§1.1. Матричные объекты

Аналитическое описание геометрических фигур и тел, равно как и операций с ними, может быть в большом числе случаев упрощено за счет использования специального математического объекта, называемого *матрицей*.

Определение 1.1.1.	*Матрицей размера* $m{\times}n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, входящие в описание матрицы, называемые ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце, как α_{ij} [1]).

Определение 1.1.2.	Числа m , n и $m{\times}n$ называются *размерами* матрицы.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, как: *матрица с элементами* α_{ij}; $i=[1,m]$; $j=[1,n]$, или же в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} ; \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} ; \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

из которых мы будем использовать последнюю. Если же нам потребуется *неразвернутое* представление матрицы, то мы будем ее записывать в виде $\left\| \alpha_{i\,j} \right\|$ или просто $\left\| A \right\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение 1.1.3.	Если $m = n$, то матрица называется *квадратной, порядка* n. Матрица размера $m{\times}1$ называется m-мерным (или m-компонентным) *столбцом*. Матрица размера $1{\times}n$ называется n-мерной (или n-компонентной) *строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\left\| \alpha_{1\,j} \right\|$ или $\left\| \beta_{i1} \right\|$, неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов принимают вид $\left\| \alpha_{j} \right\|$ или, соответственно, $\left\| \beta_{i} \right\|$. В этих случаях, разумеется, необходимо явно указывать, о чем идет речь: о строке или о столбце.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов, имеют специальные названия и обозначения.

Определение 1.1.4.	Квадратная матрица, для которой $\alpha_{i\,j} = \alpha_{j\,i}\,,\quad \forall i, j = [1, n]$, называется *симметрической*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу будем обозначать $\left\| O \right\|$. Квадратная матрица порядка n вида $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$ называется *единичной*. Единичную матрицу принято обозначать $\left\| E \right\|$.

Определение 1.1.5. Две матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ называются *равными* (обозначается: $\|A\|=\|B\|$), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$, $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$.

Определение 1.1.6. Матрица $\|C\|$ называется *суммой матриц* $\|A\|$ *и* $\|B\|$ (обозначается: $\|C\|=\|A\|+\|B\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$, $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$, где числа γ_{ij} , $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$ являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.

Определение 1.1.7. Матрица $\|C\|$ называется *произведением числа λ на* матрицу $\|A\|$ (обозначается: $\|C\|=\lambda\|A\|$), если матрицы $\|A\|$ и $\|C\|$ одинаковых размеров и $\gamma_{ij}=\lambda\alpha_{ij}$, $\forall i=[1,m]$, $\forall j=[1,n]$.

Отметим, что умножать на число можно матрицу любого размера.

Замечание: в качестве всех или некоторых элементов матрицы возможно использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.

Определение 1.1.8. *Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования.

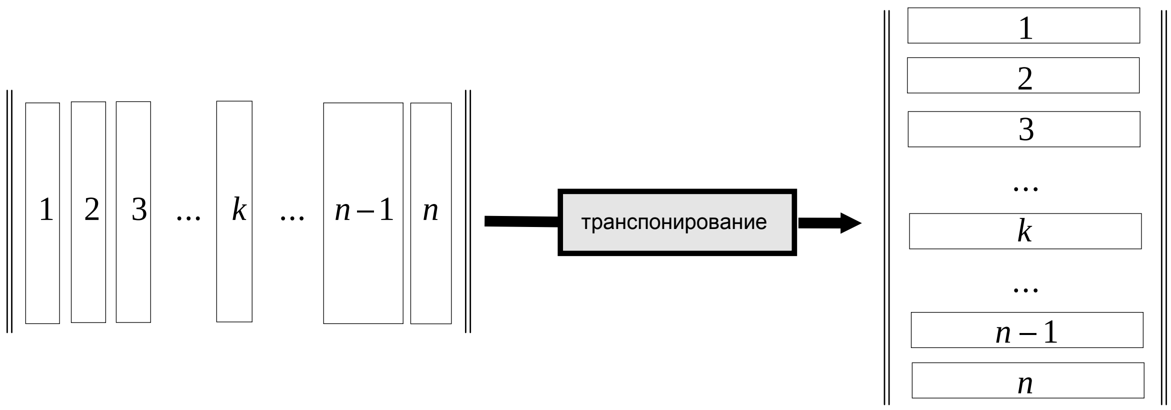


Рисунок 1.1.1.

