

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
АВТОМОБІЛЬНО – ДОРОЖНИЙ ІНСТИТУТ**

Б.І. Піндус

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА
РІДИНИ І ГАЗУ**

Горлівка 2014

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
АВТОМОБІЛЬНО – ДОРОЖНИЙ ІНСТИТУТ**

Б.І. Піндус

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА
РІДИНИ І ГАЗУ
(КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ)**

Затверджено методичною
комісією інституту як навчальний
посібник для студентів факультету
”Автомобільні дороги”, що
навчаються за програмою бакалаврів
”Будівництво автомобільних доріг”.
Протокол № від 2014р.

Горлівка 2014

УДК 532 (075.8)

ББК 30.123я73

П

Технічна механіка рідини і газу (конспект лекцій).

Піндус Б.І., АДІ ДВНЗ ДонНТУ, 2014, с.

В навчальному посібнику наведені основні відомості про фізичні властивості, рівновагу і рух нестисливої й стисливої рідини. Наведено основні методи вивчення законів та режимів руху рідини, питання теорії подібності, методи визначення втрат напору для різних режимів руху. Розглянуті питання витікання рідини із отворів і насадків, закони руху рідини в напірних трубопроводах.

Посібник розрахований для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю "Будівництво автомобільних доріг".

Рис. , список літератури назв.

ISBN 966-642-093-7

Видавництво АДІ ДВНЗ ДонНТУ, Горлівка, 2014

ПЕРЕДМОВА

Технічна механіка рідини і газу – загально технічна дисципліна, що опирається на вищу математику, фізику, теоретичну механіку, нарисну геометрію, опір матеріалів, які вивчають студенти всіх будівельних спеціальностей.

В технічній механіці рідини і газу студенти вивчають основні закони спокою рідини, дії рідини на різні поверхні та на поміщені в неї тіла, основні закони руху рідини, витікання рідини через різні отвори й насадки, режими руху рідини в напірних трубопроводах, втрати напору.

«Технічна механіка рідини і газу» є базовою дисципліною для вивчення «Гідравліки, гідрології, гідрометрії», «Інженерної гідравліки» та інших.

РОЗДІЛ 1. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИНИ. ГІДРОСТАТИКА

Л Е К Ц І Я № 1

Тема: Рідина і її фізичні властивості

Література:

1.Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 10 – 21.

2.Чугаев Р.Р. Гидравлика (Техническая механика жидкости). Л.: Энергия, стр. 7 – 19.

1.1 Реальні і ідеальні рідини

Фізичні тіла, стан яких знаходиться в проміжній фазі між твердим і газоподібним, називають рідинами. При низьких температурах і малих питомих об'ємах рідини мають властивості близькі до властивостей твердих тіл, а при високих температурах і великих питомих об'ємах вони мають властивості, близькі до пароподібних тіл (газів).

Найбільш типовим прикладом рідини являється вода, яка при замерзанні перетворюється в тверде тіло (лід), а при нагріванні до 100°C перетворюється в пару.

За звичаєм рідини розглядають як суцільні матеріальні системи, тобто вважають, що їх речовина, а також фізичні характеристики, що визначають їх стан і рух, розподіляються і змінюються в зайнятому ними просторі безперервно.

Проте суцільність рідини за дослідженнями деяких учених (Є.І.Френкель), являється в деякій мірі уявною. В дійсності рідина пронизана великою кількістю поверхонь розриву, відстані між якими дуже малі і не збільшуються в зв'язку з відсутністю розтягу вальних напруг. Ці розриви мимовільно закриваються (самозалічуються) в одних місцях і виникають в інших. Таким чином в кожний момент часу в рідині

утворюється сукупність мікро плоскостей у вигляді «тріщин» і «дірок». (Навести приклад зі стаканом води і цукровою пудрою). При підвищенні температури рідини до точки кипіння «тріщини» і «дірки» збільшуються в розмірах і в них накопичуються бульбочки пари і повітря.

Основною особливістю молекулярної структури рідини являється її легка рухомість – *текучість*.

При руйнуванні стінок посудини, рідина що в ній знаходиться, розтікається під дією тільки власної ваги. Рух рідини у відкритих руслах відбувається тільки під дією сили ваги.

Рідини чинять значну протидію всебічному стисненню (майже не змінюючись в об'ємі) і слабкий опір дотичним зусиллям (відбувається взаємне ковзання шарів рідини), а також розтягувальним зусиллям.

В реальних умовах від'ємне всебічне розтягування рідини відсутнє, тому в подальшому будемо вважати, що рідина практично не чинить опору розтягувальним зусиллям.

При русі рідини між її частинками виникають сили тертя, які затрудняють вивчення законів її руху. З ціллю спрощення постановки задач і їх математичного рішення створені поняття абстрактної моделі ідеальної, або нев'язкої, рідини. Ідеальна рідина характеризується абсолютною рухомістю, тобто відсутністю в рідині дотичних напруг, і абсолютною незмінністю в об'ємі при зміні температури і тиску.

Реальні (в'язкі) рідини також володіють достатньою рухомістю. Негативною якістю більшості реальних рідин являється виникнення при їх русі внутрішніх дотичних напружень (внутрішнього тертя), величина якого визначається за законом Ньютона. Такі рідини було прийнято називати *ньютонівськими* (вода, масла, бензин, гас* та інші).

Проте в природі існують і рідини, в яких дотичні напруження не підкоряються закону Ньютона. Такі рідини

* гас – керосин

називають неньютонівськими або бінгемівськими. Вони не володіють великою рухомістю. До них відноситься бітум, суміш води і ґрунту (пульпа).

Сили в'язкості, якими володіють реальні рідини, ускладнюють вивчення багатьох питань механіки рідини. Тому в подальшому при теоретичних дослідженнях будемо розглядати, як правило, ідеальні рідини, закони руху яких в більшій степені піддаються математичним рішенням.

Перехід від ідеальної рідини до реальної виконується або шляхом введення додаткових коефіцієнтів, емпіричних або напівемпіричних залежностей, враховуючих вплив тих чи інших факторів на основі дослідних даних, або шляхом урахування напружень і деформацій, які можуть розвиватись в рідинах.

До такого заходу вдавались і в інших дисциплінах. Наприклад, в теоретичній механіці вивчаються закони абсолютно твердого тіла, хоча в природі усі тіла під дією сил в тій чи іншій степені деформують.

1.2 Основні характеристики фізичних якостей рідини

При вивченні механіки реальних рідин необхідно знати основні їх властивості. Для їх кількісної оцінки використовуються різні системи вимірювання. Раніше широко використовувались фізична (СГС) і технічна (МКГСС).

Сьогодні використовується «Міжнародна система одиниць (СІ)», в якій за одиницю довжини прийнято метр (м); за одиницю маси – кілограм (кг); за одиницю часу – секунда (сек.); за одиницю температури – градус Кельвіна (°K). Одиницею сили в системі СІ являється ньютон (н), який представляє собою силу, яка масі в 1 кг надає прискорення в 1 м/сек².

$$1 \text{ н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/сек}^2$$

До одних із основних характеристик якостей рідини відносяться *питома і відносна питома вага*.

Питома вага однорідної рідини називають вагу одиниці її об'єму або відношення ваги рідини до її об'єму:

$$\gamma = \frac{G}{W}, \quad (1.1)$$

де G – вага однорідної рідини в кгс або н;

W - об'єм цієї рідини в м^3 .

Розмірність питомої ваги в системі СІ – н/м^3 або $\text{кг/м}^2\text{сек}^2$; в системі МКГСС – кгс/м^3 .

Якщо розглядається неоднорідна рідина, то за наведеною вище формулою (1.1) визначається її середня питома вага. Для визначення питомої ваги в даній точці переходять до елементарних частинок і використовують вираз

$$\gamma = \frac{dG}{dW}, \quad (1.2)$$

де dG – вага нескінченно малого об'єму рідини dW .

Відношення ваги даної рідини до ваги такого ж об'єму дистильованої води при температурі 4°C називають відносною питомою вагою (δ_γ). Відносна питома вага величина безрозмірна, яка показує в скільки разів дана рідина важча за дистильовану воду з температурою $+4^\circ\text{C}$. (Температура 4°C відповідає максимуму щільності води).

Питома вага прісної води при коливаннях температури від 4°C до $+100^\circ\text{C}$ змінюється приблизно на 4%. Так як температура води у водопропускних спорудах коливається приблизно від 4°C до 30°C , то для практичних розрахунків з достатньою мірою точності можна прийняти питому вагу води $\gamma = 1000 \text{ кгс/м}^3$ або 1 тс/м^3 (в системі МКГСС)

$$\gamma = 9807 \text{ н/м}^3 \text{ (в системі СІ),}$$

а відносна вага води рівна одиниці.

Наступною важливою характеристикою являється *щільність* рідини – відношення маси рідини до її об'єму (маса в одиниці об'єму).

Для однорідної рідини

$$\rho = \frac{M}{W} \text{ н} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4 \text{ або } \text{кг/м}^3 \text{ (в системі СІ)} \quad (1.3)$$

Для неоднорідної рідини середня щільність визначається за виразом

$$\rho = \frac{\sum \rho_i W_i}{\sum W_i}, \quad (1.4)$$

де – M – маса однорідної рідини;

W – її об'єм.

Щільність води складає $1000 \text{ н} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4$ в системі СІ або $101,93 \text{ кгс} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4$ в системі МКГСС.

Між питомою вагою і щільністю існує наступний зв'язок. Із формули (1,3) $\rho = M/W$, але $M = G/g$, таким чином

$$\rho = G/gW \quad (1.5)$$

В отриманому виразі (1.5) $G/W = \gamma$, тобто

$$\rho = \frac{\gamma}{g} \quad \text{або} \quad \gamma = \rho g. \quad (1.6)$$

Однією із властивостей рідини являється її здатність змінювати об'єм при зміні температури. Зміна об'єму рідини в зв'язку з зміною температури характеризується *коефіцієнтом температурного розширення* β_t . цей коефіцієнт показує відносну зміну об'єму при збільшенні температури t на 1 градус

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}. \quad (1.7)$$

Коефіцієнт β_t змінюється з зміною температури і тиску в межах від $14 \cdot 10^{-6}$ до $719 \cdot 10^{-6}$.

При температурі до 50°C коефіцієнт температурного розширення з збільшенням тиску збільшується, а при температурі вищій за 50°C з збільшенням тиску зменшується.

Під дією тиску об'єм рідини змінюється. Ця зміна характеризується коефіцієнтом об'ємного стиснення

$$\beta_p = -\frac{1}{W} \frac{dW}{dp} (\text{м}^2/\text{н}) \quad (1.8)$$

Враховуючи, що маса $M = \text{const}$, за формулами (1.3 і 1.8) можна записати

$$\frac{dW}{W} = -\frac{dp}{\rho}$$

і тоді

$$\beta_p = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}. \quad (1.9)$$

Тобто коефіцієнт об'ємного стиснення представляє собою відносну зміну щільності рідини, що приходить на одиницю тиску.

Величина обернена коефіцієнту об'ємного стиснення рідини називається *модулем пружності* E , тобто

$$E = \frac{1}{\beta_p} = \rho \frac{dp}{d\rho}. \quad (1.10)$$

Модуль пружності води також залежить від температури і тиску. В середньому його можна прийняти рівним від 19000 до 21000 кгс/см² або 1900 – 2100 МПа $(19 - 21) \cdot 10^8$ Па (н/м²).

$$1 \text{ атм} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98000 \text{ Па} (\approx 100000 \text{ Па})$$

Однією із важливих властивостей рідини являється її *в'язкість*. В'язкість (або внутрішнє тертя) – це здатність рідини чинити опір ковзанню одного її шару відносно іншого.

Для пояснення фізичної суті сил в'язкості (внутрішнього тертя) уявимо собі, що рідина міститься між двома пластинами (рис.1.1), із яких нижня нерухома (тобто $V_n = 0$), а верхня рухається паралельно нижній з постійною швидкістю V_b .

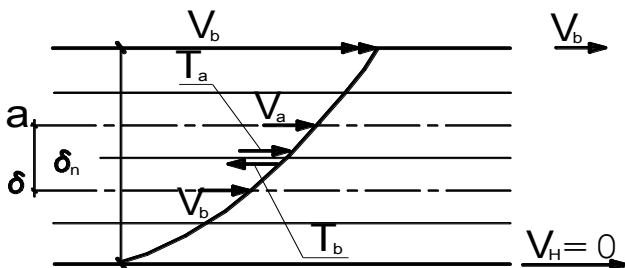


Рисунок 1.1

Уявимо собі, що вся маса рідини розбита на множину тонких шарів, границі яких показані пунктиром. Товщини шарів

або відстані між їх осями позначимо δ_n . Епюра швидкостей буде мати вигляд деякої кривої (рис.1.1).

Розглянемо два сусідні шари a і b . Швидкості на осях цих шарів становитимуть відповідно V_a і V_b . при цьому $V_a > V_b$. Отже шар a ковзає по шару b з відносною швидкістю $\delta V = V_a - V_b$. при цьому верхній шар намагається прискорити рух нижнього, а нижній відповідно гальмує рух верхнього шару.

Між шарами виникають сили тертя: T_a – сили, що гальмує переміщення шару a ; і T_b – сила, що прискорює рух шару b .

Вперше про наявність цих сил (внутрішнього тертя) висловився в 1687 р Ісаак Ньютон, висунувши гіпотезу, що величина сил внутрішнього тертя між шарами частинок рідини залежить від якостей рідини і пропорційна площі поверхні шарів, що дотикаються, і їх відношної швидкості переміщення.

Пізніше ця гіпотеза була підтверджена дослідями М.П.Петрова (1883р). В результаті досліджень була запропонована залежність

$$T = \pm \mu F \frac{dV}{dn}, \quad (1.11)$$

або

$$\frac{T}{F} = \tau = \pm \mu \frac{dV}{dn}, \quad (1.12)$$

де T – сила тертя;

μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, що характеризує якості даної рідини;

F – площа поверхні шарів, що дотикаються;

$\frac{dV}{dn}$ – градієнт швидкості по нормалі;

T – напруження сил тертя.

Коефіцієнт динамічної в'язкості μ визначається із формули (1.11)

$$\mu = \frac{T}{F} \frac{dn}{dV}. \quad (1.13)$$

Розмірність μ в системі СІ – $\text{Па} \cdot \text{сек.} = \text{н} \cdot \text{сек} / \text{м}^2$ або $\text{кг} / \text{м} \cdot \text{сек.}$.

В системі СГС – $\text{г} / \text{см} \cdot \text{сек.}$ (пуаз)*.

* (Одиниця «пуаз» названа в честь французького дослідника Пуазейля).

Коефіцієнт динамічної в'язкості змінюється зі зміною температури. При підвищенні температури в'язкість зменшується. При зміні температури води Пуазейль запропонував визначати коефіцієнт динамічної в'язкості за імперичною формулою

$$\mu = \mu_0(1 + 0,0337t + 0,00221t^2)^{-1}, \quad (1.14)$$

де μ_0 – коефіцієнт динамічної в'язкості при $t = 0^\circ\text{C}$. F, або в загальному вигляді (для будь-якої рідини)

$$\mu = \mu_0(1 + \alpha t + \beta t^2)^{-1}. \quad (1.15)$$

Від тиску в'язкість залежить незначно. Тільки при досить високих тисках (1000 – 4000 атм) в'язкість змінюється пропорційно тиску.

Часто при розрахунках використовують коефіцієнт кінематичної в'язкості, який представляє собою відношення коефіцієнта динамічної в'язкості до щільності рідини

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.16)$$

В системі СІ – $\text{м}^2/\text{сек.}$ або $\frac{\text{н} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}}{\text{кг}}$

В системі СГС – $\text{см}^2/\text{сек.}$ (Стокс).

Перехід із системи МКГСС в інші системи виконується за співвідношеннями $\nu_{\text{МКГСС}} = 0,0001 \nu_{\text{СГС}} = \nu_{\text{СІ}}$.

Для вимірювання в'язкості рідини використовують прилади, які називають віскозиметрами. Існує багато різних систем віскозиметрів. В'язкість рідин, які більш в'язкі за воду, визначають віскозиметром Енглера і виражають її в умовних градусах Енглера.

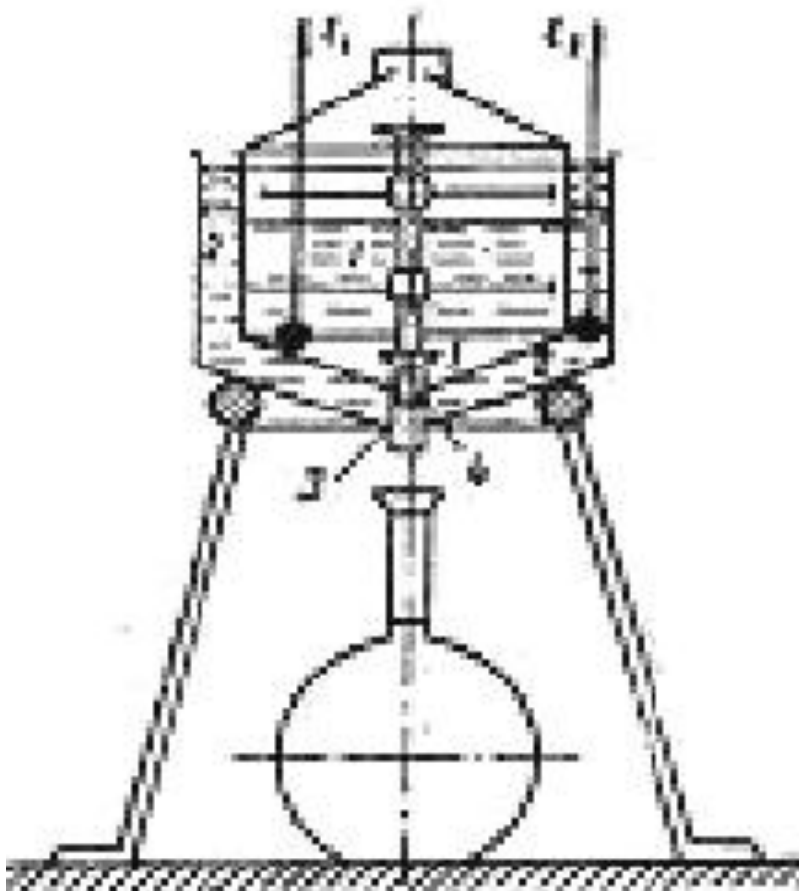


Рисунок 1.2 – Віскозиметр Енглера

Віскозиметр Енглера (Рис. 1.2) складається із латунного циліндричного (з конусоподібним дном) резервуара 1, поміщеного в водяну ванну 2. Внутрішня поверхня резервуара 1 позолочена і старанно відшліфована. До дна резервуара 1 припаяна латунна циліндрична трубка 3, в отвір якої вставлена платинова конічна трубочка довжиною 20 мм і діаметрами : 2,9 мм – вверху і 2,8 мм – внизу.

Через цю трубочку витікає досліджувана рідина, тому до початку досліду її закривають запірним стержнем. Досліджувану рідину об'ємом 200 см^3 заливають в циліндричний резервуар, де підтримують постійну температуру. Температура заміряється двома термометрами (одним безпосередньо досліджуваної рідини, іншим – води у водяній ванні).

Заміряють час T витікання 200 см^3 досліджуваної рідини при необхідній температурі. Також заміряють час T_0 витікання 200 см^3 дистильованої води при температурі 20°C . відношення величин T і T_0 і дає число умовних градусів Енглера

$$\Theta = \frac{T}{T_0}. \quad (1.17)$$

Знаючи в'язкість рідини в умовних градусах Енглера, переходять до коефіцієнта кінематичної в'язкості за формулою Убеллода

$$\nu = 0,0731\Theta - \frac{0,0631}{\Theta} \quad (\text{в см}^2 / \text{сек.}). \quad (1.1)$$

Л Е К Ц І Я № 2

Тема: Гідростатичний тиск і його властивості Основне рівняння гідростатики

Л І Т Е Р А Т У Р А:

1. Богомолів А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр. 22 – 35.

2. Чугаев Р.Р. Гидравлика (Техническая механика жидкости). Л.: Энергия, стр. 20 – 36.

2.1 Гідростатичний тиск і його властивості

Основним поняттям гідростатики являється поняття гідростатичного тиску. Для пояснення цього поняття розглянемо

деякий об'єм рідини, яка під дією сил P_1, P_2, P_3 і т.д. знаходиться в стані спокою.

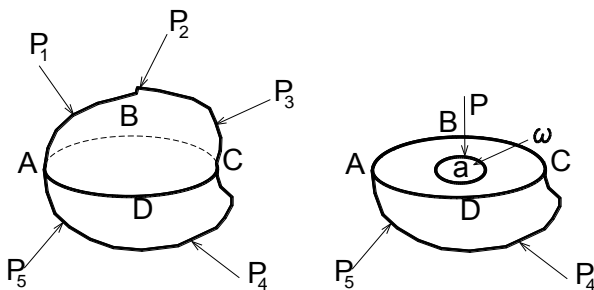


Рисунок 2.1

Якщо цей об'єм рідини уявно (в думці) розсікти деякою площиною ABCD і відкинути, то для збереження рівноваги нижньої частини необхідно в точках утвореної площини прикласти сили, дія яких була би еквівалентною дії відкинутої верхньої частини рідини на нижню. Площу перерізу площини ABCD позначимо буквою ω . В центрі ваги цієї площини прикладемо силу P – рівнодіячу усіх відкинутих сил. Відношення P/ω представляє собою середній гідростатичний тиск на площину ω або середнє гідростатичне напруження тиску. При зменшенні площини до нуля відношення P/ω прямує до деякої границі, яка виражає напруження тиску в даній точці:

$$p = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{P}{\omega}. \quad (2.1)$$

В технічній механіці рідини силу P називають *загальною або сумарною силою тиску* на площину, а p (границя відношення за виразом 2.1) – *гідростатичним тиском в точці*.

Гідростатичний тиск має розмірність $\frac{H}{M^2}$ (Па) в системі одиниць СІ (Паскаль). Несистемна одиниця тиску 1 атмосфера = $1 \text{ кгс} / \text{см}^2 = 98000 \text{ Па}$.

$$1 \text{ атм} = 1 \text{ кгс} / \text{см}^2 = 98000 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ МПа}$$

Гідростатичний тиск володіє характерними властивостями:

а) Гідростатичний тиск нормальний до площини, що сприймає його, і направлено всередину об'єму рідини.

Для доказу цієї властивості розглянемо силу P , яка діє на криволінійну поверхню $ABCD$ в точці 1 деякого об'єму, що знаходиться в стані спокою.

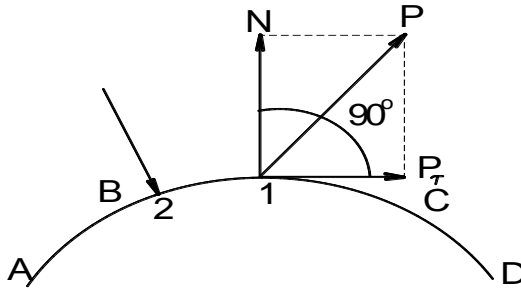


Рисунок 2.2

Цю силу завжди можна розкласти на дві складові сили : дотичну до поверхні – T і нормальну – N . Так як рідина не чинить опору дотичним і розтягуючим зусиллям, то при наявності сил T і N частинки рідини почали б рухатись, що суперечить умові знаходження рідини в спокої. Тому сили T і N повинні рівнятися нулю. А сила гідростатичного тиску може бути направлена тільки всередину об'єму рідини і тільки по нормалі, як це показано в точці 2.

б) Гідростатичний тиск у всякій точці рідини не залежить від орієнтації площини, на яку він діє, тобто гідростатичний тиск однаковий у всіх напрямках.

Для доказу цієї властивості розглянемо умови рівноваги деякого елементарного об'єму рідини. Для цього виберемо в точці O об'єму рідини прямокутну систему координат і на її осях побудуємо нескінченно малий тетраедр $OABC$ з ребрами : dx , dy , dz .

Гідростатичний тиск на гранях позначимо:

p_x – на грані АОВ; p_y – на грані ВОС; p_z – на грані АОС;
 p_n – на грані ABC.

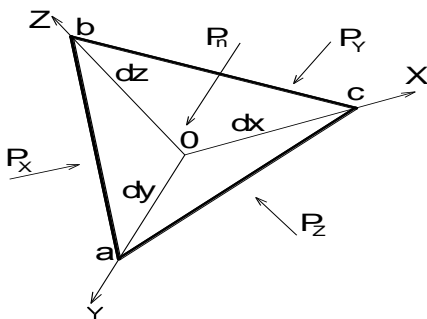


Рисунок 2.3

Площі граней відповідно будуть: $\omega_x = \frac{1}{2} dy dz$;

$$\omega_y = \frac{1}{2} dx dz; \quad \omega_z = \frac{1}{2} dy dz \quad \text{і} \quad \omega_{ABC} = dF_n.$$

Тоді сили тиску відповідно будуть:

$$\frac{1}{2} p_x dy dz; \quad \frac{1}{2} p_y dx dz; \quad \frac{1}{2} p_z dx dy; \quad p_n dF_n.$$

Крім сил тиску на тетраедр діє масова сила dG , проекції якої на осі x, y, z дорівнюють:

$$\begin{aligned}
 \text{на вісь } x - & \quad \frac{1}{6} dx dy dz \rho X; \\
 \text{на вісь } y - & \quad \frac{1}{6} dx dy dz \rho Y; \quad \} \\
 \text{на вісь } z - & \quad \frac{1}{6} dx dy dz \rho Z.
 \end{aligned}$$

Де X, Y, Z – проекції прискорення масової сили на відповідні осі.

Масові сили являються нескінченно малими величинами третього порядку, що на ранг нижче сил тиску,

ними можна знехтувати. Проектуємо діючі сили на осі OX , OY , OZ і отримаємо рівняння рівноваги в наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} p_x dy dz &= p_n dF_n \cos(p_n, X) \\ \frac{1}{2} p_y dx dz &= p_n dF_n \cos(p_n, Y) \\ \frac{1}{2} p_z dx dy &= p_n dF_n \cos(p_n, Z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

В рівняннях рівноваги добутки dF_n на косинуси відповідних кутів можуть бути представлені наступними добутками:

$$\left. \begin{aligned} dF_n \cos(p_n, X) &= \frac{1}{2} dy dz \\ dF_n \cos(p_n, Y) &= \frac{1}{2} dx dz \\ dF_n \cos(p_n, Z) &= \frac{1}{2} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Підставляючи значення проекцій площини dF_n в рівняння рівноваги, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} p_x dy dz &= \frac{1}{2} p_n dy dz \\ \frac{1}{2} p_y dx dz &= \frac{1}{2} p_n dx dz \\ \frac{1}{2} p_z dx dy &= \frac{1}{2} p_n dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Розділивши ці рівняння відповідно на $dy dz$, $dx dz$, $dx dy$, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} p_x &= \frac{1}{2} p_n \\ \frac{1}{2} p_y &= \frac{1}{2} p_n \\ \frac{1}{2} p_z &= \frac{1}{2} p_n \end{aligned} \right\}$$

$$\text{або} \quad p_x = p_y = p_z = p_n, \quad (2.5)$$

Що і необхідно було довести.

