5.4.2. ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Наведемо кілька результатів про функціональні ряди, які використовують поняття рівномірної збіжності.

Теорема 5.21. **Нехай функції $f_n(x)$ (n = 1, 2, 3, …) неперервні при $x \in [a, b]$. Якщо функціональний ряд**

$$\boldsymbol{S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$$

збігається рівномірно, то сума ряду $S(x)$ неперервна.

Розглянемо функціональний ряд на [0, 1]

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n=\begin{cases}1 & \text{при}\, x\in[0,1)\\ 0 & \text{при}\, x=1.\end{cases}$$

Хоч члени ряду неперервні, сума ряду є розривною функцією. Отже, ряд збігається нерівномірно.

Теорема 5.22. **Нехай функції $f_n(x)$ (n = 1, 2, 3, …) неперервні на відрізку $[a, b]$. Якщо функціональний ряд $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно, то його можна інтегрувати почленно, тобто**

$$\boldsymbol{\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.}$$

Функціональний ряд

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

збігається рівномірно при $|x| \le q < 1$. Зінтегрувавши рівність на $[0, x]$, знайдемо розклад логарифмічної функції.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots$$

Аналогічно, інтегруючи рівномірно при $|x| \le q < 1$ збіжний ряд

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,$$

дістаємо розклад функції

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1} + \ldots$$

Розглянемо при $x \ge 0$ функціональний ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n^2 e^{-nx} - (n-1)^2 e^{-(n-1)x}),$$

який має частинні суми

$$S_n(x) = xn^2 e^{-nx}.$$

Легко довести, що при $x \ge 0$ ряд збігається і його сума

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{xn^2}{e^{nx}} = 0 \quad (0 \le x).$$

Проінтегруємо частинну суму

$$\int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 xn^2 e^{-nx} dx = \int_0^n te^{-t} dt.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^{\infty} te^{-t} dt = 1.$$

Таким чином, інтеграл від частинної суми збігається до 1, а інтеграл від нульової суми ряду дорівнює нулю.

Функціональний ряд не можна почленно інтегрувати з огляду на нерівномірну збіжність ряду. Справді,

$$\max_{0\le x} S_n(x) = S_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

тобто максимум залишку ряду не прямує до нуля.

Теорема 5.23. **Нехай функції $f_n(x)$ (n = 1, 2, 3, …) неперервні і диференційовні на відрізку [a, b].**

Якщо функціональний ряд

$$\boldsymbol{S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1 + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots} \qquad (4)$$

збігається на відрізку [a; b], а продиференційований ряд

$$\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)+\ldots \qquad (5)$$

збігається рівномірно на [*a*, *b*], то ряд (4) можна почленно диференціювати, тобто $S'(x)=\sigma(x)$.

Функціональний ряд

$$S(x)=\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 4x}{4^3}+\ldots+\frac{\sin x}{n^3}+\ldots$$

можна диференціювати, оскільки продиференційований ряд

$$S'(x)=\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$$

збігається рівномірно.

5.5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Найбільш важливими для прикладних задач є *степеневі ряди,* які мають вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (6)$$

або більш загальний

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+ +a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \qquad (7)$$

Оскільки заміна $x-x_0$ на x зводить ряд виду (7) до ряду виду (6), то далі вивчаємо властивості степеневих рядів виду (6). Коефіцієнти a_n називаються **коефіцієнтами степеневого ряду**.

5.5.1. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

При дослідженні збіжності степеневих рядів використовується теорема Абеля.

Теорема 5.24. **Якщо степеневий ряд (6) збігається при $x = x_1$, $x_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається при $|x| < |x_1|$. Якщо степеневий ряд розбігається при $x = x_2$, то він розбігається при $|x| > |x_2|$.**

Доведення. Якщо степеневий ряд (6) збігається при $x = x_1$, то загальний член ряду прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0.$$

Оскільки збіжна послідовність обмежена, то знайдеться $M > 0$ таке, що при всіх значеннях $n = 0, 1, 2, \ldots$ виконується нерівність

$$\left|a_n x_1^n\right| \le M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Оцінимо члени ряду (6) за абсолютною величиною

$$\left|a_n x^n\right| = \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \cdot \left|a_n x_1^n\right| \le M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Члени ряду (6) мажоруються членами геометричної прогресії зі знаменником $q = \left|\dfrac{x}{x_1}\right|$. Отже, при $q < 1$, тобто при $|x| < |x_1|$ ряд (1) збігається абсолютно.

