КОНСПЕКТ ЛЕКЦИОННО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

доц.,к.ф.м.н. Королёв М.Е.

Лист задания

Шифр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
вариан	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33

Балл

1. Модель "минимальное расстояние средствами динамического программирования"
Условие: найти минимальное расстояние: а) таблично; б) "непосредственно на сети", (результаты сравнить).

	21		1		21		9		2		11	
5		8		74		3		6		22		1
	4		2		44		8		9		6	
4		1		11		5		5		4		9
	22		2		6		4		3		9	
7		6		5		7		77		8		32
	4		78		7		5		44		5	
22		22		22		25		63		55		11
	7		7		8		7		6		99	

2. Модель " замена оборудования" (Условие:Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет , после этого продается. В начале каждого года можно принять решение : сохранить оборудование или заменить его новым. Стоимость нового оборудования Ро. После t лет эксплуатации оборудование можно продать за $g(t)=Po * 2^{-t}$(ликвидная стоимость). Затраты на содержание в течение года зависят от возраста t оборудования и равны $r(t)=W*(t+S)$. Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования, чтобы суммарные затраты с учетом начальной покупки и заключительной продажи были минимальны. Ро=2500; k=2; W=600; S=3).

3. Модель " оптимальное распределение средств между отраслями на N лет". Условие: Планируется деятельность двух отраслей производства на n лет. Начальные ресурсы S_0. Средства x, вложенные в 1 отрасль в начале года, дают в конце года прибыль f1(x) и возвращаются в размере q1(x)<x ; аналогично для 2 отрасли функция прибыли равна f2(x), а возврата-q2(x)<x. В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между 1 и 2 отраслями, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладывается. требуется распределить имеющиеся средства S_0 между двумя отраслями производства на n лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за n лет оказалась максимальной.

f1 = 0,6 q1 = 0,4 f2 = 0,3 q2 = 0,8 S_0 =60000

4. Модель " оптимальное капиталовложение". Условие: Фирма по производству быстрого питания намерена вложить капитал в размере А млн. руб. в расширение производства. Фирма имеет n филиалов, расположенных в различных городах. В каждом из этих филиалов проведено изучение рынка и найдены математические ожидания прибыли как функции капиталовложений. Необходимо выработать оптимальный план капиталовложений, максимизирующий ожидаемую прибыль.

Млн. грн.	прибыль			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0.28	0.25	0.15	0.2
2	0.45	0.41	0.25	0.35
3	0.65	0.55	0.4	0.42
4	0.78	0.65	0.5	0.48
5	0.9	0.75	0.62	0.53

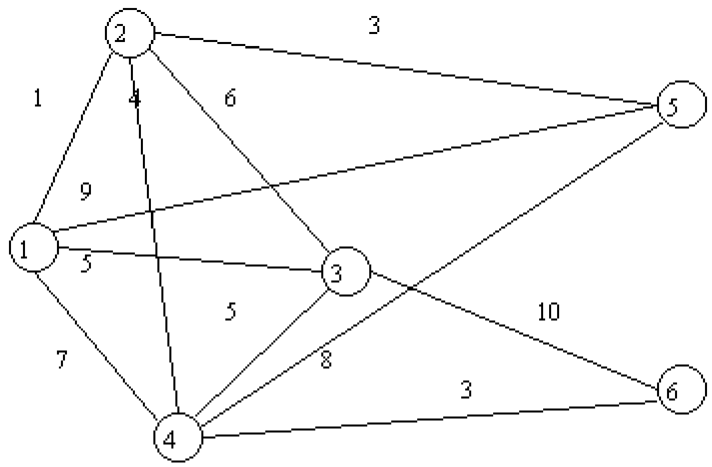
5. Модель " планирование производства". Условие: Спланировать производство на N периодов:а) чтобы спрос был удовлетворен; б) суммарные затраты за все N периодов были "min".

Возможные запасы							Спрос по периодам						Затраты на произв. ед. прод.						
I(t)	0	1	2	3	4	5	t	1	2	3	4	5	x	0	1	2	3	4	5
							d(t)	3	3	3	3	3	S(x)	0	1	2	3	4	5

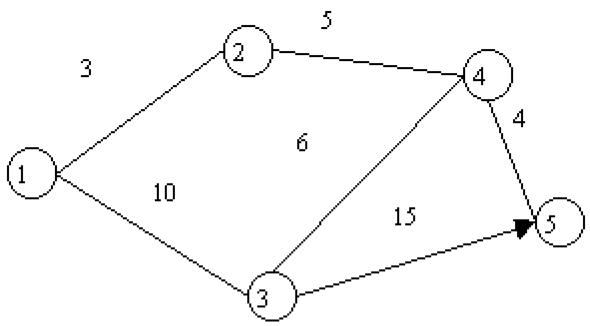
6. Модель " модель назначений". Условие: Пусть требуется выполнить 5 различных работ и имеется 5 механизмов(машин) для их выполнения, причем каждый механизм может использоваться на любой работе. Распределить механизмы по работам, при котором суммарная производительность максимальна.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	2	3	3	5	4
2	4	2	4	6	2
3	2	2	2	4	3
4	4	3	4	3	5
5	0	1	0	2	0

7. Модель "построение минимального остовного дерева". Условие: Построить минимальное остовное дерево для сети в задаче:

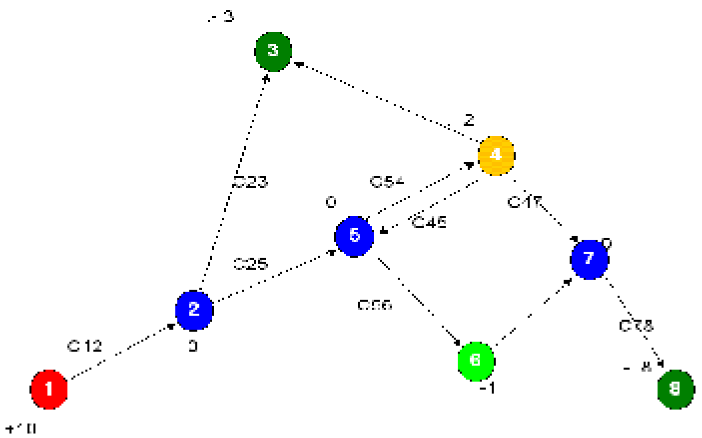


8. Модель "Флойда". Условие: Найти кратчайшее расстояние между любыми двумя узлами следующих сетей:



	1	2	3	4	5
1	—	3	10	N	N
2	3	—	N	5	N
3	10	N	—	6	15
4	N	5	6	—	4
5	N	N	N	4	—

9. Модель "оптимальное распределение товарооборота по сети". Условие: Распределить излишки запаса по сети с минимальными затратами.



11."Детерминированные модели управления запасами". Условие: Интенсивность поступления деталей на склад готовой продукции цеха составляет в начале смены 5 дет /мин. в течение первого часа линейно возрастает, достигая к концу его 10 дет./мин., и затем остается постоянной. Полагая, что поступление деталей на склад происходит непрерывно в течение всех семи часов смены, а вывоз деталей со склада производится только в конце работы, записать выражение для уровня запаса в произвольный момент времени и, используя его, найти количество деталей на складе: а) через 30 мин. после начала работы; б) в конце смены.

12."Стохастические модели управления запасами". Условие:
Задача 1: Предприятие закупает агрегат с запасными блоками к нему. Стоимость одного блока равна 5 ден, ед. В случае выхода агрегата из строя из-за поломки блока, отсутствующего в запасе, простой агрегата и срочный заказ нового блока к нему обойдется в 100 ден. ед. Опытное распределение агрегатов по числу блоков, по-требовавших замену, представлено в таблице.
Задача2.: Решить задачу 1, при условии непрерывного случайного спроса r, распределённого по показательному закону с функцией распределения $F(r)=1-e^{-\lambda r}$ при λ=0,98.

Число замененных блоков, N							Ст-ть блока	Ст-ть срочного заказа	λ
0	1	2	3	4	5	6			
Статистическая вероятность замены блоков									
0.90	0.05	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	5	100	0.98

13."Автоматизация модели управления запасами". Условие:
Покупка товара производится у предприятия по цене 20руб.за единицу, а продается по цене 23руб. за единицу. В случае, если товар не удается реализовать, производится возврат по цене 17руб. Необходимо определить, сколько требуется закупать единиц продукции, чтобы ожидаемая прибыль была максимальна.

Продажа	Покупка	Возврат	Число событий				
			0 шт	5 шт	10 ш	15шт	20шт
23	20	17	0	7	9	15	6

14. Игровые модели 2на2. Условие: Найти оптимальные стратегии игры с заданной платежной матрицей: а) аналитически; б)графически, сравнив результаты с пунктом а). Проверить, имеет ли игра седловую точку.

1.5	3
2	1

15. Игровые модели 2наn. Условие: Реализовать графически игру 2на4 со следующими платежными матрицами:

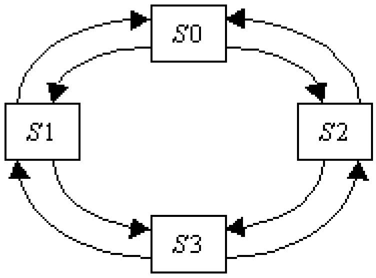
2	2	3	-1
4	3	2	6

16.Решение матричных игр методами линейного программирования. Условие: Решить следующую матричную игру методами линейного программирования: а) как задачу линейного программирования для игрока А; б) как задачу линейного программирования для игрока В ; в) сравнить результаты.

$$\begin{pmatrix} -6 & -8 & -5 \\ 9 & -1 & 3 \\ -8 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

17."Марковский процесс", " уравнения Колмогорова". Условие:

Устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Решение. Возможные состояния системы: S0 – оба узла исправны; S1 – первый узел ремонтируется, второй исправен; S2 – второй узел ремонтируется, первый исправен; S3 – оба узла ремонтируются.



а) Найти предельные вероятности для системы S, при:

λ_{10}	λ_{01}	λ_{20}	λ_{02}	λ_{13}	λ_{31}	λ_{32}	λ_{23}
2	1	3	2	2	3	2	1

б)Реализовать задачу а) при следующих условиях:

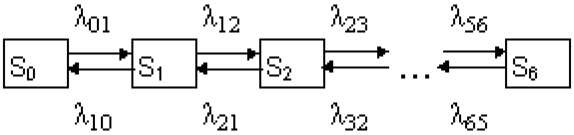
	Доход	Расход
1 узел	10	4
2 узел	6	2

в)Реализовать задачу а) при следующих условиях:

Уменьшение среднего времени ремонта каждого из узлов = 2

Увеличение затрат на ремонт каждого из узлов = 2

18. "СМО - процесса гибели и размножения". Условие: Граф состояний процесса гибели и размножения имеет вид:



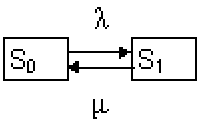
Найти предельные вероятности состояний а) для S = S2; б) для S = S6

	0	1	2	3	4	5	6
$\lambda_{k,\,k+1}$	90	90	90	90	90	90	0
$\lambda_{k+1,\,k}$	30	60	90	120	150	180	1

19. "СМО с отказами". Условие:

а) одноканальная система:

Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Ппоток обслуживания имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

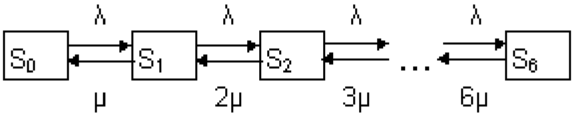


$\lambda =$ 90

$\mu =$ 30

б) многоканальная система:

Для задачи Эрланга найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.



$\lambda = 90$

$\mu = 30$

Лист задания выдан ____________________

(число, подпись)

	ФИО	Сорокин В.Г.	Группа	Mo99a	Вариант №	33

Модель нахождения минимального расстояния средствами динамического программирования

Реализация модели "непосредственно на сети"

Постановка: Найти минимальное расстояние из узла 1 в узел 35 (рисунок 1.1).

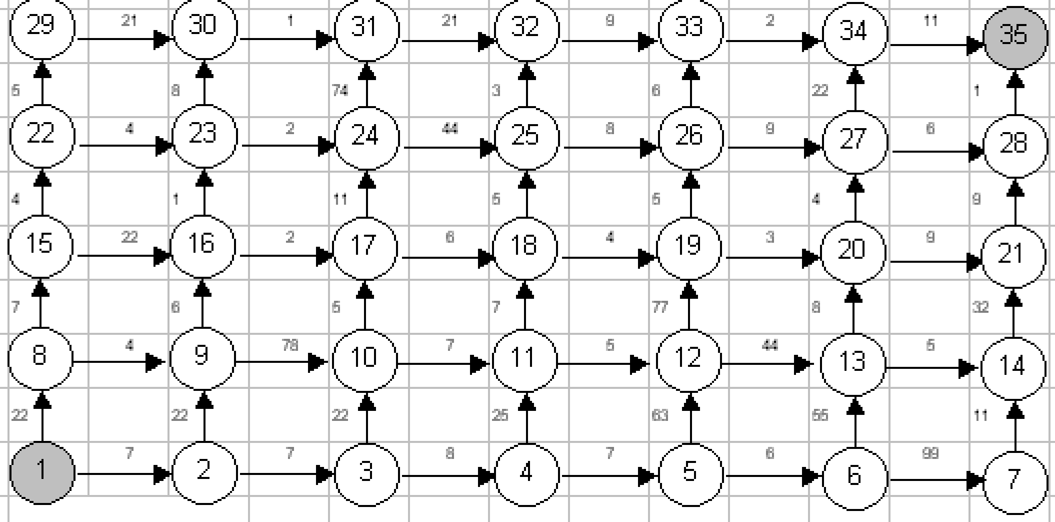


Рисунок 1.1 - Сеть

Для реализации модели необходимо :

1). Процесс решения превратить в (n)-этапный процесс;

2). Для каждого этапа описать:

а) множество начальных состояний;

б) множество решений.

3). Для 1) и 2) выполним принцип оптимальности.

