Раздел 3

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§3.1. Прямая на плоскости

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L, проходящая через точку $\vec{r}_0$ с лежащим на ней *ненулевым* вектором $\vec{a}$.

Определение 3.1.1. Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* прямой L.

Теорема 3.1.1. **Множество радиус-векторов точек на прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$, где τ - произвольный вещественный параметр.**

Теорема 3.1.3. **Всякое уравнение вида $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.**

Доказательство:

Пусть дано уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$. Выберем пару чисел x_0 и y_0 таких, что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычитая почленно два эти равенства, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Возьмем точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ и вектор $\vec{a} = \begin{Vmatrix} -B \\ A \end{Vmatrix}$. По теореме 3.1.2. имеем, что прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0$ в направлении вектора $\vec{a}$, имеет уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Следовательно, исходное уравнение есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

§3.2. Формы задания прямой на плоскости

В произвольной декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1°. *Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки* $\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$ *и* $\vec{r}_2 = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Vmatrix}$

Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{Vmatrix}$, то ее уравнение в векторной форме будет иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ или $\vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2$.

Соответственно в координатах, исключив параметр τ, получим одну из следующих формул:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$$

$$y = y_1; \quad \forall x, \quad \text{если} \quad y_2 = y_1$$

$$x = x_1; \quad \forall y, \quad \text{если} \quad x_2 = x_1 \quad .$$

Заметим, что эти три случая могут быть описаны условием

$$\det \begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix} = 0 .$$

Определение 3.2.1. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* прямой L .

3°. *Нормальное уравнение прямой*

Рассмотрим скалярное уравнение прямой в *ортонормированной* системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$ и преобразуем его, разделив обе части на $\sqrt{A^2+B^2}$. Подставляя обозначения

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \rho = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

получим так называемую *нормальную* форму записи уравнения

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + \rho = 0.$$

Геометрический смысл параметров ρ и φ ясен из следующего рис. 3.2.2.

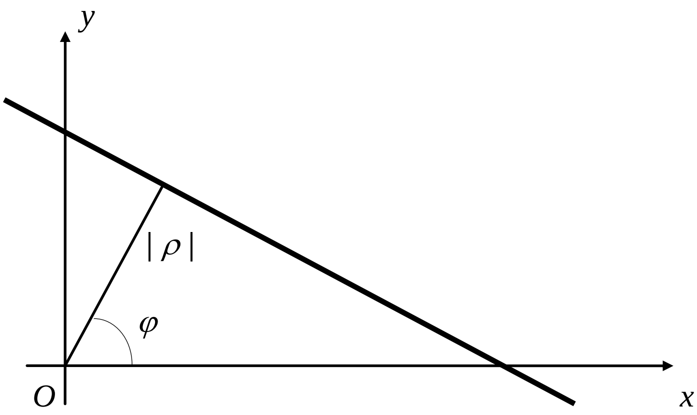

Рисунок 3.2.2.

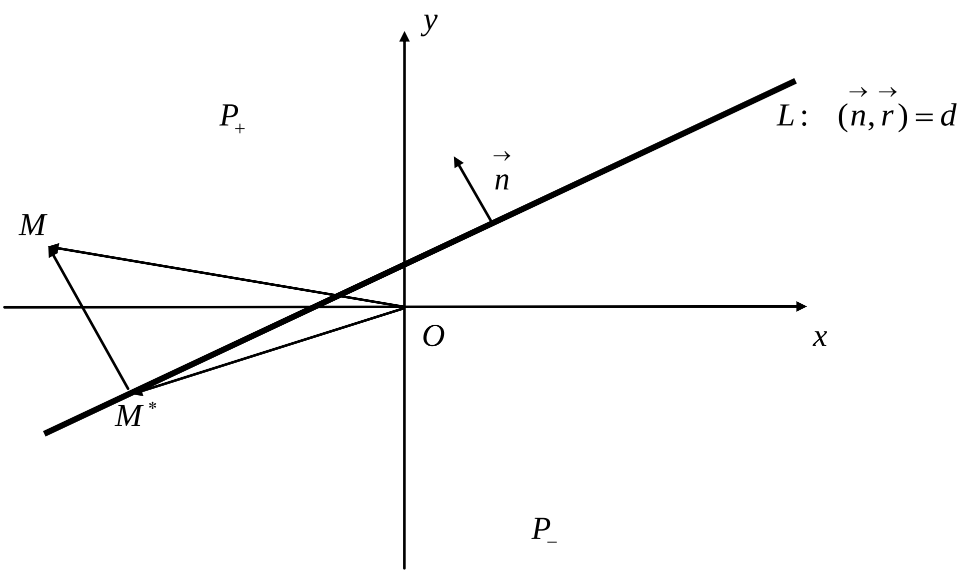

Рисунок 3.2.3.

