Раздел 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§4.4. Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана *ортонормированная* система координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ и некоторая линия L.

Определение 4.4.1. В соответствии с определениями 4.1.2. и 4.1.3. будем говорить, что линия L является *алгебраической линией второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4.4.1.)$$

где числа A, B и C не равны нулю одновременно $(|A|+|B|+|C|>0)$, а x и y суть координаты радиус-вектора точки, лежащей на линии L.

Поскольку коэффициенты уравнения 4.4.1. зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно предварительно перейти к той системе координат, в которой запись уравнения линии оказывается наиболее простой.

Если ввести обозначение $\Delta=\det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C\end{Vmatrix}=AC-B^2$, то будет справедлива

	Пустые множества	*Точки*	*Совпадающие прямые*	*Несовпадающие прямые*	*Кривые*
$\Delta>0$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$			*Эллипс* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$
$\Delta<0$				$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$	*Гипербола* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$
$\Delta=0$	$y'^2=-a^2,\ \forall x'$		$y'^2=0,\ \forall x'$	$y'^2=a^2,\ \forall x'$	*Парабола* $y'^2=2px'$

§4.5. Поверхности второго порядка в пространстве

Пусть дана *ортонормированная* система координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ в пространстве.

Определение 4.5.1.	В соответствии с определениями 4.2.2. и 4.2.3. будем говорить, что поверхность S является *алгебраической поверхностью второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид $$\begin{aligned}&A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{23}yz+\\&+2A_{14}x+2A_{24}y+2A_{34}z+A_{44}=0\quad,\end{aligned}\qquad(4.5.1.)$$ где числа A_{11}; A_{22}; A_{33}; A_{12}; A_{13}; A_{23} не равны нулю одновременно, а x, y и z суть координаты радиус-вектора точки, лежащей на поверхности S.

Как и в плоском случае, коэффициенты уравнения (4.5.1.) зависят от выбора системы координат, поэтому при исследовании свойств поверхностей второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой запись уравнения поверхности оказывается наиболее простой.

Пустые множества	*Точки, прямые и плоскости*	*Цилиндры и конусы*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{b^2}=-1$ $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1;\quad\forall z'$ $x'^2=-a^2\ ;\quad\forall\, y',z'$	*Изолированная точка* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{b^2}=0$ *Прямая* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0;\quad\forall z'$ *Пара пересекающихся плоскостей* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0;\quad\forall z'$ *Пара параллельных или совпадающих плоскостей* $x'^2=a^2\quad x'^2=0;\quad\forall\, y',z'$	*Эллиптический цилиндр* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1;\quad\forall z'$ *Гиперболический цилиндр* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1;\quad\forall z'$ *Параболический цилиндр* $y'^2=2px'\ ;\quad\forall z'$ *Конус* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0$

Невырожденные поверхности

Эллипсоиды	*Параболоиды*	*Гиперболоиды*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$	*Эллиптический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=2z'$ *Гиперболический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=2z'$	*Однополостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$ *Двуполостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$

причем $a>0$, $b>0$, $c>0$, $p>0$.

§4.6. Альтернативные системы координат

В ряде практических приложений оказывается целесообразным использование систем координат, отличных от декартовой.

Примером альтернативной системы координат на плоскости является *полярная система координат*.

Положение точки на плоскости в этой системе координат задается парой упорядоченных чисел $\{\rho,\varphi\}$, где $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, $\varphi = \angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$, удовлетворяющих ограничениям $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

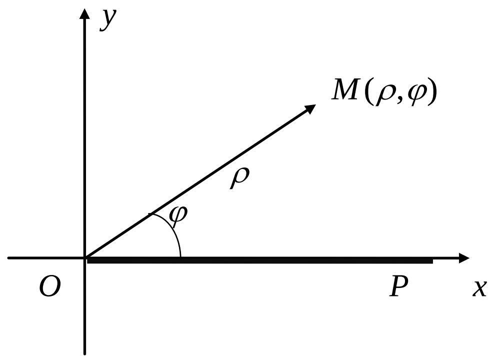

Рисунок 4.6.1.

Точка *O* называется *полюсом*, а луч *OP* - *полярной осью*. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки (рис. 4.6.1.). Для полюса этот угол не определяется.

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к полярной и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

Использование полярной системы координат позволяет упростить описание объектов, обладающих точечной симметрией.