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы $\| A \|$, обозначается $\| A \|^{\mathrm{T}}$, при этом (см. рис.1.1.1.)

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

то есть для элементов транспонированной матрицы $\| A \|^{\mathrm{T}}$ при $\forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$ верно равенство: $\alpha^{\mathrm{T}}_{i\,j} = \alpha_{j\,i}$.

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1{\times}m$ в столбец размера $m{\times}1$ и наоборот.

Детерминанты (определители) квадратных матриц 2-го и 3-го порядка

Для квадратных матриц существует специальная числовая характеристика, называемая *детерминантом* (или *определителем*) и обозначаемая как $\det \| A \|$ [1]). Изучение свойств определителей квадратных матриц n-го порядка будет выполнено в разделе 6, здесь же ограничимся рассмотрением определителей квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

Определение 1.1.9. *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы 2-го порядка $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ называется число $\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Определение 1.1.10. *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы 3-го порядка $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}$ называется число

[1]) Детерминант квадратной матрицы также часто обозначают при помощи одинарных вертикальных ограничителей |...|. Мы не будем использовать этот вид обозначения, чтобы избежать конфликта с представлением абсолютных величин, модулей, длин и норм.

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - $$
$$- \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} \quad .$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.1.1.

Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} =$$
$$= \alpha_{11} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} + \alpha_{13} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{Vmatrix} \quad ,$$

называемой *разложением определителя по первой строке*.

Доказательство:

Данная формула проверяется непосредственно при помощи определений 1.1.9. и 1.1.10.

Замечания:

1°. Формулы, аналогичные приведенной в формулировке теоремы 1.1.1., могут быть получены как для каждой из остальных строк матрицы, так и для любого из ее столбцов.

2°. Иногда подсчет значения определителя матрицы третьего порядка удобнее выполнить по следующему правилу:

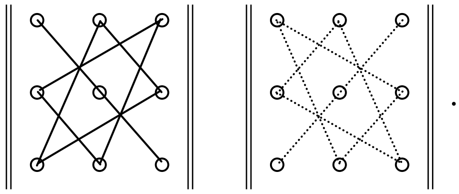


Рисунок 1.1.2.

каждое слагаемое в определении 1.1.10. есть произведение некоторой тройки элементов матрицы, причем элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком "плюс", соединены на рис.1.1.2. сплошными линиями, элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком "минус", - штриховыми линиями.

Непосредственная проверка показывает, что из определений 1.1.9. и 1.1.10. вытекает

Следствие 1.1.1. **При транспонировании квадратных матриц второго или третьего порядка их определители не меняются.**

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема 1.1.2. (Крамера) **Для того чтобы система линейных уравнений** $\begin{cases}\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2=\beta_1\\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2=\beta_2\end{cases}$ **имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы** $\det\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix}\neq 0$**.**

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть данная система линейных уравнений имеет единственное решение - упорядоченную пару чисел $\{\xi_1,\xi_2\}$, тогда должны быть справедливыми следующие из ее уравнений соотношения:

$$\xi_1(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})=(\beta_1\alpha_{22}-\beta_2\alpha_{12})\quad;\quad\xi_2(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})=(\beta_1\alpha_{21}-\beta_2\alpha_{11})$$

$$\text{или}\quad\xi_1\Delta=\Delta_1\quad;\quad\xi_2\Delta=\Delta_2,\quad\text{где}$$

$$\Delta=\det\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix};\quad\Delta_1=\det\begin{Vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12}\\ \beta_2 & \alpha_{22}\end{Vmatrix};\quad\Delta_2=\det\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \beta_2\end{Vmatrix}.$$

Равенства $\xi_1\Delta=\Delta_1$; $\xi_2\Delta=\Delta_2$ не верны при $\begin{cases}\Delta\ =\ 0\\ \Delta_1\neq 0\end{cases}$ или при $\begin{cases}\Delta\ =\ 0\\ \Delta_2\neq 0\end{cases}$. При $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ коэффициенты уравнений исходной системы *пропорциональны*, и тогда у нее имеется бесчисленное множество решений - пар чисел $\{\xi_1,\xi_2\}$ таких, что $\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2=\beta_1$. Поэтому из условия существования и единственности решения следует, что $\Delta\neq 0$.

Докажем достаточность.

Если $\Delta \neq 0$, то исходная система линейных уравнений имеет решение $\{\xi_1, \xi_2\}$, однозначно определяемое значениями параметров $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ по формулам $\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема доказана.