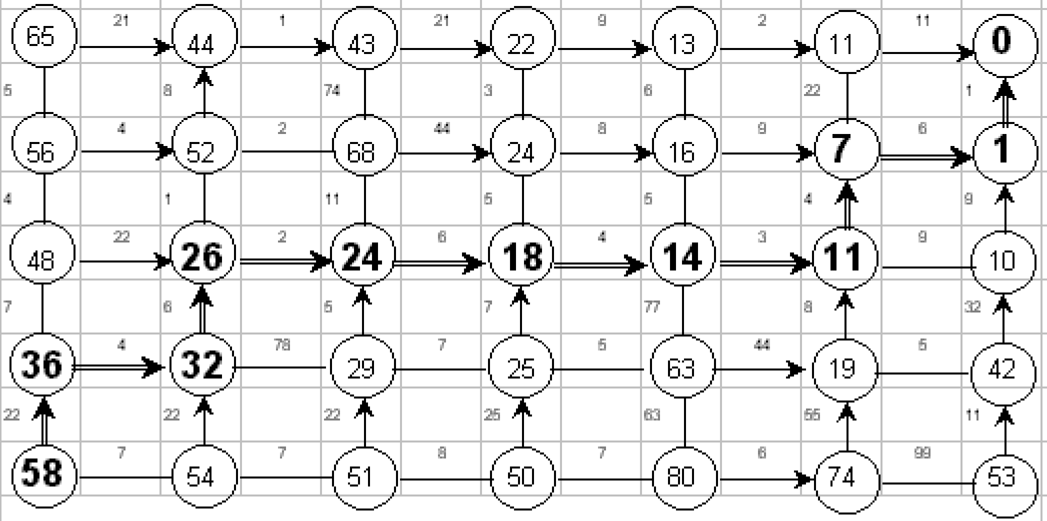


Рисунок 1.2 - Реализация модели непосредственно на сети

Ответ: S (1 → 8 → 9 → 16 → 17 → 18 → 19 → 20 → 27 → 28 → 35) = **58**

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33 Дата: 10.07.04

Замена оборудования

Замена оборудования – важная экономическая проблема. Задача состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования (станков, производственных зданий и т. п.). Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты, затраты на ремонт и обслуживание, снижаются производительность труда, ликвидная (стоимость оборудования бывшего в эксплуатации) стоимость. Критерием оптимальности являются, как правило, либо прибыль от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

При построении модели задачи принято считать, что решение о замене выносится в начале каждого промежутка эксплуатации (например, в начале года) и что в принципе оборудование можно использовать неограниченно долго. Основная характеристика оборудования – параметр состояния – его возраст. При составлении динамической модели замены процесс замены рассматривают как n-шаговый, разбивая весь период эксплуатации на n шагов. Возможное управление на каждом шаге характеризуется качественными признаками, например:

X^c - сохранить оборудование,
X^3 - заменить оборудование.

Задача. Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после этого продается. В начале каждого года можно принять решение сохранить оборудование или заменить его новым. Стоимость нового оборудования $P_0 =$ 2500 д.ед. После t лет эксплуатации $1 \le t \le 5$ оборудование можно продать за

$$g(t) = \frac{P_o}{k^t}$$

д.ед. (ликвидная стоимость). Затраты на содержание в течение года зависят от возраста t оборудования и равны

$$r(t) = w \cdot (t + s)$$

Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования, чтобы суммарные затраты с учетом начальной покупки и заключительной продажи были минимальны, если

$k =$ 2 $w =$ 600 $s = 3$

Решение:

Способ деления управления на шаги естественный, по годам, n=5.
Параметр состояния - возраст машины S_k .
Управление на каждом шаге зависит от двух переменных X^c, X^3

Уравнения состояния зависят от управления:

$$S_k = \begin{cases} t+1, & X_k = X^c \\ t, & X_k = X^з, k = 1,2,3,4 \end{cases}$$

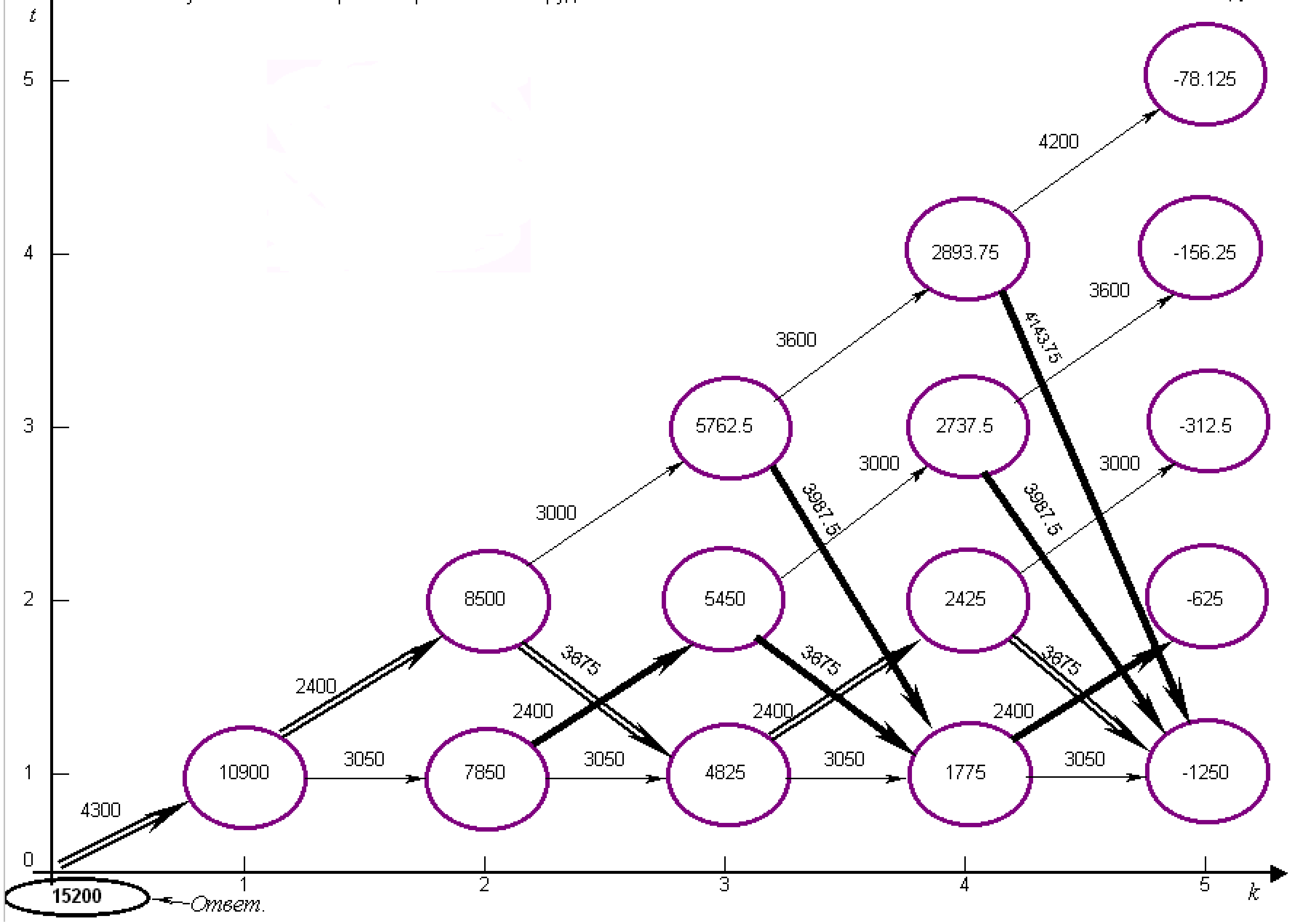
Показатель эффективности k-го шага :

$$f(X_k, t) = \begin{cases} w \cdot (t+s), & X_k = X^c \\ P_0 + r(0) - g(t), & X_k = X^з, k = 1,2,3,4 \end{cases}$$

$$f(X_k, t) = \begin{cases} 600 \cdot (t+3), & X_k = X^c \\ 2500 + 1800 - g(t), & X_k = X^з, k = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Реализацию модели произведем на следующем графе, изображая состояния кружочками, а решения о замене и сохранении – стрелками и применив принцип оптимальности:

Рисунок 1.1 - Схема реализации замены оборудования



2

Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на N лет. № 33

Планируется деятельность двух отраслей производства на **n** лет. Начальные ресурсы **So**. Средства **x**, вложенные в 1 отрасль в начале года, дают в конце года прибыль **f1(x)** и возвращаются в размере **q1(x)<x**; аналогично для 2 отрасли функция прибыли равна **f2(x)**, а возврата – **q2(x)** (q2(x)<x). В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между 1 и 2 отраслями, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладывается.

Требуется распределить имеющиеся средства **So** между двумя отраслями производства на **n** лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за **n** лет оказалась максимальной.

Необходимо:

а) построить модель **ДП** для задачи и вычислительную схему при **n=4**;

б) решить задачу при известных значениях **So, f1(x) , q1(x), f2(x), q2(x).**

Решение: Обозначим

Хк –количество средств вложенное в первое предприятие в **к**-м году;

Yк –количество средств вложенное во второе предприятие в **к**-м году;

Хк+Yк –количество средств вложенное в первое и второе предприятия в **к**-м году;

Хк+Yк=Sk-1 -количество средств полученных в "**k-1**" году, для вложения в "**k**-й год, отсюда следует, что $y_k = S_{k-1} - x_k$; **[1]**

$f_1(x_k)$ – прибыль полученная первым предприятием в **к**-м году;

$f_2(y_k) = f_2(S_{k-1} - x_k)$ – прибыль полученная 2м предприятием в к-м году;

$f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k)$ – прибыль полученная первым и вторым предприятием в к-м году; $\Rightarrow Z = \sum_{k=1}^{n}(f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k))$; **[2]** - прибыль полученная первым и вторым предприятием за "n" лет, максимум которой необходимо найти;

$q_1(x_k)$ – количество средств возвращенных первым предприятием в "k-м" году;

$q_2(y_k) = q_2(S_{k-1} - x_k)$ – количество средств возвращенных вторым предприятием в "k-м" году; $\Rightarrow$ $S_k = q_1(x_k) + q_2(S_{k-1} - x_k)$; **[3]** -кол-во средств возвращенных 1-му и 2-му предприятию в "k-м" году – ***рекурентное соотношение*** выражающее S_k через S_{k-1} (или ***уравнение состояний***).

Уравнения Беллмана :

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{0 \le x_n \le S_{n-1}} \{f_1(x_n) + f_2(S_{n-1} - x_n)\}$$; **[4]** -условно оптимальная прибыль на последнем "n" этапе;

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}} \{f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k) + Z_{k+1}^*(S_k)\}$$; **[5]** – условно оптимальная прибыль полученная с"k-го" года д "n-го" года включительно.

Для нахождения целевой функции **[2]**, используем методы динамического программирования, т.е. разобьем решение задачи на 4-е этапа по годам :

Вариант№ 33

Дано:

f1(x)= 0.6 Xk	**q1(x)= 0.4 Xk**	**So= 60000**
f2(x)= 0.3 Xk	**q2(x)= 0.8 Xk**	**n= 4**

$$Z=\sum_{k=1}^{n}\left(0.6\,X_k + 0.3\,(S_{k-1}-X_k)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(0.6\,X_k + 0.3\,S_{k-1} + -0.3\,X_k\right)=$$

$$=\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(0.3\,X_k + 0.3\,S_{k-1}\right)=Z} \quad [2]$$

$$S_k= 0.4\,X_k + 0.8\,(S_{k-1}-X_k))=$$

$$=\boxed{0.8\,S_{k-1} + -0.4\,X_k= S_k} \quad [3]$$

n-й *шаг*: Определим максимальную прибыль полученную на последнем году по уравнению [4]:

$$Z_4^*(S_3)=\max_{0\le X_4\le S_3}\{f_1(X_4)+f_2(S_3-X_4)\}=[2]=$$

$$=\max_{0\le X_4\le S_3}\{0.3\,X_4+ 0.3\,S_3\}$$ -задача свелась к нахождению **max** функции $Z_4(X_4)$ на отрезке $[0,S_3]$.

$$\max_{0\le X_4\le S_3}\{\mathbf{Z}_4(S_3)\} = \boxed{0.6\,S_3=Z_4^*(S_3)} \quad [6]$$ при $X_4= S3$

3-й *шаг*: $[5]\Rightarrow Z_3^*(S_2)=\max_{0\le X_3\le S_2}\{f_1(X_3)+f_2(S_2-X_3)+Z_4^*(S_3)\}=[\ 2\ ,\ 6\ ]=$

$$=\max_{0\le X_3\le S_2}\{0.3\,X_3+ 0.3\,S_2 + 0.6\,S_3\}=[3]=$$

$$=\max_{0\le X_3\le S_2}\{0.3\,X_3+ 0.3\,S_2 + 0.6\,(S_2\,0.8 + -0.4\,X_3)\}=$$

$$=\max_{0\le X_3\le S_2}\{0.06\,X_3+ 0.78\,S_2\}$$ -задача свелась к нахождению max функции $Z_3(X_3)$ на отрезке $[0,S_2]$.

И так: $\max_{0\le X_3\le S_2}\{Z_3(X_3)\}=\boxed{Z_3^*(S_2)= 0.84\,S_2.}$ [7] при $X_3= S2$

2-й шаг:	[5],[к=2]=> $Z_2^*(S_1)=\max\limits_{0<=X2<=S1}\{f_1(X_2)+f_2(S_1-X_2)+Z_3^*(S_2)\}$=[2 , 7]=

$$=\max_{0<=X2<=S1}\{\ 0.3\ X_2+\ 0.3\ S_1\ +\ 0.84\ \ S_2\}=[3]=$$

$$=\max_{0<=X2<=S1}\{\ 0.3\ X_2+\ 0.3\ S_1\ +\ 0.84\ (\ S_1\ 0.8\ +\ -0.4\ X_2)\}=$$

$$=\max_{0<=X2<=S1}\{\ -0.036\ X_2+\ 0.972\ \ S_1\}$$ -задача свелась к нахождению max функции $Z_2(X_2)$ на отрезке $[0,S_1]$.

И так: $\max\limits_{0<=X2<=S1}\{Z_2(X_2)\}=\boxed{Z_2^*(S_1)=\ 0.972\ S_1.}$ [8] при $X_2=\ 0$

1-й шаг:	[5],[к=1]=> $Z_1^*(S_o)=\max\limits_{0<=X1<=So}\{f_1(X_1)+f_2(S_o-X_1)+Z_2^*(S_1)\}$=[2 , 8]=

$$=\max_{0<=X1<=So}\{\ 0.3\ X_1+\ 0.3\ S_o\ +\ 0.97\ \ S_1\}=[3]=$$

$$=\max_{0<=X1<=So}\{\ 0.3\ X_1+\ 0.3\ S_o\ +\ 0.97\ (\ S_o\ 0.8\ +\ -0.4\ X_1)\}=$$

$$=\max_{0<=X1<=So}\{\ -0.089\ X_1+\ 1.078\ \ S_o\}$$ -задача свелась к нахождению max функции $Z_1(X_1)$ на отрезке $[0,S_o]$.

И так: $\max\limits_{0<=X1<=So}\{Z_1(X_1)\}=\boxed{Z_1^*(S_o)=\ 1.0776\ S_o.}$ [9] при $X_1=\ 0$

Подставляя начальные ресурсы So из условия задачи, получаем:
$Z_1^*(\ S_o\ =\ 60000\ )$ = [9] = 1.078 60000 = 64656 у.е. **max** прибыль.

Выпишем ответы всех этапов:

Этап	Результат
4-й	$Z_4^*(S_3)\Big\vert_{X_4=\ S3}\ =\ 0.6\ S_3$
3-й	$Z_3^*(S_2)\Big\vert_{X_3=\ S2}\ =\ 0.84\ S_2$
2-й	$Z_2^*(S_1)\Big\vert_{X_2=\ 0}\ =\ 0.972\ S_1$
1-й	$Z_1^*(S_o)\Big\vert_{X_1=\ 0}\ =\ 1.078\ S_o$

	Таблица пересчета распределения средств по годам							
	1-й этап		*2-й этап*		*3-й этап*		*4-й этап*	
1-е предпр.	$X1$= 0	0	$X2$= 0	0	$X3$= $S2$	38400	$X4$= $S3$	15360
60000	S_1= 48000		S_2= 38400		S_3= 15360		S_4= 6144	
2-е предпр.	Y_1= 60000		Y_2= 48000		Y_3= 0		Y_4= 0	

Ответ:

Оптимальная прибыль за 4-е года, полученная от двух отраслей производства при начальных средствах **60000** ед., равна **64656** при условии, что **первая** отрасль получает по годам:

(0 ; 0 ; 38400 ; 15360),

а **вторая** отрасль получает по годам:

(60000 ; 48000 ; 0 ; 0).