§3.3. Плоскость в пространстве

Теорема 3.3.2. **Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad |A| + |B| + |C| > 0\,.$$

Доказательство:

Условие компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в координатной форме имеет, в силу теоремы 1.6.3., вид

$$\det\begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{Vmatrix} = 0\,.$$

Откуда $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или, окончательно, $Ax + By + Cz + D = 0$, где числа A, B и C находятся по теореме 1.1.1. и равны соответственно

$$A = \det\begin{Vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{Vmatrix}\;;\quad B = -\det\begin{Vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{Vmatrix}\;;\quad C = \det\begin{Vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{Vmatrix}\;,$$

а $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, и таким образом, мы получили, что уравнение плоскости есть уравнение первой степени.

Условие невозможности одновременного равенства нулю чисел A, B и C вытекает из неколлинеарности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и следствия 2.5.1.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.3. **Всякое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$ в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости.**

Определение 3.3.2. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$.

Определение 3.3.3. Вектор $\left\| \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \right\|$ называется *главным вектором* плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$.

§3.4. Формы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в некоторой декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

1°. *Уравнение прямой в параметрической форме*

Пусть точка с радиус-вектором $\vec{r} = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|$ лежит на прямой в пространстве, имеющей ненулевой направляющий вектор $\vec{a} = \left\| \begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix} \right\|$ и проходящей через точку $\vec{r}_0 = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\|$, тогда из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ следует, что уравнение прямой в пространстве должно иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$

2°. *Уравнение прямой в канонической форме*

Если исключить параметр τ из скалярной записи уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \\ z = z_0 + \tau a_z \end{cases},$$

то получается так называемое *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

Подсказки для реализаций моделей:

Геометрическое условие	**Возможная векторная форма представления**
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ 2°. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a} = \lambda [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$. 2°. $[\vec{a}, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] = \vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$	$(\vec{a}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$
Совпадение прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	1°. Существуют $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ такие, что $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ и $\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02} = \mu \vec{a}_1$ 2°. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}$ и $[\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1] = \vec{o}$

Пересечение прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$
Условие скрещивания прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0$.

Таблица 3.5.1. Относительная ориентация прямых в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\varphi\vec{p}_1+\theta\vec{q}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}_2+\theta\vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1,\vec{q}_1]=\lambda[\vec{p}_2,\vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)\neq 0$. 2°. $[[\vec{p}_1,\vec{q}_1],[\vec{p}_2,\vec{q}_2]]=\vec{o}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)\neq 0$.
Совпадение плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\varphi\vec{p}_1+\theta\vec{q}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}_2+\theta\vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1,\vec{q}_1]=\lambda[\vec{p}_2,\vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)=0$. 2°. $[[\vec{p}_1,\vec{q}_1],[\vec{p}_2,\vec{q}_2]]=\vec{o}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)=0$.
Ортогональность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\varphi\vec{p}_1+\theta\vec{q}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}_2+\theta\vec{q}_2$	$([\vec{p}_1,\vec{q}_1],[\vec{p}_2,\vec{q}_2])=0$.
Параллельность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$ и $(\vec{n},\vec{r})=d$	$(\vec{p},\vec{q},\vec{n})=0$, при условии $(\vec{n},\vec{r}_0)\neq d$.
Совпадение плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$ и $(\vec{n},\vec{r})=d$	$(\vec{p},\vec{q},\vec{n})=0$, при условии $(\vec{n},\vec{r}_0)=d$.
Ортогональность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$ и $(\vec{n},\vec{r})=d$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $[\vec{p},\vec{q}]=\lambda\vec{n}$. 2°. $[[\vec{p},\vec{q}],\vec{n}]=\vec{o}$.

Таблица 3.5.2. Относительная ориентация плоскостей в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существуют $\lambda;\ \mu;\ \lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{a}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})\neq 0$. 2°. $\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{p},\ \vec{q})=0\\(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\ \vec{p},\ \vec{q})\neq 0\end{cases}$.
Принадлежность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существуют $\lambda;\ \mu;\ \lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{a}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})=0$. 2°. $\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{p},\ \vec{q})=0\\(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\ \vec{p},\ \vec{q})=0\end{cases}$.
Ортогональность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}=\lambda[\vec{p},\ \vec{q}]$. 2°. $[\vec{a},[\vec{p},\ \vec{q}]]=\vec{o}$.
Параллельность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	$(\vec{a},\ \vec{n})=0$, при условии $(\vec{n},\vec{r}_0)\neq d$.
Принадлежность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	$\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{n})=0\\(\vec{r}_0,\ \vec{n})=d\end{cases}$.
Ортогональность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ к плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}=\lambda\vec{n}$. 2°. $[\vec{a},\vec{n}]=\vec{o}$.

Ортогональность прямой $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$ и плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d$	1°. Существуют λ; μ; $\lvert\lambda\rvert + \lvert\mu\rvert > 0$ такие, что $\vec{n} = \lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2$. 2°. $[\vec{n}, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] = \vec{o}$.

Таблица 3.5.3. Относительная ориентация прямой и плоскости в пространстве