Таким чином гідростатичний тиск в деякій точці О в різних напрямках однаковий, тобто величина його не залежить від напрямку, в якому визначається цей тиск, а тільки залежить від координат цієї точки, довільно вибраної в масі рідини, що знаходиться в стані спокою.

в). Гідростатичний тиск в точці залежить від координат в просторі.

Ця властивість не вимагає особливих доказів, так як зрозуміло, що по мірі збільшення занурення точки під рівень води тиск в ній буде збільшуватись. По мірі вивчення наступних питань ця властивість буде пояснена сама собою. Ця властивість може бути записана наступним чином

$$P = f(x, y, z).$$

2.2 Диференційні рівняння рівноваги рідини і інтегрування їх

Для виведення диференційних рівнянь рівноваги виділимо в рідині, що знаходиться в стані спокою, елементарний прямокутний паралелепіпед. Осі прямокутних координат розташуємо паралельно ребрам паралелепіпеда. В центрі ваги кожної грані прикладемо сили гідростатичного тиску dP_x , dP_x^I , dP_y , dP_y^I , dP_z , dP_z^I , які замінюють дію навколишнього середовища на паралелепіпед.

Усі ці сили , у відповідності з першою властивістю гідростатичного тиску, будуть направлені всередину розглядуваного паралелепіпеда.

Знайдемо значення цих сил.

Позначивши гідростатичний тиск в центрі ваги паралелепіпеда через p , враховуючи нерозривність зміни тиску в рідині, визначимо тиск в центрах ваги відповідних граней. Ці тиски будуть відрізнятися від тиску в центрі ваги паралелепіпеда на величину:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2} dy ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{2} dz \quad \text{або}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx ; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy ; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

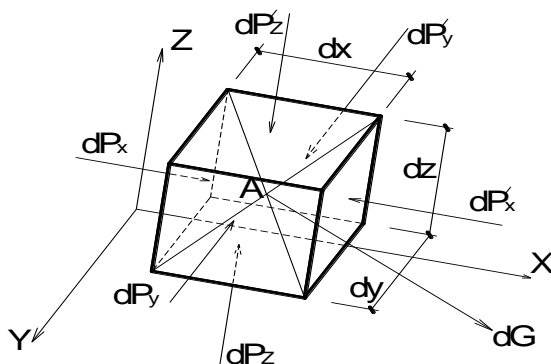


Рисунок 2.4

Тоді сили гідростатичного тиску будуть дорівнювати:

$$\left. \begin{aligned} dP_x &= \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz \\ dP_x^I &= \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz \\ dP_y &= \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz \\ dP_y^I &= \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz \\ dP_z &= \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy \\ dP_z^I &= \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Крім сил гідростатичного тиску на рідину в об'ємі паралелепіпеда діють і масові сили безперервно розподілені по об'єму. Рівнодіюча цих сил (dG) прикладена в центрі ваги паралелепіпеда і може бути виражена як добуток маси на прискорення

$$dG = J \rho \, dx \, dy \, dz \quad (2.7)$$

Позначивши проекції на координатні осі прискорення J через X , Y , Z , отримаємо наступні вирази для проекцій сили dG на ці осі:

$$\left. \begin{aligned} dG_x &= X \rho \, dx \, dy \, dz \\ dG_y &= Y \rho \, dx \, dy \, dz \\ dG_z &= Z \rho \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Паралелепіпед знаходиться в рівновазі і тому суми проекцій усіх сил на координатні осі повинні бути рівні нулю. Розрахуємо ці суми:

по осі X

$$\begin{aligned} & - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz + \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz + X \rho \, dx \, dy \, dz = 0 \\ & - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx \, dz + \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx \, dz + Y \rho \, dx \, dy \, dz = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$-\left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx dy + \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx dy + Z \rho dx dy dz = 0$$

Розкриваючи дужки і розділивши кожне із рівнянь на масу паралелепіпеда $\rho dx dy dz$, отримаємо наступну систему рівнянь рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Ці рівняння вперше були отримані членом Російської Академії Наук Леонардом Ейлером в 1755 році. Тому вони називаються **рівняннями рівноваги Ейлера**.

2.3 Інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги

Помноживши рівняння рівноваги відповідно на dx , dy , dz і сумуючи їх, отримаємо:

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \quad (2.11)$$

Так як $p = f(x, y, z)$, то вираз в дужках правої частини рівняння, є повний диференціал тиску

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz, \quad (2.12)$$

і тоді

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz). \quad (2.13)$$

При $\rho = \text{const}$ права частина рівняння (2.13) також повинна бути повним диференціалом деякої силової функції $\Pi = f(x, y, z)$, часткові похідні якої по координатах x, y, z повинні дорівнювати:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = Y; \quad \text{і} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = Z. \quad (2.14)$$

Силова функція в цьому випадку називається потенціалом сил або просто потенційною функцією. Умова (2.14) показує, що для того, щоб рідина була в рівновазі необхідно, щоб сили діючі на рідину мали потенціал.

Рівняння (2.13) можна записати в наступному вигляді

$$dp = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) \quad (2.15)$$

або

$$dp = \rho d\Pi. \quad (2.16)$$

інтегруючи рівняння (2.16), отримаємо

$$p = \rho \Pi + C. \quad (2.17)$$

2.4 Основне рівняння гідростатики

Нагадаємо, що згідно (2.13) $dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$.

Розглянемо найбільш роз поширений випадок рівноваги поміщеної в посуд рідини, що знаходиться під дією тільки сили ваги і тиску на вільній поверхні p_0 (рис. 2.5).

Координатні осі розташуємо так, щоб площина xy була горизонтальною, а вісь z направленою вниз.

Виберемо деяку одиничну масу рідини, що лежить в точці M з координатою z .

Тоді кожна одиниця маси рідини буде знаходитись під дією сил ваги рівних $1 \cdot g$, а складові прискорення будуть дорівнювати:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Підставляючи ці значення в (2.13), отримаємо

$$dp = \rho \cdot g \cdot dz \quad (2.18)$$

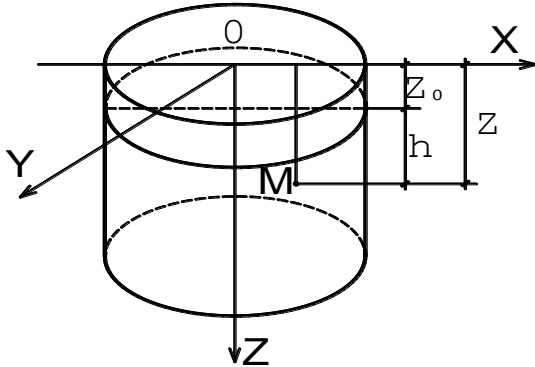


Рисунок 2.5

але $\rho \cdot g = \gamma$ і тоді

$$dp = \gamma dz \quad (2.19)$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо:

$$p - \gamma \cdot z = \text{const.} \quad (2.20)$$

Постійну інтегрування знайдемо за умови, що для точки, що лежить на вільній поверхні $z = z_0$ і $p = p_0$.

Тобто згідно (2.20)

$$p_0 - \gamma \cdot z_0 = \text{const.} \quad (2.21)$$

Підставляючи значення const в (2.20), отримаємо

$$p - \gamma \cdot z = p_0 - \gamma \cdot z_0 \quad \text{або} \quad p = p_0 (z - z_0) \quad (2.22)$$

із рисунка видно, що $z - z_0 = h$, тому

$$p = p_0 + \gamma h \quad (2.23)$$

Це рівняння називають **основним рівнянням гідростатики**, а p – абсолютним або повним гідростатичним тиском.

Якщо у точці М виділити горизонтальну площину з площею, рівною 1, і по периметру її провести вертикальні утворюючі, то вага отриманого циліндра буде рівною $1 \cdot \gamma \cdot h$, що співпадає з другим додатком рівняння (2.23).

Таким чином, величина абсолютного гідростатичного тиску в деякій точці, заглибленої на глибину h , дорівнює сумі

тиску на поверхні рідини p_0 і тиску від ваги стовпа рідини, площа основи якого рівні одиниці, а висота – глибині занурення розглядуваної точки.

Крім того, основне рівняння гідростатики показує, що зовнішній тиск p_0 , який діє на поверхню рідини, передається в усі сторони рідини, що розглядається, з однаковою силою (закон Паскаля).

Так як з зовнішньої сторони на стінки і дно діє атмосферний тиск, то напружений стан стінок і дна посуду визначається різницею абсолютного p і атмосферного p_a тиску. Перевищення над атмосферним тиском називається манометричним або надмірним тиском.

$$p_m = p - p_a = (p_0 + \gamma h) - p_a \quad (2.24)$$

$$\text{Якщо } p_0 = p_a, \quad \text{то } p_m = \gamma h. \quad (2.26)$$

2.5 Прилади для вимірювання надмірного тиску

Для вимірювання надмірного тиску служать манометри. Розрізняють механічні і рідинні манометри. Механічні в свою чергу поділяються на трубчасті, мембранні і сильфонні. Принцип дії механічних манометрів полягає в тому, що робочий орган прибору (трубка, мембрана чи сильфон) під дією тиску змінює свою форму чи розмір (деформує). Ця деформація через систему приводу передається на стрілку манометра, яка показує на шкалі надмірний тиск в кгс/см² чи паскалях (Н/м²).

Рідинний манометр представляє собою U – видну трубку, один кінець якої приєднаний до посуду, в якому вимірюють тиск. Під дією тиску рідина в другому коліні трубки піднімається на деяку висоту h відносно точки замірювання А. вимірюваний тиск розраховують за формулою (2.26).

Із формули (2.26) видно, що висота, на яку підніметься рідина у відкритій трубці складе

$$h = \frac{P_m}{\gamma} \quad (2.27)$$

Ця висота називається *п'єзометричною висотою*, а трубка - *п'єзометром*. Для вимірювання тиску води в $1 \text{ кгс/см}^2 = 100000 \text{ Па} = 0,1 \text{ МПа}$ п'єзометром необхідна трубка довжиною 10,2 м, що робить вимірювання високого тиску неможливим.

Для вимірювання порівняно високого надмірного тиску використовують ртутні манометри. В зв'язку з високою щільністю ртуті висота стовпика рідини в трубці вийде порівняно не великою (для тиску в $1 \text{ кгс/см}^2 - 0,75 \text{ м.}$).

В закритих посудинах тиск може бути і менше атмосферного. Наприклад, якщо в звичайних умовах заткнути «порожню» колбу пробкою і остудити її, то за законом Гей-Люссака тиск в колбі знизиться і стане менше зовнішнього (атмосферного).

Різниця між атмосферним тиском і тиском в посуді (коли воно менше атмосферного) називається *вакуумом*. Величина вакууму виражається в тих же одиницях, що і тиск. Вимірюють вакуум *вакуумметрами*; конструкція їх така ж, як і манометрів. В рідинному вакуумметрі рівень рідини у відкритій вітці U – видної трубки опускається нижче рівня в посуді.

Вакуум пов'язаний абсолютним і атмосферним тиском формулою

$$P_{\text{абс}} = p_{\text{ат}} - p_{\text{вак}} \quad (2.28)$$

Вакуум не може бути більше 1 кгс/см^2 .

2.6 Гідростатичний напір і питома потенціальна енергія

В рідині, що знаходиться в рівновазі в якому-небудь посуді, розглянемо довільно вибрану точку А на глибині h .

Проведемо яку-небудь горизонтальну площину, відносно якої будемо визначати відмітки точок, що

розглядаються. Нехай лінія О – О представляє слід цієї площини. Цю площину в подальшому будемо називати площиною порівняння.

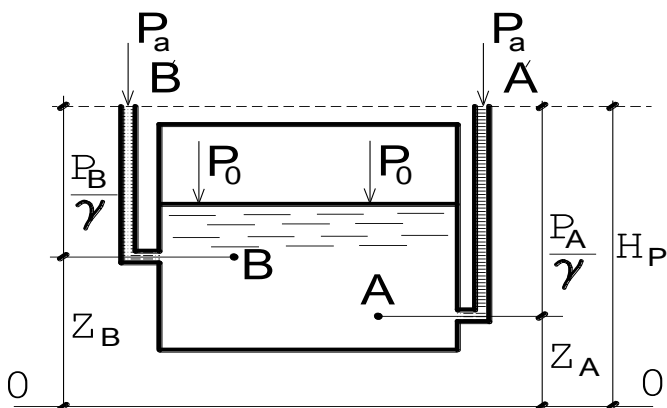


Рисунок 2.6

Координату точки А позначимо Z_A . Якщо біля точки А установити п'єзометр, то висота стійба рідини в п'єзометрі - п'єзометрична висота - буде рівна $\frac{P_A}{\gamma}$, при умові, що манометричний тиск в цій точці дорівнює p_A .

Сума двох величин – відмітки розглядуваної точки Z_A і п'єзометричної висоти $\frac{P_A}{\gamma}$ - називається п'єзометричним або гідростатичним напором H_p в даній точці відносно площини порівняння О – О, тобто

$$H_p = Z_A + \frac{P_A}{\gamma}. \quad (2.29)$$

Дослідимо якими властивостями володіє гідростатичний напір. Не трудно замітити, що при визначенні гідростатичного напору для точки В Z_B і $\frac{P_B}{\gamma}$ будуть мати інші

значення ніж Z_A і $\frac{p_A}{\gamma}$, але їх сума (гідростатичний напір

$H_B = Z_B + \frac{p_B}{\gamma}$) буде мати таке-ж значення, як і для точки А, так-

як п'єзометри А і В можна розглядати, як посудини, що поєднуються. Тобто

$$H_p = Z + \frac{p_M}{\gamma} = \text{const}. \quad (2.30)$$

Надамо енергетичне трактування гідростатичного напору. Представимо собі, що в точці А зосереджена маса рідини m . Знайдемо величину потенціальної енергії (тобто роботу), яку ця маса може виконати при вільному падінні від точки А до площини порівняння. При цьому необхідно врахувати, що маса m без прикладання допоміжної енергії може

бути піднята на висоту $\frac{p_A}{\gamma}$, якщо в цю точку помістити

п'єзометр. Тому при розрахунку потенціальної енергії для маси m рідини, що знаходиться в точці А, крім енергії положення –

mgZ_A , необхідно врахувати енергію тиску – $mg\frac{p_A}{\gamma}$. Таким

чином потенційна енергія в точці А складе

$$\mathcal{E}_n = mgZ_A + mg\frac{p_A}{\gamma}, \quad (2.31)$$

Розділивши вираз (2.31) на вагу рідини mg , отримаємо

$$\frac{\mathcal{E}_n}{mg} = Z_A + \frac{p_A}{\gamma}. \quad (2.32)$$

Вираз (2.32) показує, що питома потенціальна енергія рідини, що знаходиться в стані спокою, дорівнює гідростатичному напору, і тому у всіх її точках однакова (відносно даної площини порівняння)

$$E_n = H_p = Z + \frac{p}{\gamma} = \text{const} \quad (2.33)$$

Питома потенціальна енергія E_n складається із питомої енергії положення відносно площини $O - O$ (геометрична висота) і питомої енергії тиску (п'єзометрична висота).

2.7 Поверхні рівня

Геометричні місця точок, в яких гідростатичний тиск має однакове числове значення, представляють собою поверхні рівного тиску, які називають *поверхнями рівня*.

Таким чином, при $p = \text{const}$

$dp = 0$ – це і є рівняння поверхні рівня.

Рівняння

$$\left. \begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz &= 0 \\ d\Pi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Поверхні рівного тиску будуть одночасно і поверхнями рівного потенціалу, тобто $d\Pi = 0$.

Поверхні рівня крапельної рідини, які стикаються з газоподібним середовищем, називаються вільними поверхнями.

Якщо рідина знаходиться в стані спокою, то її вільна поверхня являється горизонтальною площиною.

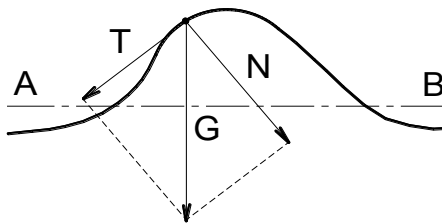


Рисунок 2.7

Вільна поверхня рідини, що знаходиться в стані спокою, не може бути криволінійною.

Якщо крім сили ваги на рідину діють ще які-небудь сили, то вільна поверхня може бути криволінійною, так як вона завжди повинна бути нормальною до рівнодіючих усіх сил.

Розглянемо найбільш характерні випадки положення вільної поверхні:

I випадок. Рідина знаходиться під дією сили ваги. Тобто проекції прискорення на координатні осі дорівнюють:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = g.$$

Диференціальне рівняння рівноваги рідини (диференціал тиску) буде записано в наступному вигляді:

$$dp = \rho g dz = \gamma dz.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо:

$$\left. \begin{array}{l} \text{або} \quad p = \gamma Z + C \\ \quad \quad p = p_0 + \gamma Z \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

Рівняння (2.35) показують, що поверхні рівня характеризуються рівністю $Z = \text{const}$, тобто горизонтальними площинами.

II випадок. Рідина переміщується рівноприскорено з горизонтальним прискоренням j^I в вагоні-цистерні. В цьому випадку окремі члени загального рівняння рівноваги рідини отримують значення: $X = j^I$; $Y = 0$; $Z = g$ (Рис. 2.8).

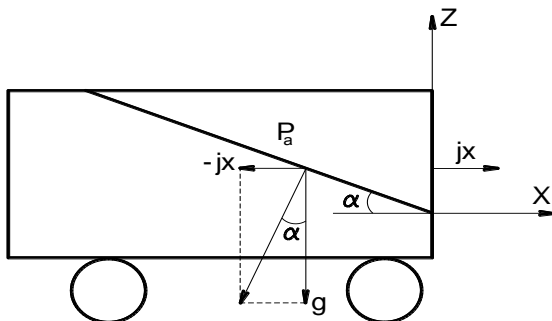


Рисунок 2.8

Диференціальне рівняння вільної поверхні набуде вигляду:

$$J^I dx + g dz = 0;$$

$$\text{Або} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{j}{g} = \text{const.} \quad (2.36)$$

Рівняння (2.36) показує, що вільна поверхня представляє собою площину, нахилену до горизонту під кутом

$$\alpha = \arctg \frac{j}{g}. \quad (2.37)$$

III випадок. Розглянемо рух рідини з постійною швидкістю на закруті (коліні) ріки. В цьому випадку рідина знаходиться під дією відцентрової сили. При цьому в поперечному перерізі ріки рідину можна розглядати як таку, що знаходиться у відносному спокої.

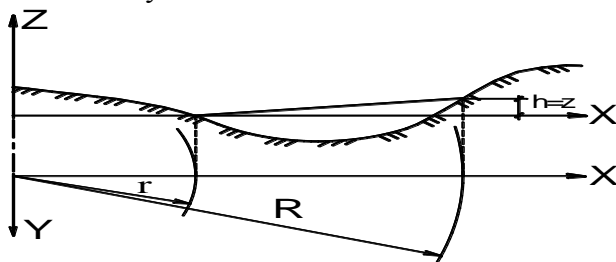


Рисунок 2.9

Проекції прискорень на координатні осі складуть:

$$X = \frac{v^2}{x}; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Тоді диференціальне рівняння рівноваги набуде вигляду

$$\frac{v^2}{x} dx - g dz = 0 \quad (2.38)$$

Інтегруючи рівняння (2.38), отримаємо

$$v^2 \ln x - g Z = C \quad (2.39)$$

Числове значення постійної C отримаємо при $x = r$ і $Z = 0$.

Тоді $C = v^2 \ln r$ і рівняння вільної поверхні набуде вигляду

$$v^2 \ln x - g Z = v^2 \ln r. \quad (2.40)$$

Із рівняння (2.40) легко визначити різницю горизонтів води на угнутому і опуклому берегах закруту:

$$Z = \frac{v^2}{g} \ln \frac{R}{r} = 2.3 \frac{v^2}{g} \lg \frac{R}{r}. \quad (2.41)$$

Це рівняння було отримане в 1878 році. Ним можна користуватись для орієнтовного визначення перевищень рівня води біля берегів.

IV випадок. Вільна поверхня рідини, що рівномірно вертиться (разом з посудом) відносно вертикальної осі.

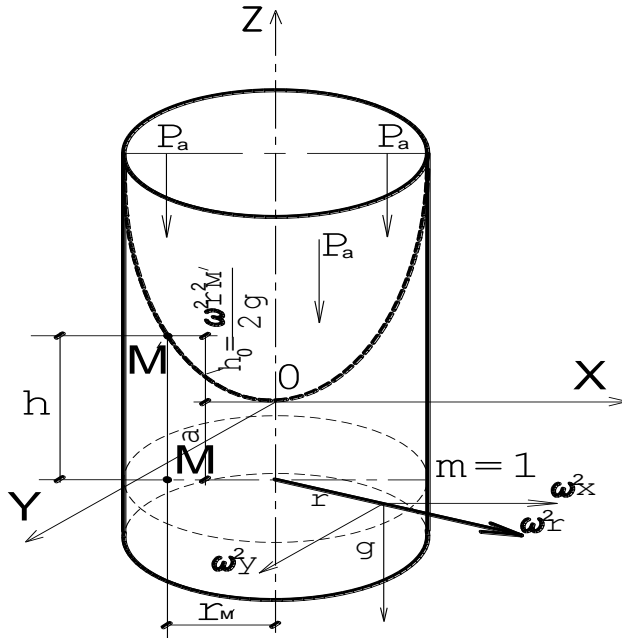


Рисунок 2.10

Рідина вертиться з постійною кутовою швидкістю ω об/хв.

Виберемо рухому систему координат з початком в точці перетину вільної поверхні з віссю циліндра.

На частину рідини масою $m = 1$ діє сила ваги $g = -1 \cdot g$ і відцентрова сила $F = 1 \bullet \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$.

Проекції рівнодіючої масових сил на відповідні осі складуть

$$\left. \begin{aligned} X &= G_x + F_x = 0 + \omega^2 r \cos(r, x) = \omega^2 x \\ Y &= G_y + F_y = 0 + \omega^2 r \cos(r, y) = \omega^2 r \frac{y}{r} = \omega^2 y \\ Z &= G_z + F_z = -g + 0 = -g \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Підставивши значення X , Y , Z у вираз диференціалу тиску, отримаємо

$$Dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) \quad (2.43)$$

Після інтегрування (2.43) отримаємо

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g z \right) + C.$$

Так як $x^2 + y^2 = r^2$, отримаємо

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right) + C. \quad (2.44)$$

Постійну інтегрування знаходимо із граничних умов: при $x = y = z = 0$, радіус $r = 0$, тиск $p = p_a$. Тоді $C = p_a$.

Підставивши значення $C = p_a$ в (2.44), отримаємо

$$p - p_a = \rho \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z \right) = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \gamma z,$$

звідки отримаємо

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \frac{p - p_a}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \frac{p_m}{\gamma}. \quad (2.45)$$

Для вільної поверхні, де надмірний тиск $p_m = 0$, рівняння (2.45) набуває вигляду

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} . \quad (2.46)$$

Положення всякої точки вільної поверхні визначається ординатою

$$z_m = h_0 = \frac{\omega^2 r_m^2}{2g} . \quad (2.47)$$

Л Е К Ц І Я № 3

**Тема: Тиск рідини на плоскі та криволінійні
поверхні. Плавання тіл**

Л І Т Е Р А Т У Р А:

- 1 .Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 35 – 52.
2. Чугаев Р.Р. Гидравлика (Техническая механика жидкости). Л.: Энергия, стр. 36 - 49.

3.1 Тиск рідини на плоскі фігури.

3.1.1 Сила абсолютного або повного гідростатичного тиску.

Визначимо силу гідростатичного тиску на плоску стінку АО, що занурена в рідину і лежить під кутом до горизонту. Контур змоченої поверхні обмежимо довільною кривою АВОС.

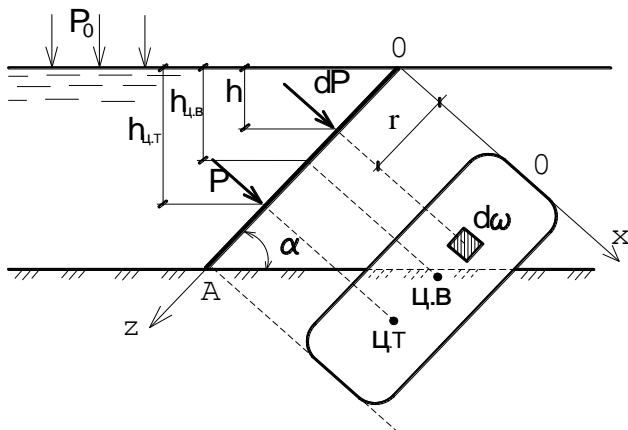


Рисунок 3.1

Виберемо довільно елементарну площину $d\omega$, центр ваги якої занурений на глибину h . на цю площину діє елементарна сила гідростатичного тиску

$$dP = p d\omega \quad (3.1)$$

де $p = p_0 + \gamma h$ – абсолютний гідростатичний тиск.

З рисунку 3.1 $h = z \sin \alpha$.

$$\text{Тоді} \quad dP = (p_0 + \gamma z \sin \alpha) d\omega \quad (3.2)$$

Інтегруючи це рівняння по всій площі стінки, отримаємо

$$dP = p_0 \omega + \gamma \sin \alpha \int_{\omega} z d\omega. \quad (3.3)$$

Із теоретичної механіки відомо, що $\int_{\omega} z d\omega$ - це статичний момент змоченої поверхні відносно осі x і що $\int_{\omega} z d\omega = z_{ц.в.} \omega$. Тоді

$$P = p_0 \omega + \gamma \sin \alpha z_{ц.в.} \omega. \quad (3.3)$$

Але $z_{ц.в.} \sin \alpha = h_{ц.в.}$. Отже

$$P = (p_0 + \gamma h_{ц.в.}) \omega. \quad (3.4)$$

Таким чином сила повного або абсолютного тиску рідини, під яким знаходиться плоска стінка, рівна добутку площі змоченої частини поверхні стінки на повний або абсолютний гідростатичний тиск в центрі ваги цієї площини.

3.1.2 Визначення центру тиску

В більшості випадків в практиці необхідно знати не тільки величину сили тиску але й точку прикладення сили абсолютного гідростатичного тиску, яку називають **центром тиску**. Із теоретичної механіки відомо, що момент рівнодіючої сили відносно якої-небудь осі дорівнює сумі моментів складових сил відносно тієї ж осі.