Модель "Оптимальное капиталовложение"

Имеются четыре проекта, для реализации которых нужно вкладывать некоторое количество средств.

Имеются исходные данные (табл.1) о прибыльности каждого из проектов при вложении в них средств в определенном размере.

Таблица1
Исходные данные

Вложения в млн, грн	Прибыль			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0.28	0.25	0.15	0.2
2	0.45	0.41	0.25	0.35
3	0.65	0.55	0.4	0.42
4	0.78	0.65	0.5	0.48
5	0.9	0.75	0.62	0.53

Ставится вопрос о стратегии вложения средств в проекты, позволяющей максимизировать прибыль.

Особенностью решения этой задачи является его переборный характер.

Введем некоторые обозначения:

fi (x)- прибыль, полученная при вложении средств *x* в проект *i*

(i=1,2,3,4; x=0,1...5)

Функции *fi* (x) монотонно возрастают. Тогда сформулируем задачу следующим образом: необходимо найти x_1, x_2, x_3, x_4 , чтобы

$$\sum_{i=1}^{4} \acute{r}i\ (x) \to \max \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i = A$$

Будем рассматривать задачу для целых значений A

[0,5].

Введем некоторые обозначения: $F_{1,2}(A)$ —максимальная прибыль, полученная от средств A, вложенных в проекты 1,2. Аналогично $F_{1,2,3}(A)$ — максимальная прибыль от средств A, вложенных в проекты 1,2,3 и 4. Таким образом в ходе реализации задачи будем перебирать варианты средств и расчитывать прибыли от вложения в тот или иной проект.

При задачи на каждом шаге будем применять определенный алгоритм для нахождения прибыльности того или иного проекта.

$$F_{1,2}(A) = \max_{x\in[0,A]}[f_1(x) + f_2(A-x)].$$

Перейдя к третьему проекту воспользуемся следующим рекурентным соотношением:

$$F_{1,2,3}(A) = \max_{x\in[0,A]}[F_{1,2}(x) + f_3(A-x)].$$

Анологичным образом применяя следующую формулу вычислим $F_{1,2,3}(A)$:

$$F_{1,2,3,4}(A) = \max_{x\in[0,A]}[F_{1,2,3}(x) + f_4(A-x)].$$

Задание выполнено: 20:25:04___07-10-2004

Вариант ст.гр Сорокин В.Г. Мо99а

Приведем визуализацию некоторых шагов решения, а конкретно выкладку для распределения средств между 1,2,3 и 4 проектами.

1). $F_{1234}(0)$

$$\left.f_{1,2,3}(0) + f_4(0) = 0 + 0 = 0\right\} \max = \boxed{0} \quad (0,0,0,0)$$

2). $F_{1234}(1)$

$$\left.\begin{array}{l} f_{1,2,3}(0) + f_4(1) = 0 + 0.2 = 0.2 \\ f_{1,2,3}(1) + f_4(0) = 0.28 + 0 = 0.28 \end{array}\right\} \max = \boxed{0.28} \quad (1,0,0,0)$$

3). $F_{1234}(2)$

$$\left.\begin{array}{l} f_{1,2,3}(0) + f_4(2) = 0 + 0.35 = 0.35 \\ f_{1,2,3}(1) + f_4(1) = 0.28 + 0.2 = 0.48 \\ f_{1,2,3}(2) + f_4(0) = 0.53 + 0 = 0.53 \end{array}\right\} \max = \boxed{0.53} \quad (1,1,0,0)$$

4). $F_{1234}(3)$

$$\left.\begin{array}{l} f_{1,2,3}(0) + f_4(3) = 0 + 0.42 = 0.42 \\ f_{1,2,3}(1) + f_4(2) = 0.28 + 0.35 = 0.63 \\ f_{1,2,3}(2) + f_4(1) = 0.53 + 0.2 = 0.73 \\ f_{1,2,3}(3) + f_4(0) = 0.7 + 0 = 0.7 \end{array}\right\} \max = \boxed{0.73} \quad (1,1,0,1)$$

5). $F_{1234}(4)$

$$\begin{array}{l} f_{1,2,3}(0) + f_4(4) = 0 + 0.48 = 0.48 \\ f_{1,2,3}(1) + f_4(3) = 0.28 + 0.42 = 0.7 \\ f_{1,2,3}(2) + f_4(2) = 0.53 + 0.35 = 0.88 \\ f_{1,2,3}(3) + f_4(1) = 0.7 + 0.2 = 0.9 \\ f_{1,2,3}(4) + f_4(0) = 0.9 + 0 = 0.9 \end{array} \quad \max = \boxed{0.9} \quad (3,1,0,0)$$

6). $F_{1234}(5)$

$$\left.\begin{array}{l} f_{1,2,3}(0) + f_4(5) = 0 + 0.53 = 0.53 \\ f_{1,2,3}(1) + f_4(4) = 0.28 + 0.48 = 0.76 \\ f_{1,2,3}(2) + f_4(3) = 0.53 + 0.42 = 0.95 \\ f_{1,2,3}(3) + f_4(2) = 0.7 + 0.35 = 1.05 \\ f_{1,2,3}(4) + f_4(1) = 0.9 + 0.2 = 1.1 \\ f_{1,2,3}(5) + f_4(0) = 1.06 + 0 = 1.06 \end{array}\right\} \max = \boxed{1.1} \quad (3,1,0,1)$$

После проведения всех расчетов результаты появятся в таблице:

Вложения A	$F_{12}(A)$	$F_{123}(A)$	$F_{1234}(A)$
0	0 (0,0)	0 (0,0,0)	0 (0,0,0,0)
1	0.28 (1,0)	0.28 (1,0,0)	0.28 (1,0,0,0)
2	0.53 (1,1)	0.53 (1,1,0)	0.53 (1,1,0,0)
3	0.7 (2,1)	0.7 (2,1,0)	0.73 (1,1,0,1)
4	0.9 (3,1)	0.9 (3,1,0)	0.9 (3,1,0,0)
5	1.06 (3,2)	1.06 (3,2,0)	1.1 (3,1,0,1)

Модель "Планирование производства"

Постановка: Спланировать производство на N периодов:

а) чтобы спрос был удовлетворен;

б) чтобы суммарные затраты за все N периодов были минимальны

$$\min \sum_{t=1}^{N} S_t(x_t, i_t)$$, где:

$S_t(x_t, i_t) -$ перерасходы предприятия

$t = \overline{1,N}$ - значение периода

x_t - количество выпускаемой продукции в t-ом периоде

i_t - запасы на конец t-го периода

d_t - спрос на эту продукцию в t-ом году

Исходные данные:

Возможные запасы						
i(t)	0	1	2	3	4	5

Спрос по периодам					
t	1	2	3	4	5
d(t)	3	3	3	3	3

Затраты на производство ед. прод.						
x	0	1	2	3	4	5
S(x)	0	1	2	3	4	5

Первый этап

S\x	0	1	2	3	4	5	X	F
0	-	-	-	3	-	-	3	3
1	-	-	2	-	-	-	2	2
2	-	1	-	-	-	-	1	1
3	0	-	-	-	-	-	0	0
4	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-

d = 3

Второй этап

S\x	0	1	2	3	4	5	X	F
0	-	-	-	6	7	8	3	6
1	-	-	5	6	7	8	2	5
2	-	4	5	6	7	-	1	4
3	3	4	5	6	-	-	0	3
4	3	4	5	-	-	-	0	3
5	3	4	-	-	-	-	0	3

d = 3

Третий этап

S\x	0	1	2	3	4	5	X	F
0	-	-	-	9	10	11	3	9
1	-	-	8	9	10	11	2	8
2	-	7	8	9	10	12	1	7
3	6	7	8	9	11	13	0	6
4	6	7	8	10	12	-	0	6
5	6	7	9	11	-	-	0	6

d = 3

Четвертый этап

S\x	0	1	2	3	4	5	X	F
0	-	-	-	12	13	14	3	12
1	-	-	11	12	13	14	2	11
2	-	10	11	12	13	15	1	10
3	9	10	11	12	14	16	0	9
4	9	10	11	13	15	-	0	9
5	9	10	12	14	-	-	0	9

d = 3

Пятый этап

S\x	0	1	2	3	4	5	X	F
0	-	-	-	15	16	17	3	15
1	-	-	14	15	16	17	2	14
2	-	13	14	15	16	18	1	13
3	12	13	14	15	17	19	0	12
4	12	13	14	16	18	-	0	12
5	12	13	15	17	-	-	0	12

d = 3

Выпишем ответы, исходя из предыдущих таблиц:

Ответ 3-го этапа:

Оптимальный план(стратегия) на "3" этапе с запасом

$i_3 = 0$:	3	3	3
$i_3 = 1$:	2	3	3
$i_3 = 2$:	1	3	3
$i_3 = 3$:	0	3	3
$i_3 = 4$:	0	2	3
$i_3 = 5$:	0	1	3

Ответ 5-го этапа:

Оптимальный план(стратегия) на "5" этапе с запасом

$i_5 = 0$:	3	3	3	3	3
$i_5 = 1$:	2	3	3	3	3
$i_5 = 2$:	1	3	3	3	3
$i_5 = 3$:	0	3	3	3	3
$i_5 = 4$:	0	2	3	3	3
$i_5 = 5$:	0	1	3	3	3

Группа Мо99а
ФИО Сорокин В.Г.
Вариант 1

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33 Дата: 10.07.04

Модель назначений (венгерский метод)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{(II)}{\sim}$$

$$\underset{(II)}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boxed{+} & + & \boxed{+} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0^* & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0^*} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0'} & \cancel{3} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0'} & \cancel{0} & \cancel{0^*} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ + \\ \\ + \\ \\ \end{array} \underset{(III)}{\sim}$$

$$\underset{(III)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{(IV)}{\sim}$$

$$\underset{(*,/,+)}{\overset{\text{перенос}}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \boxed{+} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0^* & 0' & 0 & 0 \\ \boxed{0^*} & 2 & 0 & \boxed{0'}^* & 3 \\ \boxed{0'}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0' & 1 & 0^* & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ + \\ \\ \\ + \end{array} \underset{\text{дополнит. } 0^*}{\overset{\text{получим}}{\sim}}$$

все пометки убираем кроме (*)

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \boxed{+} & \boxed{+} & \boxed{+} & + & \phantom{\boxed{0'}^*} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0^*} & 0 & 0 & \boxed{0'}^* \\ 0 & 2 & 0 & 0^* & 3 \\ 0^* & 0' & 0 & 0 & 0 \\ 0' & 1 & 0^* & 3 & 0 \\ 1 & \boxed{0'}^* & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Окончательно :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0^* \\ 0 & 2 & 0 & 0^* & 3 \\ 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0^* & 3 & 0 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

т.е.:

Таблица 3.1.1 – Назначение механизмов по работам

№ механизма	**работа**
1	5
2	4
3	1
4	3
5	2

Оптимальный вариант назначений: $\mathbf{x_{15} = x_{24} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1}$.

Целевая функция = 17.

Модель назначений "Венгерский метод"

Выполнил ст. г Мо99а. Сорокин В.Г.

Вариан 21

Пусть требуется выполнить 5 различных работ и имеется 5 различных механизмов для их вы
Причем каждый механизм может использоваться на любой работе. Распределить механизмь
при котором суммарная производительность максимальна.

$C_{i.}$ - производительность i-го станка на j-той

Ценовая матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Математическая модель:

$X_{i,j} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ - i-тый механизм назначается на j-ю р
- i-тый механизм назначается не на j-ю р

$$\begin{cases} 1.\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \longrightarrow \max \\ 2.\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1;\ i = \overline{1,n} \\ 3.\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1;\ j = \overline{1,n} \\ 4.X_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Суммарная производителы
при данном варианте назнач
максимальна

каждый механизм
назначается на одну рабс

на каждую рабо
назначается один механ

Прежде чем перейти непосредственно к "венгерскому методу", определим некоторые п

$\max\limits_{i} C_{ij} - C_{ij}$ Максимум столбца минус элементы столбца

$C_{ij} - \min\limits_{j} C_{ij}$ Элементы минус минимум строки

$C_{ij} - h\big|_{i-незанятая}$ (j) Вычитаем h из всех незанятых элементов строк

$C_{ij} + h\big|_{j-занято}$ (i) Прибавляем h ко всем занятым элементам столбі

где h - min из всех незанятых элементов мат

Матрица назначени

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимуі 4 +6 +2 +4 +1 =17

Ответ: суммарная производительность максимаг
следующем варианте назначений:

1-й станок 5 -ю рабо
2-й станок 4 -ю рабо
3-й станок 1 -ю рабо
4-й станок 3 -ю рабо
5-й станок 2 -ю рабо

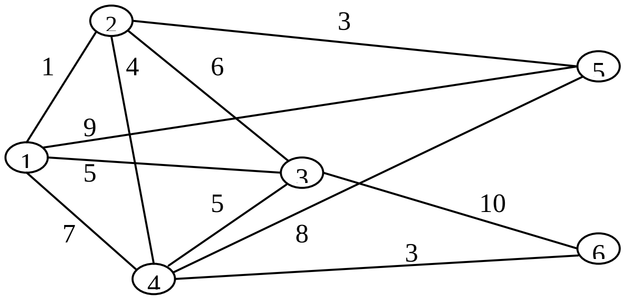
10.07.04

ФИО	Сорокин В.Г.	Группа	Мо99а	Вариант № 33	Дата: 10.07.04

Построение минимального остовного дерева

Телевизионная компания планирует подключение к своей кабельной сети пяти новых районов. На рисунке 6.3.1 показана структура планируемой сети и расстояния (в милях) между районами и телецентром. Необходимо спланировать наиболее экономичную кабельную сеть.