Друге твердження теореми рівносильне першому.

Оскільки при будь-якому значенні x ряд (6) збігається або розбігається, то існує число R таке, що при $|x| < R$ степеневий ряд (6) збігається, а при $|x| > R$ — розбігається. Величина R називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду. У крайньому разі, коли $R = 0$, степеневий ряд розбігається при будь-якому x. При $|x| = R$ ряд може збігатися або розбігатися.

Для пошуку радіуса збіжності можна використовувати формули, що випливають з ознак збіжності Даламбера і Коші

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{8}$$

Формули (8) придатні для випадку, коли границі існують.

Знайдемо область збіжності степеневого ряду

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}.$$

Для коефіцієнтів степеневого ряду і радіуса збіжності R маємо вирази

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1, \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Отже, при $|x| < 1$ степеневий ряд збігається абсолютно. При $x = 1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots,$$

який збігається за ознакою Лейбніца. При $x = -1$ ряд є гармонійним

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

який розбігається. Областю збіжності ряду є інтервал $(-1, 1]$.

Знайдемо область збіжності степеневого ряду

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (9)$$

● Формули (3) безпосередньо не придатні для пошуку радіуса збіжності, бо границі не існує. Тому безпосередньо використовуємо ознаку Даламбера для дослідження абсолютної збіжності ряду. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n-1}}{2n-1} = |x| + \frac{|x|^3}{3} + \frac{|x|^5}{5} + \ldots + \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Знаходимо границі

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}(2n-1)}{(2n+1)|x|^{2n-1}} = |x|^2.$$

Ряд (9) збігається при $|x|^2 < 1$ і розбігається при $|x|^2 > 1$.

Отже, радіус збіжності $R = 1$. При $x = \pm 1$ ряд (9) збігається за ознакою Лейбніца. Областю збіжності є відрізок $[-1, 1]$.

Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

збігається при будь-якому значенні x, бо

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^4 = 1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$ розбігається при будь-якому значенні $x \neq 0$, бо

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Як видно із прикладу, в окремих випадках радіус збіжності може бути рівним 0 або ∞.

5.5.2. ДІЇ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

В основі дій зі степеневими рядами лежать такі теореми.

Теорема 5.25. **Якщо R — радіус збіжності степеневого ряду**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = S(x), \tag{10}$$

то ряд збігається рівномірно при $x \in [-\rho, \rho]$ при $0 < \rho < R$.

Доведення. З теореми Абеля випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n = |a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n + \ldots \tag{11}$$

При $x \in [-\rho, \rho]$ виконані нерівності

$$|a_n x^n| \le |a_n| \cdot \rho^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

з яких випливає рівномірна збіжність ряду (10), бо збіжний ряд (11) зі сталими членами мажорує функціональний ряд (10).

Теорема 5.26. **При інтегруванні або диференціюванні степеневого ряду його радіус збіжності не змінюється.**

З теорем 5.25, 5.26 випливає важливий результат.

Теорема 5.27. **Якщо $R > 0$ — радіус збіжності степеневого ряду (10), то в області $|x| < R$ степеневий ряд можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно разів.**

Знайдемо суму ряду при $R = 1$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots.$$

● Інтегруючи рівність, знаходимо

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x 1dx + \int_0^x 2xdx + \int_0^x 3x^2dx + \ldots + \int_0^x nx^{n-1}dx + \ldots =$$

$$= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^4 + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

Диференціюючи здобуту рівність, маємо:

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Зауваження. При диференціюванні або інтегруванні степеневого ряду збіжність не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності при $x = \pm R$.

Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots \qquad (12)$$

Знаходимо радіус збіжності за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = 1.$$

Ряд (12) збіжний при $x = \pm 1$. При диференціюванні за x отримаємо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots,$$

який збігається при $x = -1$ і розбігається при $x = 1$. У разі наступного диференціювання знаходимо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+\ldots+\frac{n-1}{n}x^{n-2}+\ldots,$$

який є розбіжним при $x = \pm 1$.

