Раздел 2

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§2.1. Ортогональное проектирование

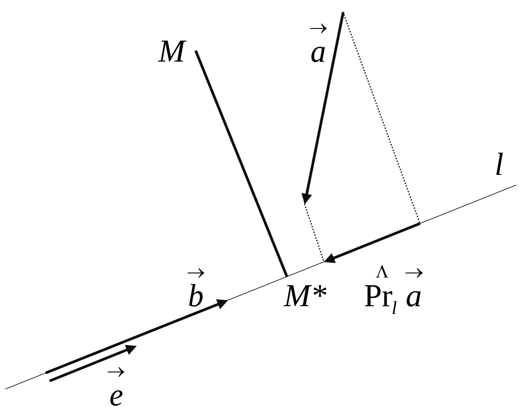

Рисунок 2.1.1.

Определение 2.1.1.	Прямую l, с расположенным на ней ненулевым вектором $\vec{b}$, будем называть *осью*. Вектор $\vec{b}$ называется *направляющим* вектором оси l.
Определение 2.1.2.	Пусть дана точка M , не лежащая на оси l , тогда основание перпендикуляра, опущенного из M на ось l - точку M^* будем называть *ортогональной проекцией* точки M на ось .

Примером оси может служить *ось координат* - прямая, проходящая через начало координат, направляющим вектором которой служит один из базисных векторов.

Определение 2.1.3.	Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется вектор $\hat{\mathrm{Pr}}_l \vec{a}$, лежащий на оси l, начало которого есть ортогональная проекция начала вектора $\vec{a}$ на ось l, а конец - ортогональная проекция конца вектора $\vec{a}$ [1]).

[1]) Верхний символ $\wedge$ будет использоваться для условного обозначения различного рода операций, например: проектирования, поворота, отражения, дифференцирования и т.д.

Выполним нормировку направляющего вектора $\vec{b}$, то есть заменим его на вектор $\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ и рассмотрим нормированный базис $\{\vec{e}\}$ на оси *l*. (Рис. 2.1.1.)

Определение 2.1.4.	*Численным значением* ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l называется координата вектора $\widehat{\Pr}_l \vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$.
Определение 2.1.5.	*Углом* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина наименьшего из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал.

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l обозначим как $\text{Пр}_l\,\vec{a}$. Из рис. 2.1.2. очевидно, что $\text{Пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где φ есть угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$.

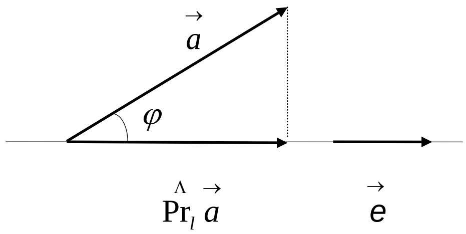

Рисунок 2.1.2.

Свойства ортогональных проекций

1.1°. **Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов**

$$\widehat{\Pr}_l (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \widehat{\Pr}_l \vec{a}_1 + \widehat{\Pr}_l \vec{a}_2 .$$

Данное свойство иллюстрирует рис. 2.1.3.

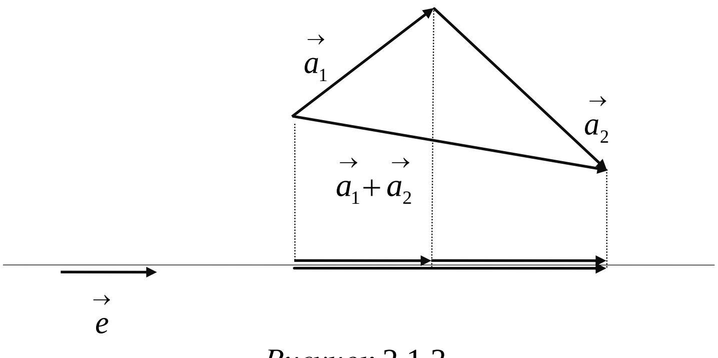

Рисунок 2.1.3.

1.2°. **Если вектор умножить на вещественное число, то его проекция также умножится на это число**

$$\hat{\Pr}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \hat{\Pr}_l \vec{a}.$$

Заметим, что свойства 1.1° и 1.2° можно объединить в следующее утверждение:

Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации проекций

$$\hat{\Pr}_l(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \hat{\Pr}_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \hat{\Pr}_l \vec{a}_2.$$

Справедливость свойств 1° и 2° вытекает из определения операции ортогонального проектирования и правил действия с векторами.

Свойства численных значений ортогональных проекций

$$2.1°.\ \text{Пр}_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Пр}_l \vec{a}_1 + \text{Пр}_l \vec{a}_2;$$

$$2.2°.\ \text{Пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{Пр}_l \vec{a}.$$

Или, объединяя 2.1° и 2.2°,

$$\text{Пр}_l(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \text{Пр}_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \text{Пр}_l \vec{a}_2.$$

Отметим, что эти равенства следуют из свойств ортогональных проекций и свойств координат векторов.

§2.2. Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение 2.2.1.	*Скалярным произведением* ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В случае, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $(\vec{a},\vec{b})$. По определению: $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где φ - угол между векторами-сомножителями. При этом, согласно определению 2.1.5., $0 \le \varphi \le \pi$.

Заметим также, что, если $\vec{b} \ne \vec{o}$, то справедливо равенство $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\ \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения

1°. $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ при $\vec{a} \ne \vec{o}$ и $\vec{b} \ne \vec{o}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *взаимно ортогональны*;

2°. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ (*коммутативность*). Следует из определения скалярного произведения и свойств косинуса);

3°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}) = (\vec{a}_1,\vec{b}) + (\vec{a}_2,\vec{b})$ (*дистрибутивность*).

Доказательство:

Если $\vec{b} = \vec{o}$, то 3° очевидно. Пусть $\vec{b} \ne \vec{o}$, тогда

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}) = |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2) = |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}_1 + |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}_2 = (\vec{a}_1,\vec{b}) + (\vec{a}_2,\vec{b}).$$

Свойство доказано.

4°. $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$;

5°. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \ge 0 \ \forall\vec{a}$; $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;

(заметим также, что условия $(\vec{a},\vec{a}) = 0$ и $\vec{a} = \vec{o}$ равносильны);

6°. При $\vec{a} \ne \vec{o}$ и $\vec{b} \ne \vec{o}$ $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$.

§2.4. Векторное произведение векторов и его свойства

Определение 2.4.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *правой*, если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки. В противном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *левой*.

Определение 2.4.2. *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что

1°. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.

3°. Тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $[\vec{a}, \vec{b}]$. Из определения 2.4.2. следует, что

1°. $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Свойства векторного произведения

1°. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативность, следует из определения 2.4.2. и нечетности функции $\sin\varphi$)

2°. $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$ (следует из определения векторного произведения и того факта, что векторы $[\lambda\vec{a},\vec{b}]$ и $[\vec{a},\vec{b}]$ ортогональны одной и той же плоскости при неколлинеарных $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\lambda\neq 0$).

3°. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (дистрибутивность).

§2.6. Смешанное произведение

Определение 2.6.1.	*Смешанным* (или *векторно-скалярным*) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаемым как ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), называется число ([$\vec{a}$, $\vec{b}$], $\vec{c}$).

Свойства смешанного произведения

Для смешанного произведения справедливы тождества:

1°. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

2°. $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

3°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$,

справедливость которых следует из определения смешанного произведения и теоремы 2.6.1.

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара коллинеарных векторов.

§2.8. Двойное векторное произведение

Определение 2.8.1.	*Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$.

Для ряда задач оказывается полезным применение формулы

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}),$$