Рисунок 6.3.1 – Структура планируемой сети

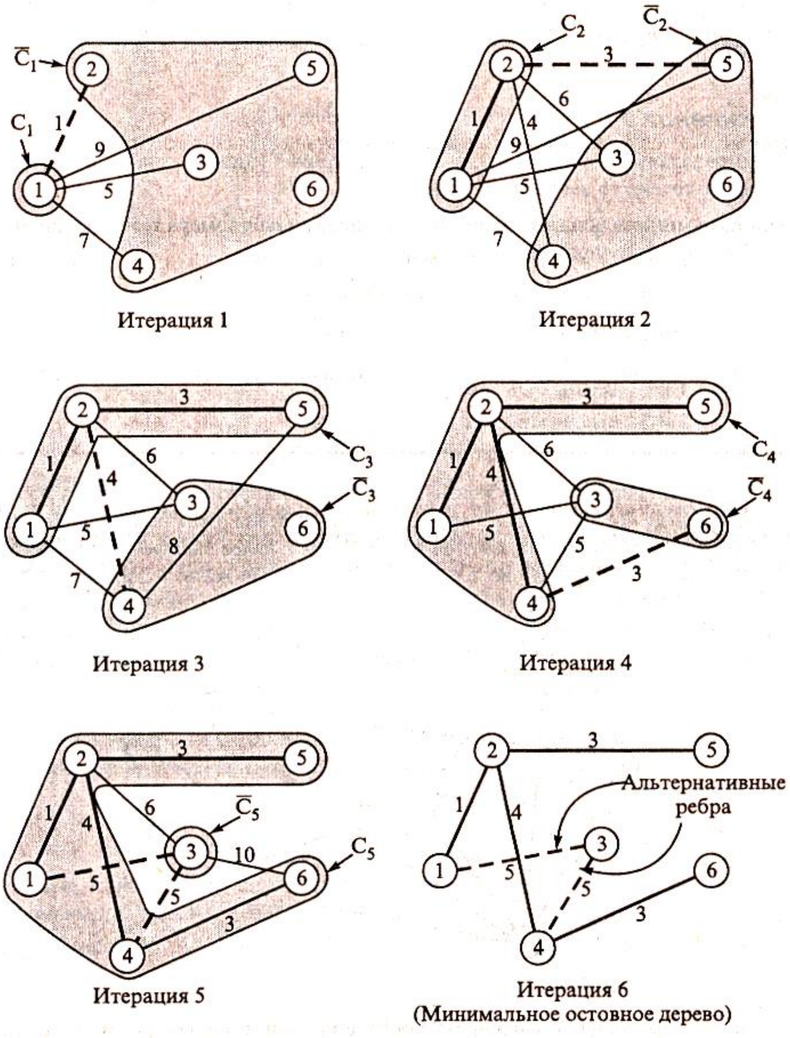


Начнём выполнение алгоритма построения минимального остовного дерева с выбором узла 1 (или любого другого узла). Тогда

$$C_1 = \{1\} \text{ и } = \{2,3,4,5,6\}.$$

Последовательные итерации выполнения алгоритма представлены на рисунке 6.3.2. Здесь тонкими линиями показаны ребра , соединяющие узлы , принадлежащие множествам C_k и $\overline{C_k}$, среди которых ищется ребро с минимальной стоимостью (длиной). Это найденное ребро показано пунктирной линией . Толстыми сплошными линиями обозначены ребра, соединяющие узлы множества C_k (и которые ранее обозначались пунктирными линиями).

Рисунок 6.3.2 – Последовательность итераций выполнения алгоритма



Например на первой итерации ребро (1,2) имеет наименьшую стоимость (т.е. наименьшее расстояние между пунктами сети) среди всех других ребер , соединяющих узел 1 с узлами множества (отметим , что узел 6 не имеет ребра , непосредственно соединяющего его с узлом 1) . Поэтому $j=2$ и C_2={1,2} , $\overline{C_2}$ ={3,4,5,6}.

Решение в виде минимального остовного дерева получено на 6-й итерации (рисунок 6.3.2) . *Минимальная длина кабеля для построения такой сети равна* **1+3+4+3+5=16** *у.е.*

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33 Дата: 10.07.04

Алгоритм "Флойда" ***Находит кратчайшие пути между любыми двумя узлами сети.***

В этом алгоритме сеть представлена в виде квадратной матрицы с n строками и n столбцами.
Элемент **(i,j)** равен расстоянию **dij** от узла **i** к узлу **j**, которое имеет конечное значение,
если существует дуга **(i,j)**, и равен бесконечности в противном случае.

1-я итерация

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	3	10	N	N					
2	3	-	N	5	N					
3	10	N	-	6	15					
4	N	5	6	-	4					
5	N	N	N	4	-					
6						-				
7							-			
8								-		
9									-	
10										-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	2	3	4	5					
2	1	-	3	4	5					
3	1	2	-	4	5					
4	1	2	3	-	5					
5	1	2	3	4	-					
6										
7										
8										
9										
10										

2-я итерация

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	3	10	N	N					
2	3	-	13	5	N					
3	10	13	-	6	15					
4	N	5	6	-	4					
5	N	N	N	4	-					
6						-				
7							-			
8								-		
9									-	
10										-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	2	3	4	5					
2	1	-	1	4	5					
3	1	1	-	4	5					
4	1	2	3	-	5					
5	1	2	3	4	-					
6										
7										
8										
9										
10										

3-я итерация

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	3	10	8	N					
2	3	-	13	5	N					
3	10	13	-	6	15					
4	8	5	6	-	4					
5	N	N	N	4	-					
6						-				
7							-			
8								-		
9									-	
10										-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	2	3	2	5					
2	1	-	1	4	5					
3	1	1	-	4	5					
4	2	2	3	-	5					
5	1	2	3	4	-					
6										
7										
8										
9										
10										

4-я итерация

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	3	10	8	25					
2	3	-	13	5	28					
3	10	13	-	6	15					
4	8	5	6	-	4					
5	N	N	N	4	-					
6						-				
7							-			
8								-		
9									-	
10										-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	2	3	2	3					
2	1	-	1	4	3					
3	1	1	-	4	5					
4	2	2	3	-	5					
5	1	2	3	4	-					
6										
7										
8										
9										
10										

5-я итерация

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	3	10	8	12					
2	3	-	11	5	9					
3	10	11	-	6	10					
4	8	5	6	-	4					
5	12	9	10	4	-					
6						-				
7							-			
8								-		
9									-	
10										-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	2	3	2	4					
2	1	-	4	4	4					
3	1	4	-	4	4					
4	2	2	3	-	5					
5	4	4	4	4	-					
6										
7										
8										
9										
10										

Найдем кратчайшее расстояние между следующими узлами:

Кратчайшее расстояние между узлами 1 и 5 равно $\mathbf{d_{15}}$=12.
Для нахождения соответствующих маршрутов напомним, что сегмент маршрута **(i, j)** состоит из ребра **(i, j)** только в том случае, когда $\mathbf{s_{ij}=j}$. В противном случае узлы **i** и **j** связаны, по крайней мере, через один промежуточный узел. Поскольку $\mathbf{s_{15}=4}$ и $\mathbf{s_{45}=5}$, сначала кратчайший маршрут между узлами 1 и 5 будет иметь вид 1→ 4→ 5.
Но так как $\mathbf{s_{14}} \neq 4$, узлы 1 и 4 в определяемом пути не связаны одним ребром (но в исходной сети они могут быть связаны непосредственно). Далее следует определить промежуточный узел (узлы) между первым и четвертым узлами. Имеем $\mathbf{s_{14}}$=2 и $\mathbf{s_{24}}$=4, поэтому маршрут 1→ 4 заменяем 1→ 2→ 4. Поскольку $\mathbf{s_{12}}$=2 и $\mathbf{s_{24}}$=4, других промежуточных узлов нет. Комбинируя определенные сегменты маршрута, окончательно получаем следующий кратчайший путь от узла 1 до узла 5: **1→ 2 →4→ 5. Длина этого пути равна 12 у.е.**

+ еще 4 примера нахождения кратчайшего расстояния между узлами сети.

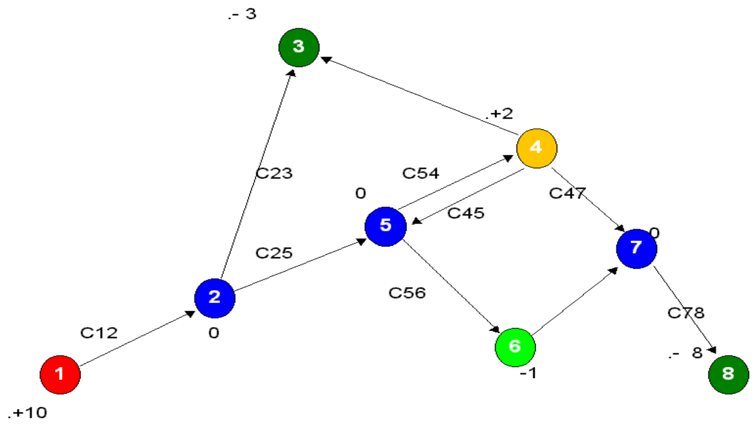
ФИО	Сорокин В.Г.	Группа	Мо99а	Вариант № 33	Дата: 10.07.04

Оптимальное распределение товарооборота по сети

Постановка задачи.

Компания имеет восемь крупных оптовых складов, размещенных в нескольких областях. Отдел сбыта принял решение значительно снизить цену одного дорогостоящего изделия с целью ликвидации образовавшегося запаса этих изделий. Перед началом рекламной компании руководство намерено разместить имеющиеся в наличии запасы на указанных восьми складах в соответствии с прогнозами сбыта в этих районах. Для осуществления этого плана необходимо перераспределить некоторую часть запасов (рисунок 4.4.1).

Рисунок 4.4.1 – Сеть оптовых складов



Пронумерованные узлы в кружках соответствуют восьми складам. Положительное число, стоящее у номера склада, обозначает избыточное количество запасов, которое должно быть распределено в системе. Отрицательное число обозначает потребность данного склада в дополнительных запасах. Запасы на складах 2,5 и 7 должны оставаться неизменными.

Заметим, что изделие может транспортироваться через склады 2,4,5,6,7, в связи с чем эти пункты называются ***промежуточными.*** Все другие склады называются ***источниками***, если в них имеется избыток запасов, и ***стоками***, если требуется дополнительный запас => *склад **1** является источником, а склады **3** и **8** – стоками.*

*Замечание:*модель допускает перевозки между складами 4 и 5 в обоих направлениях. Предположим в данном случае, что $c_{45} \neq c_{54}$по следующей причине: в момент отгрузки изделия у компании имеется возможность использовать собственный автотранспорт только на маршруте 4-5. Ей приходится нести более высокие расходы при перевозках в обратном направлении, так как она вынуждена пользоваться услугами наёмного транспорта.

Проанализировав схему, можно убедиться в том, что пока не решена вся задача, нельзя исключить из рассмотрения ни один из возможных маршрутов перевозок между складами 4 и 5.

Построение таблицы выполним в следующем порядке:

- Выделить строку для каждого ***источника***. Значение $\mathbf{A_i}$ для источника определяется количеством поставляемых из него изделий. ***(склад- 1).***
- Выделить строку и столбец для каждого ***стока.*** Значение $\mathbf{B_j}$ для стока определяется потребностью в изделиях. ***(склад- 3,8).***
- Выделить строку и столбец для каждого ***промежуточного пункта.*** Пусть $\mathbf{T_к}$ –чистый запас рассматриваемого пункта. Если в этом пункте имеется избыток запасов, то $\mathbf{T_к}$- положительное число, если же в этом пункте требуется пополнение запасов, то $\mathbf{T_к}$- отрицательное число. Примем теперь, что для любого пункта ***k*** выполня-
  ются соотношения : $\mathbf{A_k= T_к+B}$ и $\mathbf{B_k=B}$, где **B-** суммарные запасы имеющиеся во ***всех*** пунктах. ***(склад- 2,4,5,6,7. B=12).***
- Ввести величины $x_{ij}, i \neq j$, только для дуг, существующих в исходной сети.
- Для промежуточного пункта **k** ввести $\mathbf{X_{kk}}$ при $\mathbf{C_{kk}=0}$.

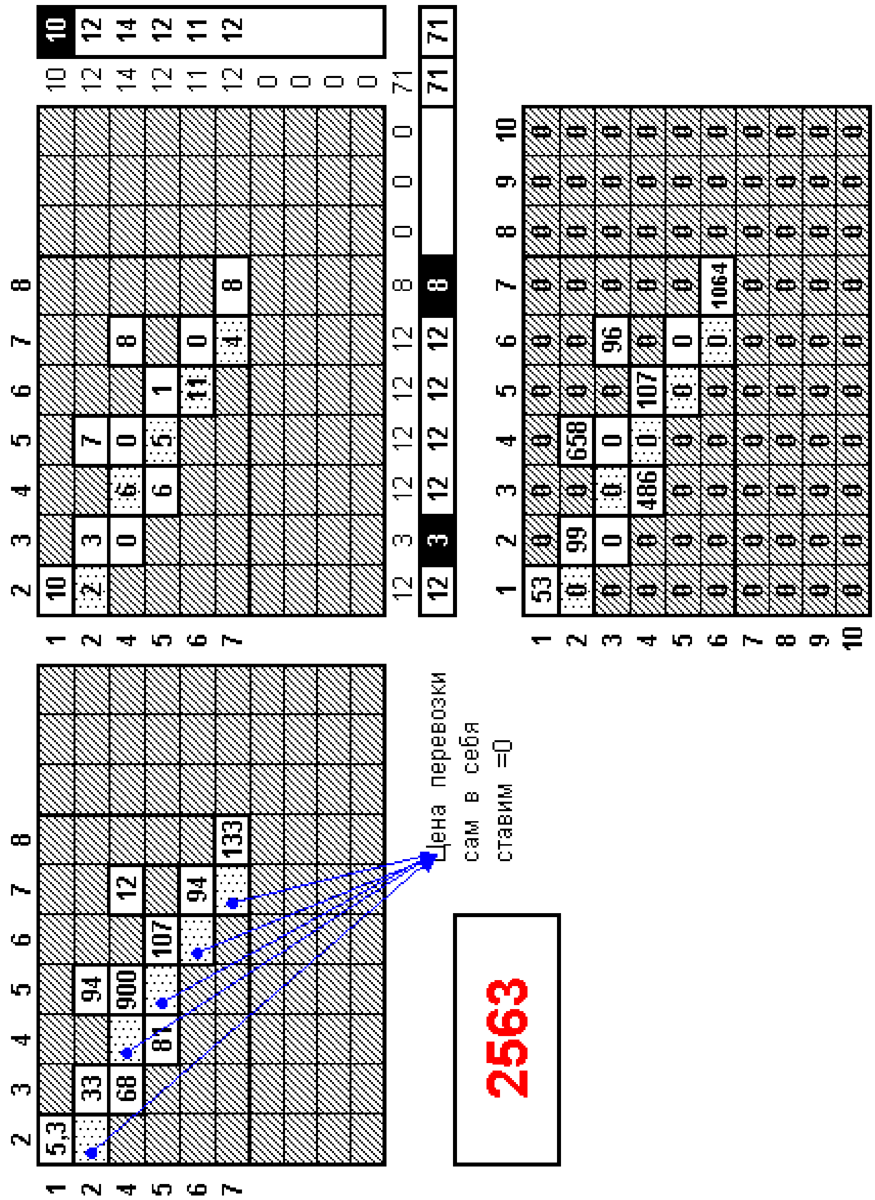


Рисунок 4.4.2 – Просчет модели на MS EXCEL2000

Завершая анализ , перенесем данные рисунка 4.4.2 на рисунок 4.4.1, получим рисунок 4.4.3 :

Склад 1 отправляет три изделия на склад 3 через промежуточный пункт 2, одно изделие на склад 6 через пункты 2 и 5 и шесть изделий – на склад 8 через пункты 2,5,4 и 7. Склад 4 отправляет два изделия на склад 8 через пункт 7.