§1.2. Направленные отрезки

Определение 1.2.1.

Отрезок прямой, концами которого служат лежащие на ней точки A и B, называется *направленным отрезком*, если указано, какая из этих двух точек является *началом* и какая - *концом* отрезка.

Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* направленным отрезком.

Направленный отрезок будем изображать символически $\overline{AB}$, полагая, что точка A является началом отрезка, а точка B - его концом. Иногда направленный отрезок обозначается просто как $\bar{a}$. Длина отрезка обозначается как $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$ соответственно.

Действия с направленными отрезками

Определение 1.2.2.

Два ненулевых направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ при $A \neq C$ называются *равными*, если они

- лежат на параллельных прямых;
- точки B и D лежат по одну сторону от прямой, проходящей через точки A и C;
- имеют равные длины, т.е. $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ [2]).

Кроме того, все нулевые отрезки считаются равными друг другу, а в случае $A = C$ отрезки равны, если и $B = D$.

[2]) В рамках данного курса предполагается знакомство читателя с основными понятиями, аксиомами и теоремами элементарной геометрии, и потому они здесь не рассматриваются.

Заметим, что в силу определения 1.2.2. параллельный перенос направленных отрезков их не меняет.

Пусть даны два направленных отрезка $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Определение 1.2.3.	Совместим начало отрезка $\bar{b}$ с концом $\bar{a}$ (то есть построим направленный отрезок $\overline{b'}$ равный $\bar{b}$, начало которого совпадает с концом отрезка $\bar{a}$), тогда направленный отрезок $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом $\bar{a}$ и конец с концом $\bar{b}$, называется *суммой направленных отрезков* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ [1]).

Это определение иногда называют *правилом треугольника*. (Рис. 1.2.1.)

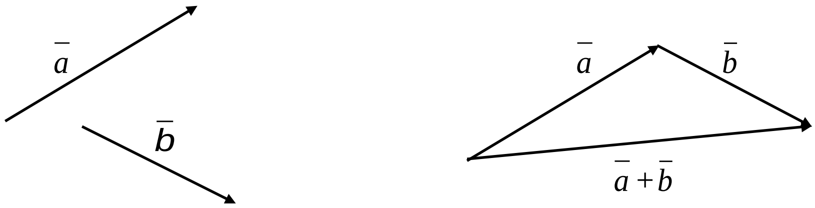


Рисунок 1.2.1.

Отметим, что для операции сложения направленных отрезков:

1°. Обобщение правила треугольника на любое число слагаемых носит название *правила замыкающей*, смысл которого ясен из рис. 1.2.2.

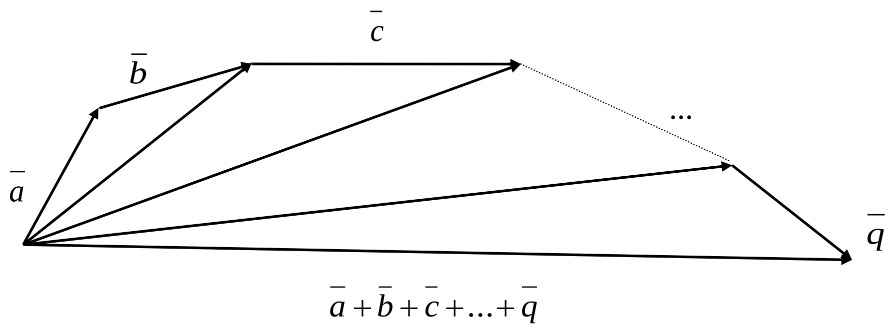


Рисунок 1.2.2.

---

[1]) Для операции замены направленного отрезка на равный, но не совпадающий с ним направленный отрезок будем употреблять термин “*параллельный перенос направленного отрезка*”.

2°. Операция сложения направленных отрезков может быть выполнена по *правилу параллелограмма*, равносильному определению 1.2.3. (см. рис. 1.2.3.).

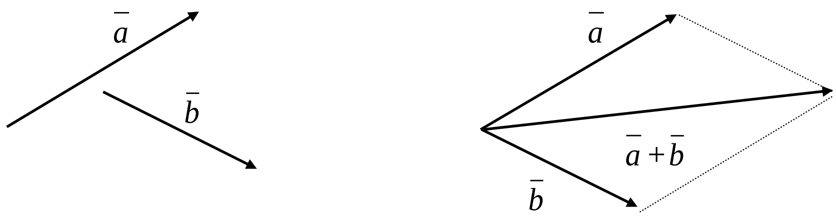


Рисунок 1.2.3.