Аналогічні результати справедливі для степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots=S(x).\quad(13)$$

Збіжність ряду можна вивчати у разі, коли коефіцієнти степеневого ряду a_n, змінна x і стала a є комплексними числами. При цьому виявляється, що степеневий ряд (13) збігається у крузі $|x-a|<R$ і розбіжний при $|x-a|>R$. При цьому R — відстань від точки a до найближчої особливої точки суми ряду $S(x)$.

Суми збіжних степеневих рядів називаються *аналітичними* функціями. Властивості аналітичних функцій вивчає теорія функцій комплексного змінного.

5.5.3. РОЗКЛАД ФУНКЦІЙ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Припустимо, що функцію $f(x)$ можна розкласти в збіжний при $|x| < R$ степеневий ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots\quad(14)$$

Виразимо коефіцієнт ряду a_n через функцію $f(x)$.

Послідовно диференціюючи рівність (14), отримаємо

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots,$$
$$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+5\cdot 4\cdot 3a_5x^2+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\ldots\,.$$

Підставляючи $x = 0$, дістаємо систему рівнянь

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad f''(0)=2a_2,\quad f'''(0)=3\cdot 2a_3,\ \ldots$$

звідси знаходимо коефіцієнт a_n

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

і розклад (14) набирає вигляду

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (15)$$

Цей ряд називається **рядом Маклорена**.

Якщо розкласти функцію $f(x)$ у ряд за степенями $(x-a)$, то отримаємо аналогічний результат і функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ &+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots . \end{aligned} \qquad (16)$$

Степеневий ряд (10) називається **рядом Тейлора**.

Ряд (16) можна отримати з формули Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots \\ &\ldots f^{(n)}_{(a)}\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(x+a-t)\frac{(t-a)^n}{n!}dt. \end{aligned} \qquad (17)$$

Використовуючи теорему про середнє, знаходимо залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$R_n(x,a) = \int_a^x f^{(n+1)}(x+a-t)\frac{(t-a)^n}{n!}dt = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \in (a;x). \qquad (18)$$

Теорема 5.28. **Для того, щоб збігався ряд Тейлора (16) для скільки завгодно разів диференційовної функції *f*(*x*), необхідно і достатньо, щоб залишковий член формули Тейлора (18) прямував до нуля при $n \to +\infty$.**

Дослідимо збіжність степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

- За ознакою Даламбера знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0.$$

Отже, степеневий ряд збігається при всіх значеннях x, і тому загальний член ряду прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0. \tag{19}$$

[redacted] Розкладемо в ряд Маклорена функцію $f(x)=e^x$.

- Знаходимо значення функції похідних у точці $x = 0$

$$\begin{array}{ll} f(x)=e^x, & f(0)=1, \\ f'(x)=e^x, & f'(0)=1, \\ f''(x)=e^x, & f''(0)=1, \\ f'''(x)=e^x, & f'''(0)=1, \\ & \ldots \end{array}$$

і за формулою (16) знаходимо розклад.

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ .} \tag{20}$$

Цей ряд збігається при всіх значеннях x. Доведемо, що степеневий ряд збігається до функції e^x. Для цього розглянемо залишковий член

$$R_n(x,0)=f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,\ c\in(0,\ x).$$

Оскільки залишковий член збігається до нуля при будь-якому x, то рівність (20) справедлива при будь-яких значеннях x. Зокрема при $x = 1$ знаходимо розклад для числа e

$$\boxed{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=2{,}718281828\ldots}$$

Розглянемо розклад функції $f(x) = \sin x$ у ряд Маклорена.

● Знаходимо значення функції і похідних

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\ f^{IV}(x) &= \sin x, & f^{IV}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Із формули (21) знаходимо розклад функцій $f(x) = \sin x$ у ряд

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (21)$$

Залишковий член формули Тейлора

$$R_n(x,0) = \frac{\sin\left(c + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

тому розклад (21) буде справедливий при будь-якому значенні x.