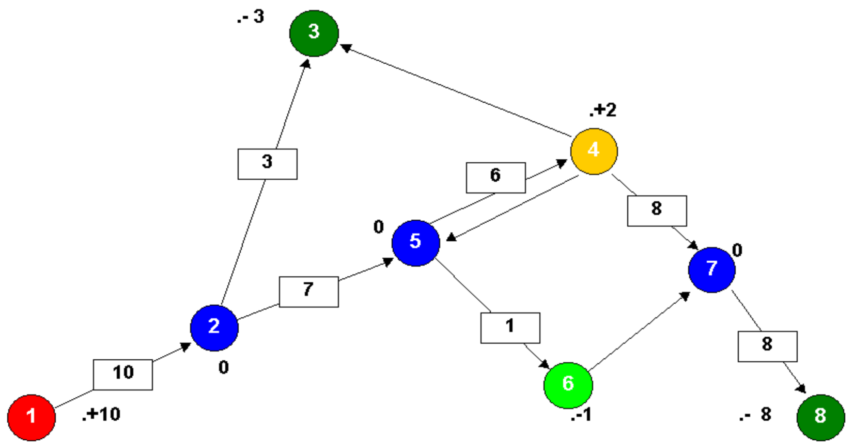


Рисунок 4.4.3 – Сеть оптовых складов после реализации модели

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33 Дата 10.07.04

Классическая модель «бродячего торговца» или модель «коммивояжера»

Пусть имеется n+1 город 0,1 … ,n; для каждой пары городов i и j задано "расстояние" $c_{ij} \geq 0$ у ними. Коммивояжер находится в городе 0, он выезжает из этого города, объезжает все города, посетив каждый ровно один раз и возвращается в город 0. Требуется найти такую последовательность посещения городов, при которой суммарная длина пути минимальна. Матрица расстояний представлена в таблице 1.1

1. Метод ветвей и границ реализации модели «бродячего торговца» (Алгоритм 1)

Определение 1.1

$\min\ f(x) - ?$ $x \in K$ -конечное или счетное $\xrightarrow{\det}$ комбинаторная задача.

Определение 1.2 $\forall f^0 \mid f^0 \geq f(x^*)$ $\xrightarrow{\det}$ верхняя граница задачи.

Определение 1.3

$f_1 \leq f(x) \forall x \in K_1$

$f_2 \leq f(x) \forall x \in K_2$

$\xrightarrow{\det}$ нижняя граница для подмножеств K_1, K_2 $K_1, K_2 \mid \begin{cases} K = K_1 \cup K_2 \\ K_1 \cap K_2 = 0 \end{cases}$

Утверждение 1.1 $f_2 > f^0 \Rightarrow x^* \in K_1$

Построение алгоритма 1:

1. Выбираются пункты "i" и "j"

$$\left.\begin{array}{l} K_1 \xrightarrow{\det} \{\ \text{маршр. из}\ \ i \to j\ \} \\ K_2 \xrightarrow{\det} \{\ \text{маршр. не из}\ \ i \to j\ \} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} K = K_1 \cup K_2 \\ K_1 \cap K_2 = 0 \end{cases}$$

2. Выбираем $\forall$ допустим маршрут "x": $f(x) \geq f(x^*)$

$f^0 \xrightarrow{\det}$ *верхняя граница*

3. Нижняя граница - ?

Алгоритм выбора нижних границ:

$$\boxed{\text{(A): матрица расстояний}} \xrightarrow{\det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\min} K_1 \\ \xrightarrow{\min} K_2 \\ \\ \xrightarrow{\min} K_n \end{array} \Rightarrow \overset{\widetilde{A}}{\begin{pmatrix} a_{11}-K_1 & a_{12}-K_1 & \dots & a_{1n}-K_1 \\ a_{21}-K_2 & a_{22}-K_2 & \dots & a_{2n}-K_2 \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{n1}-K_n & a_{n2}-K_n & \dots & a_{nn}-K_n \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \min & \downarrow \min & \downarrow \min \\ L_1 & L_2 & L_n \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-K_1-L_1 & a_{12}-K_1-L_1 & \dots & a_{1n}-K_1-L_1 \\ a_{21}-K_2-L_2 & a_{22}-K_2-L_2 & \dots & a_{2n}-K_2-L_2 \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{n1}-K_n-L_n & a_{n2}-K_n-L_n & \dots & a_{nn}-K_n-L_n \end{pmatrix} = \widetilde{\widetilde{A}}$$

$A \xrightarrow{\det}$ *матрица расстояний*

$\widetilde{A} \xrightarrow{\det}$ *матрица уменьшенных расстояний*

$\widetilde{\widetilde{A}} \xrightarrow{\det}$ 2-я матрица уменьшенных расстояний

S *– длина p-го маршрута посчитанная на* A

S_1 *– длина p-го маршрута посчитанная на* $\widetilde{A}$

$$\Longrightarrow K = \sum_{i=1}^{n} K_i \Rightarrow S = S_1 + K \quad *$$

S_2 *– длина p-го маршрута посчитанная на* $\widetilde{\widetilde{A}}$

$L = \sum_{i=1}^{n} L_i$

$$\Longrightarrow S_1 = S_2 + L \rightarrow *$$

$$\Rightarrow S = S_2 + L + K = [S_2 \geq 0] \Rightarrow \forall x \in K : S(x) \geq L + K \rightarrow$$

$\rightarrow$ основное неравенство положенное в основу получения нижних границ.

Дано:

	1	2	3	4	5	6
1	N	31	45	19	88	55
2	2	N	22	84	7	35
3	25	43	N	53	57	16
4	78	2	49	N	53	32
5	24	24	5	5	N	14
6	21	26	95	20	36	N

Таблица 1.1 - Матрица расстояний

Решение:

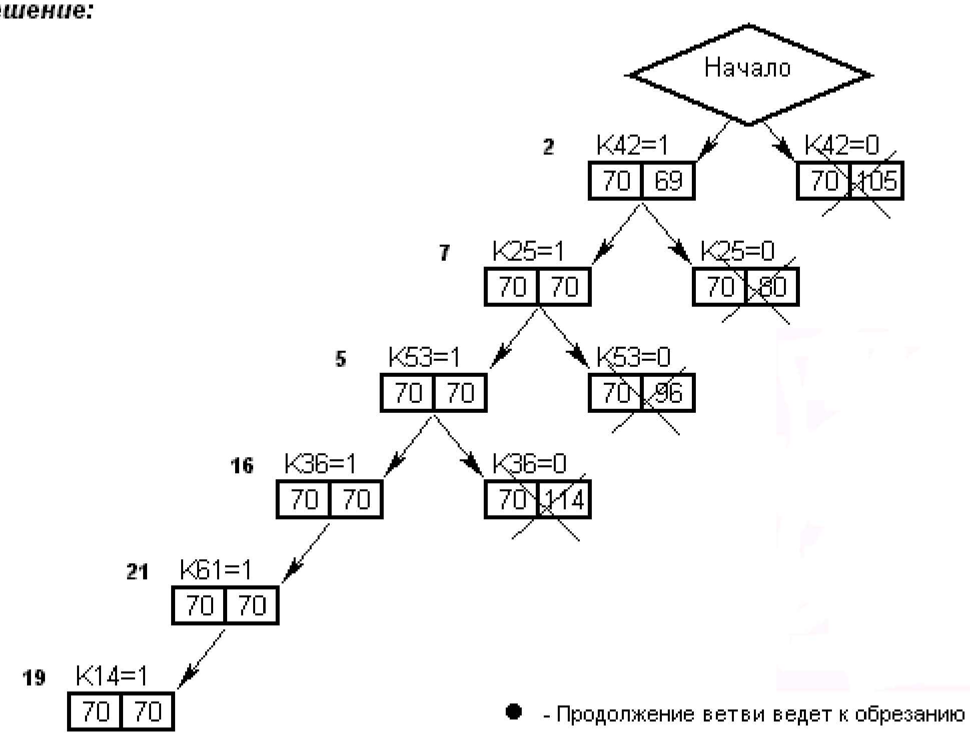


Рис 1.1 - Дерево алгоритма 1, последняя итерация

Ответ: S=(4 − 2 − 5 − 3 − 6 − 1 − 4)= 70

2. Метод ветвей и границ реализации модели «бродячего торговца» (Алгоритм 2)

В отличии от алгоритма 1 – бинарного разбиения, в алгоритме 2 мы разобьем множество К на m подмножеств, таких что

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m; \qquad K_i \cap K_j = 0; \qquad i \neq j$$

Определение 2.1 $\quad f_i \le f(x) \quad \forall x \in K_i$

$\xrightarrow{\text{def}}$ нижняя граница K_i

Определение 2.2 $\quad \forall f^0 \mid f^0 \ge f(x^*)$

$\xrightarrow{\text{def}}$ верхняя граница задачи.

Утверждение 2.1 $\quad f_i > f^0 \Rightarrow x^* \in K_i$

Аналогично: $\quad S(x) \ge L + K$

Дано:

	1	2	3	4	5	6
1	N	31	45	19	88	55
2	2	N	22	84	7	35
3	25	43	N	53	57	16
4	78	2	49	N	53	32
5	24	24	5	5	N	14
6	21	26	95	20	36	N

Таблица 2.1 - Матрица расстояний

Решение:

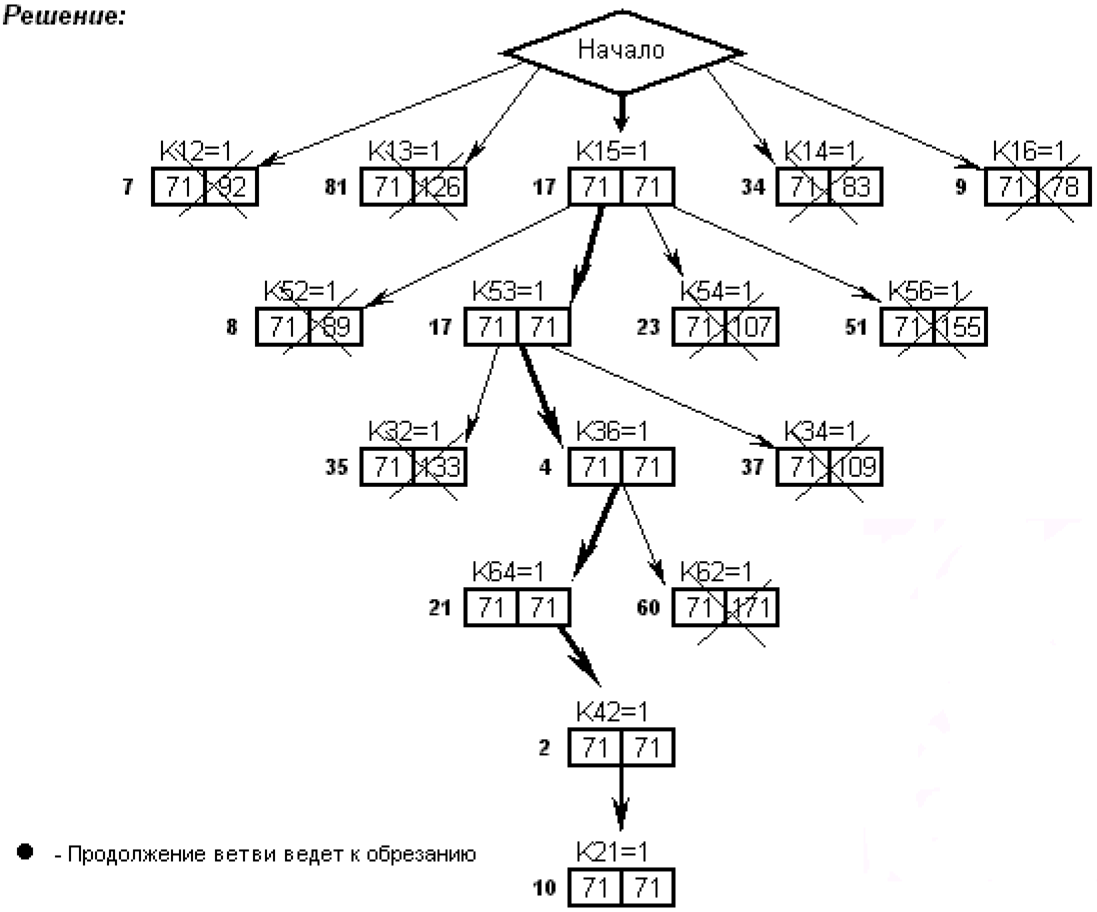


Рис 2.1 - Дерево алгоритма 2, последняя итерация

Ответ: S=(1 – 4 – 2 – 5 – 3 – 6 – 1)= 70

Детерминированная модель управления запасами

.Интенсивность поступления деталей на склад готовой продукции цеха составляет в начале смены 5 дет/мин. в течение первого часа линейно возрастает, достигая к концу его 10 дет/мин., и затем остается постоянной. Полагая, что поступление деталей на склад происходит непрерывно в течение всех семи часов смены, а вывоз деталей со склада производится только в конце работы, записать выражение для уровня запаса в произвольный момент времени и, используя его, найти количество деталей на складе: а) через 30 мин. после начала работы; б) в конце смены.

Решение. По условию в течение смены не происходит выдачи деталей со склада, т. е. *b(t)* = 0 Интенсивность пополнения запаса в течение первого часа линейно возрастает, т.е. a(t) = *k t* + *b*. Учитывая, что a(0) =5, получаем *b*= 5. Так как в конце часа, т. е. при t = 60 a(60) = 10, то 10 = k * 60 + 5, откуда k =1/12. Таким образом, для первого часа смены *a(t)* = (1/12) t + 5 , а затем a(t) =10.

Учитывая продолжительность смены (7 ч = 420 мин), получаем:

$$J(t) = \int_0^t (t/12+5)dt = t^2/24 + 5t,$$

если $0 \le t \le 60$, и

$$J(t) = \int_0^{60} (t/12+5)dt + \int_{60}^{t} 10dt = (t^2/24+5t)\Big|_0^{60} + 10t\Big|_{60}^{t} =$$

$$= 450 + 10t - 600 = 10t - 150$$

если $60 \le t \le 420$

Количество деталей на складе через 30 мин после начала работы J(30) = 900/24 + 5·30 = 187,5,а в конце смены: J(420) = 10*420-150=4050.

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33 Дата 07.07.04

Стохастические модели управления запасами

Рассмотрим стохастические модели управления запасами, у которых спрос является случайным. Этот факт существенным образом сказывается на характере соответствующих моделей и значительно усложняет их анализ, в связи с чем в рамках данного пособия ограничимся рассмотрением наиболее простых моделей.

Предположим, что спрос r за интервал времени T является случайным и задан его закон (ряд) распределения p (r) или плотность вероятности φ (r) (обычно функции p (r) и φ (r) оцениваются на основании опытных или статистических данных). Если спрос r ниже уровня запаса s, то приобретение (хранение, продажа) излишка продукта требует дополнительных затрат c2 на единицу продукта; наоборот, если спрос r выше уровня запаса s, то это при-водит к штрафу за дефицит c3 на единицу продукции.