Тобто момент сили тиску P дорівнює сумі моментів елементарних сил відносно тієї ж осі.

$$P z_T = \int_{\omega} dP z = \int_{\omega} (p d\omega) z. \quad (3.5)$$

$$\text{Знову ж } p = p_0 + \gamma h = p_0 + \gamma z \sin \alpha.$$

$$\text{Тоді } P z_T = p_0 \int_{\omega} z d\omega + \gamma \sin \alpha \int_{\omega} z^2 d\omega \quad (3.6)$$

Перший інтеграл, як відмічалось, представляє собою статичний момент змоченої площини відносно осі x ($S_x = Z_{ц.в} \omega$), а другий виражає момент інерції I_x відносно тієї ж осі x . Тоді значення координати центру тиску визначається за формулою

$$Z_T = \frac{p_0 Z_{ц.в} \omega + \gamma I_x \sin \alpha}{(p_0 + \gamma h_{ц.в}) \omega}. \quad (3.7)$$

Інженеру будівельнику частіше всього приходится визначати тиск рідини на перемички, підпорні стінки, греблі, струмененапрямні дамби та інше. У всіх цих випадках на поверхні потоку і споруд діє атмосферний тиск. Тому для таких споруд слід визначати силу дії не від абсолютного гідростатичного тиску, а від манометричного, тобто надмірного (без урахування атмосферного) тиску. Це рівносильне прийняттю $p_0 = 0$.

$$\text{Тоді} \quad P = \gamma h_{ц.в} \omega. \quad (3.8)$$

$$I \quad Z_T = \frac{\gamma I_x \sin \alpha}{\gamma h_{ц.в} \omega} = \frac{I_x}{h_{ц.в} \omega} \sin \alpha. \quad (3.9)$$

Виразимо момент інерції відносно довільної осі x через момент інерції відносно осі z , що проходить через центр ваги:

$$I_x = I_0 + \omega Z_{ц.в}^2 \quad (3.10)$$

Підставивши (3.10) в (3.9), та враховуючи, що

$$\frac{h_{ц.в}}{\sin \alpha} = Z_{ц.в}, \text{ отримаємо:}$$

$$Z_T = \frac{I_0 + \omega Z_{ц.в}^2}{Z_{ц.в} \omega} = Z_{ц.в} + \frac{I_0}{Z_{ц.в} \omega}, \quad (3.11)$$

$$\text{звідки} \quad Z_T = Z_{ц.в} + \frac{I_0}{h_{ц.в} \omega} \sin \alpha. \quad (3.13)$$

таким чином центр тиску завжди нижче центра ваги площини змоченої поверхні.

Приклад: визначити силу тиску на плоску стінку нахилenu під кутом 45° до горизонту, якщо розміри стінки $b = 2$ м; $H = 4$ м.

Сила тиску визначається за формулою

$$P = (p_0 + \gamma h_{ц.в}) \omega$$

$$\text{Глибина центру ваги} \quad h_{ц.в} = \frac{H}{2} \sin 45^\circ = \frac{4}{2} 0.707 = 1.41 \text{ м.}$$

$$P = \gamma h_{ц.в} \omega = 1000 * 1.415 * 2 * 4 = 11320 \text{ кг}$$

$$I_0 = \frac{bH^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10.67 \text{ м}^4;$$

$$Z_T = 2 + \frac{10.67}{1.41 \cdot 2 \cdot 4} 0.707 = 2.67 \text{ м}$$

3.2 Тиск рідини на криволінійні поверхні

Для визначення тиску на криволінійні поверхні виділимо на поверхні АВ елементарну площину $d\omega$, центр ваги якої занурений на глибину h .

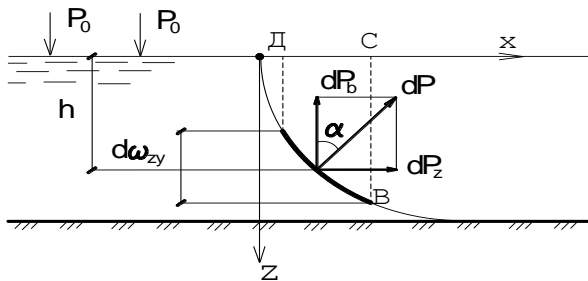


Рисунок 3.2

Якщо тиск на поверхні p_0 , то абсолютний гідростатичний тиск в центрі ваги площини буде

$$p = p_0 + \gamma h.$$

Тоді елементарна сила повного гідростатичного тиску

$$dP = (p_0 + \gamma h) d\omega$$

і направлена по нормалі проведеної до цієї площини.

Розкладемо елементарну силу на горизонтальну і вертикальну складові, позначивши кут відхилення сили від вертикалі через \bullet .

Складові сили будуть дорівнювати:

$$\left. \begin{aligned} dP_r &= dP \sin \alpha = (p_0 + \gamma h) \sin \alpha d\omega \\ dP_b &= dP \cos \alpha = (p_0 + \gamma h) \cos \alpha d\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

В формулах (3.14) добутки $\sin \bullet d\omega = d\omega_{z,y}$ і $\cos \bullet d\omega = d\omega_{x,y}$ дорівнюють площам проєкцій елементарної площини $d\omega$ на вертикальну yOz і горизонтальну координатні площини.

Тоді

$$\left. \begin{aligned} dP_r &= (p_0 + \gamma h) d\omega_{z,y} \\ dP_b &= (p_0 + \gamma h) d\omega_{x,y} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Якщо усю циліндричну поверхню розбити на елементарні ділянки, то повні складові (вертикальну P_b і

горизонтальну P_Γ) можна знайти простим підсумовуванням або інтегруванням рівнянь (3.15)

$$P_\Gamma = p_0 \int_{\omega} d\omega_{z,y} + \gamma \int_{\omega} h d\omega_{z,y} ; \quad (3.16)$$

$$P_B = p_0 \int_{\omega} d\omega_{x,y} + \gamma \int_{\omega} h d\omega_{x,y} . \quad (3.17)$$

Перші інтеграли в рівняннях (3.16 і 3.17) дорівнюють площам проекцій циліндричної поверхні АВ на відповідні координатні площини, тобто $\omega_{x,y}$ і $\omega_{z,y}$.

Другий інтеграл рівняння (3.16) представляє собою статичний момент площини проекції циліндричної поверхні на вертикальну zOy , відносно осі Oy . Тобто

$$\int h d\omega_{z,y} = S_y = h_{ц.в} \omega_{z,y} , \quad (3.18)$$

де $h_{ц.в}$ – глибина занурення центра ваги площини $\omega_{z,y}$.
Тобто

$$P_\Gamma = (p_0 + \gamma h_{ц.в}) \omega_{z,y} . \quad (3.19)$$

Таким чином горизонтальна складова P_Γ сили повного гідростатичного тиску, що діє на криволінійну поверхню АВ, дорівнює силі абсолютного гідростатичного тиску, під дією якого знаходилась би вертикальна плоска стінка, рівна по площі вертикальній проекції цієї поверхні.

Якщо провести вертикальні утворюючі через різні точки периметра елементарної площини $d\omega$ до координатної площини xOy , то отримаємо деякий елементарний об'єм $abcd$, що дорівнює $h d\omega_{x,y}$, тобто об'єм рівний другому інтегралу рівняння (3.17). Рівняння (3.17) запишеться у наступному вигляді

$$P_B = p_0 \omega_{x,y} + \gamma (\text{об'єм } ABCD) . \quad (3.20)$$

Тобто вертикальна складова сили абсолютного гідростатичного тиску дорівнює сумі двох сил – сили зовнішнього тиску на горизонтальну проекцію поверхні АВ і ваги рідини в об'ємі ABCD, обмеженого криволінійною

поверхнею АВ, вертикальними площинами і вільною поверхнею рідини.

Якщо скласти сили за правилом паралелограма, то сила повного гідростатичного тиску буде дорівнювати

$$P = \sqrt{P_r^2 + P_B^2} . \quad (3.21)$$

А кут між вертикальною віссю та рівнодіючою складе

$$\alpha = \arctg \frac{P_r}{P_B} . \quad (3.22)$$

Епюра гідростатичного тиску буде мати вигляд (Рис.3.3)

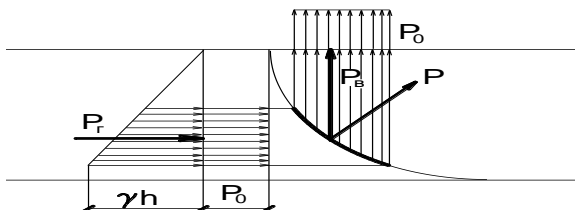


Рисунок 3.3

Приклад: Визначити силу тиску води на одиницю ширини кругової циліндричної поверхні. Діаметр циліндра $D = 2$ м. вільна поверхня співпадає з верхньою утворюючою

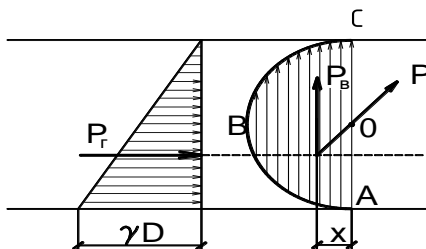


Рисунок 3.4

Горизонтальна складова визначається за формулою

$$P_r = \gamma h_{ц.в} \omega_{x,y},$$

де $h_{ц.в} = D/2$ а $\omega_{ц.в} = b D = 1 \cdot D$.

Прийmemo питому вагу води рівною $9,8 \text{ кН/м}^3$. тоді горизонтальна складова сили тиску складе $P_r = 9,8 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 2 = 19,6 \text{ кН}$.

Вертикальна складова визначається за формулою $P_b = \gamma (\text{об'єм } ABC) = \gamma \cdot 0,5 \cdot \pi D^2/4 = 9,8 \cdot 0,5 \cdot 3,14 \cdot 2^2/4 = 15,386 \text{ кН}$.

Ценр тиску горизонтальної складової становить $Z_r = 2/3 D = 2/3 \cdot 2 = 1,33 \text{ м}$.

Кут нахилу $\alpha = \arctg \frac{P_r}{P_b} = \arctg \frac{19,6}{15,386} = \arctg 1,41 = 54^\circ 40'$

Повна сила тиску складе

$$P = \sqrt{P_r^2 + P_b^2} = \sqrt{19,6^2 + 15,386^2} = 24,92 \text{ кН}.$$

3.3 Тиск рідини на стінки круглої труби

Розглянемо відрізок труби довжиною l , заповнений рідиною під надмірним тиском p .

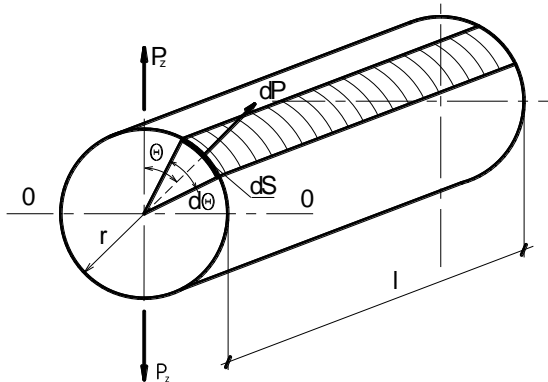


Рисунок 3.5

Як відомо, під дією внутрішнього тиску на стінки труби діють розтягуючі зусилля. Поставимо своєю ціллю визначити ці зусилля. Для цього розріжемо поперечний перетин труби деякою горизонтальною площиною $O - O$ і визначимо сили

P_z , що діють на верхній і нижній півциліндри. Ці сили намагаються розірвати трубу по перетину $O - O$, тобто відірвати верхню частину від нижньої.

Для визначення сили P_z виділимо на поверхні труби елементарну площину lds з дугою $ds = r d\Theta$ і довжиною l . Ця площа знаходиться під дією елементарної сили тиску, що визначається за формулою

$$dP = p l r d\Theta. \quad (3.23)$$

Вертикальна складова цієї сили

$$dP_z = p l r d\Theta \cos\Theta. \quad (3.24)$$

підсумовуючи вертикальні складові сили тиску для верхнього півциліндра, тобто інтегруючи рівняння (3.24) в межах від $\Theta = 0$ до $\Theta = \pi/2$, знаходимо рівнодіючу усіх сил на четвертину циліндра. Подвоївши його знаходимо рівнодіючу усіх сил на верхню (чи нижню) половину циліндра

$$P_z = 2 \int_0^{\pi/2} p l r \cos\Theta d\Theta = \left| 2 p l r \sin\Theta \right|_0^{\pi/2} = 2 p l r = p l D. \quad (3.25)$$

Добуток lD являється площею діаметрального перерізу труби. Таким чином, сила тиску, під дією якої знаходиться верхній і нижній півциліндри круглої труби, дорівнює добутку внутрішнього тиску рідини в трубі на площу діаметрального перерізу. Аналогічний вираз можна отримати і для горизонтальної сили P_x .

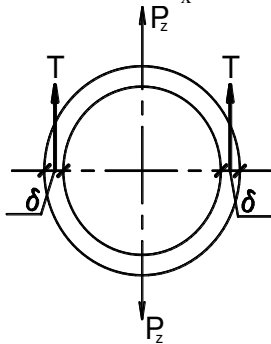


Рисунок 3.6

Позначимо силу опору матеріалу труби буквою T , товщину стінок – δ і допустиме напруження – ζ , тоді

$$T = \delta \ell \zeta. \quad (3.26)$$

Оскільки сила P_z намагається розірвати трубу в двох місцях (а і в), товщину стінки розраховують на силу $P_z/2$. Так як $P_z/2 = T$, то

$$P \ell D = 2 \delta \ell \zeta. \quad (3.27)$$

З рівняння (3.27) визначається товщина стінки труби

$$\delta = \frac{p D}{2 \zeta} = \frac{p r}{\zeta}. \quad (3.28)$$

Враховуючи недосконалість відливання, ржавіння і т. п., товщина стінок збільшується на $\Delta\delta = 3 - 7$ мм.

3.4 Закон Архімеда

Одним із важливих питань гідростатики являється вивчення умов плавання тіл. Умови плавання тіл в нерухомій рідині за звичаєм розглядається з двох точок зору:

- а) плавучості тіла, зануреного в рідину;
- б) остійності, тобто здатності відновити після крену своє нормальне положення.

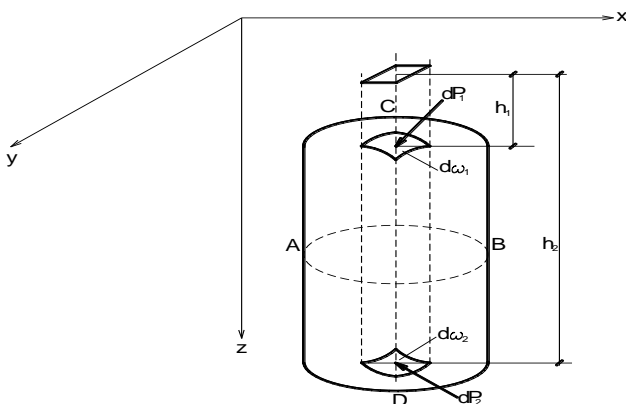


Рисунок 3.7

Для вивчення цього питання розглянемо перш за все тиск рідини на занурене в неї тіло.

Для спрощення будемо вважати, що всяка пряма перетинає тіло тільки у двох точках, тобто що переломи поверхні тіла відсутні.

Розсічемо тіло вертикальними площинами і отримаємо елементарні площини $d\omega_1$ і $d\omega_2$ з проекцією на горизонтальній координатній площині xOy – $d\omega_z$. Тоді проекції сил, діючих на елементарні площини будуть:

$$\left. \begin{aligned} dP_{1z} &= p_1 d\omega_1 \cos(dP_1, z) \\ dP_{2z} &= p_2 d\omega_2 \cos(dP_2, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

де p_1 і p_2 - тиск в центрах ваги площин $d\omega_1$ і $d\omega_2$, які визначаються за відомими формулами: $p_1 = \gamma h_1$ і $p_2 = \gamma h_2$.

Проекція на вісь z вертикальної підсумкової сили тиску буде

$$P = \gamma \int h_1 d\omega_z - \gamma \int h_2 d\omega_z = \gamma (W_1 - W_2) = -\gamma W. \quad (3.30)$$

Суми проекції на остальні осі рівні нулю, так як рідина знаходиться спокої.

Таким чином сила, з якою діє рідина на занурене в неї тіло, рівна по величині вазі рідини в об'ємі зануреної в неї тіла і направлена по вертикалі знизу в верх. Це положення відоме як закон Архімеда (відкритий за 250 років до нової ери). Сила тиску рідини на занурене в неї тіло називається підтримуючою силою (Архімедовою силою). Точку прикладення сили тиску на занурене в воду тіло називають центром тиску.

3.5 Плавучість тіл

Плавучість тіл характеризується співвідношенням ваги тіла і Архімедової сили. Якщо вага тіла зануреного в рідину менша Архімедової сили, тобто менша сили тиску рідини на нього, або $P > G$, то тіло спливає, якщо $P < G$, то тіло тоне і при $P = G$ тіло знаходиться в байдужому стані.

Якщо тіло плаває на поверхні рідини, то вагу рідини в зануреному об'ємі тіла називають водотоннажністю або підтримуючою (піднімальною) силою, а центр тиску зануреного в рідину тіла звично називають центром водотоннажу.

Для рівноваги плаваючого тіла необхідно, щоб сили його ваги і тиску на нього рідини були направлені по одній вертикальній прямій лінії, яку називають віссю плавання, або інакше центр ваги повинен знаходитись на одній прямовисній лінії з центром водотоннажу.

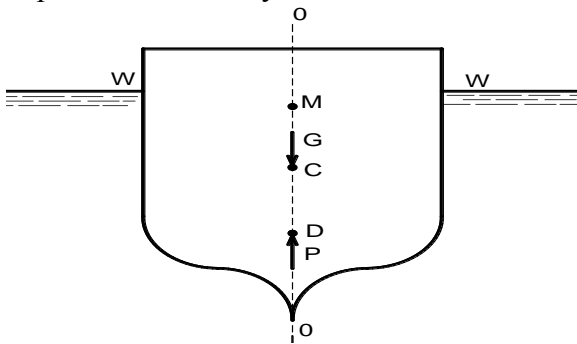


Рисунок 3.8

Лінія перетину вільної поверхні рідини з боковою поверхнею судна називається ватерлінією (WL) а площа обмежена ватерлінією – площиною плавання. Вертикальна вісь О - О, що проходить через центр ваги називається віссю плавання. Точку перетину осі плавання з лінією дії Архімедової сили при нахилі (крені) плаваючого тіла називають метацентром. У відповідності з цим на осі плавання повинні знаходитись три характерних точки: С – центр ваги; Д – центр тиску; М – метацентр.

Для неналивних суден центр ваги при крені не міняє свого положення. Центр водотоннажу міняє своє положення. Положення метацентру також міняється.

За звичаєм вважають, що при кренах до 15^0 метацентр не змінює свого положення і центр водотоннажу міняє своє

положення по дузі кола описаного із метacentра радіусом ρ , який називають метacentричним радіусом.

3.6 Визначення метacentричного радіуса

Для розгляду умов плавання тіла з точки зору остійності визначимо величину метacentричного радіуса. Величину метacentричного радіуса можна визначити використовуючи рівняння моментів, тобто складаючи рівняння рівноваги відносно якої-небудь осі.

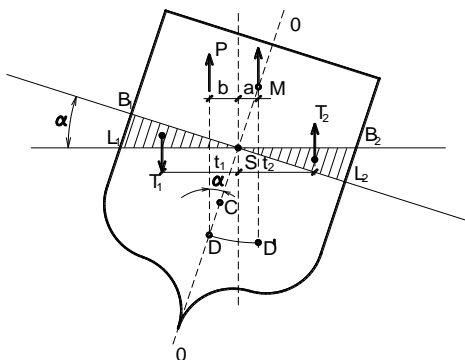


Рисунок 3.9

Розглянемо умову рівноваги судна при крені. При цьому на нього діють три сили:

1). Тиск води на судно, яке знаходиться в нормальному положенні до крена $P = \gamma W$. Сила P прикладена в центрі тиску D .

2). Сила, що дорівнює вазі води в об'ємі обсохлої частини судна T_1 ($\Delta S L_1 B_1$). Сила $T_1 = \gamma W_1$, прикладена в центрі ваги об'єму і направлена зверху вниз.

3). Сила, що дорівнює тиску води на частину судна, що занурюється під воду при крені T_2 ($\Delta S L_2 B_2$). Сила $T_2 = \gamma W_2$, вона також прикладена в центрі ваги частини, що занурюється, і направлена знизу вверх.

Під дією цих трьох сил центр тиску переміститься в точку D^I , через яку проходить рівнодіюча R тиску води на судно про крені. Об'єми W_1 і W_2 повинні бути однакові, так-як вага судна при крені не змінюється.

Складемо рівняння моментів відносно поздовжньої осі судна S

$$-R a = P b - T_1 t_1 - T_2 t_2. \quad (3.31)$$

Підставляючи замість сил їх значення, і враховуючи що: $W_1 = W_2$; $T_1 = T_2$; $t_1 = t_2$; і $R = P = \gamma W$, отримаємо

$$W(a + b) = 2 W_1 t_1. \quad (3.32)$$

Позначимо $a + b = n$. тоді із рисунка

$$n = \rho \sin \bullet, \quad (3.33)$$

де ρ – метацентричний радіус; \bullet - кут нахилу судна.

Підставивши це значення у формулу(3.32), отримаємо

$$W \rho \sin \bullet = 2 W_1 t_1.$$

$$\text{Звідки} \quad \rho = \frac{2 W_1 t_1}{W \sin \alpha}. \quad (3.34)$$

В рівнянні (3.34) необхідно вияснити, як веде себе добуток $2W_1 t_1$. Цей добуток можна розглядати, як статичний момент об'єму W_1 при плечі t_1 відносно осі плавання S .

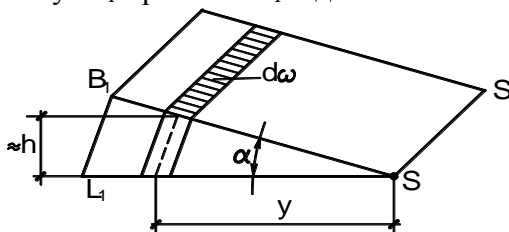


Рисунок 3.10

Розіб'ємо на елементарні об'єми осушену частину об'єму судна. Повний об'єм осушеної частини буде рівним сумі елементарних. А елементарний об'єм становить

$$dW = h d\omega.$$

При малих кутах крену h можна виразити як $h = y \bullet$.

Остаточно можна записати

$$W_1 t_1 = \sum y dW = \sum y^2 d\omega = \frac{1}{2} \alpha I_s, \quad (3.35)$$

де I_s – момент інерції площини плавання відносно осі S .

Отже

$$\rho = \frac{\alpha I_s}{W \sin \alpha}. \quad (3.36)$$

При малих кутах крену $\frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$. Таким чином

$$\rho = \frac{I_s}{W}. \quad (3.37)$$

3.7 Остійкість плаваючих тіл

Як уже відмічалось, остійкість плаваючого тіла – це здатність відновити своє нормальне положення після крену.

Розглянемо стійке і нестійке положення плаваючих тіл.

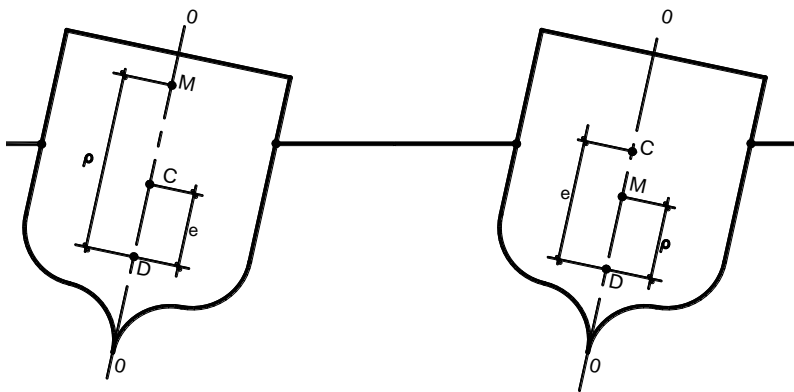


Рисунок 3.11

Для того, щоб плаваюче тіло могло відновити своє стійке положення, необхідно щоб момент сил, що виникає при крені, був направлений проти крену. Таким чином, як видно з рисунка 3.11, метацинтр повинен знаходитись вище центру ваги, тобто відстань між центром ваги і центром тиску повинна бути

менше метацентричного радіусу. Тобто повинна виконуватись умова

$$e < \rho \quad \text{або} \quad e < \frac{I_s}{W}. \quad (3.38)$$

Таким чином для збільшення остійкості судна необхідно знижувати положення центру ваги, або збільшувати відношення I_s/W (тобто збільшувати ширину судна).

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке рідина? Як змінюються її властивості при зміні температури?
2. Чим відрізняється реальна рідина від ідеальної?
3. Ньютоновські та неньютоновські рідини.
4. Що таке питома вага рідини і її значення для води?
5. Що таке щільність рідини і її значення для води?
6. Зв'язок між питомою вагою і щільністю.
7. Що характеризують коефіцієнти температурного розширення та об'ємного стиснення?
8. Що таке в'язкість рідини? Чим вона вимірюється?
9. Дайте визначення гідростатичного тиску.
Розмірність тиску.
10. Властивості гідростатичного тиску.
11. Напишіть диференційні рівняння рівноваги рідини.
12. Основне рівняння гідростатики. Що воно виражає?
13. Що таке надмірний тиск? Чим він вимірюється?
14. Що таке вакуум? Чим він вимірюється?
15. Гідростатичний напір і його властивість.
16. Поверхні рівня. Рівняння вільної поверхні для рідини, що знаходиться в стані спокою, та рухається рівноприскорено.
17. Сила тиску на плоскі поверхні.
18. Центр тиску. Де він знаходиться?
19. Тиск рідини на криволінійні поверхні.

20. Сила тиску рідини на стінки круглої труби.
21. Закон Архімеда. Умова рівноваги плаваючого тіла.
22. Метацентр. Умова остійкості плаваючого тіла.
23. Метацентричний радіус. Як він визначається?

РОЗДІЛ 2 ГІДРОДИНАМІКА

Л Е К Ц І Я № 4

Тема : Основи гідродинаміки

Л І Т Е Р А Т У Р А:

1. 1.Богомолів А.І., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 53 - 66.

4.1 Задачі гідродинаміки. Рух частинки рідини.

Сьогодні ми приступаємо до вивчення наступної частини технічної механіки рідини і газів – гідродинаміки.

Гідродинаміка вивчає закони руху рідини. Вивчати рух рідини досить трудно. Це пояснюється перш за все самою

природою рідини і особливо трудностю урахування сил тертя, які істотно впливають на її рух.

Технічна механіка рідини вивчає реальні, тобто в'язкі рідини, проте, враховуючи відмічені труднощі, вивчення гідродинаміки починається з вивчення руху ідеальної, тобто рідини, у якій відсутнє внутрішнє тертя, з наступним внесенням в отримані рівняння відповідних коректив.

При вивченні законів руху важливо встановити різницю двох понять: точка простору і частинка рідини.