3°. Разностью $\overline{a}-\overline{b}$ направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется направленный отрезок $\overline{c}$, удовлетворяющий равенству $\overline{a}=\overline{b}+\overline{c}$.

4°. Любой направленный отрезок при сложении с нулевым не изменяется.

Определение 1.2.4.

Под *произведением* $\lambda\overline{a}$ *направленного отрезка* $\overline{a}$ *на число* λ понимают:

при $\lambda = 0$

нулевой направленный отрезок,

при $\lambda \neq 0$

направленный отрезок, для которого

длина равна $|\lambda|\,|\overline{a}|$;

направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda > 0$,

направление противоположно направлению $\overline{a}$, если $\lambda < 0$.

§1.3. Определение множества векторов

Определение 1.3.1.

Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены описанные в §1.2. операции:

- сравнения (опр. 1.2.2.);
- сложения (опр. 1.2.3.);
- умножения на вещественное число (опр. 1.2.4.),

называется *множеством векторов*.

Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с верхней стрелкой, например $\vec{a}$.

Нулевой вектор обозначается символом $\vec{o}$.

Теорема 1.3.1.

Операции сложения и умножения на вещественное число на множестве векторов обладают свойствами:

1°. Коммутативности

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

2°. Ассоциативности

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c};$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a};$$

3°. Дистрибутивности

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любых вещественных чисел λ и μ.

Данные свойства следуют из определения множества векторов и нуждаются в доказательстве. В качестве примера приведем

Доказательство свойства коммутативности:

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Совместим начала этих векторов и построим на них параллелограмм *ABDC*. (Рис. 1.3.1.)

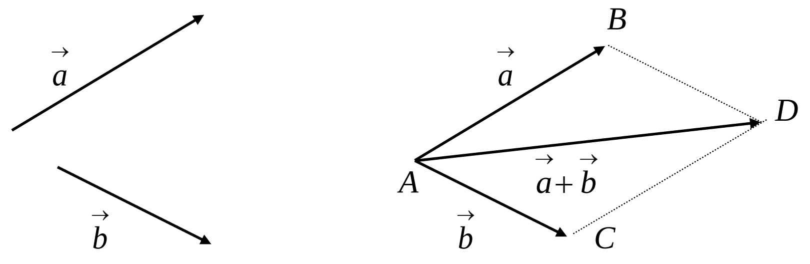


Рисунок 1.3.1.

Поскольку у параллелограмма противолежащие стороны параллельны и имеют равные длины, то $\vec{CD}=\vec{a}$; $\vec{BD}=\vec{b}$, но тогда, по правилу треугольника, из треугольников *ACD* и *ABD* следует, что $\vec{AD}=\vec{b}+\vec{CD}$; $\vec{AD}=\vec{a}+\vec{BD}$, то есть $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Свойство 1° теоремы 1.3.1. доказано.

Замечания об определении вектора

1°. Иногда вектор определяют просто как объект, характеризуемый числовой величиной и направлением. Хотя формально такой подход и допустим, он может оказаться причиной некоторых проблем, суть которых иллюстрируется следующим примером.

Поток автомобилей на конкретной дороге является объектом, для характеристики которого нужно указать величину (число проходящих за единицу времени автомашин) и направление. Предположим, что этот объект векторный (в смысле определения 1.3.1.), и рассмотрим перекресток трех дорог, показанный на рис. 1.3.2., на котором сливаются два потока автомобилей по 500 автомашин в час каждый.

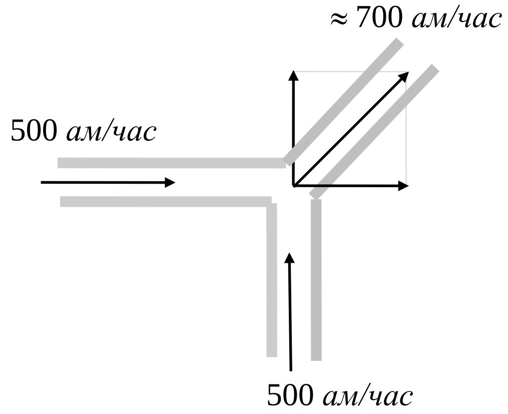


Рисунок 1.3.2.