В качестве функции суммарных затрат, являющейся в стохастических моделях случайной величиной, рассматривают ее среднее значение или математическое ожидание.

В рассматриваемой модели при дискретном случайном спросе r, имеющем закон распределения p(r), математическое ожидание суммарных затрат имеет вид:

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r) \qquad (1.1)$$

В выражении (1.1) первое слагаемое учитывает затраты на приобретение (хранение) излишка s-r единиц продукта (при r<= s), а второе слагаемое — штраф за дефицит на r-s единиц продукта (при r>s). В случае непрерывного случайного спроса, задаваемого плотностью вероятностей φ (r), выражение C(s) принимает вид:

$$C(s) = c_2 \int_0^s (s-r)\varphi(r)dr + c_3 \int_{s+1}^{\infty} (r-s)\varphi(r)dr \qquad (1.2)$$

Задача управления запасами состоит в отыскании такого запаса s, при котором математическое ожидание суммарных затрат (1.1) или (1.2) принимает минимальное значение.

Доказано, что при дискретном случайном спросе r выражение (1.1) минимально при запасе s0, удовлетворяющем неравенствам

$$F(s_0) < \rho < F(s_0+1) \qquad (1.3)$$

а при непрерывном случайном спросе r выражение (1.2) минимально при значении s0, определяемом из уравнения

$$F(s_0) = \rho \qquad (1.4)$$

где

$$F(s) = p(r < s) \qquad (1.5)$$

есть функция распределения спроса r, F(s0) и F(s0 + 1) — ее значения; ρ - плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса, определяемая по формуле:

$$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3} \qquad (1.6)$$

Задача 1. Предприятие закупает агрегат с запасными блоками к нему. Стоимость одного блока равна 5 ден, ед. В случае выхода агрегата из строя из-за поломки блока, отсутствующего в запасе, простой агрегата и срочный заказ нового блока к нему обойдется в 100 ден. ед. Опытное распределение агрегатов по числу блоков, потребовавших замену, представлено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 - Распределение агрегатов по числу блоков, потребовавших замену

Число замененных блоков r	0	1	2	3	4	5	6
Статистическая вероятность (доля) агрегатов p(r), которым потребовалась замена r блоков	0.9	0.05	0.02	0.01	0.01	0.01	0

Необходимо определить оптимальное число запасных блоков, которое следует приобрести вместе с агрегатом.

Решение.
По условию $c_2 = 5$, $c_3 = 100$. Вычислим плотность убытков из-за нехватки запасных блоков по формуле (1.6) :

$$\rho = \frac{100}{5 + 100} = 0.952$$

Учитывая (1.5), найдем значения функции распределения спроса (смотри таблица 1.1).

Таблица 1.2 - Значения функции распределения спроса

s	0	1	2	3	4	5	6
F(s)	0	0.9	0.95	0.97	0.98	0.99	1

Очевидно (смотри таблицу 1.2), что оптимальный запас составит s0 = 2, т.к. он удовлетворяет неравенству (1.3):

$$F(2) < 0.952 < F(3)$$

Ответ: рекомендация - преобрести 2 запастных блока.

Задача 2. Решить задачу 1, при условии непрерывного случайного спроса r, распределённого по показательному закону с функцией распределения

$$F(r) = 1 - e^{-\lambda r} \qquad \text{при } \lambda = 0.98$$

Решение.
Оптимальное число запасных блоков s0 найдём из уравнения (1.4)

$$1 - e^{-\lambda s_0} = \rho$$

, откуда $e^{-\lambda s_0} = 1 - \rho$ и $s_0 = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - \rho)$

при λ= 0.98 $s_0 = \frac{-1}{0.98} \text{Ln}(1 - 0.952) = 3.10 \approx 3$

Ответ: рекомендация - преобрести 3 запастных блока.

Автоматизация модели

Покупка товара производится у предприятия по цене 20руб.за единицу, а продается по цене 23руб. за единицу. В случае, если товар не удается реализовать, производится возврат по цене 17руб. Необходимо определить, сколько требуется закупать единиц продукции, чтобы ожидаемая прибыль была максимальна.

Реализацию модели выполним средствами MS Excel 2000 (хотя не обязательно) , смотри рисунок 6.3.1.

```
Sub vvod():' процедура осуществляющая ввод данных
        Range("продажа") = InputBox("Введите стоимость продажи")
        Range("покупка") = InputBox("Введите стоимость покупки")
        Range("возврат") = InputBox("Введите стоимость возврата")
End Sub
```

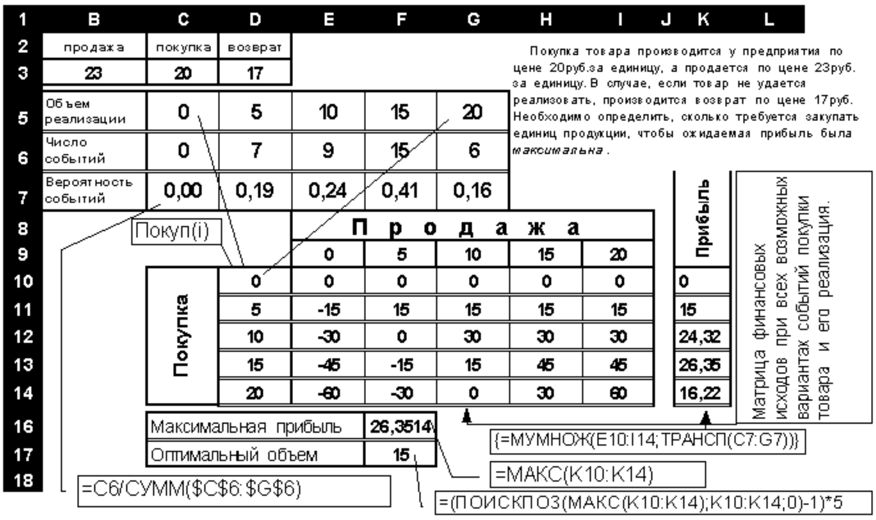


Рисунок 6.3.1 – Вид экрана при реализации модели

Здесь матрица всевозможных исходов реализована при помощи процедуры-функции (**Function** прибыль( ))

Код процедуры – функции:

```
Option Base 1
 Function прибыль(покуп)
N = покуп.Rows.Count
        цпрод = Range("продажа").Value
        цпок = Range("покупка").Value
        цсдач = Range("возврат").Value
ReDim res(N, N)
   For i = 1 To N
      For j = 1 To N
   If i <= j Then res(i, j) = покуп(i) * (цпрод - цпок)
   If i > j Then res(i, j) = покуп(j) * (цпрод - цпок) - _
              (покуп(i) - покуп(j)) * (цпок - цсдач)
      Next j
   Next i
   прибыль = res
End Function
```

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33

1 Решение матричных игр 2 x 2

Игра задана платежной матрицей: $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Средний выигрыш игрока А, если он использует оптимальную смешанную стратегию:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \dots & \dots \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

а игрок В - чистую стратегию В1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы Р), равен цене игры υ :

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = \upsilon$$

, если 2-й игрок применяет стратегию В2 , т.е. $a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = \upsilon$

Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$ получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_A^* и цены игры υ :

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = \upsilon \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = \upsilon \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

и цену игры

$$\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S_B^* - оптимальной стратегии игрока В, получаем, что при любой чистой стратегии игрока А (А1 и А2) средний выигрыш игрока В равен цене игры υ , т.е.

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = \upsilon \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = \upsilon \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Тогда оптимальная стратегия $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ определяется формулами:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Задача. Найти оптимальные стратегии игры.

Решение. Игра задана платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ищем решение в смешанных стратегиях

$$\begin{cases} 1.5\ p_1^* + 2\ p_2^* = \upsilon \\ 3\ p_1^* + 1\ p_2^* = \upsilon \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.5\ q_1^* + 3\ q_2^* = \upsilon \\ 2\ q_1^* + 1\ q_2^* = \upsilon \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Решая эти системы получаем:

$p_1^* = 0.4$ $p_2^* = 0.6$ $q_1^* = 0.8$ $q_2^* = 0.2$

Графическое решение игры заданной платежной матрицей

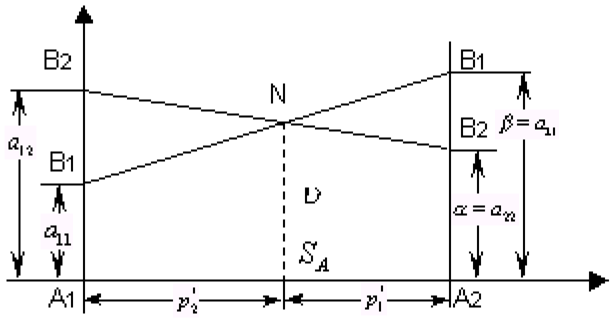


Рис.1.1 - Графическое решение игровой модели

Решение конкретной задачи $P = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

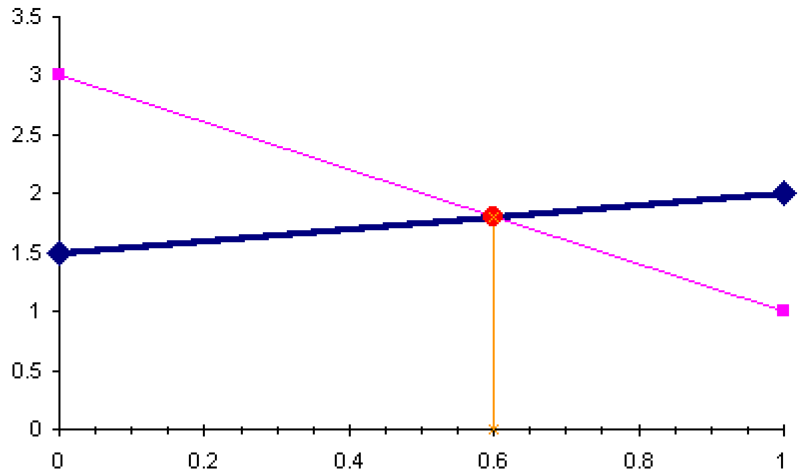


Рис.1.2 - Реализация модели с заданной платежной матрицей (P)

$B_1B_1 \cap B_2B_2 = N: \quad \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1};$

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y - 1.5}{2 - 1.5} \Rightarrow \quad y = 0.5\ x + 1.5$$

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y - 3}{1 - 3} \Rightarrow \quad y = -2\ x + 3$$

$$\begin{cases} y = 0.5\ x + 1.5 \\ y = -2\ x + 3 \end{cases}$$

$0.5\ x + 1.5 = -2\ x + 3$

$2.5\ x = 1.5$

$x = 0.6 = p_2 \qquad p_1 = 1 - 0.6 = 0.4$

Ответ: Таким образом, $p_1^* = 0.4$ $p_2^* = 0.6$, оптимальная стратегия

$S_A^* = (\ 0.4\ ,\ 0.6\ )$ и цена игры $\upsilon = 1.8$.

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33

2 Решение матричных игр в смешанных стратегиях 2 x n

Графическое решение игр. Рассмотрим игру 2xn, в которой игрок А имеет две стратегии:

		y_1	y_2	…	y_n
		B_1	B_2	…	B_n
x_1:	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
$1-x_1$:	A_2	b_{11}	b_{12}	…	b_{1n}

Игра предлагает, что игрок А смешивает стратегии А1 и А2 с соответствующими вероятностями x_1 и $1-x_1$, $0 \le x_1 \le 1$. Игрок В смешивает стратегии $B_1, B_2, \ldots, B_n$ с вероятностями $y_1, y_2, \ldots, y_n$, где $y_i \ge 0$, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$.
В этом случае ожидаемый выигрыш игрока А, соответствующий j-ой чистой стратегии игрока В вычитается в виде:

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, j = 1,2,\ldots,n.$$

Следовательно, игрок А ищет величину x1, которая максимизирует минимум ожидаемых выигрышей:

$$\max_{x_1} \min_{j} \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}\}.$$

Задача. Рассмотрим игру 2x4, в которой платежи выплачиваются игроку А:

	B_1	B_2	B_3	B_n
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

Ищем решение игры в смешанных стратегиях. Ожидаемые выигрыши игрока А, соответствующие чистым стратегиям игрока В, приведены в следующей таблице:

Чистые стратегии игрока В	Ожидаемые выигрыши игрока А
1	$-2\,x_1 + 4$
2	$-1\,x_1 + 3$
3	$1\,x_1 + 2$
4	$-7\,x_1 + 6$

Таблица 2.1- Ожидаемые выигрыши игрока А

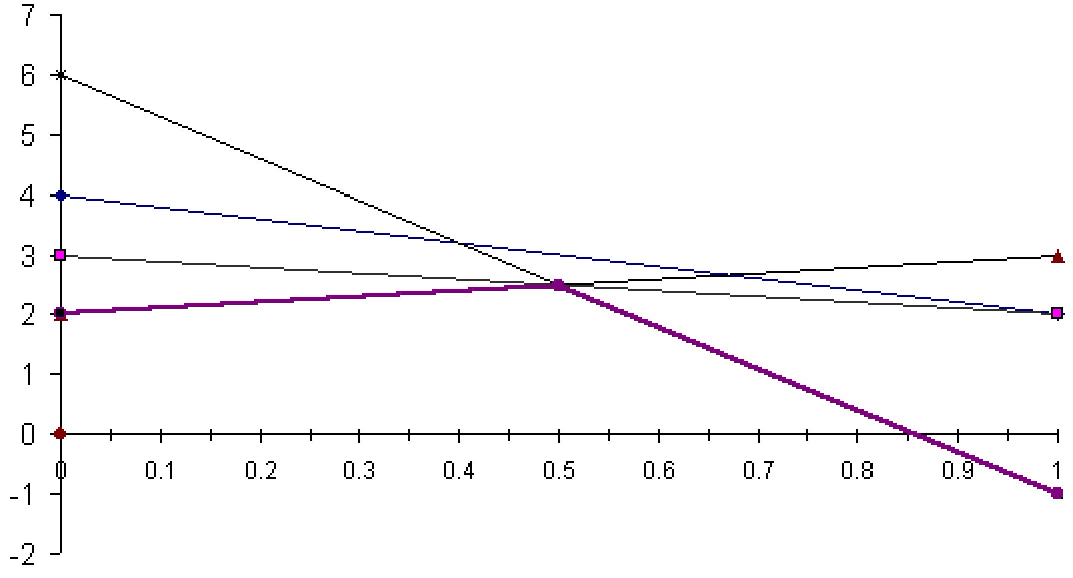


Рисунок 2.1 - Построение нижней огибающей

На рисунке 2.1 изображены четыре прямые линии, соответствующие чистым стратегиям игрока В. Чтобы определить наилучший результат из наихудших, построена нижняя огибающая четырех указанных прямых (изображенная на рисунке толстыми линейными сегментами), которая представляет минимальный (наихудший) выигрыш для игрока А независимо от того, что делает игрок В. Максимум (наилучшее) нижней огибающей соответствует максимальному решению в точке $x_1^* = 0.50$

Эта точка определяется пересечением прямых 3 и 4.