Точка простору – це геометричний образ, який не має розмірів. Положення точки визначається координатами x, y, z .

Частинка рідини – це фізичний образ, який представляється як нескінченно мала маса рідини, що займає нескінченно малий об'єм.

Швидкість руху частинки рідини, а також тиск в ній p , в кожний момент часу буде визначатись положенням її в потоці, тобто координатами x, y, z і часом t .

Задачею гідродинаміки являється встановлення залежностей для основних факторів руху рідини. Зовнішні сили діючі на рідину, звично заздалегідь не відомі. Тому шуканими являються тиск в точках i , як наслідок, швидкість руху частинок рідини.

Позначимо повну швидкість руху частинки рідини через v , а її складові по осям координат - v_x, v_y, v_z .

Таким чином рішення гідродинамічної задачі зводиться до визначення складових швидкості і тиску:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t) \\ v_y &= f_2(x, y, z, t) \\ v_z &= f_3(x, y, z, t) \\ p &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Рух частинки рідини представляє собою складну систему переміщень: поступального, обертального і деформаційного.

Попробуємо представити рух частинки довільної форми. Нехай початок координат лежить усередині частинки і співпадає з центром ваги O (Рис. 4.1).

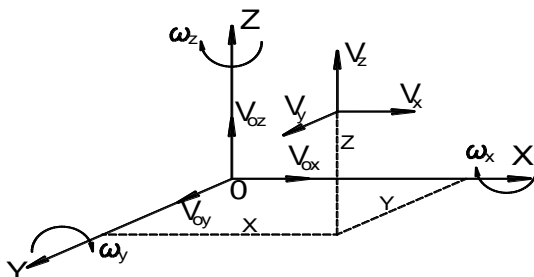


Рисунок 4.1

Компоненти швидкості центра ваги позначимо: v_{ox} , v_{oy} , v_{oz} .

Компоненти швидкості будь-якої точки частинки: v_x , v_y , v_z .

Люба точка, що не знаходиться в центрі ваги (тобто на початку координат), може обертатись навколо координатних осей з деякими кутовими швидкостями: ω_x , ω_y , ω_z .

Одночасно при русі частинки рідини деформують, змінюючи свої лінійні і кутові розміри. Якщо зобразити розріз частинки рідини координатною площиною, то деформації частинки можна зобразити положенням ребер AB , BC , CD , AD (рис. 4.2)

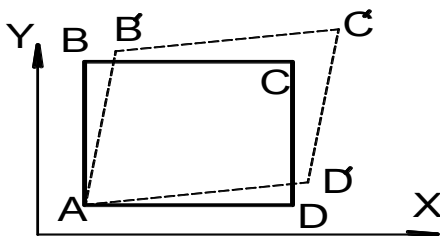


Рисунок 4.2

Так як рідина являється суцільним матеріальним середовищем, то компоненти швидкості v_x, v_y, v_z являються безперервними функціями і для точки близької до точки О їх можна розкласти в ряд Тейлора.

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{ox} + \frac{\partial v_x}{\partial x} x + \frac{\partial v_x}{\partial y} y + \frac{\partial v_x}{\partial z} z \\ v_y &= v_{oy} + \frac{\partial v_y}{\partial x} x + \frac{\partial v_y}{\partial y} y + \frac{\partial v_y}{\partial z} z \\ v_z &= v_{oz} + \frac{\partial v_z}{\partial x} x + \frac{\partial v_z}{\partial y} y + \frac{\partial v_z}{\partial z} z \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Проводячи ряд перетворень, які тут не приводяться, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{ox} + \frac{\partial F}{\partial x} + (z \omega_y - y \omega_z) \\ v_y &= v_{oy} + \frac{\partial F}{\partial y} + (x \omega_z - z \omega_x) \\ v_z &= v_{oz} + \frac{\partial F}{\partial z} + (y \omega_x - x \omega_y) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

де F – деяка потенціальна функція, часткові похідні якої представляють компоненти деформаційного руху.

Рівняння (4.3) відомі як рівняння Гельмгольца. Перший доданок в кожному рівнянні представляє поступальний рух, другий – деформаційний і третій обертальний відносно миттєвої осі, що проходить через центр ваги частинки.

4.2 Методи вивчення руху рідини

Для характеристики руху рідини необхідно знати гідродинамічні елементи у всіх точках зайнятого нею простору. Існує два методи вивчення руху рідини в просторі: метод Лагранжа і метод Ейлера.

Метод Лагранжа. За методом Лагранжа як би просліджується рух окремих частинок рідини.

Нехай в початковий момент часу t_0 положення частинки рідини визначається координатами a_0, b_0, c_0 . З часом координати рухомої частинки будуть мінятись і на деякий момент часу вони складуть a, b, c . Координати частинки для кожного моменту часу можуть бути виражені через значення початкових координат і час t . тобто кінематична картина руху буде ясна, якщо будуть відомі функції:

$$\left. \begin{aligned} a &= f_1(a_0, b_0, c_0, t) \\ b &= f_2(a_0, b_0, c_0, t) \\ c &= f_3(a_0, b_0, c_0, t) \end{aligned} \right\}, \quad (4.4)$$

Змінні a, b, c називаються змінними Лагранжа.

Проекції швидкостей і прискорень частинок на координатні осі визначаються залежностями:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial a}{\partial t}; \quad v_y = \frac{\partial b}{\partial t}; \quad v_z = \frac{\partial c}{\partial t}; \\ \dot{a}_0 &= \frac{\partial v_x}{\partial t}; \quad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t}; \quad a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned}$$

Метод Лагранжа через значну трудність не отримав широкого розповсюдження.

Метод Ейлера. За пропозицією Ейлера рух рідини характеризується побудовою поля швидкостей, тобто картини руху рідини в різних точках простору в кожний момент часу t . При цьому у всіх точках і тиск всередині рідини визначаються у вигляді функцій:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t) \\ v_y &= f_2(x, y, z, t) \\ v_z &= f_3(x, y, z, t) \\ p &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}, \quad (4.5)$$

де v_x, v_y, v_z – складові повної швидкості, які звично називають змінними Л.Ейлера.

розглянута система дозволяє визначити швидкість у всякій точці простору в любий момент часу. Недоліком методу Ейлера являється то, що при розгляді поля швидкостей не вивчається рух окремих частинок рідини.

4.3 Усталений і неусталений рух рідини

Якщо швидкість руху частинок рідини, що проходять в різний час через певну точку простору, різна, то такий рух називається неусталеним. При цьому швидкості і тиск змінюючись за часом в даній точці, змінюються також і при переміщенні частинок рідини із одного положення в інше.

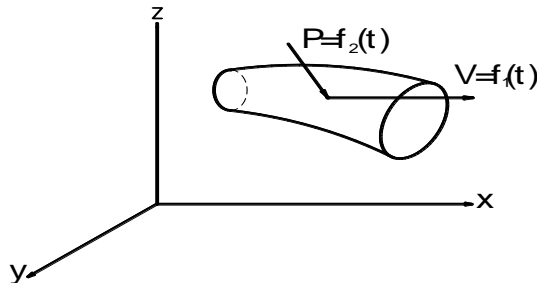


Рисунок 4.3

Таким чином, при неусталеному русі швидкості і тиск яляються функціями координат точок простору і часу:

$$\left. \begin{aligned} v &= f_1(x, y, z, t) \\ p &= f_2(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Найбільш простим прикладом неусталеного руху рідини може служити її витікання із резервуара при постійному пониженню рівня в ньому.

Рух рідини, при якому швидкості і тиск в любій точці потоку остаються постійними, тобто не міняються в часі ні за величиною, ні за напрямком називається усталеним. Окремі частинки рухомої рідини, попадаючи в різний час в одну і ту ж точку простору будуть мати однакові швидкості і зазнавати однакового тиску. При цьому в різних точках простору швидкості і тиск будуть різні. Таким чином, при усталеному

русі рідини швидкості і тиск являються функціями тільки координат точок простору:

$$\left. \begin{aligned} v &= f_3(x, y, z) \\ p &= f_4(x, y, z) \end{aligned} \right\}. \quad (4.7)$$

Математично усталений рух можна представити як незалежність від часу швидкостей і тиску влюбій розглядуваній точці:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (4.8)$$

Усталений рух в практиці (в трубах, у відкритих руслах) зустрічається рідко. Проте до неусталеного руху (особливо у відкритих руслах) можна використовувати закони усталеного руху.

Прикладом усталеного руху являється витікання рідини із резервуару при постійному рівні води в ньому.

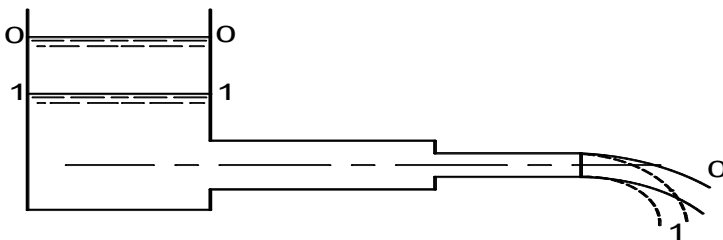


Рисунок 4.4

4.4 Елементи потоку

а) Траєкторія руху частинки рідини і лінія току

слід руху окремої частинки рідини в просторі називають траєкторією руху частинки рідини. Таким чином, при вивченні руху рідини за методом Лагранжа розглядається траєкторія руху окремої частинки рідини.

Для визначення поняття лінія току розглянемо наступний рисунок

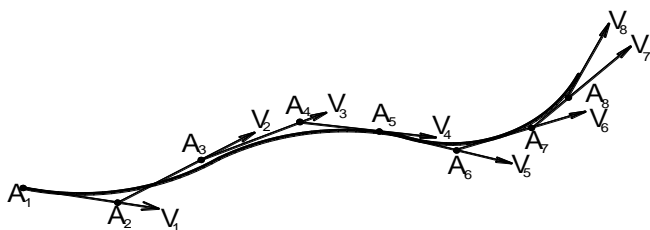


Рисунок 4.5

Допустимо, що в точці A_1 в момент часу t частинка рухається з деякою швидкістю v_1 . якщо по напрямку вектора v_1 на відстані δS , тобто в точці A_2 визначити швидкість частинки в той же момент часу t , то, очевидно, в загальному випадку швидкість в точці A_2 не буде співпадати зі швидкістю в точці A_1 ні за величиною, ні за напрямком. Далі знову допустимо, що швидкість в точці A_2 можна зобразити вектором v_2 . аналогічно розглянемо точку A_3 , що лежить на векторі v_2 на відстані δS від точки A_2 . для точки A_3 швидкість v_3 також не буде співпадати зі швидкістю v_2 . Аналогічно будемо приймати множину точок ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$). В результаті отримаємо лому лінію $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots$ і т.д. при зменшенні відстані δS до нуля ломана лінія перетвориться в криву, яку називають лінією току для кожного моменту часу t .

Лінія току це крива, характерна тим, що в даний момент часу у всіх її точках вектори швидкості будуть дотичними до неї.

Неможна змішувати поняття лінія току з траєкторією руху, так як лінія току визначає (в даний момент часу) напрямок руху нескінченної множини частинок рідини, розташованих на цій лінії, а траєкторія руху являється слідом руху окремої частинки рідини.

При усталеному русі лінія току співпадає з траєкторією руху так як величина і напрямок швидкостей не змінюється з бігом часу.

Вивчення ліній току – це і є метод вивчення руху Ейлера.

б) Рівняння лінії току і траєкторії руху частинок

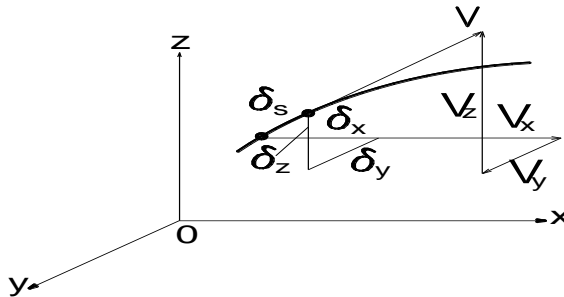


Рисунок 4.6

Допустимо, що нескінченно малий відрізок лінії току δS прямолінійний. Тоді вектор швидкості v співпадає за напрямком з цим відрізком.

Проекції вектора швидкості на координатні осі позначимо: v_x , v_y , v_z , а проекції лінії току на ті ж осі через δx , δy , δz .

Запишемо вирази для косинусів кутів між проекціями відрізка і самим відрізком лінії току:

$$\cos \alpha = \frac{\delta x}{\delta S}; \quad \cos \beta = \frac{\delta y}{\delta S}; \quad \cos \gamma = \frac{\delta z}{\delta S};$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

або

$$\frac{\delta x}{\delta S} = \frac{v_x}{v}; \quad \frac{\delta y}{\delta S} = \frac{v_y}{v}; \quad \frac{\delta z}{\delta S} = \frac{v_z}{v}.$$

Звідки:

$$\frac{v}{\delta S} = \frac{v_x}{\delta x}; \quad \frac{v}{\delta S} = \frac{v_y}{\delta y}; \quad \frac{v}{\delta S} = \frac{v_z}{\delta z};$$

$$\frac{v_x}{\delta x} = \frac{v_y}{\delta y} = \frac{v_z}{\delta z} = \frac{v}{\delta S} \quad (4.9)$$

Ці рівняння і представляють собою рівняння ліній току.

Якщо розглядати не лінії току а траєкторії руху частинок рідини, то для них будуть справедливі співвідношення:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

або

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt. \quad (4.10)$$

Це і є рівняння траєкторії руху.

в) Трубка току

Якщо через усі точки нескінченно малого замкнутого контуру провести лінії току, то останні утворять як би трубчасту непроникну поверхню, яку називають трубкою току. Трубка току характерна тим, що рідина не може ні витікати із неї, ні поступати в неї.

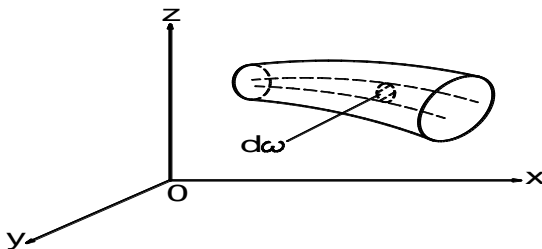


Рисунок 4.7

Отже в трубці току рідина протікає як в звичайній трубці, тільки з нескінченно малою площею перерізу.

г) Елементарна струминка рідини

Масу рідини всередині трубки току називають елементарною струминкою рідини. При неусталеному русі

рідини форма трубки току постійно змінюється, а разом з нею змінюється і елементарна струминка рідини. При усталеному русі рідини трубка току і елементарна струминка рідини остаються незмінними.

д) Потік рідини

Поняття про елементарну струминку рідини дає можливість розглядати групу струминок, що рухаються спільно. При цьому потік рідини можна представити як сукупність елементарних струминок, що рухаються з різними швидкостями і ковзають одна по другій. Отже сукупність рухомих струминок називається потоком рідини.

е) Живий переріз струминки і потоку

Площа поперечного перерізу струминки рідини, перпендикулярна її внутрішнім лініям току, позначається $d\omega$ і називається площею живого перерізу струминки. Так як перерізи струминки нескінченно малі, можна вважати, що усі частинки рідини в її поперечному перерізі мають однакову швидкість.

Якщо через яку-небудь точку потоку провести площину, то отримаємо переріз, який називається живим перерізом потоку. В загальному випадку поверхня живого перерізу потоку може бути криволінійною.

ж) Змочений периметр

Частина периметру живого перерізу, утворена твердими, обмежуючими потік, стінками називається змоченим периметром. Змочений периметр позначають буквою χ . При напірному русі змочений периметр дорівнює повному периметру живого перерізу, а при безнапірному русі змочений периметр менший повного периметру живого перерізу.

з) Гідравлічний радіус

Відношення площі живого перерізу до змоченого периметру називається гідравлічним радіусом

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (4.11)$$

Для круглих перерізів $\omega = \pi r^2$ а $\chi = 2\pi r$. Гідравлічний радіус складе

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}. \quad (4.12)$$

Тобто для круглих перерізів гідравлічний радіус дорівнює половині геометричного.

4.5 Поняття про рівномірний і нерівномірний, напірний і безнапірний рух потоків рідини

Рівномірним називається такий усталений рух, при якому живі перерізи потоку і середня швидкість в них однакові на усій його довжині, а швидкості у відповідних точках усіх живих перерізів також однакові. Прикладом рівномірного руху може служити рух води в каналах з постійною формою поперечного перерізу і постійною глибиною.

Якщо по довжині потоку його поперечний переріз ω змінюється, тобто ω являється функцією відстані і глибини, або тільки глибини або тільки відстані, то такий рух називається нерівномірним. Типовим прикладом нерівномірного руху являється рух води в устях рік і особливо на ділянках підпору перед водозливними греблями.

За характером руху потоки можуть бути розділені на три групи : напірні, безнапірні і струмини. Живі перерізи напірних потоків повинні бути обмежені з усіх сторін жорсткими стінками, живі перерізи безнапірних потоків – з однієї із сторін повітряним середовищем, а живі перерізи струмин – з усіх сторін повинні мати вільну поверхню.

Напірний рух характеризується зміною гідродинамічного тиску вздовж потоку, що і дає підставу розглядати цей вид руху як напірний.

Рух струмин відбувається за інерцією під впливом початкової швидкості, створеної тиском або силою ваги. Прикладом струмини являється витікаючи із отвору або брандзбойта рідина.

4.6 Витрати і середня швидкість потоку

Якщо в струмині площею живого перерізу $d\omega$ швидкості руху на окремих лініях току однакові, то в одиницю часу по струминці протікає відповідна кількість рідини, що вимірюється добутком площі його живого перетину на швидкість руху і має розмірність л/сек. або м³/сек.. Цю кількість рідини називають елементарними об'ємними витратами або просто витратами рідини

$$dQ = v d\omega. \quad (4.13)$$

Для переходу до визначення витрат потоку слід установити поняття середньої швидкості: середньою швидкістю в живому перерізі називається така швидкість, з якою повинні рухатись усі частинки рідини в потоці, щоб пропустити через його живий переріз дійсні витрати, що проходять при нерівномірному розподілі швидкостей. Тобто середня швидкість являється тільки предметом загальної характеристики руху в'язкої рідини.

Рівняння (4.13) записано для струминки рідини. Для цілого потоку рівняння (4.13) слід про інтегрувати:

$$Q = v \int_{\omega} d\omega = v \omega. \quad (4.14)$$

Із рівняння (4.14) знаходимо математичний вираз для середньої швидкості

$$v = \frac{Q}{\int_{\omega} d\omega} = \frac{Q}{\omega}. \quad (4.15)$$

4.7 Визначення швидкості руху за допомогою трубки Піто

Вимірювання місцевих швидкостей виконується різними приладами. Найбільш простим приладом являється трубка Піто, яка представляє собою зігнуту трубку, відкритий отвір якої сприймає тиск швидкісного напору, так як направлений проти руху рідини.

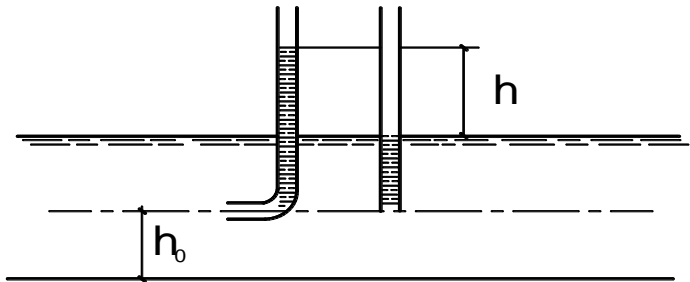


Рисунок 4.8

В найпростішому випадку рядом з трубкою Піто установлюють звичайний п'єзометр. Рівні води в трубках будуть відрізнятися на величину h , що відповідає питомій кінетичній енергії (швидкісному напору), тобто

$$h = \frac{v^2}{2g}, \quad (4.16)$$

Звідки
$$v = \sqrt{2gh}. \quad (4.17)$$

Л Е К Ц І Я № 5

Тема : Диференційні рівняння нерозривності і руху рідини

ЛІТЕРАТУРА:

1. 1.Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 67 - 71.

5.1 Диференційне рівняння нерозірваності або суцільності руху рідини

Диференційне рівняння нерозірваності характеризує відоме положення, що при русі рідини в ній не утворюється ні розривів суцільності, ні пустот. Для вияснення умов нерозірваності розглянемо протікання рідини через елементарний паралелепіпед за відповідний проміжок часу і установеми умови, при яких рідина зберігає свою суцільність, вважаючи щільність її постійною.

Виберемо систему координат в вершині О. координатні осі направимо по ребрах ОА, ОС і ОF. Позначимо повну швидкість потоку на початку координат через v і представимо, що рідина втікає по гранях ОАВС, ОAGF, ОСDF, що лежать в координатних площинах, і витікає по протилежних гранях BCDE, ABEG і EDFG.

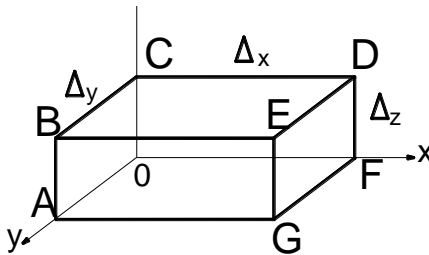


Рисунок 5.1

Розкладемо компоненти швидкості в ряд Тейлора і обмежимося першими членами. Тоді маса утікаючої через грань ОАВС рідини складе

$$M_x^I = \rho \int_0^{\Delta z} \int_0^{\Delta y} \left(v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} y + \frac{\partial v_x}{\partial z} z \right) dy dz = \rho \left(v_{0x} \Delta y \Delta z + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\Delta y^2}{2} \Delta z + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\Delta z^2}{2} \Delta y \right). \quad (5.1)$$

Маса рідини, що витікає через грань EDFG, складе

$$M_x^I = \rho \int_0^{\Delta z} \int_0^{\Delta y} \left(v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} y + \frac{\partial v_x}{\partial z} z \right) dy dz = \rho \left(v_{0x} \Delta y \Delta z + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\Delta y^2}{2} \Delta z + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\Delta z^2}{2} \Delta y \right). \quad (5.2)$$

Отже за одиницю часу в паралелепіпеді накопичується деяка маса рідини:

$$M_x = M_x^{\Pi} - M_x^I = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.3)$$

Якщо розглядати масу утікаючої рідини через грані OFGA і OCDF і витікаючої через протилежні грані, отримаємо формули для визначення маси рідини в одиницю часу через ці грані:

$$M_y = \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z; \quad (5.4)$$

$$M_z = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.5)$$

Тоді повна маса утікаючої рідини складе

$$\Delta M = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.6)$$

Якщо представити, що можлива зміна маси в об'ємі, що розглядається, то приріст її складе

$$\Delta M = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y \Delta z - \rho \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.7)$$

Тоді кількість накопиченої рідини повинно бути рівним величині приросту:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (5.8)$$

Це рівняння являється диференціальним рівнянням нерозірваності руху рідини при змінній щільності.

При умові відсутності в рідині розривів суцільності і при $\rho = \text{const}$ накопичена в паралелепіпеді маса рідини повинна бути рівна 0. тоді із рівняння (5.8) отримаємо:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (5.9)$$

Отримане рівняння являється диференціальним рівнянням нерозірваності руху рідини при постійній щільності.

5.2 Гідравлічне рівняння нерозірваності

Для усталеного потоку рівняння нерозірваності може бути отримано наступним чином.

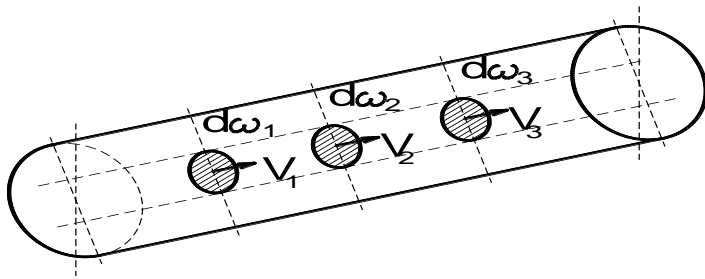


Рисунок 5.2

Розглянемо відсік потоку рідини усередині його елементарної струмки між перерізами 1 – 1 і 2 – 2. За час dt через його живий переріз $d\omega_1$ протече рідина в кількості $d\omega_1 v_1 dt$. За той же час dt через живий переріз $d\omega_2$ витече кількість рідини $d\omega_2 v_2 dt$. Так як форма відсіку з часом не змінюється і струминка рідини остається нестискуваною, об'єми рідини, що утікає через переріз 1 – 1 і витікає через переріз 2 – 2 повинні бути однакові, тобто

$$d\omega_2 v_2 dt = d\omega_1 v_1 dt. \quad (5.10)$$

Проінтегрувавши вираз (5.10) по усій площині перерізу потоку, отримаємо

$$\int_0^{\omega_2} d\omega_2 v_2 = \int_0^{\omega_1} d\omega_1 v_1. \quad (5.11)$$

$$\text{Звідки} \quad \omega_2 v_2 = \omega_1 v_1. \quad (5.12)$$

$$\text{Тобто} \quad \omega v = \text{const.}$$

Із рівняння (5.12) можна отримати

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (5.13)$$

При усталеному русі добуток площі живого перерізу потоку на середню швидкість є величина постійна і середні швидкості потоку зворотно пропорціональні площам відповідних живих перерізів. Рівняння (5.13) носить назву гідравлічного рівняння нерозірваності потоку. Воно являється одним із основних в гідродинаміці.

5.3 Рівняння руху Ейлера

Для отримання диференціальних рівнянь руху Ейлера виділимо в рухомій рідині елементарний паралелепіпед, відкинувши усе зовнішнє середовище і замінивши його вплив на грані силами dP_x , dP_x^I , dP_y , dP_y^I , dP_z , dP_z^I (Рис 5.).

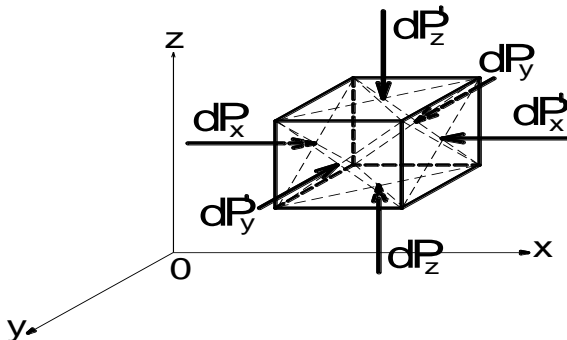


Рисунок 5.3

Якщо до діючих сил виділеного рухомого паралелепіпеда – тобто до сил гідростатичного тиску і власної ваги – додати (з зворотнім знаком) сили інерції, на основі постулату Даламбера можна рухомий паралелепіпед розглядати як такий, що знаходиться в стані спокою. Рівняння рівноваги отримані раніше (2.10) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Рівняння рівноваги нерухомої рідини віднесені до одиниці маси. Тому до них необхідно додати сили інерції, також віднесені до одиниці маси.

