

Лекция № 13

Обобщенные координаты, обобщенные скорости. Число степеней свободы.

Обобщенные координаты – это независимые друг от друга величины, которыми однозначно определяется положение механической системы.

В качестве обобщенных координат выбирают угловые (φ) линейные (\bar{S}) перемещения тел, входящих в систему. Общее их обозначение – q .

Например: кривошипно-шатунный механизм. За обобщенную координату можно принять угол φ – поворот кривошипа, то есть $q = \varphi$; или для ползуна линейное перемещение $q = S$.

Обобщенными скоростями называется производная по времени от обобщенных координат: $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$; $\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}$; $\dot{q}_S = \frac{dq_S}{dt}$.

Число степеней свободы S механической системы – это число ее независимых возможных перемещений, которые можно сообщить точкам системы в фиксированный момент времени.

S – обозн. q_1 ; $q_2 \dots q_S$.

Рассмотрим систему с n – материальными точками с S степенями свободы, к которым приложены силы \bar{F}_1 ; $\bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$, положение которых определяется радиус-вектором $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1; q_2 \dots q_S)$.

Дадим системе возможное перемещение $\delta \bar{r}_k$ и определим сумму возможных работ на этом перемещении:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k.$$

Возможное перемещение точек системы найдем с помощью приращения обобщенных координат $(\delta q_1; \delta q_2 \dots \delta q_S)$.

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i; \quad (i = 1 \dots S).$$

Подставим значения $\delta \bar{r}_k$ в сумму возможных работ:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \sum_{i=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = [\text{изменим порядок суммирования}] =$$

$$\sum_{i=1}^S \delta q_i \cdot \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

Обозначим $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = Q_i; \quad (i = 1 \dots S) \Rightarrow$

Q_i – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i .

Сумма возможных работ:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \delta q_1 \cdot Q_1 + \delta q_2 \cdot Q_2 + \dots + \delta q_S \cdot Q_S.$$

Обобщенная сила – это величина, стоящая при соответствующих приращениях обобщенных координат в выражении возможной работы активных сил, приложенных к механической системе.

Дадим системе такое возможное перемещение при котором:

$$\delta q_1 \neq 0; \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_S = 0.$$

Сумма возможных работ на этом перемещении будет равна:

$$\left(\sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_1 = \delta q_1 \cdot Q_1 \Rightarrow \text{обобщенная сила будет равна}$$

$$Q_1 = \frac{(\sum \delta A_k)_1}{\delta q_1} \quad \text{или}$$

$$Q_i = \frac{(\sum \delta A_k)_i}{\delta q_i} - \text{обобщенная сила} \quad (13.1)$$

$$(i = 1 \dots S)$$

Обобщенная сила по некоторой обобщенной координате равна отношению возможной работы сил, приложенных к системе, на изменение этой координаты к ее приращению.

Принцип возможных перемещений в обобщенных координатах.

Запишем принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^e = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \quad (*)$$

Представим приращение $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \Rightarrow$ подставим его в

уравнение (*) и поменяем местами суммы:

$$\sum_{i=1}^S \delta q_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = 0 ,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \Rightarrow Q_i - \text{активная обобщенная сила.}$$

Тогда принцип возможных перемещений через обобщенную силу и обобщенную координату принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n \delta q_i \cdot Q_i = 0 - (3.12) \text{ принцип возможных перемещений в обобщенных координатах.}$$

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах.