Диференціюючи рівність (21), знаходимо розклад функції $f(x) = \cos x$ у ряд Маклорена

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots} \qquad (22)$$

Зазначимо, що непарна функція $y = \sin x$ містить у своєму розкладі (21) лише непарні степені x, а парна функція $y = \cos x$ містить у своєму розкладі (22) лише парні степені x.

На основі формул (17)—(22) можна вивести відому формулу Ейлера

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad i^2 = -1.} \qquad (23)$$

Підставляючи в ряд (20) $x = iy$, дістанемо розклад

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \ldots\right) = \cos y + i \sin y,$$

що доводить формулу Ейлера.

Знайдемо біноміальний розклад Ньютона — розклад функції $f(x) = (1 + x)^m$ у ряд Маклорена.

- Знаходимо при $x = 0$ значення функції і її похідних

$$
\begin{aligned}
&f(x) = (1+x)^m, && f(0) = 1,\\
&f'(x) = m(1+x)^{m-1}, && f'(0) = m,\\
&f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, && f''(0) = m(m-1), \ldots\\
&f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \ldots && f'''(0) = m(m-1)(m-2), \ldots .
\end{aligned}
$$

Звідси знаходимо ряд Маклорена

$$
\boxed{\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \ldots\\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots ,\end{aligned}} \tag{24}
$$

який збігається при $|x| < 1$.

Справедливість розкладу (24) буде доведена далі. В окремих випадках маємо розклад:

$$
\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \ldots,
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \ldots,
$$

$$
\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\frac{1}{3}x}{1!} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \ldots .
$$

Знайдемо розклад у ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(1 + x)$.

- Із формули (24) знаходимо

$$
f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \ldots =
$$
$$
= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots .
$$

Інтегруючи рівність, знаходимо розклад у ряд

$$
\ln(1+x) = \int_0^x (1+x)^{-1}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \tag{25}
$$

справедливий при $|x| < 1$.

5.5.4. ПОЛІПШЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

Л. Ейлер указав способи поліпшення збіжності рядів і сумування розбіжних рядів. Ми обмежимося розглядом простих прикладів.

Для обчислення логарифмів можна використовувати розклад

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots ,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots .$$

Ці розклади збігаються при $|x| < 1$ і розбігаються при $|x| > 1$. З розкладів знаходимо

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right).$$

Покладемо в цьому розкладі

$$\frac{1+x}{1-x} = 1+u, \quad x = \frac{4}{2+u}$$

і дістанемо розклад у ряд

$$\ln(1+u) = 2\left(\frac{u}{2+u} + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{2+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u}{2+u}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{u}{2+u}\right)^{2n+1} + \ldots\right). \quad (26)$$

Функціональний ряд збігається при $\left|\frac{u}{2+u}\right| < 1,$ тобто при $u > -1$.

Обчислення значення ln 4. З формули (26) знаходимо

$$\ln 4 = 2\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1} + \ldots\right) = 1{,}38629436$$

Аналогічно заміна аргументу дає змогу поліпшити збіжність біноміального розкладу

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-1)(m-3)}{4!}x^3 + \ldots . \quad (27)$$

Слідом за Ейлером візьмемо

$$x=-\frac{u}{1+u},\quad 1+x=\frac{1}{1+u},\ u=\frac{-x}{1+x},$$

$$(1+x)^m=(1+u)^{-m}=1-\frac{m}{1!}u+\frac{m(m+1)}{2!}u^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}u^3+\ldots\ .$$

Повертаючись до змінної x, дістанемо розклад

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+$$
$$+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots\ . \tag{28}$$

На відміну від розкладу (27), який збігається при $|x|<1$, розклад (28) збігається при $x>-0{,}5$. З розкладу (28) при $m=\frac{\mu}{\nu},\ \ x=\frac{u}{a^\nu}$ дістаємо розклад у ряд

$$(a^\nu+u)^{\frac{\mu}{\nu}}=a^\mu\left(1+\frac{\mu^u}{\nu(a^\nu+u)}+\frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu\cdot2\nu(a^\nu+u)^2}+\frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu\cdot2\nu\cdot3\nu(a^\nu+u)^3}+\ldots\right).$$