Сили інерції слід шукати у вигляді добутку маси паралелепіпеда на прискорення по відповідних координатах.

Якщо швидкість паралелепіпеда позначити через v , а її проекції на відповідні осі через v_x , v_y , v_z , то прискорення по відповідних координатних осях можна виразити як:

$$\frac{dv_x}{dt}; \quad \frac{dv_y}{dt}; \quad \frac{dv_z}{dt}. \quad (5.14)$$

Повні складові сил інерції по координатних осях будуть складати:

$$\rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt}; \quad \rho dx dy dz \frac{dv_y}{dt}; \quad \rho dx dy dz \frac{dv_z}{dt}.$$

Складові сил інерції віднесені до одиниці маси будуть визначатись прискореннями: $\frac{dv_x}{dt}; \quad \frac{dv_y}{dt}; \quad \frac{dv_z}{dt}.$

Додавши їх із зворотнім знаком до рівнянь рівноваги (2.10), або, що те ж саме, дописавши їх зі своїм знаком в праві частини рівнянь рівноваги, отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} . \quad (5.15)$$

Вперше ці рівняння були отримані в 1755 році Л.Ейлером, тому їм привласнена назва – рівняння Ейлера.

Система рівнянь (5.15) може бути дещо змінена. Враховуючи, що компоненти швидкості являються непереривною функцією від x, y, z і t , праву частину цих рівнянь можна привести до вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Диференціальні рівняння Ейлера отримані в такому вигляді утворили початок практичному вивченню руху рідини. Оскільки трьох отриманих основних залежностей недостатньо для вирішення задач (невдомих чотири – v_x, v_y, v_z, p), до них необхідно додавати четверте – рівняння суцільності або нерозірваності руху нестискуваної рідини.

5.4 Рівняння І.С.Громека

Як відомо із попереднього, всякий рух частинки рідини можна розкласти на три рухи: поступальний, деформаційний і обертальний. Поступальний рух досить добре характеризується загальними рівняннями Ейлера. Для отримання характеристики вихрового руху необхідно рівняння Ейлера перетворити. Ця задача вирішена І.С.Громека, який виділив елементи обертального руху.

Для цього в рівняннях руху Ейлера від правої і лівої частини віднімемо похідні від $\frac{v^2}{2}$, знаючи що

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Рівняння Ейлера набудуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial x} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial y} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Взявши похідні від $v^2/2$ за осями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial x} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial y} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial z} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

і підставивши їх значення в праву частину рівнянь (5.17) і виконавши відповідні перетворення, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} - v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} - v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

В рівняннях (5.19) вирази в дужках можна представити:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 2\omega_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= 2\omega_y \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= 2\omega_x \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Тоді рівняння руху запишуться в наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2(v_z \omega_y - v_y \omega_z) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + 2(v_x \omega_z - v_z \omega_x) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + 2(v_y \omega_x - v_x \omega_y) \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Припустимо, що компоненти об'ємних сил X , Y , Z це похідні від деякої силової функції Π узяті з зворотнім знаком, тобто

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (5.22)$$

Часткові похідні від компонентів швидкості за часом в праві частині рівняння можуть бути дещо перетворені. Для цього припустимо, що існує потенціал швидкості φ , часткова похідна якого, узята з зворотнім знаком, виражає відповідну компоненту швидкості, тобто:

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5.23)$$

Тоді:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial t}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial t}; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)}{\partial t}. \quad (5.24)$$

Використовуючи властивість зміни порядку диференціювання отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} = -\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Підставивши значення X, Y, Z і $\frac{\partial v_x}{\partial t}; \frac{\partial v_y}{\partial t}; \frac{\partial v_z}{\partial t}$ в рівняння (5.21) отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 2(v_z \omega_y - v_y \omega_z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 2(v_x \omega_z - v_z \omega_x) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial H}{\partial z} = 2(v_y \omega_x - v_x \omega_y) \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Ліва частина рівнянь (5.22) характеризує рух рідини під дією потенціальних сил, а права характеризує вихровий рух, породжений силами, що не мають потенціалу швидкостей.

5.5 Потенціал швидкостей

Якщо кутову швидкість (компоненти вихру) прирівняти нулю, то для усіх точок простору будуть справедливими наступні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0 & \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0 & \text{або} & \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0 & \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Позначимо компоненти швидкості v_x , v_y , v_z як часткові похідні від деякої безперервної функції $\varphi(x, y, z)$ зі зворотним знаком, тобто:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}; & \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y}; & \frac{\partial v_y}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}; & \frac{\partial v_z}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z \partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Тобто при виконанні умов (5.27) обов'язково виконуються умови (5.28). Функція $\varphi(x, y, z)$, задовольняюча умови (5.28), називається потенціалом швидкостей.

Якщо рівняння (5.28) помножити відповідно на dx , dy , dz і скласти, отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} v_x dx + v_y dy + v_z dz &= \\ &= - \left[\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} dz \right] = -d\varphi. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Права частина рівняння (5.25) представляє собою повний диференціал функції потенціалу швидкостей.

Поверхні, виділені в потоці рідини, у яких усі точки мають однакові значення функції потенціалу швидкостей, називаються поверхнями рівного потенціалу або екіпотенціалами і характеризуються рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = \text{const} = C_n \end{aligned} \right\}. \quad (5.30)$$

Задаючись різними значеннями інтегральних постійних C_n , C_{n+1} і т.д., можна отримати ціле сімейство поверхонь рівного потенціалу.

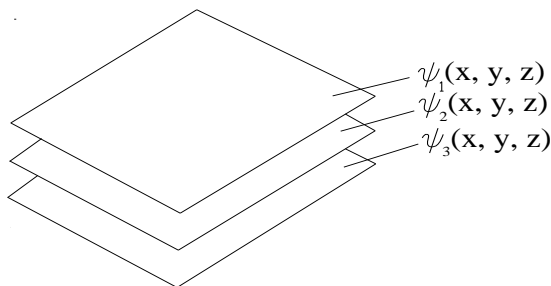


Рисунок 5.4

Підставляючи значення (5.24) в рівняння нерозірваності (5.9), отримаємо наступне співвідношення

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.31)$$

Цей вираз відомий в математиці під назвою рівняння Лапласа. Отже функція потенціалу являється гармонічною функцією і повинна задовольняти рівнянням Лапласа.

5.6 Функції току

Рівняння лінії току отримується із системи рівнянь, визначаючих в усталеному русі компоненти швидкостей:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (5.32)$$

Звідси, виключивши dt , отримаємо:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt. \quad (5.33)$$

У випадку неусталеного руху рівняння (5.32) можуть характеризувати тільки траєкторії окремих частинок.

Розглядаючи одно із рівнянь плоского руху, отримаємо залежність:

$$v_x dy - v_y dx = 0 \quad (5.34)$$

інтеграл рівняння (5.30) можна отримати, якщо підібрати функцію Ψ , що має наступні властивості:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x \quad \text{і} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y. \quad (5.35)$$

Така функція називається функцією току. При існуванні цієї функції рівняння (5.34) можна перетворити в наступне:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0. \quad (5.36)$$

Рівняння (5.36) має інтеграл у вигляді

$$\Psi(x, y, z) = C_n^I = \text{const}. \quad (5.37)$$

Інтеграл (5.37) дає сімейство ліній току і сукупність поверхонь току. Функція току, так як Φ функція потенціалу швидкості, відповідає рівнянню нерозривності руху. Для цього досить продиференціювати перше із рівнянь (5.28) по x а друге по y і взяти їх різницю. Тоді отримаємо рівняння вигляду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (5.38)$$

Це рівняння виражає собою рівняння нерозривності так як ліва частина перетворюється в нуль.

В плоскому безвихровому потоці функція току $\Psi(x, y)$ завжди задовольняє рівнянню Лапласа. Це положення можна показати шляхом співставлення виразів компонентів вихору через функцію току, враховуючи, що розглядувана функція току Ψ не залежить від координати z :

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0; \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.39)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)$$

Рівняння (5.39) показує, що безвихровий потік можливий тільки тоді, коли функція току задовольняє рівнянню Лапласа.

Отже і функція потенціалу швидкостей, і функція току, являються гармонічними і задовольняють рівнянню Лапласа.

5.7 Гідродинамічна сітка руху

Використовуючи основні властивості функції току і потенціалу швидкостей, можна встановити взаємозв'язок між лініями току і лініями рівних напорів або еквіпотенціалами.

Основні властивості функції току і потенціалу швидкостей мають вигляд:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y; \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y;$$

і тоді

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (5.40)$$

Перемноживши між собою рівняння (5.40), отримаємо рівняння наступного вигляду

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (5.41)$$

Рівняння виду (5.37) в аналітичній геометрії виражають ортогональний перетин кривих. Тому кожна крива сімейства з різними постійними значеннями ψ перетинаються під прямим кутом з кожною кривою іншого сімейства з різними постійними значеннями φ .

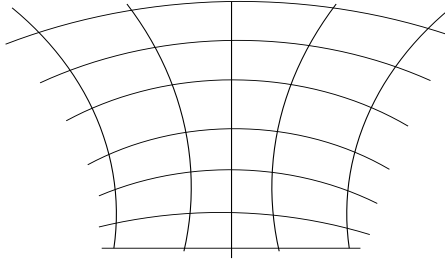


Рисунок 5.5

Картина руху потенційного потоку може бути добре охарактеризована схемою, яка носить назву гідродинамічної сітки руху, і складена з двох сімейств кривих – лініями рівних потенціалів швидкостей або еквіпотенціалами і лініями току.

Л Е К Ц І Я № 6

Тема: Рівняння Бернуллі і його інтерпретації

Література:

1. Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 71 - 80.

6.1 Інтеграл Д.Бернуллі. Рівняння Д.Бернуллі для струминки ідеальної рідини

Помножимо диференційні рівняння руху Л.Ейлера (5.15) відповідно на dx , dy , dz і складемо їх.

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} \Big| \bullet dx$$

$$\left. \begin{aligned} Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right| \bullet dy$$

Після складання отримаємо

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) &= \\ = dv_x \frac{dx}{dt} + dv_y \frac{dy}{dt} + dv_z \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (6.1)$$

При усталеному русі $\frac{dx}{dt} = v_x$; $\frac{dy}{dt} = v_y$; $\frac{dz}{dt} = v_z$.

Права частина рівняння (6.1) набуває вигляду:

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

а це не що інше, як повний диференціал від

$$\frac{v^2}{2}, \quad \text{або} \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

$$\text{тобто} \quad v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Вирази в круглих дужках рівності (6.1), як було показано раніше, представляють собою повні диференціали $d\Pi$ і dp . Враховуючи це, рівняння (6.1) можна привести до вигляду

$$d\Pi - \frac{1}{\rho} dp - d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0. \quad (6.2)$$

Якщо координатну вісь z направити вертикально вгору і розглядати рівновагу рідини, що знаходиться в стані спокою, то $d\Pi = -g dz$. Рівняння (6.2) після ділення на $-g$ набуде вигляду

$$dz + \frac{1}{\gamma} dp + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0. \quad (6.3)$$

Інтегрування рівняння (6.3) дає

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const} = Hd. \quad (6.4)$$

У виразі (6.4) через Непозначений гідродинамічний напір. Рівняння (6.4) може бути записано для двох перерізів у вигляді рівності гідродинамічних напорів у цих перерізах:

$$\begin{aligned} Hd_1 &= Hd_2 \\ \text{або} \quad z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} &= z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

рівняння (6.4) називають інтегралом Бернуллі, а (6.5) рівнянням Бернуллі, які він вперше отримав у 1738 році не вдаючись до інтегрування.

6.2 Інтерпретації рівняння Бернуллі

6.2.1 Механічна інтерпретація

Розглянемо виділений двома перетинами 1-1 і 2-2 відсік деякої струминки рідини. Положення центрів ваги живих перетинів ω_1 і ω_2 ; тиск в центрах ваги цих же перетинів позначимо через p_1 і p_2 , а швидкості через v_1 і v_2 .

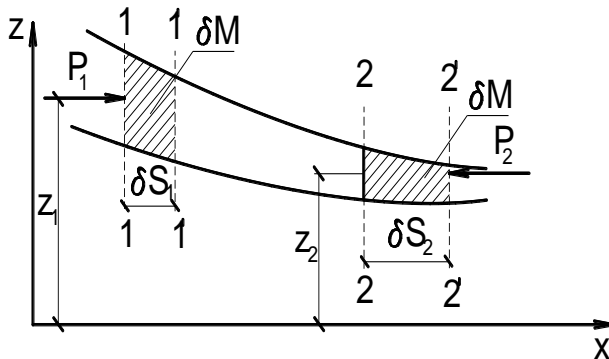


Рисунок 6.1

Припустимо, що через проміжок часу рівний одиниці, частинка рідини, що знаходилась на перетині 1-1

переміститься на перетин $1^I - 1^I$ на відстань $\delta S_1 = v_1 \cdot 1$, а частинки, що знаходились на перетині $2 - 2$ перемістяться в положення $2^I - 2^I$ на відстань $\delta S_2 = v_2 \cdot 1$. При цьому сили, що діють на відсік, виконають деяку роботу. За законом живих сил ця робота повинна дорівнювати приросту живої сили відсіку.

Робота сил тиску визначається залежністю:

$$p_1 \omega_1 \delta S_1 - p_2 \omega_2 \delta S_2 = p_1 \omega_1 v_1 - p_2 \omega_2 v_2 = \\ = Q (p_1 - p_2), \quad (6.6)$$

так як $\delta S = v \cdot 1$ а $Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$.

Робота сили ваги еквівалентна роботі, що виконується масою відсіку $1 - 1^I$ при переміщенні в положення $2 - 2^I$ на різницю висот $z_1 - z_2$

$$\gamma \cdot \omega_1 \cdot \delta S_1 (z_1 - z_2) = \gamma \cdot \omega_1 \cdot v_1 (z_1 - z_2) = \gamma Q (z_1 - z_2). \quad (6.7)$$

Сумарний приріст живих сил струминки за розглядувану одиницю часу дорівнює різниці живих сил елементів $2 - 2^I$ і $1 - 1^I$, так як в межах ділянки $(1^I - 2)$ жива сила рухомої маси остається незмінною. Тому приріст живої сили складе:

$$\rho \delta S_2 \omega_2 \frac{v_2^2}{2} - \rho \delta S_1 \omega_1 \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma}{g} Q \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right). \quad (6.8)$$

Використовуючи рівняння (6.6, 6.7, 6.8), рівняння живої сили запишемо в наступному вигляді:

$$\frac{\gamma}{g} Q \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = Q (p_1 - p_2) + \gamma Q (z_1 - z_2). \quad (6.9)$$

Після відповідних перетворень отримаємо рівняння Д.Бернуллі у вигляді:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = C = \text{const}. \quad (6.10)$$

Таким чином з точки зору механіки рівняння Д.Бернуллі виражає відомий закон живих сил.

6.2.2 Геометрична інтерпретація

Розглянемо елементарну струминку з віссю $A - B$. нехай точки A і B , що лежать на перетинах 1 і 2, мають координати z_1 і z_2 над площиною порівняння $O - O$.

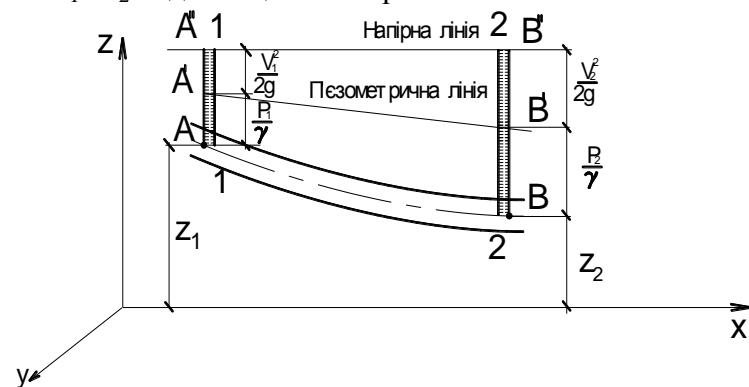


Рисунок 6.2

Від точки A по вертикалі відкладемо п'єзометричну висоту p_1/γ а потім відрізок рівний швидкісному напору $v_1^2/2g$. Аналогічну побудову виконаємо для точки B . Так як сума усіх трьох членів

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const} = Hd. \quad (6.11)$$

постійна вздовж усієї струминки, то вершини A'' і B'' повинні знаходитись на однаковій висоті від площини порівняння. Площина, що поєднує точки A'' і B'' називається напірною площиною. Отже з геометричної точки зору рівняння Д.Бернуллі можна тлумачити так: напірна площина горизонтальна

Суму (6.11), як відомо, називають гідродинамічним напором. Отже в будь-якому перетині потоку ідеальної рідини гідродинамічний напір величина постійна.

Падіння п'єзометричної лінії на одиницю довжини називається п'єзометричним похилом. П'єзометричний похил може бути позитивним і негативним.

6.2.3 Фізична інтерпретація

Нехай частинка рідини масою δm рухається по осі струминки АВ всередині елементарної трубки току. Визначимо величину повної, тобто кінетичної і потенційної енергії, яку мала і буде мати ця частинка в перетинах 1 – 1 і 2 – 2.

Кінетична енергія частинки в перетині 1 – 1 рівна $\delta m \frac{v_1^2}{2}$. Потенційна визначається із наступних міркувань. Під дією тиску p_1 рідина в п'єзометричній трубці може піднятися на висоту p_1/γ . Тобто і розглядувана частинка здатна піднятися під впливом тиску на таку саму висоту, при цьому над площиною порівняння ця частинка підніметься на висоту $z_1 + p_1/\gamma$. Цьому і відповідає повна потенціальна енергія, що дорівнює добутку ваги частинки на висоту:

$$g \delta m \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) = g \delta m z_1 + g \delta m \frac{p_1}{\gamma}. \quad (6.12)$$

Таким чином повна потенціальна енергія складається із енергії положення і енергії тиску.

Повна енергія частинка в перерізі 1 – 1 буде дорівнювати:

$$\mathcal{E}_1 = z_1 g \delta m + \frac{p_1}{\gamma} g \delta m \delta m \frac{v_1^2}{2}. \quad (6.13)$$

Якщо вираз (6.13) розділити на вагу частинки, то отримаємо значення питомої енергії цієї частинки

$$E_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}. \quad (6.14)$$

Аналогічний вираз можна отримати і для частинки, що знаходиться в перерізі 2 – 2

$$E_2 = z_1 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} . \quad (6.15)$$

Так як питомі енергії повинні бути однакові, то

$$E = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const.} \quad (6.16)$$

Сумарна питома енергія, що переноситься елементарною струминкою ідеальної рідини, складається із трьох частин:

- питомої кінетичної енергії, мірою якої служить швидкісний напір;
- питомої енергії тиску, мірою якої служить п'єзометрична висота;
- питомої енергії положення, мірою якої служить відмітка розглядуваної точки над площиною порівняння.

Таким чином фізична інтерпретація рівняння Д.Бернуллі представляє тільки частковий випадок вираження загального закону збереження матерії в природі, запропонованого ще М.В.Ломоносовим.

6.3 Рівняння Д.Бернуллі для струминки реальної рідини

В ідеальній рідині, як відомо, питома енергія для усіх перерізів елементарної струминки постійна.

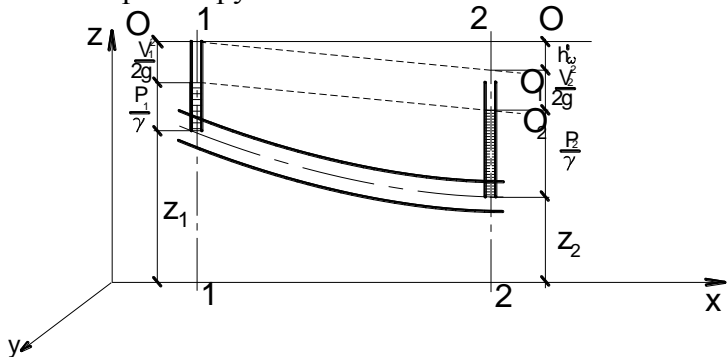


Рисунок 6.3

В реальній рідині це положення нездійснене так як на шляху руху частинки рідини розвиваються сили опору цьому руху, в результаті чого частина повної енергії перетворюється в теплову енергію.

Тому частинки рідини дійдуть до перетину 2 – 2, маючи уже меншу енергію, тобто $E_1 > E_2$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (6.17)$$

Для ідеальної рідини напірна площина має горизонтальне положення (О - О). Для реальної ж рідини в силу наявності сил тертя напірна площина займає положення О – О₁. Тож гідродинамічний напір в перетині 1 – 1 більший гідродинамічного напору в перетині 2 – 2 на величину

$$h_{\omega}^I = Hd_1 - Hd_2. \quad (6.18)$$

Величина h_{ω}^I - називається втратою гідродинамічного напору.

Підставляючи значення Hd_1 і Hd_2 отримаємо рівняння Д.Бернуллі для струминки реальної рідини

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\omega}^I. \quad (6.19)$$

Таким чином рівняння Д.Бернуллі для струминки реальної рідини відрізняється від рівняння для струминки ідеальної рідини тільки включенням в рівняння величини h_{ω}^I .

Геометричну інтерпретацію рівняння Д.Бернуллі в цьому випадку можна трактувати наступним чином: напірна площина в реальній рідині нахилена і понижується вздовж за течією.

Крива $p - p$ як і раніше називається п'єзометричною лінією. Падіння її на одиницю довжини називається п'єзометричним похилом.

Падіння напірної площини на одиницю довжини струмини називають гідравлічним похилом або гідравлічним

градієнтом. Математично гідравлічний градієнт визначається рівнянням

$$i = -\frac{d(Hd)}{ds}. \quad (6.20)$$

Аналітично гідравлічний похил являється похідною від втрат напору h_ω по відповідному напрямку

$$i = \frac{dh_\omega}{ds}. \quad (6.21)$$

З фізичної точки зору h_ω^I служить мірою питомої енергії, втраченої рідиною на шляху між двома перетинами елементарної струмини.

6.4 Рівняння Д.Бернуллі для усталеного потоку реальної рідини

Раніше було отримано рівняння Д.Бернуллі для струминки ідеальної рідини, і отримані результати були розповсюджені на струминку реальної рідини. Необхідно отримати це рівняння для цілого потоку. Нагадаємо, що рівняння Д.Бернуллі для струмини реальної рідини має вигляд:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_\omega^I.$$

Так як ми припускаємо, що потік складається із великої кількості струминок, то для отримання рівняння Д.Бернуллі для цілого потоку необхідно підсумувати повні енергії усіх елементарних струминок і втрат енергії, що відбуваються в них. Якщо вагові витрати струмини позначити через γdQ , то повна енергія струмини в перерізах набуде вигляду:

$$(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}) \gamma dQ = (z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_\omega^I) \gamma dQ. \quad (6.22)$$

Проінтегруємо вираз (6.22) по живому перерізу потоку:

$$\int_{\omega_1} \frac{v_1^2}{2g} \gamma dQ + \int_{\omega_1} (p_1 + \gamma z_1) dQ =$$

$$= \int_{\omega_2} \frac{v_2^2}{2g} \gamma dQ + \int (p_2 + \gamma z_2) dQ + \int h_{\omega}^I \gamma dQ \quad (6.23)$$

Таким чином необхідно розрахувати три інтеграли:

$$\int_{\omega} \frac{v^2}{2g} \gamma dQ; \quad \int_{\omega} (p + \gamma z) dQ; \quad \int_{\omega} h_{\omega}^I \gamma dQ.$$

Перший інтеграл представляє собою суму кінетичних енергій усіх елементарних струминок, пронизуючих площу потоку ω .

Так як $dQ = v d\omega$, можна записати:

$$\int \frac{v^2}{2g} \gamma dQ = \int \frac{v^3}{2g} \gamma d\omega = K_d. \quad (6.24)$$

Вираз (6.24) представляє собою дійсну кінетичну енергію потоку.

Припустивши, що швидкості по всьому перерізу однакові і дорівнюють середній швидкості, можна записати:

$$K_y = \frac{\gamma}{2g} \int v^3 d\omega = \frac{\gamma v^3 \omega}{2g} = \frac{\gamma v^2}{2g} Q. \quad (6.25)$$

Вираз (6.25) представляє собою «умовну» кінетичну енергію.

Відношення $\bullet = K_d/K_y$ називають коефіцієнтом нерівномірності розподілу швидкостей по живому перерізу потоку. Із нього витікає, що

$$K_d = \alpha K_y = \frac{\alpha v^2}{2g} \gamma Q. \quad (6.26)$$

Коефіцієнт нерівномірності розподілу \bullet визначається дослідним шляхом. Для усталеного плавнозмінюючогося руху в каналах і трубах середнє значення цього коефіцієнта приймається рівним $1,05 \div 1,10$.

Розглянемо наступний інтеграл

$$\int_{\omega} (p + \gamma z) dQ = \int_{\omega} (p + \gamma z) v d\omega = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma Q. \quad (6.27)$$

Розглянемо і третій інтеграл, що визначає суму втрат енергії:

$$\int_{\omega} h_{\omega}^I \gamma dQ = \int_{\omega} h_{\omega}^I \gamma v d\omega. \quad (6.28)$$

Якщо середню втрату питомої енергії усього потоку позначити h_{ω} , інтеграл (6.28) набуде вигляду

$$\int_{\omega} h_{\omega}^I \gamma v d\omega = h_{\omega} \gamma Q. \quad (6.29)$$

Тепер рівняння Д.Бернуллі для цілого потоку можна записати в наступному вигляді

$$\frac{\gamma Q \alpha_1 v_1^2}{2g} + Q p_1 + \gamma Q z_1 = \frac{\gamma Q \alpha_2 v_2^2}{2g} + Q p_2 + \gamma Q z_2 + h_{\omega} \gamma Q$$

або після відповідних скорочень

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{\omega}. \quad (6.30)$$

Таким чином рівняння Д.Бернуллі для цілого потоку в'язкої рідини має однаковий вигляд з рівнянням для струминки. За допомогою коефіцієнтів \bullet_1 і \bullet_2 тут враховано нерівномірний розподіл швидкостей по перерізу потоку.

Л Е К Ц І Я № 7

Тема : Режимы руху рідини. Поняття про гідродинамічну подібність

Література:

1.Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 71 – 93, 501 - 511.

7.1 Режимы руху в'язкої рідини

Сили в'язкості істотно впливають на величину і розподіл швидкості руху рідини. В 1880 році в роботі "О сопротивлении жидкости и о воздухоплавании" Д.І.Менделєєв вперше указав на наявність двох режимів руху рідини.