Запишем общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^{\dot{a}} + \sum \delta A_k^{\dot{o}} = 0 \text{ или } \sum \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum \bar{O}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0 .$$

Выразим $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1; q_2 \dots q_S)$ - в S - обобщенных координатах, через

приращение $\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i ;$ (**). Значения (**) подставим в общее

уравнение динамики, поменяв суммы местами:

$$\sum_{i=1}^S \delta q_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^a \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^n \bar{O}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{где } \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^a \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = Q_i^a - \text{активная обобщенная сила;}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \bar{O}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = Q_i^{\dot{o}} - \text{обобщенная сила инерции.}$$

$$\sum_{i=1}^S \delta q_i \cdot (Q_i^{\dot{a}} + Q_i^{\dot{o}}) = 0 - (13.3) \text{ общее уравнение динамики в обобщенных}$$

координатах.

$$\text{где } \delta q_i \neq 0 \Rightarrow (Q_i^{\dot{a}} + Q_i^{\dot{o}}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, S).$$

Уравнение Лагранжа II рода.

Для вывода уравнения запишем общее уравнение динамики в обобщенных координатах.

$$\sum_{i=1}^S \delta q_i \cdot (Q_i^{\dot{}} + Q_i^{\ddot{}}) = 0 ; \text{ так как } \delta q_i \neq 0 \Rightarrow Q_i^{\dot{}} + Q_i^{\ddot{}} = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, S) \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_i^{\dot{}} = -Q_i^{\ddot{}}.$$

Запишем обобщенную силу инерции: $Q_i^{\ddot{}} = \sum \bar{O}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$, так как

$$\bar{O}_k = -m_k \bar{a}_k \Rightarrow Q_i^{\ddot{}} = -\sum m_k \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

Выразим обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы.

Запишем очевидное равенство:

$$\frac{d}{dt} \left(\bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \bar{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \bar{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right). \quad (13.4)$$

$$\text{Рассмотрим из (13.4) } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = [\text{меняем местами}] = \\ = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d \bar{r}_k}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial q_i} \quad (13.5)$$

Представим радиус-вектор \bar{r}_k как функцию S – обобщенных координат.

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1; q_2 \dots q_S) \quad (13.6)$$

Скорость $\bar{V}_k = \frac{d \bar{r}_k}{dt}$; учитывая зависимость (13.6) будет иметь вид:

$$\bar{V}_k = \frac{d \bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} \cdot \dot{q}_S ;$$

где $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$; $(i = 1, 2, \dots, S)$ – обобщенная скорость.

Возьмем частную производную от скорости \bar{V}_k по обобщенной скорости \dot{q}_i . Тогда из уравнения скорости необходимо взять одно слагаемое. Учитывая это будем иметь:

$$\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \quad (13.7)$$

Значения (13.5) и (13.7) подставим в уравнение (13.4)

$$\frac{d}{dt} \left(\bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\text{Внесем } \bar{V}_k \text{ под дифференциал: } \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_k^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_k^2}{\partial q_i}.$$

Обобщенная сила инерции:

$$\begin{aligned} Q_i^{\dot{O}} &= - \sum m_k \cdot \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = - \sum m_k \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_k^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_k^2}{\partial q_i} \right] = \\ &= [\text{внесем под дифференциал } \sum m_k] = - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\sum m_k V_k^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \cdot \left(\frac{\sum m_k V_k^2}{2} \right) \right] = \\ &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i}. \\ Q_i^{\dot{O}} &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad - \quad (13.8) \quad \text{обобщенная сила инерции, через} \end{aligned}$$

кинетическую энергию системы.

Используя ранее общее уравнение динамики в обобщенных координатах, получили $Q_i^{\dot{O}} = -Q_i$, тогда подставив (13.8) будем иметь:

$$- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = -Q_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad - \quad (13.9) \quad \text{уравнение Лагранжа}$$

II рода.

где q_i - обобщенная координата;

\dot{q}_i - обобщенная скорость;

$$Q_i \text{ - обобщенная сила} \Rightarrow Q_i = \frac{(\sum \delta \dot{A}_k)_i}{\delta q_i}.$$

($i = 1 \dots S$)

Разность полной производной по времени от частной производной от кинетической энергии системы по обобщенной скорости и частной производной от кинетической энергии по обобщенной координате равна обобщенной силе.

Составляется столько уравнений Лагранжа II рода, сколько степеней свободы имеет система.