Если суммировать потоки как векторы, то вместо очевидного результата 1000 ам./час мы получим (по правилу параллелограмма) заведомо бессмысленное значение $500\sqrt{2} \approx 700$ ам./час. Отсюда следует, что хотя поток автомашин характеризуется числовым значением и направлением, но, тем не менее, вектором (в смысле определения 1.3.1.) не является.

2°. С другой стороны, необходимо иметь в виду, что данное определение множества векторов 1.3.1. допускает их дальнейшую, более тонкую дифференциацию. Например, в некоторых физических и технических приложениях различают векторы *полярные* и *аксиальные*. К первым относятся, например, векторы скорости, силы, напряженности электрического поля; ко вторым - векторы момента силы, напряженности магнитного поля. Кроме того, в механике векторы подразделяются на *свободные*, *скользящие* и *закрепленные*, в зависимости от той роли, которую играет точка их приложения.

3°. К заключению о векторной природе тех или иных физических характеристик можно прийти путем рассуждений, основанных на определении 1.3.1. и экспериментальных данных.

Например, пусть некоторая материальная точка A, имеющая электрический заряд, перемещается в пространстве под действием электрического поля. Положение этой точки в пространстве в момент времени τ_0 можно задать исходящим из точки наблюдения и направленным в A вектором $\vec{r}(\tau_0)$, а в момент времени τ - вектором $\vec{r}(\tau)$. Поскольку перемещение $\vec{r}(\tau) - \vec{r}(\tau_0)$ (как разность двух векторов) является вектором, то и скорость движения материальной точки будет вектором в силу определения 1.3.1. Рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вектором является также и ускорение. С другой стороны, согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, и, следовательно, по определению 1.3.1. сила есть вектор. Наконец, принимая во внимание пропорциональность силы, действующей на заряженное тело, и напряженности электрического поля, заключаем, что последняя характеристика также векторная.

§1.4. Линейная зависимость векторов

Вначале введем часто используемые в приложениях, понятия *коллинеарности* и *компланарности* векторов.

Определение 1.4.1.	Два вектора, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Три вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Определение 1.4.2.

Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_i\ ; i = [1, n]$ - некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Если *все* числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю одновременно (что равносильно условию $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| = 0$), то такая линейная комбинация называется *тривиальной*.

Если *хотя бы одно* из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ отлично от нуля (то есть $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| > 0$), то данная линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известно, как зависит значение каждого из слагаемых от его номера, то допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$F(n) + F(n+1) + \ldots + F(N) = \sum_{k=n}^{N} F(k),$$

(читается: "*Сумма* $F(k)$ *по* k *от* n *до* N "), где k - индекс суммирования, n - минимальное значение индекса суммирования, N - максимальное значение индекса суммирования и, наконец, $F(k)$ - общий вид слагаемого.

Пример 1.4.1.

По соглашению о суммировании будут справедливы следующие равенства

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (N-1)^2 + N^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (N-1)^3 + N^3 = \sum_{i=1}^{N} i^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{j=1}^{N} j\right)^2$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(N-1)N} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N-1}{N} .$$

Используя данное соглашение о суммировании, линейную комбинацию $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$ можно записать в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$.

Приведем теперь определение важного понятия *линейной зависимости* системы векторов.

Определение 1.4.3. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}.$$

Определение 1.4.4. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$ следует тривиальность линейной комбинации $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$, то есть, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Иначе говоря, если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независимы, если для любого набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равных нулю одновременно, линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$ не может быть нулевым вектором.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.4.1. **Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.**

Теорема 1.4.2. **Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.**

Теорема 1.4.3. **Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.**

Теоремы 1.4.1. и 1.4.2. предлагаются для самостоятельного доказательства. Здесь же мы рассмотрим подробно теорему 1.4.3., доказав предварительно следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 1.4.1. **Для линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных**.

Доказательство:

Докажем необходимость. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, одновременно не равные нулю, такие, что $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$. Для определенности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$, но тогда

$$\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^{n} (-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}) \vec{a}_k ,$$

что и доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть, для определенности, $\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$, тогда $(-1)\vec{a}_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$, причем $|-1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| > 0$. То есть нетривиальная линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ равна нулевому вектору.

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 1.4.3.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы, то есть существуют три, одновременно не равных нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, таких, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{o}$. Тогда, по лемме 1.4.1. один из векторов есть линейная комбинация двух остальных и, значит, данные три вектора компланарны.