Досить повно режими руху були вивчені англійським фізиком Осборном Рейнольдсом. В 1883 році він опублікував результати своїх досліджень, які проводив на установці наступного вигляду

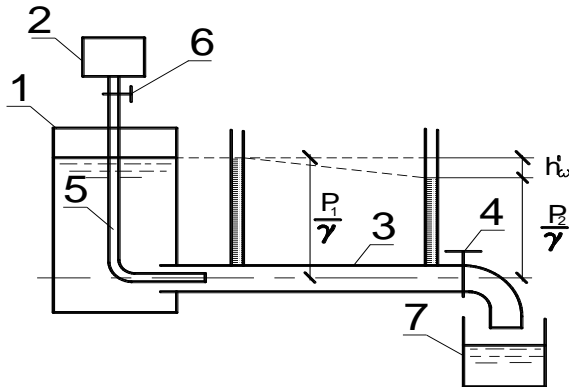


Рисунок 7.1

Установка складається із напірного бака 1, малого бака для підфарбовуючої рідини 2. Із бака 1 виходить скляна трубка 3 постійного діаметра d . На кінці трубки 3 влаштовано кран 4, що дозволяє регулювати витрати рідини. Замірювання витрат рідини виконується за допомогою мірного бака 7. для забезпечення плавного входу рідини в трубку 3 вона має вхідну лійку, до якої із бачка 2 підведена трубка 5, що має зверху кран 6. через трубку 5 поступає підфарбовуюча речовина із бачка 2 у вхідну лійку трубки 3 і відбувається підфарбовування рідини під час дослідів.

Дослід за звичаєм починається із малих швидкостей. Для цього незначно відкривають кран 4 і одночасно пускають підфарбовуючу рідину із бачка 2 через трубку 5. при цьому в трубці 3 буде видно підкрашену струминку $S-S$, яка чітко

виділяється серед рухомої рідини. Уся інша маса рідини підфарбовуватись не буде.

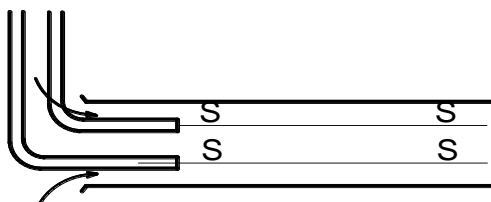
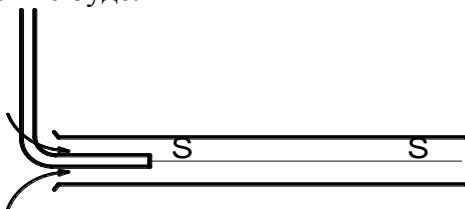


Рисунок 7.2

Якщо пустити фарбу в кількох точках, то можна побачити кілька підфарбованих струминок, які не перетинаються між собою.

Отже частинки рідини, що рухаються в струминці S – S, не перемішуються з частинками сусідніх струминок, і в розглядуваному випадку маємо струйчатий рух. *Режим руху, що відповідає струйчатому руху в'язкої рідини, називається ламінарним режимом руху.*

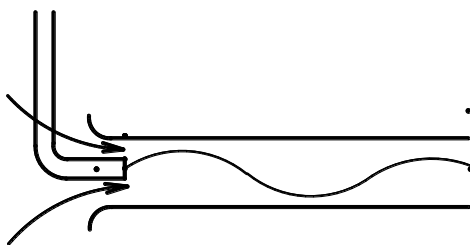


Рисунок 7.3

Продовжуючи дослід, надамо крану більшого відкриття і таким чином отримаємо більші значення швидкості в трубці 3.

при відповідному відкритті крану 4 струминка підфарбовуючої рідини отримує хвиле видний рух (починає скривлюватись), потім утворюються місцеві розриви.

Нарешті, настає момент, коли струминка повністю пропадає і уся маса рідини в скляній трубці 3 стане підкрашеною, правда, в більш блідий колір, ніж до цього була підфарбована окрема струминка.

В цьому випадку відбувається порушення струминного руху і ламінарний режим переходить в турбулентний. Турбулентний режим характеризується інтенсивним перемішуванням потоку рідини в результаті руху частинок по досить складним траєкторіям.

Описаний дослід демонструє перехід ламінарного режиму руху в турбулентний при досягненні відповідної швидкості. Даний дослід можна провести і в зворотному напрямку. При цьому необхідно відмітити, що ламінарний режим переходить в турбулентний при значно більших швидкостях, ніж навпаки.

7.2 Число Рейнольда і критична швидкість

На основі аналізу результатів експериментальних досліджень О.Рейнольдс для характеристики режимів руху запропонував безрозмірний критерій, названий числом Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu}, \quad (7.1)$$

де ν – середня швидкість;

d – діаметр трубки;

ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини (для води $\nu = 0,0178 \text{ см}^2/\text{сек.}$).

в результаті експериментів встановлено, що при заданому діаметрі трубки d і коефіцієнта кінематичної в'язкості рідини ν , перехід із одного режиму в другий відбувається при цілком відповідній середній швидкості руху потоку. Швидкість,

при якій відбувається зміна режимів, називається критичною швидкістю. При цьому відрізняють дві критичні швидкості: верхню $v_{кр.в.}$ і нижню $v_{кр.н.}$ при верхній критичній швидкості ламінарний режим руху переходить в турбулентний; при нижній критичній швидкості турбулентний режим переходить в ламінарний. При цьому $v_{кр.в.} > v_{кр.н.}$

дослідним шляхом встановлено, що значення критичних швидкостей залежать від ряду факторів, а саме: від в'язкості рідини, її щільності і діаметра трубки d.

Для визначення значення критичної швидкості О.Рейнольдс запропонував наступну формулу

$$v_{кр} = \frac{v Re_{кр}}{d}, \quad (7.2)$$

де $Re_{кр}$ – критичне число Рейнольда, постійне для усіх рідин і таке, що відповідає критичній швидкості.

В результаті старанно поставлених експериментів були визначені наступні значення числа Рейнольдса Re : $Re_{кр.н.} = 2320$; $Re_{кр.в.} = 13800$.

Відповідно верхня і нижня критичні швидкості можуть бути представлені наступним чином:

$$v_{кр.н} = \frac{2320v}{d}; \quad v_{кр.в} = \frac{13800v}{d}. \quad (7.3)$$

Або, якщо замість діаметра трубки підставити гідравлічний радіус $R = d/4$, то отримаємо:

$$v_{кр.н} = \frac{580v}{R}; \quad v_{кр.в} = \frac{3450v}{R}. \quad (7.4)$$

Для каналів, не круглих труб або круглих труб, працюючих неповним перерізом, критерій Рейнольдса за звичаєм виражається через гідравлічний радіус R наступним чином

$$Re = \frac{R v}{\nu}. \quad (7.5)$$

Нижнє критичне значення числа Рейнольдса, при цьому, складає

300 $\{$ 500. Тому при $Re < 300$ рух повинен бути ламінарним, а при $Re > 300 \{ 500$ – повинен бути турбулентним.

Досліди на приладі Рейнольдса дозволяють встановити зв'язок між втратами енергії і швидкостями руху в трубці, тобто експериментальним шляхом встановити залежність $h_w = f(v)$.

При ламінарному режимі ця залежність носить лінійний характер

$$h_w = A v, \quad (7.6)$$

а при турбулентному русі прийнята квадратична залежність

$$h_w = B v^2. \quad (7.7)$$

7.3 Поняття про гідродинамічну подібність і критеріях подібності

Для установлення режимів і вияснення умов роботи різних гідротехнічних споруд і гідравлічних машин широко використовується моделювання цих споруд в менших розмірах.

Сучасна теорія моделювання основана на теорії гідродинамічної подібності. Основний закон подібності, установлений в 1686 році Ньютоном стосовно до рухомих потоків рідини, може бути сформульований наступним чином: “В динамічно подібних потоках діючі сили в аналогічних точках потоків повинні знаходитись в однакових співвідношеннях”. Це співвідношення носить назву числа Ньютона.

Два потоки вважаються геометрично подібними, якщо між їх лінійними розмірами L і l , площами Ω і ω , об'ємами W і w виконуються співвідношення:

$$\frac{L}{\ell} = \lambda; \quad \frac{\Omega}{\omega} = \lambda^2; \quad \frac{W}{w} = \lambda^3, \quad (7.8)$$

де λ – лінійний масштаб моделювання, який показує у скільки разів розміри моделі зменшені в порівнянні з натурою.

Кінематично подібними називаються потоки, якщо виконується умова:

$$\frac{T}{t} = \tau, \quad (7.8)$$

де τ – масштаб моделювання часу.

Однією із умов динамічної подібності являється постійність відношень між щільностями рідини в рухомих потоках:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = r, \quad (7.9)$$

де r - масштаб моделювання щільності.

Якщо масу реального потоку позначити через M , а масу потоку в моделі через m , то $M = \rho_1 W$ $m = \rho_2 w$, а відношення мас складе

$$\frac{M}{m} = \frac{\rho_1 W}{\rho_2 w} = r \lambda^3. \quad (7.10)$$

Якщо швидкість першого потоку позначити через V , а швидкість другого потоку через v , то

$$V = \frac{L}{T} \quad \text{і} \quad v = \frac{\ell}{t}.$$

Отже

$$\frac{V}{v} = \frac{L/T}{\ell/t} = \frac{Lt}{\ell T} = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (7.11)$$

Якщо прискорення першого потоку I , а прискорення другого потоку i , то

$$I = \frac{L}{T^2}; \quad i = \frac{\ell}{t^2} \quad \text{або} \quad \frac{I}{i} = \frac{Lt^2}{\ell T^2} = \frac{\lambda}{\tau^2}. \quad (7.12)$$

Звернемось до моделювання сил, діючих на рухомі потоки (тобто визначимо число Ньютона). Сили відповідно будуть дорівнювати:

В споруді – $F = M I$ і в моделі – $f = m i$.

Тоді

$$F = \frac{\rho_1 W L}{T^2}; \quad f = \frac{\rho_2 w \ell}{t^2}. \quad (7.13)$$

Помноживши і розділивши (7.13) відповідно на L і ℓ , отримаємо:

$$\frac{F}{f} = \frac{\rho_1 W V^2 \ell}{\rho_2 w v^2 L} = \frac{\rho_1 L^3 V^2 \ell}{\rho_2 \ell^3 v^2 L} = \frac{\rho_1 L^2 V^2}{\rho_2 \ell^2 v^2} = \text{const.} \quad (7.14)$$

Відношення сил у вигляді (7.14) названо числом Ньютона

$$\frac{F}{f} = \text{Ne} = \frac{\rho_1 L^2 V^2}{\rho_2 \ell^2 v^2} . \quad (7.15)$$

Число Ньютона являється математичним виразом основного закону динамічної подібності.

Якщо рухомі потоки рідини знаходяться тільки під дією сил ваги, то закон динамічної подібності отримає більш простий вираз.

Дійсно, в цьому випадку сили F і f визначаються наступними залежностями: $F^I = \gamma_1 W$ і $f^I = \gamma_2 w$,

де γ_1 і γ_2 – питома вага рідини в першому і другому потоках.

Відношення цих сил складе

$$\frac{F^I}{f^I} = \frac{\gamma_1 W}{\gamma_2 w} = \frac{\gamma_1 L^3}{\gamma_2 \ell^3} .$$

Так як за формулою (7.14)

$$\frac{F}{f} = \frac{F^I}{f^I} = \text{Ne} .$$

то

$$\frac{\gamma_1 L^3}{\gamma_2 \ell^3} = \frac{\rho_1 L^2 V^2}{\rho_2 \ell^2 v^2} .$$

Отже

$$\frac{\gamma_1 L}{\gamma_2 \ell} = \frac{\rho_1 V^2}{\rho_2 v^2} ,$$

звідки, що $\rho g = \gamma$, отримаємо

$$\frac{V^2}{g_1 L} = \frac{v^2}{g_2 \ell} = \text{Fr} . \quad (7.16)$$

Залежність (7.16) являється частковим випадком загального закону динамічної подібності, дійсна для потоків рідини, що знаходяться тільки під дією сил ваги, і називається законом гравітаційної подібності Фруда. Fr – число Фруда.

За звичаєм прискорення сил ваги в подібних потоках однакові $g_1 = g_2 = g$, тоді закон Фруда набуде вигляду

$$\frac{V^2}{L} = \frac{v^2}{\ell} = Fr. \quad (7.17)$$

Для подібності двох потоків рідини необхідно, щоб число Фруда в обох потоках було однаковим. При цьому для переходу від гідравлічних елементів, отриманих на моделі до гідравлічних елементів дійсного потоку використовуються залежності:

для швидкостей: $\frac{V^2}{v^2} = \frac{L}{\ell}$ або $V = v\sqrt{\lambda}$; (7.18)

для витрат: $\frac{Q}{q} = \frac{\Omega V}{\omega v} = \lambda^2 \sqrt{\lambda}$ або $Q = q\lambda^2 \sqrt{\lambda}$; (7.19)

для часу: так як $L/T = V$ і $\ell/t = v$, то $Lt/T\ell = V/v$ або $T\ell/Lt = v/V$,

тоді $\frac{T}{t} = \frac{L}{\ell} \frac{v}{V} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}$ або $T = t\sqrt{\lambda}$; (7.20)

для сил: $F = \gamma L^3$; $f = \gamma \ell^3$; $F/f = L^3/\ell^3 = \lambda^3$,
тоді $F = f\lambda^3$; (7.21)

для гідростатичних тисків:

$$p_1 = \frac{F}{\Omega} \text{ і } p_2 = \frac{f}{\omega}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{F\omega}{\Omega f} = \lambda,$$

звідки $p_1 = p_2 \lambda$.
(7.22)

Якщо на рідину діють тільки сили тиску, то, знаючи що $P = p \omega$, отримаємо відношення

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 \Omega}{p_2 \omega} = \frac{p_1 L^2}{p_2 \ell^2}. \quad (7.23)$$

Прирівняємо вираз (7.23) числу Ньютона

$$\frac{p_1 L^2}{p_2 \ell^2} = \frac{\rho_1 L^2 V^2}{\rho_2 \ell^2 v^2}$$

$$\text{звідки отримаємо} \quad \frac{P_1}{\rho_1 V^2} = \frac{P_2}{\rho_2 v^2} = Eu. \quad (7.24)$$

цей вираз представляє собою критерій подібності Л.Ейлера. Отже, рівність критеріїв Ейлера в динамічно подібних потоках забезпечує подібність сил тиску.

Якщо розглядати сили поверхневого натягу $F = \sigma \ell$, де σ – коефіцієнт поверхневого натягу, то отримаємо критерій подібності Вебера

$$We = \frac{\sigma}{\rho V^2 L}. \quad (7.25)$$

Якщо потоки знаходяться під дією тільки сил внутрішнього тертя (сил в'язкості), то закон динамічної подібності буде представлений у іншому вигляді.

Сила внутрішнього тертя представляється у вигляді

$$T_{\text{тер}} = \mu \Omega \frac{dv}{dh} \quad \text{або} \quad T_{\text{тер}} = \mu_1 L^2 V L^{-1} \quad \text{і} \quad t_{\text{тер}} = \mu_2 \ell^2 v \ell^{-1}.$$

Тоді відношення сил набуде вигляду

$$\frac{T_{\text{тер}}}{t_{\text{тер}}} = \frac{\mu_1 L V}{\mu_2 \ell v}. \quad (7.26)$$

Прирівнявши вираз (7.26) числу Ньютона, отримаємо)

$$\frac{\mu_1 L V}{\mu_2 \ell v} = \frac{\rho_1 L^2 V^2}{\rho_2 \ell^2 v^2}.$$

$$\text{Звідки} \quad \frac{L V}{v_1} = \frac{\ell v}{v_2} = Re. \quad (7.27)$$

Тобто для подібності двох потоків, які знаходяться під дією сил внутрішнього тертя, необхідно щоб число Рейнольдса Re в обох потоках було однакове таким чином, число Рейнольдса Re представляє собою умову динамічної подібності потоків рідини, які знаходяться під дією сил внутрішнього тертя. В цьому закладається фізичний зміст числа Re .

Створити модель споруди, яка відповідала би умовам Фруда і Рейнольдса неможливо.

7.4 Умови моделювання гідравлічних явищ

При моделюванні необхідно звертати увагу на вибір масштабу моделі, виходячи із вимог дотримання наступних умов подібності гідравлічних явищ, що витікають із законів подібності.

1. Якщо потік в натурі турбулентний, він повинен бути турбулентний і в моделі.
2. Якщо потік в натурі знаходиться в спокійному або бурному стані, то він повинен бути в такому ж стані і в моделі.
3. Повинна бути витримана подібність у відношенні шорсткості стінок.
4. Якщо дослідження пов'язано з вивченням руху наносів, то наноси на моделі повинні рухатись подібно натурі.
5. Якщо кавітація (розрив цілності струмینی) спостерігається а натурі , то вона повинна виконуватись у відповідному місці і на моделі.
6. Вплив поверхневого натягу повинен бути настільки малим, щоб він не мішав утворенню хвиль. Для виконання цієї умови необхідно, щоб швидкість потоку на вільній поверхні моделі була більша 0,23 м/сек..

Л Е К Ц І Я № 8

Тема: Ламінарний рух рідини

Л І Т Е Р А Т У Р А :

- 1 .Богомоллов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 93 – 99.
2. Чугаев Р.Р. Гидравлика (Техническая механика жидкости). Л.: Энергия, стр. 100 - 108.

8.1 Загальні відомості про втрати напору

Як відмічалось раніше, при русі реальної рідини відбувається деяке падіння напору рідини h_w . В технічній механіці рідини відрізняють два види втрат напору:

1) так звані втрати напору по довжині.

Ці втрати розподіляються по довжині потоку рівномірно (при рівномірному русі) або дещо нерівномірно (при нерівномірному русі). Такі втрати позначимо h_ℓ .

2) місцеві втрати напору, які спостерігаються в окремих місцях потоку в наслідок того, що в них потік зазнає тої чи іншої місцевої деформації. Кожну місцеву втрату напору будемо позначати h_i .

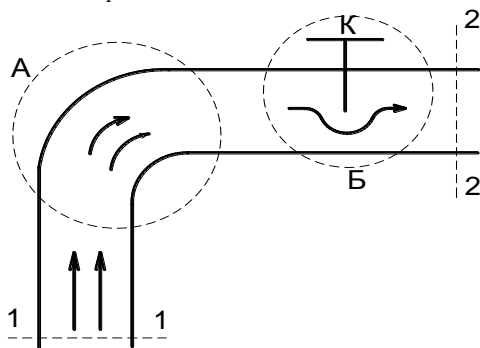


Рисунок 8.1

На рисунку показано трубопровід, який має особливі вузли: заворот А, засувку Б. Крім втрат напору по довжині, між перетинами 1 – 1 і 2 – 2 в даному випадку будуть мати місце ще дві втрати напору: у вузлі А і в вузлі Б.

В загальному випадку для ділянки трубопроводу, розташованого між двома перетинами, згідно принципу складання втрат напору, можна записати

$$h_w = h_\ell + \Sigma h_i. \quad (8.1)$$

Як відмічалось раніше, величина втрат напору h_w є міра тої механічної енергії рідини, яка завдяки роботі сил тертя,

розподілених по довжині потоку, а також зосереджених в окремих його вузлах (місцевих сил тертя), без зворотно втрачається потоком.

Між силами тертя в рідині і втратами напору h_w існує певна залежність. Цю залежність, що відноситься до випадку рівномірного усталеного руху, прийнято називати *основним рівнянням рівномірного усталеного руху рідини*.

Втрати напору у випадку неусталеного руху, а також у випадку усталеного нерівномірного руху рідини, часто приходить визначати користуючись формулами, що відносяться до випадку усталеного рівномірного руху, вводячи при цьому деякі корективи.

8.2 Основне рівняння усталеного рівномірного руху рідини

Поставимо своєю метою знайти залежність втрат напору по довжині від величини сил тертя в рідині.

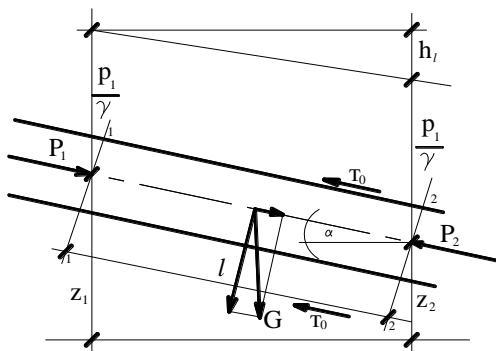


Рисунок 8.2

Представимо на рисунку частину напірної труби довжиною l , обмежену перетинами 1 – 1 і 2 – 2. Вісь S направимо за течією рідини, що рухається в трубі. У випадку рівномірного руху рідини п'єзометрична лінія PP являється

нахиленою прямою. Її падіння по довжині ℓ труби виражає втрату напору h_ℓ .

Розглянемо усі сили, діючі на виділену частину потоку.

1. На виділену частину потоку діє сила власної ваги направлена вертикально вниз

$$G = \omega \ell \gamma . \quad (8.2)$$

Проекція цієї сили на вісь S складе

$$G_s = \omega \ell \gamma \sin \bullet , \quad (8.3)$$

де \bullet - кут нахилу осі труби до горизонту.

Із рисунку видно, що $\ell \sin \bullet = z_1 - z_2$.

$$\text{Таким чином} \quad G_s = \gamma \omega (z_1 - z_2). \quad (8.4)$$

2. Сили P_1 і P_2 тиску на торцеві перерізи відсіку рідини, що розглядається, зі сторони відкинутих об'ємів рідини:

$$P_1 = p_1 \omega \quad \text{і} \quad P_2 = p_2 \omega . \quad (8.5)$$

Сили P_1 і P_2 проєктуються на вісь S без зміни.

3. Сила «тертя на стінці» T_0 , прикладена зі сторони стінок до бокової поверхні потоку. Ця сила направлена проти течії і теж проєктуюється без зміни.

Крім сили тертя на стінці T_0 , яка являється силою зовнішнього тертя, можна відрізнити ще сили внутрішнього тертя T . Так як сили внутрішнього тертя являються парними, то сума їх на вісь S дорівнює нулю.

Запишемо суму проєкцій усіх сил на вісь S :

$$G_s + P_1 - P_2 - T_0 = 0,$$

або, підставляючи значення складових

$$\gamma \omega (z_1 - z_2) + p_1 \omega - p_2 \omega - T_0 = 0. \quad (8.6)$$

розділивши вираз (8.6) на $\gamma \omega$, отримаємо:

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - \frac{T_0}{\gamma \omega} = 0 ,$$

$$\text{або} \quad \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{T_0}{\gamma \omega} ,$$

$$\text{але} \quad \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h_\ell \quad (\text{із рисунка})$$

Таким чином
$$h_{\ell} = \frac{T_0}{\gamma \omega}. \quad (8.7)$$

Силу тертя можна представити залежністю

$$T_0 = \chi \ell \tau_0, \quad (8.8)$$

де χ – змочений периметр;

τ_0 – напруга тертя на стінці.

Таким чином
$$h_{\ell} = \frac{\chi \ell \tau_0}{\gamma \omega} \quad \text{або} \quad h_{\ell} = \frac{\ell \tau_0}{\gamma R}, \quad (8.9)$$

де $R = \frac{\omega}{\chi}$ – гідравлічний радіус.

Перенесемо ℓ і R в ліву частину, тоді

$$\frac{h_{\ell}}{\ell} R = \frac{\tau_0}{\gamma} \quad \text{або} \quad I R = \frac{\tau_0}{\gamma}. \quad (8.10)$$

Рівняння (8.10) називається основним рівнянням усталеного рівномірного руху.

Для труби радіусом r , враховуючи що $R = r/2$ основне рівняння можна записати в наступному вигляді

$$I \frac{r}{2} = \frac{\tau_0}{\gamma}. \quad (8.11)$$

Звідки
$$\tau_0 = \frac{1}{2} I r \gamma. \quad (8.12)$$

Із формули (8.12) видно, що напруга τ поздовжнього внутрішнього тертя розподіляється вздовж радіуса по лінійному закону.

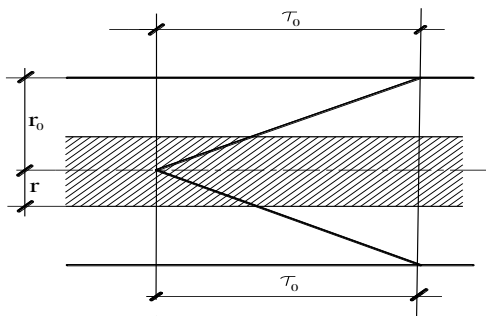


Рисунок 8.3

$$\text{При } r = 0, \quad \tau_0 = 0. \quad \text{При } r = r_0, \quad \tau_{0\max} = \frac{1}{2} I r_0 \gamma. \quad (8.13)$$

8.3 Розподіл швидкостей по живому перерізу при ламінарному рівномірному усталеному русі рідини

Розглянемо напірну кругло циліндричну трубу радіусом r_0 . всередині цієї труби виділимо центральний кругло циліндричний стовп рухомої рідини радіусом r (заштриховано).

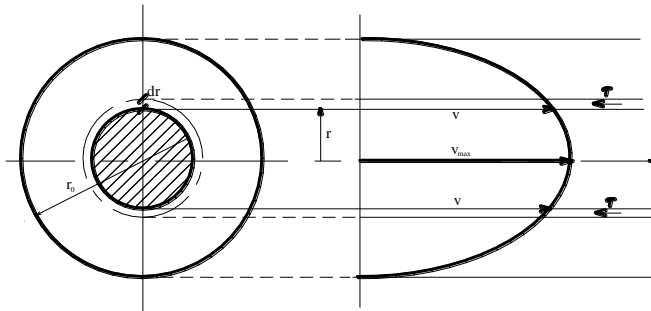


Рисунок 8.4

Покажемо кривою епюру швидкостей в живому перерізі А – В. поставимо мету знайти рівняння кривої.

Для поздовжньої дотичної напруги тертя по боковій поверхні рідкого стовпа можна записати два різних вирази:

1) згідно рівняння рівномірного руху маємо

$$\tau = \gamma R^I I = \gamma \frac{r}{2} I, \quad (8.14)$$

де гідралічний радіус розглядуваного стовпа

$$R^I = \frac{\pi r^2}{2 \pi r}.$$

2) згідно закону Ньютона маємо

$$\tau = \mu \left| \frac{dv}{dr} \right| = -\mu \frac{dv}{dr}. \quad (8.15)$$

У даному випадку похідна $\frac{dv}{dr}$ - від'ємна величина.

Вирішуючи спільно рівняння (8.14 і 8.15), отримаємо:

$$\gamma \frac{r}{2} I = -\mu \frac{dv}{dr}, \quad (8.16)$$

або
$$dv = -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\mu} I r dr. \quad (8.17)$$

Інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$v = -\frac{\gamma}{4\mu} I r^2 + C. \quad (8.18)$$

Постійну інтегрування C знаходимо за умови, що при $r = r_0$ швидкість $v = 0$.

$$0 = -\frac{\gamma}{4\mu} I r^2 + C,$$

звідки
$$C = \frac{\gamma}{4\mu} I r^2. \quad (8.19)$$

Підставляючи (8.19) в (8.18), отримаємо

$$v = \frac{\gamma}{4\mu} I (r_0^2 - r^2). \quad (8.20)$$

При $r = 0$ отримаємо максимальне значення швидкості

$$v_{\max} = \frac{\gamma}{4\mu} I r_0^2. \quad (8.21)$$

За рівнянням (8.20) можна побудувати криву АСВ, обмежуючу епіюру швидкостей для живого перерізу АВ. Як видно з рівняння (8.20), крива АСВ являється параболою.