Зокрема, маємо розклад

$$\sqrt{a^2+u}=a\left(1+\frac{1\cdot u}{2(a^2+u)}+\frac{1\cdot3u^2}{2\cdot4(a^2+u)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot u^3}{2\cdot4\cdot6(a^2+u)^3}+\ldots\right),$$

$$\sqrt[3]{a^3+u}=a\left(1+\frac{1\cdot u}{3(a^3+u)}+\frac{1\cdot4u^2}{3\cdot6(a^3+u)^2}+\frac{1\cdot4\cdot7u^3}{3\cdot6\cdot9(a^3+u)^3}+\ldots\right),$$

$$\sqrt[4]{a^4+u}=a\left(1+\frac{1\cdot u}{4(a^4+u)}+\frac{1\cdot5u^2}{4\cdot8(a^4+u)^2}+\frac{1\cdot5\cdot9u^3}{4\cdot8\cdot12(a^4+u)^3}+\ldots\right),$$

$$\sqrt[5]{a^5+u}=a\left(1+\frac{1\cdot u}{5(a^5+u)}+\frac{1\cdot6u^2}{5\cdot10(a^5+u)^2}+\frac{1\cdot6\cdot11u^3}{5\cdot10\cdot15(a^5+u)^3}+\ldots\right).$$

[Ейлер]. Обчислимо $\sqrt{2}$. При $a=1$, $u=1$ знаходимо

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot2^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot2^3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot2^4}+\ldots\ .$$

Ейлер рекомендує помножити 2 на квадрат числа так, щоб підкореневий був близький до квадрата іншого числа. Так, маємо:

$$5\sqrt{2}=\sqrt{50}=\sqrt{49+1}=7\left(1+\frac{1}{2\cdot 50}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 50^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 50^3}+\ldots\right),$$

звідси знаходимо значення радикала

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\frac{3}{200}+\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200}\cdot\frac{5}{300}+\ldots\right)=1{,}4142135623730\ldots .$$

5.5.5. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Степеневі ряди можуть бути застосовані для обчислення інтегралів, знаходження границь, розв'язків рівнянь. Розглянемо приклади.

Обчислимо «неінтегровний» інтеграл

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^x \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)dx=\ldots$$

$$=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots$$

Знайдемо значення визначеного інтеграла

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=$$

$$=1-\frac{1}{1!\cdot 3}+\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\frac{1}{4!\cdot 9}-\ldots=0{,}7468241.$$

Розглянемо еліптичний інтеграл першого роду

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

за степенями k^2. Біноміальний розклад приводить до ряду

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi+\ldots,$$

інтегруючи який, знаходимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi+\ldots\right)d\varphi =$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\ldots\right).$$

Знайдемо значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}.$$

● Використовуємо розклад у степеневий ряд

$$a^x=e^{x\ln a}=1+x\ln a+\frac{(x\ln a)^2}{2}+\frac{(x\ln a)^3}{6}+\ldots$$

$$a^{-x}=e^{-x\ln a}=1-x\ln a+\frac{(x\ln a)^2}{2}-\frac{(x\ln a)^3}{6}+\ldots$$

і при цьому знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\ln a)^2}{x^2}=(\ln a)^2.$$

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$y'(x)(1+x)=my(x),\quad y(0)=1.$$

● Воно має розв'язок $y(x) = (1 + x)^m$, що можна перевірити підстановкою $y(x)$ у диференціальне рівняння. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді ряду

$$y(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots .$$

Підставляючи $y(x)$ у диференціальне рівняння, дістаємо рівність

$$(a_1+a_2 2x+a_3 3x^2+a_4 4x^3+\ldots)(1+x)=$$
$$=m(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots),$$

яка приводить до системи рівнянь

$$a_1=m,\ 2a_2+a_1=ma_1,\ 3a_3+2a_2=ma_2,\ 4a_4+3a_3=ma_3,\ \ldots .$$

Звідси послідовно маємо:

$$a_1 = m, \ \ a_2 = a\frac{m(m-1)}{2}, \ \ a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3},$$

$$a_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4} \dots \ .$$

Остаточно знаходимо розв'язок рівняння у виді ряду

$$y(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \dots,$$

що доводить справедливість біноміального розкладу (24).

