение в круглых скобках равно $\Delta \cdot \delta_{ik}$ (по теореме 6.3.2.), поэтому, учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} = \Delta_k$ и $\Delta\sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\xi_i = \Delta\xi_k$, получаем $\Delta\xi_k = \Delta_k$, $k = [1,n]$.

Или, окончательно, $\xi_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = [1,n]$.

2°. Докажем теперь, что в условиях теоремы набор чисел $\{ \xi_i = \frac{\Delta_k}{\Delta}, i = [1,n] \}$ есть решение данной системы линейных уравнений. Убедимся в этом, подставив значения ξ_i в левые части исходной системы линейных уравнений (6.4.1.).

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} (\sum_{k=1}^{n} \beta_k D_{ki}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} D_{ki}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{kj} \Delta = \beta_j \,, \quad j = [1,n].$$

Для получения последнего равенства мы снова изменили порядок суммирования и воспользовались теоремой 6.3.2.

Теорема доказана.

§5.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $\| A \|$ размера $m \times n$. Пусть $1 \le k \le \min\{m,n\}$. Выберем k фиксированных столбцов и строк, на пересечении которых стоит матрица минора порядка k.

Пусть при данном k все миноры k-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k, поскольку каждый минор $(k+1)$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k. (См. следствие 6.3.1.)

Определение 6.5.1.	Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы $\| A \|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\operatorname{rg} \| A \|$.

Определение 6.5.2.	Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

Определение 6.5.3.	Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Рассмотрим n m-компонентных столбцов вида:

$$\left\| a_1 \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{matrix} \right\|;\ \left\| a_2 \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{matrix} \right\|; \dots;\ \left\| a_n \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{matrix} \right\| \text{ и столбцы } \left\| b \right\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{matrix} \right\|;\ \left\| o \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сложения и умножения на число, то можно говорить, что столбец $\|b\|$ есть *линейная комбинация* столбцов $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что $\|b\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \|a_i\|$.

§5.6. Системы m линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{cases},\ \text{или}\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j,\quad j = [1, m] \qquad (6.6.1.)$$

или же, в матричной форме $\|A\|\|x\| = \|b\|$, где матрица $\|A\|$ размера $m \times n$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\|x\|$ и $\|b\|$ соответственно компоненты ξ_i, $i = [1, n]$, и β_j, $j = [1, m]$.

Определение 6.6.1.	Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0\}$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений (6.6.1.), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем верные равенства. Частное решение системы линейных уравнений может также быть записано в виде столбца $\left\| x^0 \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{matrix} \right\|$. Совокупность *всех* частных решений системы линейных уравнений (6.6.1.) назовем *общим решением* системы (6.6.1.)

Определение 6.6.2.	Если система (6.6.1.) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае - *несовместной* системой уравнений.

Определение 6.6.3.

Матрица $\|A\|=\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}$ называется *основной* матрицей системы (6.6.1.), а матрица $\|A\mid b\|=\left\|\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right\|$ - *расширенной* матрицей этой системы.

Определение 6.6.4.

Система (6.6.1.) называется *однородной*, если $\beta_j = 0$, $\forall j = [1, m]$, в противном случае - *неоднородной* системой уравнений.

Теорема 5.6.1. (Кронекера-Капелли)

Для того чтобы система (5.6.1.) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.

При дистанционном образовании приймем данную теорему без доказательств.