У випадку широкого прямокутного каналу, розмірковуючи так же, як і раніше, можна отримати рівняння аналогічне (8.20). Виявляється, що в цьому випадку епіюра швидкостей також обмежена параболою, причому максимальна швидкість v_{\max} знаходиться на вільній поверхні потоку.

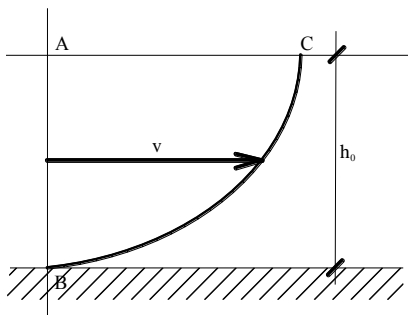


Рисунок 8.5

$$v = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu} I (h_0^2 - h^2). \quad (8.22)$$

8.4 Втрати напору по довжині при ламінарному рівномірному русі рідини

Розглянемо напірний рух в кругло циліндричній трубі. Знайдемо спочатку величину витрат для цієї труби.

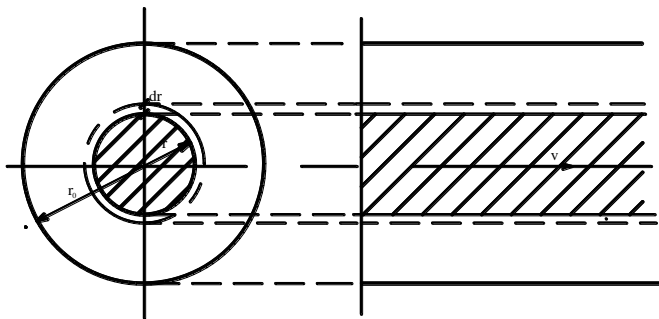


Рисунок 8.6

Напишемо вираз для елементарних витрат dQ , який проходить через елементарну частину площі живого перерізу $d\omega$ у вигляді «кільця» радіусом r .

$$dQ = v d\omega = v 2 \pi r dr. \quad (8.23)$$

Підставивши швидкість за формулою (8.20), отримаємо

$$dQ = \frac{\gamma}{4\mu} I (r_0^2 - r^2) 2 \pi r dr. \quad (8.23)$$

Інтегруючи цей вираз по усій площі живого перерізу, отримаємо

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\mu} I \pi \int_{r=0}^{r=r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{1}{8} \pi \frac{\gamma}{\mu} I r_0^4.$$

Підставивши $d/2$ замість r_0 , отримаємо

$$Q = \frac{1}{128} \pi \frac{\gamma}{\mu} I d^4. \quad (8.24)$$

Виразивши $\frac{1}{128} \pi \frac{\gamma}{\mu} = M$, отримаємо

$$Q = M I d^4. \quad (8.25)$$

Середня швидкість визначиться виразом

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\frac{1}{128} \pi \frac{\gamma}{\mu} I d^4}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\gamma}{32 \mu} I d^2. \quad (8.26)$$

$$\text{або, знаючи що } I = h_\ell / l, \quad v = \frac{\gamma}{32 \mu} \frac{h_\ell}{\ell} d^2, \quad (8.27)$$

$$\text{Звідки} \quad h_\ell = \frac{32 \mu}{\gamma} \frac{\ell v}{d^2}. \quad (8.28)$$

Вираз (8.28) представляє собою формулу Пуазейля, отриману ним в 1840 році.

Із формули Пуазейля можна зробити наступні висновки.

У випадку ламінарного руху рідини втрата напору h_ℓ :

1. залежить від властивостей рідини, що враховується коефіцієнтом в'язкості μ а також питомою вагою γ ;

2. прямо пропорційна середній швидкості v в першій степені і довжині труби;

3. не залежить від шорсткості русла. В формулу (8.28) не входять які-небудь характеристики шорсткості стінок русла.

4. обернено пропорційна квадрату діаметра.

Втрату напору h_ℓ для круглоциліндричної труби у випадку ламінарного режиму руху, пам'ятаючи що $\mu = \rho \nu$ а $\gamma = \rho g$, можна представити у вигляді:

$$h_\ell = \frac{32 \nu \rho}{\rho g} \frac{\nu}{d^2} \ell = 32 \frac{\nu}{d} \frac{\ell}{d} \frac{\nu}{g} \frac{2}{2} \frac{\nu}{\nu} = 64 \frac{\nu}{d} \frac{\ell}{\nu} \frac{\nu^2}{2g}. \quad (8.29)$$

Виразивши в (8.29) $64 \frac{\nu}{d} \frac{\ell}{\nu} = \lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (8.30)$

отримаємо
$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\nu^2}{2g}. \quad (8.31)$$

λ називають коефіцієнтом Дарсі, а вираз (8.31) – формулою Дарсі.

Позначимо $\lambda \frac{\ell}{d} = \zeta_\ell$ і назвемо його коефіцієнтом опору по довжині.

Тоді
$$h_\ell = \zeta_\ell \frac{\nu^2}{2g} \quad (8.32)$$

Л Е К Ц І Я № 9

Тема: Турбулентний рух рідини. Втрати напору

Література:

1.Богомолів А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 99 - 124.

2.Чугаев Р.Р. Гидравлика (Техническая механика жидкости). Л.: Энергия, стр. 105 - 131.

9.1 Пульсація швидкості. Осереднена швидкість

Механізм турбулентного потоку дуже складний і, не дивлячись на велику кількість досліджень, вивчений ще далеко не повністю. Трудність рішення пов'язана з тим, що при турбулентному режимі рух кінцевих мас рідини відбувається як би безпорядочно в різних напрямках, подібно руху молекул, що розглядається в кінетичній теорії газів. При цьому частинки рідини змішуються між собою, а швидкість у всякій точці потоку постійно змінюється біля середнього значення як за напрямком, так і за величиною. Це явище називають пульсацією швидкості.

Турбулентний рух по суті являється неусталеним, так як швидкість в ньому безперервно і постійно змінюється за часом, не підкоряючись яким-небудь видимим закономірностям. Траєкторії руху частинок надзвичайно складні, чим і пояснюється інтенсивне перемішування частинок рідини в турбулентному потоці.

Представимо на рисунку схему поперечного перерізу WW і відмітимо на ньому точку A і елементарну площину $d\omega$, виділену біля цієї точки.

Проведемо до площини $d\omega$ нормаль Ax і дотичну Ay ; зобразимо вектор швидкості v_a . Спроектуємо v_a на напрямки Ax і Ay . При цьому отримаємо складові v_{ax} і v_{ay} .

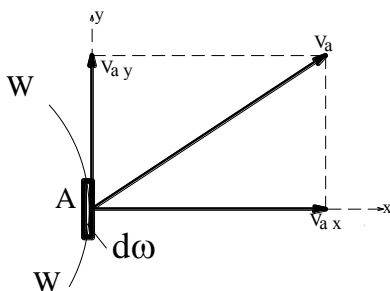


Рисунок 9.1

Складова v_{ax} буде характеризуватись наступним:

- 1) на відміну від v_a , вона буде мати постійний напрямок (вздовж загальної течії);
- 2) як і v_a , v_{ax} буде змінюватись за часом, тобто буде пульсувати.

Зміна v_{ax} за часом в даній точці простору може бути представлено графіком

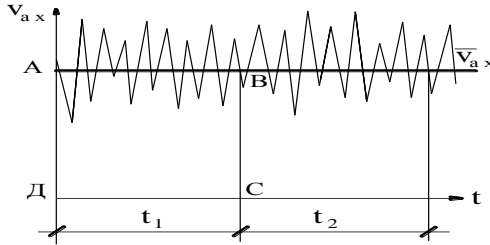


Рисунок 9.2

Виділимо на графіку пульсації поздовжньої складової швидкості, досить великий відрізок часу t_1 і потім в межах цієї ділянки осереднимо величини v_{ax} : проведемо пряму АВ з таким розрахунком, щоб площа прямокутника ABCD дорівнювала площі фігури $A'B'CD$ обмеженої кривою графіка пульсації, тобто

$$\Omega_{ABCD} = \Omega_{A'B'CD}. \quad (9.1)$$

При цьому отримаємо деяке значення \bar{v}_1 , поздовжньої швидкості в даній точці. Аналогічно виділимо другу, третю і т. д. досить довгі ділянки і для них отримаємо \bar{v}_2 , \bar{v}_3 і т.д.

Як уже відмічалось, турбулентний рух являється неусталеним, так як в даній точці швидкості постійно змінюються.

В той же час, якщо для даної точки (а також і для інших точок) величини \bar{v}_1 , \bar{v}_2 , \bar{v}_3 і т.д., знайдені, як це описано вище, задовольняють умові

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \bar{v} = const, \quad (9.2)$$

то такий рух називається в середньому усталеним.

Фіктивна швидкість \bar{v} називається осередненою місцевою швидкістю.

Якщо об'єм рідини, що проходить через елементарну площинку $d\omega$ за досить великий відрізок часу t позначити через dW , то величину осередненої місцевої швидкості при усталеному русі можна представити співвідношенням

$$\bar{v} = \frac{dW}{t d\omega} = \text{const.} \quad (9.3)$$

Розглядаючи поперечну пульсацію можна впевнитись, що осереднена величина \bar{v}_y при усталеному русі повинна рівнятися нулю.

9.2 Епюра осереднених швидкостей в живому перетині потоку

Розглянемо турбулентний рух і представимо на рисунку епюру осереднених швидкостей для живого перетину АВ.

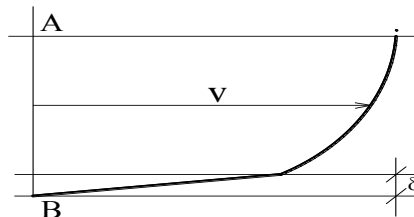


Рисунок 9.3

Дана епюра характеризується наступним:

- біля стінок швидкість вздовж лінії ВА різко збільшується, тобто в цьому місці похідна $\frac{dv}{dn}$ має більшу величину;

- на деякій відстані від стінки швидкість змінюється відносно мало; похідна $\frac{dv}{dn}$ в цьому місці має відносно малу величину.

Як відомо із попереднього матеріалу в турбулентному потоці швидкість руху частинок безпосередньо біля стінки дорівнює нулю. Тому прийнято вважати, що біля стінок русла існує тонкий шар рідини товщиною δ , де швидкості настільки малі, що в межах цього шару відбувається рух рідини, близький до ламінарного. Цей шар називають ламінарним або в'язким підшаром. Товщина його вимірюється звично долями міліметра. Для того, щоб встановити закон розподілу швидкостей по живому перерізу при турбулентному русі розглянемо рисунок.

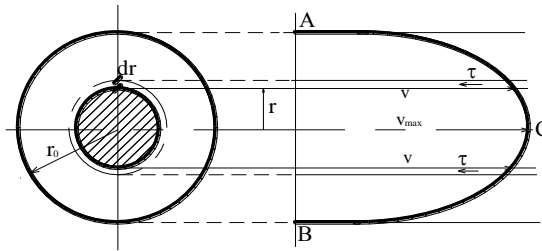


Рисунок 9.4

Для того, щоб отримати рівняння кривої ACB, як і в випадку ламінарного руху, запишемо два різних вирази для дотичної напруги:

$$\text{Рівняння рівномірного руху} \quad \tau_t = \gamma R I \quad (9.4)$$

Рівняння для турбулентного дотичного напруження

$$\tau_t = - \mu_t \frac{dv}{dr} . \quad (9.5)$$

Вирішуючи рівняння (9.4 і 9.5) відносно dv , отримаємо

$$dv = - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\mu_t} I r dr . \quad (9.6)$$

Інтегрувавши рівняння (9.6) , отримаємо

$$v = -\frac{1}{2} \gamma I \int \frac{1}{\mu_t} r \, dr, \quad (9.7)$$

де μ_t (згідно Л.Прандтлю) визначається за залежністю

$$\mu_t = \rho \ell^2 \frac{dv}{dr}; \quad (9.8)$$

ℓ - довжина шляху змішування, яка визначається як

$$\ell = x \, y; \quad (9.9)$$

x – універсальна постійна Прандтля;

y – відстань від стінки русла до точки, де вимірюється напруження.

Як видно, для турбулентного руху μ_t величина змінна, тому рішення інтеграла (9.7) вимагає додаткових допущень і гіпотез і являється досить складним.

Прандтль і Карман запропонували закон розподілу швидкостей в живому перерізі записати у вигляді

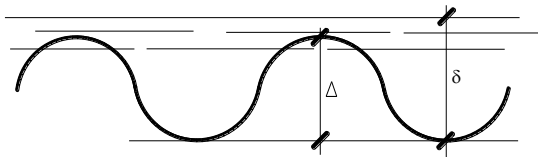
$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (9.10)$$

де m – коефіцієнт, що залежить від числа Рейнольдса Re .

9.3 Гладкі і шорсткі поверхні

Для установлення поняття гладкі і шорсткі поверхні розглянемо наведені рисунки. На них прийняті позначення: Δ - висота виступів шорсткості стінки русла, δ – товщина ламінарного підшару.

а)



б)

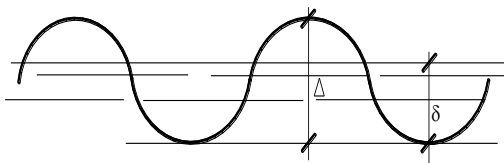


Рисунок 9.5

При наявності схеми а виступи шорсткості не покриваються повністю ламінарним (в'язким) підшаром ($\delta < \Delta$); ці виступи вклинаються (як окремі горбики) в турбулентну зону, і в них можуть ударятись рухомі частинки турбулентного потоку. В цьому випадку втрати напору по довжині залежать від шорсткості стінок русла.

Товщина ламінарного підшару $\delta_{\text{лп}}$ визначається за формулою

$$\delta_{\text{лп}} = \frac{N d \sqrt{8}}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}, \quad (9.11)$$

де N – число Нікурадзе, аналогічне числу Рейнольдса;

λ – коефіцієнт Дарсі.

Як видно товщина ламінарного (в'язкого) підшару δ зменшується з збільшенням числа Рейнольдса.

Звідси зрозуміло, що поняття гладкої і шорсткої стінок мають відносний характер, так як одні і ті ж самі стінки в одних випадках можуть бути шорсткими (при великих швидкостях) і гладкими в інших (при малих швидкостях).

9.4 Втрати напору по довжині. Формули для визначення коефіцієнта Дарсі

Рядом дослідів було встановлено, що при турбулентному усталеному русі відношення $\frac{\tau_0}{\gamma}$ може бути виражено через швидкісний напір наступним чином

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = f \frac{v^2}{2g}, \quad (9.12)$$

де f – деякий емпіричний коефіцієнт пропорційності.

Підставляючи вираз (9.12) в основне рівняння рівномірного руху, отримаємо

$$R I = f \frac{v^2}{2g}. \quad (9.13)$$

Враховуючи, що $I = h_\ell / \ell$ і прийнявши $\lambda = 4 f$, отримаємо наступну загальну залежність для втрат напору по довжині

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{4R} \frac{v^2}{2g}. \quad (9.14)$$

Для круглих труб $d = 4 R$ і тому для них загальна залежність набуде вигляду

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (9.15)$$

Формула (9.15) називається формулою Вейсбаха – Дарсі. Коефіцієнт λ називається коефіцієнтом гідравлічного тертя (коефіцієнт Дарсі).

На відміну від ламінарного руху, де $\lambda = \frac{64}{Re_d}$, при турбулентному русі λ визначається за емпіричними і напівемпіричними залежностями.

Сучасні розрахункові формули для λ при турбулентному русі передбачають залежність цього коефіцієнта в загальному випадку від шорсткості стінок русла і від числа Рейнольдса. При турбулентному русі можуть бути виділені три області гідравлічних опорів:

$$\text{а) область гладких русел, при } 2320 < Re < 10 \frac{d}{\Delta}.$$

Для цієї області в 1913 році Блазіус отримав емпіричну залежність

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}_d^{0.25}}. \quad (9.16)$$

Пізніше (в 1932р.) Прандтль запропонував наступну формулу

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(\text{Re}_d \sqrt{\lambda}) - 0.8. \quad (9.17)$$

б) перехідна область (доквадратична) при $10 \frac{d}{\Delta} < \text{Re}_d < 560 \frac{d}{\Delta}$.

В перехідній області величину λ можна визначити за графіком Кольбука – Уайта, побудованого за формулою

$$\lambda = \frac{1}{\left[-2 \lg \left(\frac{2.51}{\text{Re}_d \sqrt{\lambda}} + \frac{\bar{\Delta}}{3.7} \right) \right]^2}, \quad (9.18)$$

де $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d}$ - відносна шорсткість труб.

Найбільш часто в доквадратичній області коефіцієнт Дарсі λ визначають за формулою Альтшуля

$$\lambda = 0.11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0.25}. \quad (9.19)$$

Іноді за формулою Філоненко – Альтшуля

$$\lambda = \frac{1}{(1.82 \lg \text{Re}_d - 1.64)^2}. \quad (9.20)$$

в) квадратична область при $\text{Re} > 560 \frac{d}{\Delta}$, де втрати напору пропорціональні квадрату швидкості. Коефіцієнт λ в квадратичній області визначається за формулами:

$$\text{Шифринсона} \quad \lambda = 0.11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0.25}; \quad (9.21)$$

$$\text{Шевельова} \quad \lambda = \frac{0.21}{d^{0.3}}; \quad (9.22)$$

Прандтля

$$\lambda = \frac{0.25}{\left(\lg \frac{\bar{\Delta}}{3.7} \right)^2}. \quad (9.23)$$

Існує і ряд інших залежностей.

9.5 Формула Шезі. Формули для визначення коефіцієнта Шезі

Із загальної залежності для втрат напору по довжині можна визначити швидкість руху рідини.

Якщо згідно (9.14) $h_\ell = \lambda \frac{\ell}{4 R} \frac{v^2}{2 g}$, то

$$v = \sqrt{\frac{8 g}{\lambda}} \sqrt{R \frac{h_\ell}{\ell}}, \quad (9.24)$$

Звідки після відповідних перетворень отримаємо

$$v = C \sqrt{R I}, \quad (9.25)$$

де $C = \sqrt{\frac{8 g}{\lambda}}$ коефіцієнт Шезі а $I = \frac{h_\ell}{\ell}$ - гідравлічний градієнт (похил).

Так як коефіцієнт Дарсі λ величина безрозмірна, то коефіцієнт Шезі має розмірність $\sqrt{\text{м/сек}^2}$.

Формулу (9.25) називають формулою Шезі.

Для визначення коефіцієнта Шезі запропоновано багато емпіричних залежностей. Наведемо тільки деякі із них.

Скорочена формула Гангільє – Куттера

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + 23 \frac{n}{\sqrt{R}}}; \quad (9.26)$$

Формула Маннінга

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}; \quad (9.27)$$

Формула Павловського

$$C = \frac{1}{n} R^y; \quad (9.27)$$

Формула Агроскіна

$$C = \frac{1}{n} + 17.72 \lg R. \quad (9.27)$$

Найбільше розповсюдження отримали формули Манінга і Павловського

Із формули Шезі витікають залежності, з якими часто зустрічаються в практиці розрахунків малих штучних споруд:

$$\text{Модуль витрат } K = \frac{Q}{\sqrt{I}} = \omega C \sqrt{R} \quad (9.28)$$

$$\text{Швидкісна характеристика } W = \frac{v}{\sqrt{I}} = C \sqrt{R} \quad (9.29)$$

9.6 Місцеві втрати напору при усталеному турбулентному напірному режимі

Раніше була установлена залежність для визначення втрат напору по довжині при ламінарному і турбулентному русі рідини. В загальному випадку вона має вигляд

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

У цій формулі вираз $\lambda \frac{\ell}{d}$ можна представити у вигляді $\lambda \frac{\ell}{d} = \zeta$ і назвати його коефіцієнтом опору.

Множиною досліджень було установлено, що формули для розрахунку місцевих втрат мають аналогічний вигляд

$$h_i = \zeta_i \frac{v^2}{2g}. \quad (9.30)$$

При цьому коефіцієнти опору ζ залежать від конструктивних особливостей місцевих опорів і режиму руху, який характеризується числом Рейнольдса.

Розглянемо визначення коефіцієнта місцевого опору при раптовому розширенні труби (тобто розглянемо вплив конструктивних особливостей).

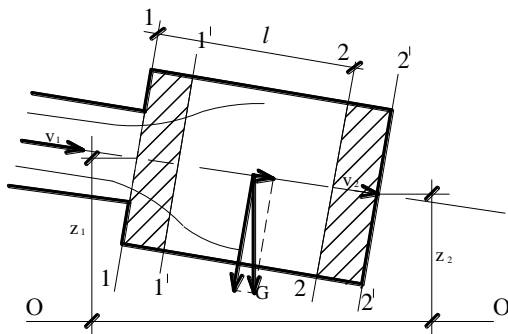


Рисунок 9.6

Для цього за пропозицією Беранже складемо рівняння приросту кількості руху рідини для ділянки трубопроводу з раптовим розширенням (Рис. 9.6). Нехай при цьому об'єм рідини перемістився із положення 1 – 2 в положення 1' – 2'. Позначимо площі поперечного перерізу трубопроводу до і після розширення через ω_1 і ω_2 , координати центрів ваги цих перетинів через z_1 і z_2 , а швидкості руху через v_1 і v_2 . приріст кількості руху повинен рівнятись імпульсу проекцій усіх сил на вісь руху, тобто

$$\sum P dt = M (v_2 - v_1), \quad (9.31)$$

де dt – елементарний проміжок часу, на протязі якого об'єм рідини, що розглядається, із положення 1 – 2 переміститься в положення 1' – 2';

$\sum P$ – сума діючих сил.

Для визначення приросту кількості руху досить розглянути тільки масу об'єму між перетинами 1 – 1' і 2 – 2',

рівну $\frac{\gamma}{g} Q dt$. В цьому випадку приріст кількості руху буде виражатись залежністю

$$M(v_2 - v_1) = \frac{\gamma}{g} Q dt (v_2 - v_1). \quad (9.32)$$

Імпульс діючих сил на вісь руху за час dt може виразити наступним рівнянням

$$\sum P dt = (P_1 - P_2 + G \sin \alpha) dt, \quad (9.33)$$

де P_1 і P_2 – сили гідростатичного тиску в перетинах 1 – 1 і 2 – 2;

G – вага об'єму рідини, що розглядається;

• - кут нахилу труби до горизонту.

Елементи, що входять в формулу (9.33), можуть бути виражені наступним чином:

$$G = \gamma \omega_2 \ell; \quad P_1 = p_1 \omega_2; \quad P_2 = p_2 \omega_2$$

$$\text{і } \sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{\ell}. \quad (9.34)$$

Підставивши вирази (9.34) в (9.31 і 9.33), отримаємо

$$\left(p_1 \omega_2 - p_2 \omega_2 + \gamma \omega_2 \ell \frac{z_1 - z_2}{\ell} \right) dt = \frac{\gamma}{g} Q dt (v_2 - v_1). \quad (9.35)$$

Поділивши рівняння (9.35) на $\gamma \cdot \omega_2 \cdot dt$ і враховуючи, що $Q = \omega_2 \cdot v_2$, отримаємо

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) = \frac{v_2}{g} (v_2 - v_1). \quad (9.36)$$

В рівнянні (9.36) для отримання рівняння Бернуллі для ідеальної рідини не вистачає члена з різницею швидкісних напорів. Додавивши неvistачаючі різниці швидкісних напорів в лівій і правій частині рівняння, можемо записати

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{v_2}{g} (v_2 - v_1) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}. \quad (9.37)$$

Таким чином ліва частина рівняння (9.37) представляє собою втрату напору при раптовому розширенні рідини. Виконавши ряд перетворень, отримаємо

$$h_{\omega} = \frac{v_2}{g} (v_2 - v_1) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} = \left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} \quad (9.38)$$

Формули (9.38) називають формулами Борда.

Враховуючи, що $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, отримаємо

$$h_{\omega} = \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}, \quad (9.39)$$

де $\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \zeta_2$ - коефіцієнт місцевого опору при

визначенні втрат напору через швидкість після розширення;

$$\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \zeta_1 \quad \text{- коефіцієнт місцевого опору при}$$

визначенні втрат напору через швидкість до розширення.

При раптовому звууженні коефіцієнт місцевого опору визначається за формулою

$$\zeta_{p.zb} = 0,5 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right). \quad (9.40)$$

Вихід із труби представляє собою поодинокий випадок раптового розширення. Виражаючи втрату напору через швидкість v_1 , коефіцієнт місцевого опору отримаємо згідно (9.39) у вигляді

$$\zeta_{p.p} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2.$$

Для виходу із труби можна вважати, що $\omega_2 = \infty$, тоді

$$\zeta_{вих} = 1.$$

Вхід в трубу представляє собою поодинокий випадок раптового звуження . приймаючи в (9.40) $\omega_1 \approx \infty$, отримаємо

$$\zeta_{\text{вх}} = 0,5.$$

Для місцевого опору у вигляді коліна без закруглення коефіцієнт опору визначається за формулою

$$\zeta_{\text{кол}} = 0.946 \sin^2 \alpha / 2 + 2.047 \sin^4 \alpha / 2. \quad (9.41)$$

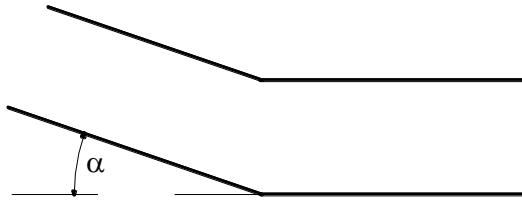


Рисунок 9.7

Для місцевого опору у вигляді поступового розширення трубопроводу (дифузору) коефіцієнт опору визначається за формулою

$$\zeta_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin \alpha / 2} \frac{n^2 - 1}{n^2} + \left(\frac{n - 1}{n} \right)^2 \sin \alpha, \quad (9.42)$$

де $n = \omega_k / \omega_0$

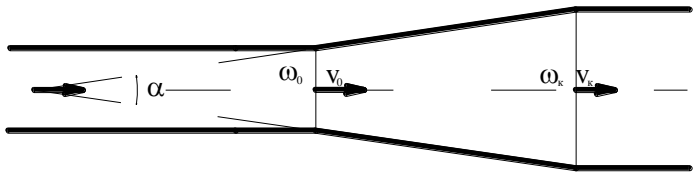


Рисунок 9.8

Для поступового звуження (конфузора) коефіцієнт опору визначається за формулою

$$\zeta_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin \alpha / 2} \frac{n^2 - 1}{n^2}. \quad (9.43)$$

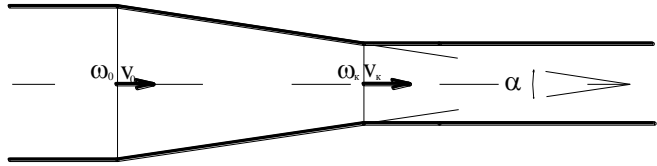


Рисунок 9.9

Значення коефіцієнтів опору для багатьох інших видів місцевих опорів встановлюються, як правило, експериментальним шляхом і зводяться в таблиці, що містяться в підручниках і довідниках.