Докажем достаточность в предположении, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны. Пусть даны три компланарных вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Перенесем эти векторы таким образом, чтобы их начала попали в одну точку.

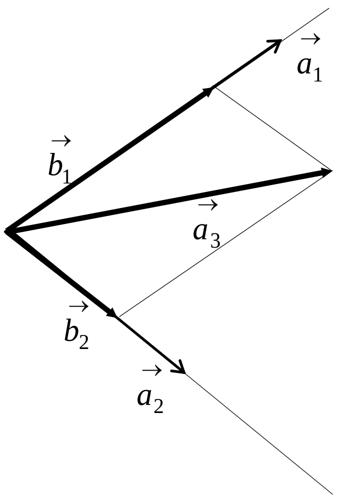


Рисунок 1.4.1.

Через конец вектора $\vec{a}_3$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. При этом получим пару векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ таких, что $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. (Рис. 1.4.1.) Поскольку вектор $\vec{b}_1$ коллинеарен вектору $\vec{a}_1$, а вектор $\vec{b}_2$ коллинеарен вектору $\vec{a}_2$, по теореме 1.4.2. получаем, что $\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$; $\vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2$, но, с другой стороны, имеем $\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$, и векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по лемме 1.4.1., линейно зависимы.

Случай коллинеарных $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

Свойства линейно независимых векторов

1°. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.

2°. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.

3°. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

Теорема 1.4.4.

Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ имеется подмножество линейно зависимых, то и все векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.

Доказательство:

Без ограничения общности можно считать, что линейно зависимы первые $k < n$ векторов (иначе, просто перенумеруем эти векторы), то есть существуют не равные нулю одновременно, числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o} .$$

Построим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$, взяв в качестве первых k коэффициентов числа $\lambda_i,\ i = [1, k]$ и нули в качестве остальных. Тогда получим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} 0 \cdot \vec{a}_i = \vec{o}$.

Теорема доказана.

Следствие 1.4.1.

Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ имеется хотя бы один нулевой, то векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.

§1.5. Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 1.5.1.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.

Базисом в пространстве называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.

Определение 1.5.2.

Базис называется *ортогональным*, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).

Определение 1.5.3.

Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Пространственный базис, составленный из линейно независимых векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, будем обозначать $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Ортогональный или ортонормированный базис условимся обозначать как $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Теорема 1.5.1.

Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$, где α, β, γ - некоторые числа.

Доказательство:

1°. Докажем вначале существование таких чисел.

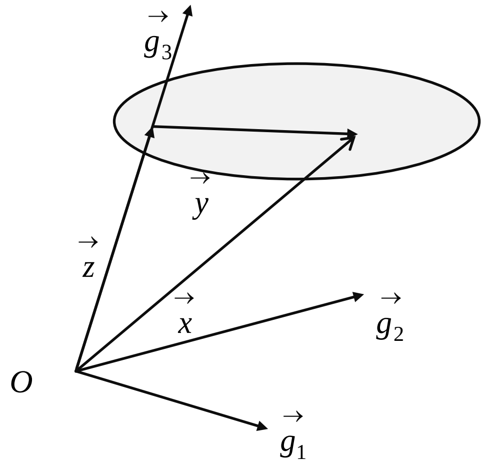


Рисунок 1.5.1.

Совместим начала всех векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и $\vec{x}$ в точке O и проведем через конец вектора $\vec{x}$ плоскость, параллельную плоскости $O, \vec{g}_1, \vec{g}_2$. (Рис. 1.5.1.)

Построим новые векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$, а $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ были коллинеарны, тогда, в силу коллинеарности вектора $\vec{z}$ вектору $\vec{g}_3$, $\vec{z} = \gamma \vec{g}_3$.

Перенеся начало вектора $\vec{y}$ в точку O и рассуждая как при доказательстве теоремы 1.4.3., получим $\vec{y} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$ и, следовательно, $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$, что и доказывает существование разложения.