Следовательно, оптимальным решением для игрока А является смешивание стратегий А1 и А2 с вероятностями 0.50 и 0.5.

Соответствующая цена игры υ определяется подстановкой $x_1 = 0.50$ в уравнение прямой либо 3, либо 4, что приводит к следующему:

$$\upsilon = 2.50$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока В определяется двумя стратегиями, которые определяют нижнюю огибающую графика. Это значит, что игрок В может смешивать стратегии В3 и В4, в этом случае $y_4 = 1 - y_3$. Следовательно, ожидаемые платежи игрока В, соответствующие чистым стратегиям игрока А, имеют следующий вид:

Чистые стратегии игрока А	Ожидаемые платежи игрока В
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$

Таблица 2.2 - Ожидаемые платежи игрока В

Наилучшее решение из наихудших для игрока В представляет собой точку минимума верхней огибающей заданных двух прямых.

Эта процедура эквивалентна решению уравнения:

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$$

Его решением будет $y_3 = 0.88$, что определяет цену игры $\upsilon = 2.50$.

Таким образом, решением игры для игрока А является смешивание стратегий А1 и А2 с вероятностями 0.50 и 0.50, а для игрока В - смешивание стратегий В3 и В4 с вероятностями 0.88 и 0.12, цена игры $\upsilon = 2.50$

3 Решение матричных игр методами линейного программирования

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так что конечную игру двух лиц с нулевой суммой можно представить в виде задачи линейного программирования.

Оптимальные значения вероятностей $x_i, i = 1,2,\dots,m$ игрока А могут быть определены путем решения следующей максиминной задачи:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1,$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,m.$$

Чтобы сформулировать эту задачу в виде задачи линейного программирования, положим:

$$\upsilon = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)$$

Отсюда вытекает, что $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge \upsilon, j = 1,2,\dots,n.$

Следовательно, задача игрока А может быть записана в виде:

Максимизировать $z = \upsilon$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge \upsilon, j = 1,2,\dots,n.$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1,$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,m.$$

υ не ограничено в знаке.

Отметим последнее условие, что цена игры υ может быть как положительной, так и отрицательной.

Оптимальные стратегии $y_1, y_2, \dots, y_n$ игрока В определяются путем решения задачи:

$$\min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

$$y_j \ge 0, j = 1,2,\dots,n.$$

Используя процедуру, аналогичную приведенной выше для игрока А, приходим к выводу, что задача для игрока В сводится к следующему:

Минимизировать $w = \upsilon$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le \upsilon, i = 1,2,\dots,m.$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

$$y_j \ge 0, j = 1,2,\dots,n.$$

υ не ограничено в знаке.

Две полученные задачи оптимизируют одну и туже (не ограниченную в знаке) переменную υ, которая является ценой игры. Причиной этого является то, что задача игрока В является двойственной к задаче игрока А. Это означает, что оптимальное решение одной из задач автоматически определяет оптимальное решение другой.

Задача. Решим следующую матричную игру методами ЛП.

$$\begin{array}{c|ccc|} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & -6 & -8 & -5 \\ A_2 & 9 & -1 & 3 \\ A_3 & -8 & -6 & -7 \\ \hline \end{array}$$

Задача линейного программирования для игрока А:

Максимизировать $z = \upsilon$

при ограничениях

$$-6\,x_1 + 9\,x_2 + -8\,x_3 - \upsilon \ge 0,$$
$$-8\,x_1 + -1\,x_2 + -6\,x_3 - \upsilon \ge 0,$$
$$-5\,x_1 + 3\,x_2 + -7\,x_3 - \upsilon \ge 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_{1,2,3} \ge 0$$

υ не ограничено в знаке.

Оптимальным решением является $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ $\upsilon = -1$

Соответствующими двойственными переменными являются

$$y_1 = 0 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = 0$$

Причина того, что переменные y_1, y_2, y_3 не являются положительными, как это должно быть, заключается в том, что задача линейного программирования для игрока А является задачей максимизации с ограничениями вида "$\ge$". При этих условиях, как известно, соответствующие двойственные переменные должны быть отрицательными. Чтобы убедится в том, что причина именно в этом, преобразуем все ограничения вида "$\ge$" в задаче линейного программирования для игрока А в ограничения вида "$\le$" путем умножения каждого неравенства на -1. Соответствующие двойственные переменные будут неотрицательными, как и требуется. Действительно, построение двойственной задачи непосредственно из задачи ЛП для игрока А, показывает, что в двойственной задаче, являющейся соответствующей задачей ЛП для игрока В, должны быть $y_j \le 0$, но в тоже время требуется выполнение условия $-y_1 - y_2 - \ldots - y_j = 1$ что равносильно требованиям $y_j \ge 0$. Преобразуем ограничения-неравенства вида "$\ge$" в задаче линейного программирования для игрока А в ограничения-неравенства вида "$\le$".

Задача линейного программирования для игрока В:

Минимизировать $z = \upsilon$

при ограничениях

$$-6\,y_1 + -8\,y_2 + -5\,y_3 - \upsilon \le 0,$$
$$9\,y_1 + -1\,y_2 + 3\,y_3 - \upsilon \le 0,$$
$$-8\,y_1 + -6\,y_2 + -7\,y_3 - \upsilon \le 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1,$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0,$$

υ не ограничено в знаке.

Оптимальным решением является $y_1 = 0$ $y_2 = 1$ $y_3 = 0$ $\upsilon = -1$

Соответствующими двойственными переменными являются

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 0$$

Проверка

Максимальное $z = \upsilon = -1$ при	Минимальное $z = \upsilon = -1$ при
$x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$	$y_1 = 0$ $y_2 = 1$ $y_3 = 0$
-6 * 0 + 9 * 1 -8 * 0 - (-1) = 10, 10 ≥ 0	-6 * 0 -8 * 1 -5 * 0 - (-1) = -7, -7 ≤ 0
-8 * 0 -1 * 1 -6 * 0 - (-1) = 0, 0 ≥ 0	9 * 0 -1 * 1 + 3 * 0 - (-1) = 0, 0 ≤ 0
-5 * 0 + 3 * 1 -7 * 0 - (-1) = 4, 4 ≥ 0	-8 * 0 -6 * 1 -7 * 0 - (-1) = -5, -5 ≤ 0
0 + 1 + 0 = 1	0 + 1 + 0 = 1
0 = 0, 1 > 0, 0 = 0.	0 = 0, 1 > 0, 0 = 0.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$.

ФИО Сорокин В.Г. Группа Мо99а Вариант № 33 Дата 01.04.04

1 Марковский случайный процесс. Уравнение Колмогорова

Пример 1.1 Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

Решение. Возможные состояния системы: S0 – оба узла исправны; S1 – первый узел ремонтируется, второй исправен; S2 – второй узел ремонтируется, первый исправен; S3 – оба узла ремонтируются. Граф системы приведён на рисунке 1.1.

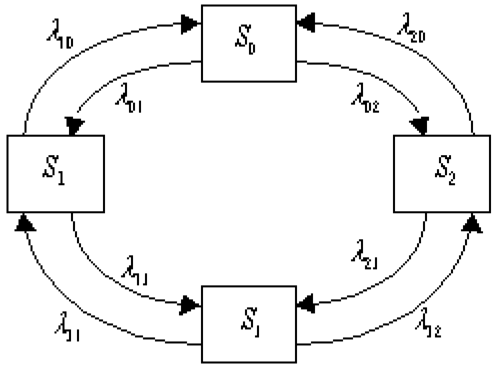


Рисунок 1.1 – Граф состояний случайного процесса

Рассмотрим математическое описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем на примере случайного процесса, граф которого изображён на рисунке 1.1. Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j проходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями $\lambda_{ij}\,(i, j = 0,1,2,3)$ так, переход системы из состояния S0 в S1 будет происходить под воздействием потока отказов первого узла, а обратный переход из состояния S1 в S0 – под воздействием потока "окончаний ремонтов" первого узла и т.п. Рассматриваемая система S имеет четыре возможных состояния S0, S1, S2, S3. Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i(t) = 1 \qquad (1.1)$$

Колмогоровым получена система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} - \lambda_{02})\,p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} - \lambda_{13})\,p_1, \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} - \lambda_{23})\,p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} - \lambda_{32})\,p_3. \end{cases}$$

Словесно: В левой части каждого из них стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в это состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного.

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Для системы S с графом состояний, изображённом на рисунке 1.1, такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} - \lambda_{02})\,p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} - \lambda_{13})\,p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} - \lambda_{23})\,p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} - \lambda_{32})\,p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Задача 1.1 Найти предельные вероятности для системы S из примера 1.1, граф состояний которой приведён на рисунке 1.1, при

$\lambda_{10} = 2 \quad \lambda_{01} = 1 \quad \lambda_{20} = 3 \quad \lambda_{02} = 2 \quad \lambda_{13} = 2 \quad \lambda_{31} = 3 \quad \lambda_{12} = 2 \quad \lambda_{21} = 1$

Решение. Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы, имеет вид (1.2) или:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2\ p_1 + \ 3\ p_2, \\ 4p_1 = 1\ p_0 + \ 3\ p_3, \\ 4p_2 = 2\ p_0 + \ 2\ p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \qquad (1.3)$$

(Вместо “лишнего” уравнения системы (1.2) записано условие (1.1)).

Решив систему (1.3), получим: $p_0 = 0.4, \quad p_1 = 0.2, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.13.$

Т.е. в предельном, стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет находится в состоянии S0 (оба узла исправны), 20% - в состоянии S2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% времени – в S3 (оба узла ремонтируются).

Задача 1.2 Найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы S в условиях задачи 1.1, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход 10 и 6 ден.ед., а их ремонт требует затрат соответственно 4 и 2 ден.ед. (табл.1.1).

Таблица 1.1 - Данные задачи 1.2

№ узла	Доход	Расход
1 узел(автомат)	10	4
2 узел(автомат)	6	2

Выпишем предельные вероятности из ответа задачи 1.1 на рисунок 1.2 и найдем доходы и расходы узлов:

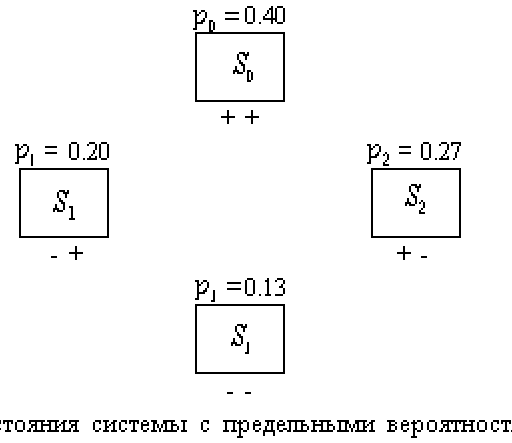


Рисунок 1.2 – Состояния системы с предельными вероятностями

Доходы 1-го автомата:

$(p_0 + p_2) \cdot 10 = (0.4 + 0.27) * 10 = 6.7$

Доходы 2-го автомата:

$(p_0 + p_1) \cdot 6 = (0.4 + 0.2) * 6 = 3.6$

$\sum = 10.3$ доходы

Расходы 1-го автомата:

$(p_1 + p_3) \cdot 4 = (0.2 + 0.13) * 4 = 1.32$

Расходы 2-го автомата:

$(p_2 + p_3) \cdot 2 = (0.27 + 0.13) * 2 = 0.8$

$\sum = 2.12$ расходы

Ответ: Общий доход системы = доход - расход = 10.3 - 2.12 = 8.18 ден.ед.

Задача 1.3 Оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения в 2 раза среднего времени ремонта каждого из узлов, если при этом придётся в 2 раза увеличить затраты на ремонт каждого узла (в единицу времени).

Шаг 1. Имеем первоначальный граф и таблицу “дохода-расхода”

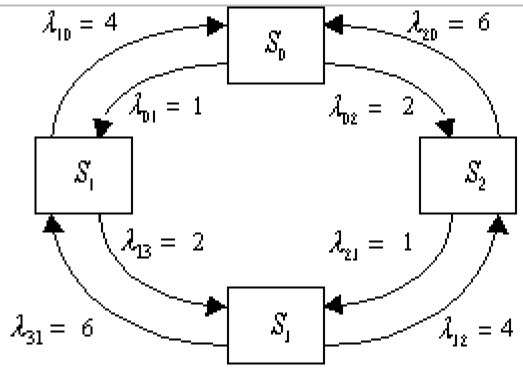


Рисунок 1.3 – Рисунок к задачи 1.3

Уменьшение в 2 раз среднего времени ремонта приводит к увеличению частоты возврата к работе (смотри внешнее "кольцо" рисунка 1.3), т.е.:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{10} = 4; \quad \lambda_{20} = 6; \quad \lambda_{31} = 6; \quad \lambda_{32} = 4. \\ \text{Внутреннее "кольцо" графа осталось прежнее:} \\ \lambda_{01} = 1; \quad \lambda_{02} = 2; \quad \lambda_{13} = 2; \quad \lambda_{23} = 1. \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (1+2)\ p_0 = 4\ p_1 + 6\ p_2, \\ (4+2)\ p_1 = 1\ p_0 + 6\ p_3, \\ (6+1)\ p_2 = 2\ p_0 + 4\ p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3p_0 = 4\ p_1 + 6\ p_3, \\ 6\ p_1 = 1\ p_0 + 6\ p_2, \\ 7\ p_2 = 2\ p_0 + 4\ p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_0 = 0.60 \\ p_1 = 0.15 \\ p_2 = 0.20 \\ p_3 = 0.05 \end{array}\right.$$

Шаг 2. Увеличение затрат на ремонт в 2 раза.

Таблица 1.2 – Измененные данные задачи 1.3

№ узла	Доход	Расход
1 узел(автомат)	10	8
2 узел(автомат)	6	4

Далее аналогично задаче 1.2:

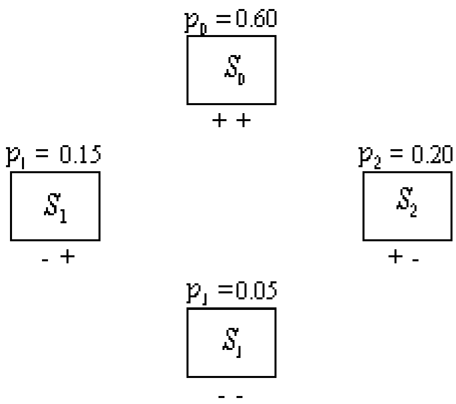


Рисунок 1.4 – Состояния системы с предельными вероятностями

Доходы 1-го автомата:

$(p_0 + p_2) \cdot 10 = (0.6 + 0.2) * 10 = 8$

Доходы 2-го автомата:

$(p_0 + p_1) \cdot 6 = (0.6 + 0.15) * 6 = 4.5$

$\sum = 12.5$ доходы

Расходы 1-го автомата:

$(p_1 + p_3) \cdot 8 = (0.15 + 0.05) * 8 = 1.6$

Расходы 2-го автомата:

$(p_2 + p_3) \cdot 4 = (0.2 + 0.05) * 4 = 1$

$\sum = 2.60$ расходы

Общий доход системы = доход - расход = 12.5 - 2.6 = 9.9 ден.ед.