Степеневі ряди можна перемножати за звичайними правилами. Якщо відомі розклади

$$y_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5a^5 + \dots,$$
$$y_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + \dots,$$

то знаходимо добуток степеневих рядів за формулою

$$y_1(x)y_2(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 +$$
$$+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + (a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0)x^4 +$$
$$+ (a_0b_5 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_0)x^5 + \dots \ .$$

[redacted] Знайдемо розклад у степеневий ряд функції

$$\cos x \cdot e^x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots\right) =$$
$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{30} + \dots \ .$$

Аналогічно виконується ділення степеневих рядів.

Нехай шукаємо розклад у степеневий ряд відношення

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n + \dots} =$$
$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^n + \dots + c_nx^n + \dots \ .$$

Припустимо, що $b_0 \neq 0$, бо при $b_0 = 0$, $a_0 \neq 0$ не дістанемо степеневого ряду. Операцію ділення замінимо операцією множення степеневих рядів

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n =$$
$$= (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots)\times$$
$$\times (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots).$$

Із системи рівнянь

$$\begin{aligned} &a_0 = b_0 c_0, \\ &a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ &a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ &a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0, \ldots, \\ &a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \ldots + b_n c_0, \ldots \end{aligned}$$

при $b_0 \neq 0$ знаходимо послідовно c_0, c_1, c_2, …, c_n.

Знайдемо розклад у степеневий ряд функції

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ldots}.$$

Оскільки функція $y = \mathrm{tg}x$ — непарна, то розклад $\mathrm{tg}x$ у степеневий ряд містить лише непарні степені x

$$\frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots,$$

з рівності

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots)$$

знаходимо систему рівнянь

$$1 = c_1, \ -\frac{1}{6} = c_3 - \frac{1}{2} c, \ \frac{1}{120} = c_5 - \frac{1}{2} c_3 + \frac{1}{24} c_1, \ldots,$$

з якої послідовно знаходимо

$$c_1 = 1, \ c_3 = \frac{1}{3}, \ c_5 = \frac{2}{15}, \ldots; \quad \mathrm{tg}x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \ldots ,$$

Уміючи перемножувати ряди, можна підставляти ряд у ряд.

Знайдемо розклад у степеневий ряд функції

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots\right)}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}}=e\cdot e^{y},$$

$$y\equiv-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\ldots\ .$$

Підставляючи ряд у ряд,

$$e^{y}=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{4}+\ldots=1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)^3+\frac{1}{24}\left(-\frac{x}{2}+\ldots\right)^4=$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{12}x^2-\frac{17}{24}x^3+\frac{629}{720}x^4+\ldots\ .$$

Остаточно знаходимо розклад у степеневий ряд

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{12}x^2-\frac{17}{24}x^3+\frac{629}{720}x^4+\ldots\right).$$

Степеневі ряди можна використовувати для розв'язування рівнянь і пошуку неявних функцій.

Знайдемо розв'язок рівняння

$$y+e^{y}-x-x^3-1=0;\quad y(0)=0$$

відносно неявної функції $y=y(x)$.

● Шукаємо розклад у вигляді ряду

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots\ .$$

Підставляючи ряд у рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x нулю, приходимо до системи рівнянь

$$2a_1-1=0,\ \ 2a_2+\frac{1}{2}a_1^2=0,\ \ 2a_3+a_1a_2+\frac{1}{6}a_1^3-1=0,$$

$$2a_4+a_1a_3+\frac{1}{2}a_2^2+\frac{1}{2}a_1^2a_2+\frac{1}{24}a_1^4=0,\ldots,$$

з якої знаходимо послідовно коефіцієнти

$$a_1=\frac{1}{2},\ \ a_2=-\frac{1}{16},\ \ a_3=\frac{97}{192},\ \ a_4=\frac{-195}{768},\ldots$$

і розклад неявної функції у степеневий ряд

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{97}{192}x^3-\frac{195}{768}x^4+\ldots\ .$$