2°. Докажем единственность разложения по базису. Пусть мы имеем

$$\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3 ,$$

и предположим, что существует другая тройка чисел α', β', γ' таких, что

$$\vec{x} = \alpha' \vec{g}_1 + \beta' \vec{g}_2 + \gamma' \vec{g}_3 .$$

Вычитая почленно эти равенства, получаем

$$(\alpha - \alpha') \vec{g}_1 + (\beta - \beta') \vec{g}_2 + (\gamma - \gamma') \vec{g}_3 = \vec{o} ,$$

где, в силу сделанного предположения о неединственности разложения,

$$|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + |\gamma - \gamma'| > 0$$

Но это означает, что векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно зависимы и, следовательно, не могут быть базисом в силу определения 1.5.1. Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

Определение 1.5.4. Числа α, β, γ - коэффициенты в разложении $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$, называются *координатами* (или *компонентами*) вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Для записи вектора $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$ в координатном представлении используются формы:

1°. $\vec{x}(\alpha;\beta;\gamma)$ 2°. $(\alpha;\beta;\gamma)$ 3°. $\left\| \alpha \quad \beta \quad \gamma \right\|$

4°. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ 5°. $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$,

из которых в дальнейшем мы будем использовать последнюю.

В общем случае утверждение "*вектор* $\vec{x}$ *в базисе* $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *имеет координатное представление* $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$" записывается как $\left\| \vec{x} \right\|_g = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$, но иногда, если это не приводит к неоднозначности толкования, мы будем использовать и сокращенную запись вида $\vec{x} = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$.

Наконец, если вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости может быть представлен как $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$, то его координатная запись имеет вид $\left\| \vec{x} \right\|_g = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$.

§1.6. Действия с векторами в координатном представлении

Поскольку в конкретном базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ каждый вектор находится во взаимно однозначном соответствии с упорядоченной тройкой чисел α, β, γ - своим координатным представлением, то естественным представляется вопрос о том, как выполняются операции с векторами в координатном представлении.

Оказывается, что возможно не только записывать векторы при помощи матриц (столбцов), но и оперировать с ними в матричной форме, поскольку правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

Теорема 1.6.1. **В координатном представлении операции с векторами имеют следующий вид:**

1°. *Сравнение векторов* **Два вектора** $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **и** $\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ **равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления:**

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \vec{y} \right\|_g \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases}.$$

2°. *Сложение векторов* **Координатное представление суммы двух векторов** $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **и** $\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ **равно сумме координатных представлений слагаемых.**

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g .$$

3°. *Умножение векторов на число* **Координатное представление произведения вектора** $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **на число** λ **равно произведению координатного представления вектора** $\vec{x}$ **на это число** λ

$$\left\| \lambda \vec{x} \right\|_g = \lambda \left\| \vec{x} \right\|_g .$$

Доказательство:

Доказательство всех трех пунктов аналогично, поэтому рассмотрим лишь правило сложения векторов в координатной форме.

По свойствам операций сложения и умножения на вещественное число векторов (теорема 1.3.1.) имеем

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3) + (\eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) \right\|_g =$$

$$= \left\| (\xi_1 + \eta_1)\vec{g}_1 + (\xi_2 + \eta_2)\vec{g}_2 + (\xi_3 + \eta_3)\vec{g}_3 \right\|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \left\| \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \right\|_g + \left\| \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3 \right\|_g = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g .$$

Теорема доказана.

Следствие 1.6.1. **Координаты линейной комбинации векторов $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ являются теми же линейными комбинациями соответствующих координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:** $\lambda \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} + \mu \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda\xi_1 + \mu\eta_1 \\ \lambda\xi_2 + \mu\eta_2 \\ \lambda\xi_3 + \mu\eta_3 \end{Vmatrix}$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема 1.6.2. **Для того чтобы два вектора $\vec{x} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Vmatrix}$ на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты в некотором базисе удовлетворяли условию** $\det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{Vmatrix} = 0$.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейно зависимы, тогда в силу леммы 1.4.1. имеет место равенство $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ или, в координатной форме, $\begin{cases} \xi_1 = \lambda\eta_1 \\ \xi_2 = \lambda\eta_2 \end{cases}$. Исключив λ из этих двух скалярных соотношений, получим $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$, но это и означает, что $\det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{Vmatrix} = 0$.

Докажем достаточность.

Пусть $\det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{Vmatrix} = 0$, тогда имеем что $\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}$ при $\eta_1 \neq 0$; $\eta_2 \neq 0$, то есть соответствующие координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пропорциональны, что и доказывает линейную зависимость этих векторов.

Случай $\eta_1\eta_2 = 0$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

Теорема доказана.

Теорема 1.6.3.