2.1 СМО - процесса гибели и размножения

В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов – процесс гибели и размножения.
Граф состояний процесса гибели и размножения имеет следующий вид:

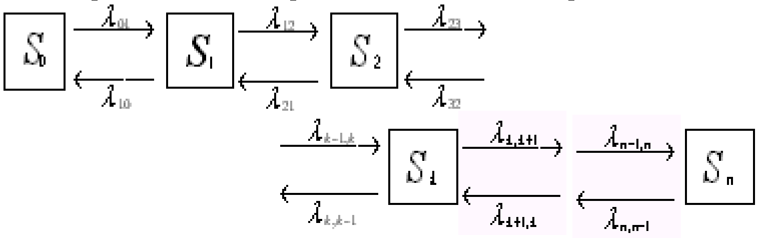


Рисунок 2.1 – Граф процесса гибели и размножения

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k$
Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояние с соседними номерами, т. е. из состояния S_k возможны переходы только либо в состояние S_{k-1}, либо в состояние S_{k+1}. Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$
По графу, представленному на рисунке 2.1, составим и решим алгебраическое уравнение для предельных вероятностей состояний .
В соответствии с правилом составления таких уравнений получим:
для состояния S_0 :

$$\lambda_{11}\rho_1 = \lambda_{11}\rho_1 \qquad (2.1)$$

для состояния $S_1 \to (\lambda_{12}+\lambda_{10})\rho_1 = \lambda_{01}\rho_0 + \lambda_{21}\rho_2$, которое с учетом (2.1) приводится к виду:

$$\lambda_{12}\rho_1 = \lambda_{21}\rho_2 \qquad (2.2)$$

Аналогично, записывая уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01}\rho_0 = \lambda_{10}\rho_1, \\ \lambda_{12}\rho_1 = \lambda_{21}\rho_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{k-1,k}\rho_{k-1} = \lambda_{k,k-1}\rho_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n-1,n}\rho_{n-1} = \lambda_{n,n-1}\rho_n \end{cases} \qquad (2.3)$$

к которой добавляется нормировочное условие

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = 1 \qquad (2.4)$$

Решая систему (2.3) и (2.4), можно получить:

$$\rho_0 = \left(1 + \frac{\lambda 01}{\lambda 10} + \frac{\lambda 12 \lambda 01}{\lambda 21 \lambda 10} + \ldots + \frac{\lambda n-1, n \ldots \lambda 12 \lambda 01}{\lambda n, n-1 \ldots \lambda 21 \lambda 10}\right)^{-1} \qquad (2.5)$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}\rho_0, \rho_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\rho_0, \ldots, \rho_n = \frac{\lambda_{n-1,n \ldots}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1 \ldots}\lambda_{21}\lambda_{10}}\rho_0 \qquad (2.6)$$

Легко заметить, что в формулах (2.6) для $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ коэффициенты при ρ_0 есть слагаемые, стоящие после единицы в формуле (2.5). Числители этих коэффициентов представляют произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо к данному состоянию S_k ,$(k = 1,2,\ldots,n)$, знаменатели - произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до состояния S_k .

Задача Граф состояний процесса гибели и размножения имеет вид:

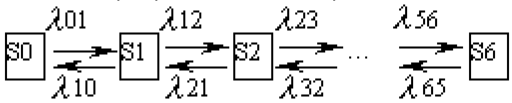


Рисунок 2.2 - Граф состояний

Необходимо найти предельные вероятности состояний:

а) для S=S2.

б) для S=S6.

Данные интенсивностей приведены в таблице 2.1

Таблица 2.1 - Значения интенсивностей

	0	1	2	3	4	5	6
$\lambda_{k,k+1}$	90	90	90	90	90	90	0
$\lambda_{k+1,k}$	30	60	90	120	150	180	1

Решение По формулам (2.5) и (2.6) найдём предельные вероятности для S=S2

$$p_0 = \left[1 + \frac{90}{30} + \frac{90 \cdot 90}{60 \cdot 30} \right] = 0.118 \qquad p_1 = \frac{90}{30} \cdot 0.118 = 0.354$$

$$p_2 = \frac{90 \cdot 90}{60 \cdot 30} \cdot 0.156 = 0.531$$

В установившемся, стационарном режиме в среднем 11.8% времени система будет находиться в состоянии S0, 35.4% - в состоянии S1 и 53.1% - в S2.

Найдём предельные вероятности состояний для S=S6

$$p_0 = \left[1 + \frac{90}{30} + \frac{90 \cdot 90}{60 \cdot 30} + \frac{90 \cdot 90 \cdot 90}{90 \cdot 60 \cdot 30} + \frac{90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{120 \cdot 90 \cdot 60 \cdot 30} + \right.$$

$$\left. + \frac{90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{150 \cdot 120 \cdot 90 \cdot 60 \cdot 30} + \frac{90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{180 \cdot 150 \cdot 120 \cdot 90 \cdot 60 \cdot 30} \right] = 0.052$$

$$p_1 = \frac{90}{30} \cdot 0.052 = 0.1560 \qquad p_2 = \frac{90 \cdot 90}{60 \cdot 30} \cdot 0.052 = 0.234$$

$$p_3 = \frac{90 \cdot 90 \cdot 90}{90 \cdot 60 \cdot 30} \cdot 0.052 = 0.234$$

$$p_4 = \frac{90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{120 \cdot 90 \cdot 60 \cdot 30} \cdot 0.052 = 0.176$$

$$p_5 = \frac{90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{150 \cdot 120 \cdot 90 \cdot 60 \cdot 30} \cdot 0.052 = 0.105$$

$$p_6 = \frac{90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{180 \cdot 150 \cdot 120 \cdot 90 \cdot 60 \cdot 30} \cdot 0.052 = 0.053$$

В установившемся, стационарном режиме в среднем 5.2% времени система будет находиться в состоянии S0, 15.6% - в состоянии S1, 23.4% - в S2, 23.4% - в состоянии S3, 17.6% - в состоянии S4,10.5% - в состоянии S5 и 5.3% - в состоянии S6.

3.1 Одноканальная СМО с отказами

Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет два состояния: S0 — канал свободен, S1 — канал занят. Размеченный граф состояний представлен на рисунке 3.1

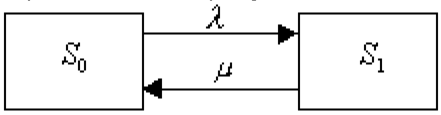


Рисунок 3.1 – Размеченный граф

В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda\, p_0 = \mu\, p_1, \\ \mu\, p_1 = \lambda\, p_0, \end{cases} \qquad (3.1)$$

т.е. система вырождается в одно уравнение. Учитывая нормировочное условие $p_0 + p_1 = 1$ найдем из (3.1) предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \qquad (3.2)$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии So (когда канал свободен) и S1 (когда канал занят), т.е. Определяют соответственно относительную пропускную способность Q системы и вероятность отказа Ротк :

$$P_0 = Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad (3.3)$$

$$P_1 = P_{отк.} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \qquad (3.4)$$

Абсолютную пропускную способность найдем, умножив относительную пропускную способность Q на интенсивность потока отказов

$$Q \cdot \lambda = A = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}. \qquad (3.5)$$

3.2 Многоканальная система с отказами

Рассмотрим классическую задачу Эрланга.
Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.
Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.
Система S (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): $S_0, S_1, \dots, S_k, \dots, S_n$, где Sk— состояние системы, когда в ней находится k заявок, т.е. занято k каналов.
Граф состояний СМО соответствует процессу гибели и размножения и показан на рисунке 3.2.

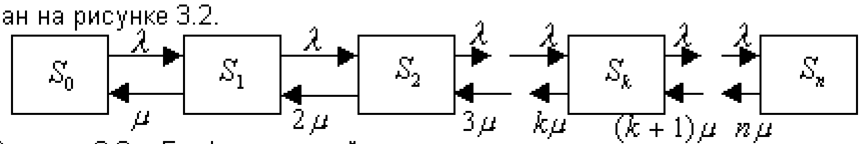


Рисунок 3.2 – Граф состояний

Поток заявок последовательно переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое с одной и той же интенсивностью λ. Интенсивность же потока обслуживании, переводящих систему из любого правого состояния в соседнее левое состояние, постоянно меняется в зависимости от состояния.
Если СМО находится в состоянии S2 (два канала заняты), то она может перейти в состояние S1 (один канал занят), когда закончит обслуживание либо первый, либо второй канал, т.е. суммарная интенсивность их потоков обслуживании будет 2μ. Аналогично суммарный поток обслуживании, переводящий СМО из состояния S3 (три канала заняты) в S2, будет иметь интенсивность 3μ,может освободиться любой из трех каналов и т.д. Используя (3.5) для схемы гибели и размножения получим для предельной вероятности состояния:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \dots + \frac{\lambda n}{n!\mu^n}\right)^{-1} \qquad (3.6)$$

где члены разложения $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda^2}{2!\mu^2}, \dots, \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ будут представлять собой коэффициенты при p_0 в выражениях для предельных вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$
Величина

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (3.7)$$

называется приведенной интенсивностью потока заявок или интенсивностью нагрузки канала. Она выражает среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки. Теперь

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^k}{k!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \qquad (3.8)$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0,\ \ldots,\ p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0. \qquad (3.9)$$

Формулы (3.8) и (3.9) для предельных вероятностей получили названия формул Эрланга в честь основателя теории массового обслуживания.

Вероятность отказа СМО есть предельная вероятность того, что все n каналов системы будут заняты, т.е.

$$P_n = P_{отк.} = \frac{\rho^n}{n!}p_0. \qquad (3.10)$$

Относительная пропускная способность — вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{отк.} = 1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0 \qquad (3.11)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right). \qquad (3.12)$$

Задача **Вариант №** 33

а) одноканальная система:

Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ Поток обслуживания имеет интенсивность μ . Необходимо найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности. Размеченный граф состояний представлен на рисунке 3.3.

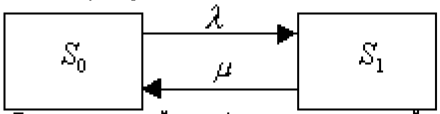


Рисунок 3.3 – Размеченный граф одноканальной системы

Исходные данные:

λ = 90 μ = 30

Решение

По формулам (3.2) найдем

$$p_0 = \frac{30}{90+30} = 0.25 \qquad p_1 = \frac{90}{90+30} = 0.75$$

В установившемся, стационарном режиме в среднем 25% времени система будет находиться в состоянии S0, 75% - в состоянии S1.

Найдем относительную пропускную способность Q системы и вероятность отказа Ротк, используя формулы (3.3) и (3.4):

$$p_0 = Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 0.25 \qquad p_1 = P_{отк.} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 0.75$$

Абсолютную пропускную способность найдем, умножив относительную пропускную способность Q на интенсивность потока отказов

$$Q \cdot \lambda = A = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} = \frac{90 \cdot 30}{90+30} = 22.5$$

Ответ: $p_0 = 0.25$, $p_1 = 0.75$, $Q = 0.25$, $P_{отк} = 0.75$, $A = 22.5$.

б) многоканальная система:

Для задачи Эрланга найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности. Граф состояний представлен на рисунке 3.4.

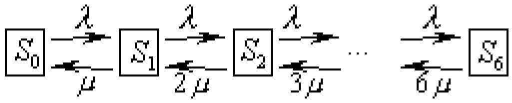


Рисунок 3.4 – Размеченный граф многоканальной системы

Исходные данные: λ = 90, μ = 30.

Решение

Найдем ρ по формуле (3.7):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{90}{30} = 3$$

Найдем предельные вероятонсти состояния СМО, если занят один канал (S1), используя формулы (3.8), (3.9) :

$$p_0 = (1+\rho)^{-1} = 0.25 \quad \text{и} \quad p_1 = \rho \cdot p_0 = 0.75$$

Вероятность отказа СМО (предельная вероятность того, что этот канал будет занят)

$$P_{отк} = \frac{\rho^1}{1!} p_0 = \frac{3}{1} 0.25 = 0.75$$

Вероятность того, что заявка будет обслужина, расчитуется по формуле (3.11)

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0.75 = 0.25$$

Абсолютная пропускная способность равна:

$$A = \lambda Q = 90 \cdot 0.25 = 22.5$$

Найдем предельные вероятонсти состояния СМО, если занято два канала (S2):

$$p_0 = (1+\rho+\frac{\rho^2}{2!})^{-1} = 0.118 \qquad p_1 = \rho \cdot p_0 = 3 \cdot 0.118 = 0.353$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0.529$$

Вероятность отказа СМО :

$$P_{отк} = p_2 = 0.529$$

Вероятность того, что заявка будет обслужина, равна:

$$Q = 1 - P_{отк} = 0.4706$$

Абсолютная пропускная способность равна:

$$A = 42.353$$

Занято три канала (система находится в состоянии (S3))

$$p_0 = (1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!})^{-1} = 0.077 \quad p_1 = \rho \cdot p_0 = 3 \cdot 0.077 = 0.231$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0.346 \qquad p_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = 0.346$$

$$P_{отк} = p_3 = 0.346 \quad Q = 1 - P_{отк} = 0.654 \quad A = \lambda Q = 58.86$$

Занято четыре канала (система находится в состоянии (S4)):

$$p_0 = (1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!})^{-1} = 0.061 \qquad p_1 = \rho \cdot p_0 = 0.183$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0.275 \qquad p_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = 0.2748 \qquad p_4 = \frac{\rho^4}{4!} \cdot P_0 = 0.2061$$

$$P_{отк} = p_4 = 0.2061 \qquad Q = 1 - P_{отк} = 0.7939 \qquad A = \lambda Q = 71.451$$

Занято пять каналов (система находится в состоянии (S5)):

$$p_0 = (1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{5!})^{-1} = 0.054 \qquad p_1 = \rho \cdot p_0 = 0.163$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0.2446 \qquad p_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = 0.2446 \qquad p_4 = \frac{\rho^4}{4!} \cdot P_0 = 0.1834$$

$$p_5 = \frac{\rho^5}{5!} \cdot P_0 = 0.11005 \qquad P_{отк} = 0.11005 \qquad Q = 0.88995 \qquad A = 80.09550$$

Занято шесть каналов (система находится в состоянии (S6)):

$$p_0 = (1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{5!}+\frac{\rho^6}{6!})^{-1} = 0.0515 \qquad p_1 = \rho \cdot p_0 = 0.1545$$

$$p_2 = 0.2318 \qquad p_3 = 0.2318 \qquad p_4 = 0.17386 \qquad p_5 = 0.10431$$

$$p_6 = \frac{\rho^6}{6!} \cdot P_0 = 0.05216 \qquad P_{отк} = 0.05216 \qquad Q = 0.947843$$

$$A = 85.30586$$

Литература

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999. – 320с.

2. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб. для вузов /Под. ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. –436с.

3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учеб. пособие для студ. втузов. – 2-е изд., стер. – М.:Высш. шк., 2001. – 208с.

4. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций. – СПб: Питер, 2001. –192с.

5. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов /Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.:Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407с.

6. Таха, Хэмди, А. введение в исследование операций, 6-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912с.

7. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 240с.