Для того чтобы три вектора $\vec{x} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$, $\vec{y} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$ и $\vec{z} = \begin{Vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Vmatrix}$ в пространстве были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты в некотором базисе удовлетворяли условию

$$\det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Доказательство:

Приводится в разделе “*Смешанное произведение векторов*” (см. §2.6.).

Следствие 1.6.2.

Равенства $\det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{Vmatrix} = 0$ и $\det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{Vmatrix} = 0$ соответственно являются необходимыми и достаточными условиями коллинеарности пары векторов на плоскости и компланарности тройки векторов в пространстве.

§1.7. Декартова система координат

Определение 1.7.1. Совокупность базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и точки O, в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *общей декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 1.7.2. Система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, порождаемая ортонормированным базисом, называется *нормальной прямоугольной* (или *ортонормированной*) системой координат.

Если задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\vec{r}$, начало которого находится в точке O, а конец - в точке M.

Определение 1.7.3. Вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 1.7.4. Координаты радиус-вектора точки M называются *координатами точки* M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Проиллюстрируем особенности использования векторного описания геометрических объектов на примере решения следующих задач:

Задача 1.7.1. *В некоторой общей декартовой системе координат* $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *заданы координаты радиус-векторов точек M и N, которые являются началом и концом вектора* $\vec{MN}$. *Требуется найти координаты вектора* $\vec{MN}$.

Решение:

Решение очевидно из рис. 1.7.1. и свойств координат векторов.

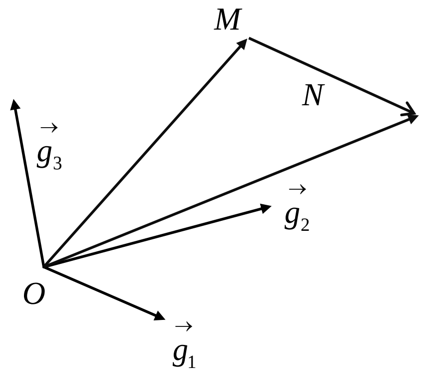


Рисунок 1.7.1.

Пусть $\vec{OM} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ и $\vec{ON} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$. Тогда

$$\vec{OM} + \vec{MN} = \vec{ON} \quad ; \quad \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$$

и окончательно

$$\vec{MN} = \begin{Vmatrix} \eta_1 - \xi_1 \\ \eta_2 - \xi_2 \\ \eta_3 - \xi_3 \end{Vmatrix}.$$

Задача 1.7.2.

В некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *заданы координаты несовпадающих точек* M_1 *и* M_2, *для которых соответственно*

$$\vec{OM}_1 = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} \quad и \quad \vec{OM}_2 = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}.$$

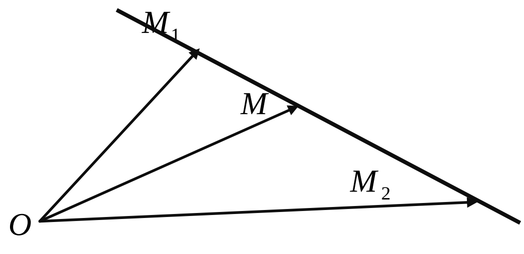
Требуется найти точку M такую, что $\vec{M_1M} = \lambda\, \vec{MM_2}$.

Решение:

Заметим, что λ может принимать любое значение, кроме -1, при котором точка M уходит в бесконечность (Рис. 1.7.2.). Найдем радиус-вектор точки M. Из соотношений в треугольниках OM_1M и OMM_2 получаем

$$\vec{OM}_1 + \vec{M_1M} = \vec{OM} \quad ; \quad \vec{OM} + \vec{MM_2} = \vec{OM}_2 ,$$

но, так как $\vec{M_1M} = \lambda\, \vec{MM_2}$, то



$$\vec{OM} - \vec{OM}_1 = \lambda(\vec{OM}_2 - \vec{OM})$$

и окончательно, $\vec{OM} = \dfrac{1}{1+\lambda}\vec{OM}_1 + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\vec{OM}_2$.

Рисунок 1.7.2.

Радиус-вектор точки M равен $\overrightarrow{OM} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\xi_1 + \lambda\eta_1}{1+\lambda} \\ \dfrac{\xi_2 + \lambda\eta_2}{1+\lambda} \\ \dfrac{\xi_3 + \lambda\eta_3}{1+\lambda} \end{matrix} \right\|$, в силу следствия 1.6.1.

Замечание: к задаче 1.7.2. приводит решение задачи отыскания центра масс системы материальных точек.