Контрольні запитання та завдання

1. Надайте визначення поняттям: точка простору та часточка рідини.
2. Складові руху часточки рідини.
3. Методи вивчення руху рідини.
4. Усталений та неусталений рух рідини.
5. Елементи потоку.
6. Змочений периметр та гідравлічний радіус для круглих труб.
7. Рівномірний і нерівномірний рух рідини.
8. Зв'язок між витратою і середньою швидкістю потоку.
9. Рівняння нерозривності потоку.
10. Рівняння руху Л.Ейлера.
11. Рівняння Д.Бернуллі для струминки ідеальної рідини.
12. Рівняння Д.Бернуллі для струминки реальної рідини.
13. Рівняння Д.Бернуллі для потоку реальної рідини.

14. Що виражає рівняння Д.Бернуллі?
15. Геометрична інтерпретація рівняння Д.Бернуллі.
16. Режими руху в'язкої рідини.
17. Число О.Рейнольдса.
18. Основний закон гідродинамічної подібності. Число Ньютона.
19. Основні умови моделювання гідравлічних явищ.
20. Види втрат напору.
21. Основне рівняння усталеного рівномірного руху рідини.
22. Розподіл швидкості по живому перерізу при ламінарному усталеному русі рідини.
23. Втрата напору по довжині при ламінарному усталеному русі рідини.
24. Дайте поняття гладких та шорстких поверхонь.
25. Втрата напору по довжині при турбулентному русі рідини. Формула Вейсбаха – Дарси.
26. Наведіть значення коефіцієнтів Дарсі для різних областей гідравлічних опорів.
27. Формула Шезі і формули для визначення коефіцієнтів Шезі.
28. Місцеві втрати напору. Як вони визначаються?
29. Формули Борда.
30. Напишіть вираз коефіцієнта опору при різкому звуженні.

РОЗДІЛ 3 . РУХ РІДИНИ ЧЕРЕЗ ОТВОРИ, НАСАДКИ, ТРУБОПРОВОДИ

Л Е К Ц І Я №10

Тема: Витікання рідини із отворів і насадків

Література:

1.Богомолів А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 99 - 124.

2.Чугаев Р.Р. Гидравлика (Техническая механика жидкости). Л.: Энергия, стр. 105 - 131.

10.1 Витікання рідини через малі отвори в тонкій стінці при постійному напорі

В практичній діяльності дуже часто приходится зустрічатися з різними випадками витікання рідини через отвори і через короткі патрубки, які називають насадками, наприклад ежекторах (водоструйчатих насосах) , гідромоніторах, гідроелеваторах, пожежних пристроях і т.п. Уся різноманітність цих пристроїв обіймається двома випадками витікання рідини: при постійному і при змінному напорах.

Перш ніж приступити до вивчення законів витікання через малі отвори в тонкій стінці установимо самі поняття «малий отвір» і «тонка стінка».

Малим отвором домовимось називати такий отвір, який одночасно відповідає трьом умовам:

- швидкість підходу зневажливо мала;
- швидкості руху у верхній і нижній точках стиснутого перерізу приблизно дорівнюють одна одній;
- діаметр отвору менше 0,1 напору ($d < 0.1H$)

Під терміном «тонка стінка» підрозумівається така стінка, товщина якої $\delta \leq 3d$, і Рая в отворі мають загострену

крайку. В цьому випадку можливі тільки місцеві опори руху. При протіканні рідини через малий отвір в тонкій стінці усі лінії току в площині самого отвору виявляються не паралельними одна одній і тому течія в цьому місці не може вважатись плавно змінюючись. На деякій відстані від отвору кривизна ліній току зменшується, окремі струминки все більше і більше приближуються до паралельних, одночасно дещо зменшується переріз струмини. Переріз $C - C$, найбільш близько розташований до отвору, в якому рух набуває майже паралельно – струминного характеру, називається стиснутим перерізом ($\omega_{ст}$).

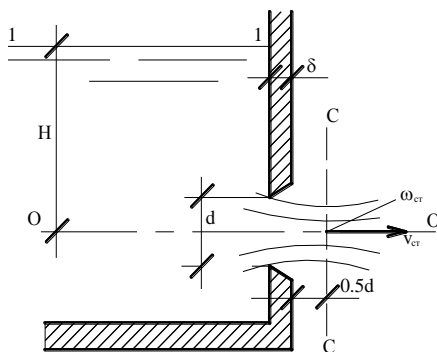


Рисунок 10.1

Позначимо фактичну площу отвору в тонкій стінці ω , а площу стиснутого перерізу струмини $\omega_{ст}$. Відношення $\omega_{ст}$ до ω назовем коефіцієнтом стиснення ε .

$$\varepsilon = \frac{\omega_{ст}}{\omega} \quad (10.1)$$

Для аналізу явища витікання рідини через тонку стінку використаємо рівняння Д.Бернуллі. В якості площини порівняння приймемо площину $O - O$, що проходить через центр ваги площини стисненого перерізу струмини.

Рівняння Бернуллі запишемо для вільної поверхні і стисненого перерізу струмени, де рух можна вважати плавно-змінюючимся. Рівняння набуде вигляду

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_n^2}{2g} = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_{\omega}, \quad (10.2)$$

де H – напір над центром ваги площі отвору;

v_n – швидкість підходу води до отвору;

v – швидкість руху рідини в струмині (в стисненому перерізі);

h_{ω} – втрата напору при витіканні рідини із отвору в тонкій стінці;

• - коректив швидкості.

Якщо позначити надмірний гідродинамічний напір через H_0 , тобто

$$H_0 = H + \frac{\alpha v_n^2}{2g}, \quad (10.3)$$

а місцеві втрати $h_{\omega} = h_i$

$$h_i = \zeta_{\text{до}} \frac{v^2}{2g}, \quad (10.4)$$

то отримаємо
$$H_0 = (\alpha + \zeta_{\text{вх}}) \frac{v^2}{2g}. \quad (10.5)$$

Із рівняння (10.5) визначимо швидкість протікання рідини через стиснений переріз С – С

$$v = \varphi \sqrt{2g H_0}, \quad (10.6)$$

де φ – коефіцієнт швидкості, що дорівнює

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta_{\text{вх}}}}. \quad (10.7)$$

Для ідеальної рідини $\zeta_{\text{вх}} = 0$ і $\bullet = 1$, тоді $\varphi = 1$ і

$$v_{\text{ид}} = \sqrt{2g H_0}. \quad (10.8)$$

Порівнюючи (10.6) і (10.8), отримаємо
$$\varphi = \frac{v}{v_{\text{ид}}}. \quad (10.9)$$

Числове значення коефіцієнта швидкості φ визначається експериментально. Для круглих отворів він в середньому дорівнює 0,97.

Знаючи, що $\omega_{\text{ст}} = \varepsilon \omega$, а $v = \varphi \sqrt{2 g H_0}$, витрати рідини, протікаючої через малий отвір в тонкій стінці, можуть бути виражені наступним чином

$$Q = \omega_{\text{ст}} v = \varepsilon \omega \varphi \sqrt{2 g H_0}. \quad (10.10)$$

Позначимо добуток $\varepsilon \cdot \varphi$ через μ (тобто $\varepsilon \cdot \varphi = \mu$) і назовемо його коефіцієнтом витрат. Тоді отримаємо

$$Q = \mu \omega \sqrt{2 g H_0}. \quad (10.11)$$

Якщо прийняти швидкість підходу $v_{\text{п}} = 0$, отримаємо

$$Q = \mu \omega \sqrt{2 g H}. \quad (10.12)$$

Для круглих труб $\varepsilon = 0,64$, і тоді $\mu = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62$.

Коефіцієнти швидкості φ і витрат μ не постійні і залежать від багатьох факторів: в'язкості, початкового напору, розмірів отворів, їх форми, положення відносно найближчих стінок, температури та інш.

В залежності від положення відносно найближчих стінок відрізняють наступні типи стиснення струмини:

повне, коли струмина отримує стиснення по усьому периметру;

неповне, коли частина периметра отвору безпосередньо примикає до ребра стінки.

Повне в свою чергу може бути досконалим і недосконалим.

Досконале стиснення встановлюється, коли відстань від будь-якої із стінок до отвору буде не менше трійного поперечного розміру отвору.

Вплив форми отвору, напору та інших факторів на коефіцієнт витрат встановлено експериментально і зведено в таблиці, якими користуються у випадку необхідності.

10.2 Витікання рідини через тонкі затоплені отвори

В цьому випадку розрахункові перетини 1 – 1 і 2 – 2 приймають на поверхнях обох резервуарів, а площину порівняння О – О проведемо через центр отвору.

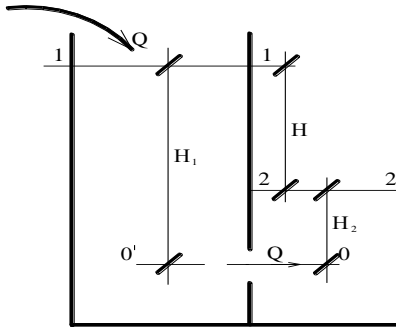


Рисунок 10.2

Для відкритих резервуарів рівняння Бернуллі запишеться у вигляді

$$H_1 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{\omega}.$$

Втрати напору h_{ω} можна виразити, як суму на вході і виході із отвору

$$h_{\omega} = h_{\text{вх}} + h_{\text{вих}}.$$

Після відповідних перетворень рівняння Бернуллі набуде вигляду

$$H_1 = H_2 + \frac{v^2}{2g} (\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вих}}), \quad (10.13)$$

де v – швидкість протікання рідини в стисненому перетині;

$\zeta_{\text{вх}}$ – коефіцієнт опору входу;

$\zeta_{\text{вих}}$ – коефіцієнт опору на виході із отвору в резервуар.

При великих розмірах резервуара увесь швидкісний напір потоку, що виходить із отвору, гаситься в масі рідини, що знаходиться в другому резервуарі. В цьому випадку можна прийняти $C_{\text{вих}} = \bullet = 1$.

$$\text{Тоді } v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{вх}}}} \sqrt{2 g (H_1 - H_2)}; \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{вх}}}} = \varphi; \quad H_1 - H_2 = H;$$

$$v = \varphi \sqrt{2 g H}. \quad (10.14)$$

Тобто швидкість визначається за уже відомою формулою. Вираз для витрат буде також мати уже відомий вигляд, тобто

$$Q = v \cdot \omega = \mu \omega \sqrt{2 g H}, \quad (10.15)$$

де $\mu = \varphi \cdot \epsilon$.

Значення коефіцієнтів витрат μ і швидкості φ близькі до їх значень при незатопленому отворі.

10.3 Протікання рідини через насадки

Насадком називається коротка труба (патрубок), приєднаний до отвору в тонкій стінці через яку витікає рідина. Як насадок може також розглядатись і отвір у відносно товстій стінці, товщина якої задовільняє необхідній довжині насадка. Насадки діляться на три основних групи: циліндричні (зовнішні і внутрішні), конічні (які розходяться і звужуються) і коноїдальні з закругленими краями по формі стиснення струмини. В насадку потік складається із двох самостійних частин: центральної, в якій частинки рідини переміщаються тільки поступально, і оточуючої її маси (коловоротна зона), де рух частинок рідини обертальний і уся зона представляє завихрений простір.

В центральній частині установлюється мінімальна площа живого перерізу потоку – ω_c . Цей перетин називають стисненням. Завихрення зона утворюється через згин ліній току, викликаного умовами входу рідини в отвір. В ній знаходяться пари рідини і гази, що розчинені в рідині і виділяються із неї.

Таким чином струмина заповнює увесь перетин насадка не зразу, а тільки на деякій відстані.

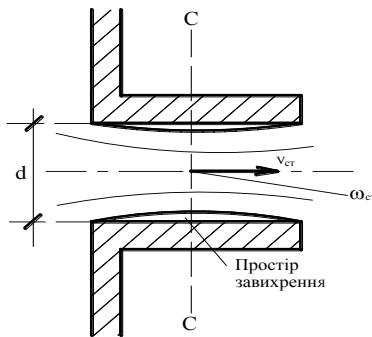


Рисунок 10.3

Затиснене в завихреній зоні повітря захоплюється потоком і на вхідній ділянці утворюється розрідження, величина якого залежить від швидкості руху рідини або по суті від напору.

В зв'язку з наявністю розрідження на вхідній ділянці насадка, на ділянці, де струмина стиснена, відбувається підсмоктування рідини із резервуара; швидкість притікання рідини до отвору збільшується в зв'язку зі збільшенням повного напору, який в цьому випадку складається із напору над центром ваги перетину і величини розрідження в стисненому перетині. Збільшення швидкості протікання рідини через вхідний отвір викликає збільшення також і витрат через насадок. Проте наявність насадка приводить до додаткових втрат напору в порівнянні з отвором в тонкій стінці. Це, навпаки, викликає деяке зменшення швидкості а значить і витрат. Як показують досліді, при порівняно коротких насадках фактор підсмоктування рідини в зв'язку с утворенням розрідження справляє більший вплив ніж зростання втрат за рахунок насадка і, отже, в загальному підсумку витрати рідини через насадок збільшуються. При насадках великої довжини

$[\ell \geq (40 \div 50)d]$ ефект підсмоктування уже не компенсує зростаючі гідравлічні втрати напору по довжині насадка. В цьому випадку витрати через насадок становляться рівними або меншими витрат через отвір в тонкій стінці.

Швидкості і витрати через насадки визначаються за тимиж формулами, що і для отворів в тонкій стінці, але з іншими значеннями коефіцієнтів швидкості ϕ і витрат μ . Для кожного типу насадка встановлюються свої значення ϕ і μ .

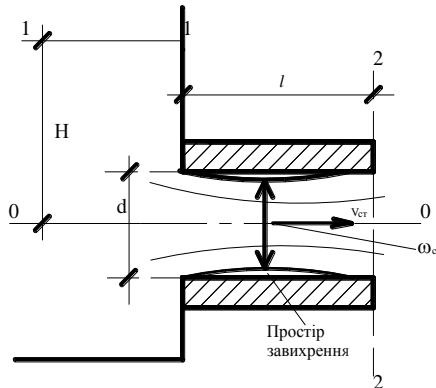


Рисунок 10.4

Визначимо швидкість v і витрати Q для зовнішнього циліндричного насадка. Запишемо для нього рівняння Бернуллі для двох перетинів: 1 – 1 по рівню поверхні води в резервуарі і 2 – 2 по вихідному перерізу насадка.

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_n^2}{2g} = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w.$$

Прийнявши $h_w = \sum \zeta \frac{v^2}{2g}$ і виконавши відповідні

перетворення, отримаємо надмірний гідродинамічний напір

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} (\alpha + \sum \zeta), \quad (10.16)$$

де $\sum \zeta$ – сума усіх коефіцієнтів опору, які можуть мати місце при протіканні рідини через насадок.

Суму усіх коефіцієнтів можна записати:

$$\sum \zeta = \zeta_{\text{зв}} + \zeta_{\text{розш}} + \zeta_{\ell}, \quad (10.17)$$

де $\zeta_{\text{зв}}$ – коефіцієнт опору на стиснення струмини;

$\zeta_{\text{розш}}$ – коефіцієнт опору на розширення струмини;

ζ_{ℓ} – коефіцієнт опору по довжині.

Коефіцієнти опору на стиснення і розширення струмини установлені дослідним шляхом і їхня сума складає $\approx 0,50$.

Коефіцієнт опору по довжині визначається за звичайною формулою

$$\zeta_{\ell} = \lambda \frac{\ell}{d}.$$

Тоді
$$\sum \zeta = 0.5 + \lambda \frac{\ell}{d}. \quad (10.18)$$

Прийнявши $\bullet = 1$, можна записати

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} \left(1 + 0.5 + \lambda \frac{\ell}{d} \right). \quad (10.19)$$

Отже

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1.5 + \lambda \frac{\ell}{d}}}; \quad v = \varphi \sqrt{2gH_0}; \quad Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}. \quad (10.20)$$

Так як рідина із кінця насадка витікає повним перерізом, то коефіцієнт стиснення струмини $\varepsilon = 1$ і коефіцієнт витрат $\mu = \varepsilon \cdot \varphi = \varphi$.

Із рівнянь (10.20) видно, що з збільшенням довжини насадка зменшується швидкість протікання рідини і навпаки з зменшенням довжини насадка швидкість збільшується. Досліди показують, що мінімальна довжина насадка, при якій заповнюється після стиснення увесь перетин насадка і втрати по довжині зневажливо малі ($\zeta_{\ell} = 0$), повинна бути біля $L = (3 \dots 4)d$. Такий насадок носить назву насадка Вентурі. Коефіцієнт швидкості і, отже, витрат $\mu = \varphi = 0,82$.

Внутрішній циліндричний насадок

В цьому насадку явища протікають аналогічно зовнішньому насадку. Проте коефіцієнт швидкості φ і витрат для цього насадка менше, ніж для зовнішнього насадка, не дивлячись на те, що $\varepsilon = 1$, тобто $\mu = \varphi = 0,707$.

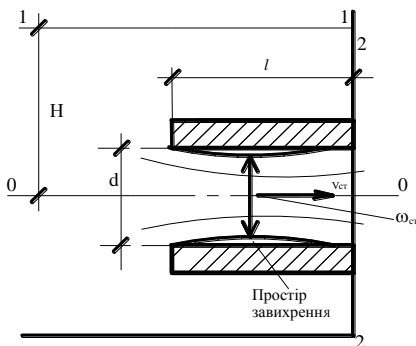


Рисунок 10.5

Гідравлічні опори в цьому насадку більші гідравлічних опорів зовнішнього насадка, а значить, і витрата рідини Q менше, ніж в зовнішньому насадку. Отже гідравлічні характеристики цього насадка гірші ніж внутрішнього і тому завжди віддається перевага зовнішнім насадкам.

Конічно розширюючийся насадок

Цей насадок характеризується максимальним коефіцієнтом втрат напору ($\sum \zeta = 3 \div 3,5$), а значить коефіцієнт витрат і швидкості $\mu = \varphi = 0,5$. Проте якщо конічно розширюючийся насадок піднести до отвору в тонкій стінці, коефіцієнт витрат різко зростає, і витрати збільшуються при малих вихідних швидкостях.

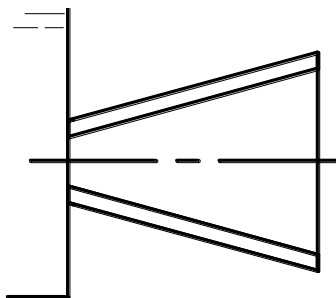


Рисунок 10.6

Конічно звужуючийся насадок

Цей насадок часто зустрічається. Широко використовується він в пожежних брансбойтах, в соплах гідравлічних турбін, гідромоніторах, ежекторах, інжекторах і т.п. його переваги складаються в тому, що при невеликих витратах збільшується кінетична енергія струмینی, тобто

$$\frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H_0, \quad (10.21)$$

так – як коефіцієнт швидкості φ високий і при відповідному куті ($\theta = 13^\circ 24'$) може досягти величини 0,96.

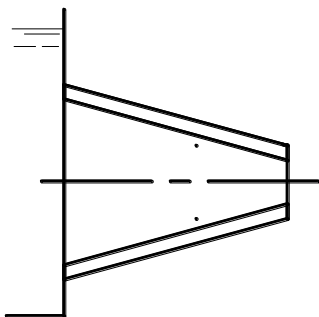


Рисунок 10.7

Коноїдальний насадок

Коноїдальний насадок окреслюється за формою струмнини, що витікає із отвору. Він володіє максимальним коефіцієнтом швидкості і витрат. $\Phi = \mu = 0,97 \div 0,99$.

Коефіцієнт стиснення $\varepsilon = 1,0$.

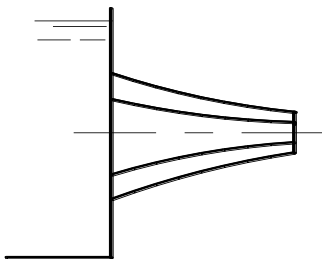


Рисунок 10.8

Аналіз роботи насадок різного типу показує, що максимальною питомою кінетичною енергією володіє струмина рідини, що витікає із коноїдального насадка. Велику кінетичну енергію має також струмина, що витікає із отвору в тонкій стінці і в конічно-звужуючому насадку. Насадки конічно-розширюючі дають мінімальне значення швидкості при досить великій пропускній здатності. Найбільшою пропускною здатністю володіє коноїдальний насадок.

Короткі труби

Протікання рідини через отвори в тонкій стінці і насадки характеризується значеннями коефіцієнтів витрат μ і швидкості ϕ , які для кожного конкретного випадку мали свої конкретні значення.

При наявності додаткових місцевих опорів (поворотів, засувки і т.п.) коефіцієнт швидкості ϕ і коефіцієнт витрат μ будуть визначатись тою сумою опорів, яка буде зустрічатись на шляху до вихідного перетину.

Якщо при цьому сума місцевих втрат буде не дуже мала в порівнянні з шляховими втратами, то таку трубу називають короткою.

Швидкість v і витрата Q визначається за тими ж формулами, але з іншими коефіцієнтами швидкості ϕ і витрат μ . До коротких труб відносяться і труби під насипами доріг.

10.4 Протікання рідини через великі отвори при постійному напорі

При розгляді витікання через малі отвори можна було знехтувати різницею величин швидкостей в різних точках перерізу і вважати швидкість по усьому перерізу однаковою. Такого припущення неможна зробити у випадку протікання рідини через великі отвори, в яких розміри останніх уже не малі в порівнянні з напором. Швидкості в різних точках перерізу можуть значно відрізнятись одна від другої. Витрати в цьому випадку можна визначати шляхом інтегрування елементарних витрат по усьому живому перерізу. За елементарну витрату приймається витрата через елементарну площину $d\omega = b_z dz$, де b_z - змінна ширина отвору. В цьому випадку елементарні витрати визначаються залежністю

$$dQ = \mu d\omega \sqrt{2 g z} = \mu b_z \sqrt{2 g} z^{\frac{1}{2}} dz, \quad (10.22)$$

де z – змінний напір, відповідаючий заглибленню розглядуваних елементів перерізу під вільною поверхнею.

Сумарні витрати через великий отвір запишуться у вигляді інтеграла

$$Q = \mu \sqrt{2 g} \int_{H_1}^{H_2} b_z z^{\frac{1}{2}} dz, \quad (10.23)$$

де μ – коефіцієнт витрат, що визначається дослідним шляхом.

Розглянемо в якості прикладу два типи отворів:

Прямокутний отвір

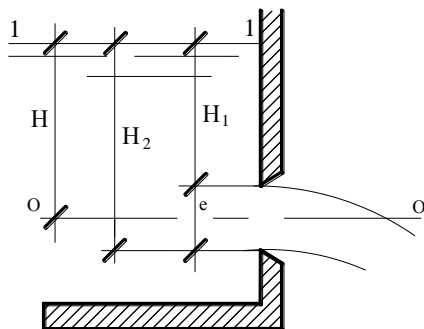


Рисунок 10.9

Для прямокутного отвору ширина отвору величина постійна і має значення $b_z = b$ і її можна винести за знак інтеграла. Залежність для повних витрат набуде вигляду

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left| H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right|. \quad (10.24)$$

Позначивши величину отвору через e , в рівнянні (10.24) можна ввести наступні позначення:

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= H_0 + \frac{e}{2} = H_0 \left(1 + \frac{e}{2 H_0} \right) \\ H_1 &= H_0 - \frac{e}{2} = H_0 \left(1 - \frac{e}{2 H_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Тоді рівняння (10.24) набуде вигляду

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{e}{2 H_0} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{e}{2 H_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (10.26)$$

Для спрощення залежності (10.26) розкладемо вирази в круглих дужках в ряд і обмежимося тільки чотирма

членами:

$$\left(1 \pm \frac{e}{2 H_0}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \frac{3}{2} \frac{e}{2 H_0} + \frac{3}{8} \frac{e^2}{4 H_0^2} \mp \frac{1}{16} \frac{e^3}{8 H_0^3}. \quad (10.27)$$

Підставивши (10.27) в (10.26), отримаємо

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2 g} H_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} \frac{e}{H_0} - \frac{1}{64} \frac{e^3}{H_0^3} \right). \quad (10.28)$$

У виразі (10.28) винесемо за дужки $\frac{3}{2} \frac{e}{H_0}$ і врахуємо, що $\omega = b e$.

$$\text{Тоді} \quad Q = \mu \varpi \sqrt{2 g H_0} \left(1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{H_0^2} \right). \quad (10.29)$$

Другим членом виразу (10.29) в дужках можна знехтувати, тоді

$$Q = \mu \varpi \sqrt{2 g H_0}. \quad (10.30)$$

Коефіцієнт витрат $\mu = 0,65 \div 0,9$.

Круглий отвір

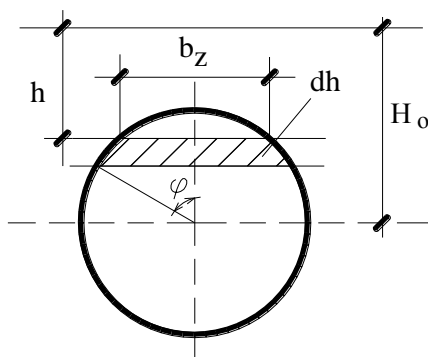


Рисунок 10.10

Для круглого отвору залежність (10.23) набуде вигляду

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{H_0 - r}^{H_0 + r} b_z \sqrt{h} \, dh. \quad (10.31)$$

Замінімо в рівнянні (10.31) змінний напір, ширину, і елементарну товщину їх значеннями: $h = H_0 - r \cdot \cos\varphi$; $b = 2r \sin\varphi$; $dh = r \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$. Тоді інтеграл (10.31) набуде вигляду

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int 2r^2 \sin^2\varphi \sqrt{H_0 - r \cos\varphi} \, d\varphi. \quad (10.32)$$

Виконавши інтегрування і знехтувавши малими величинами, і враховуючи, що $\omega = \pi r^2$, отримаємо

$$Q \approx \mu \pi \sqrt{2g H_0}. \quad (10.33)$$

Отже для визначення витрат через великий отвір можна користуватись формулою для малого отвору. При цьому необхідно тільки визначити коефіцієнт витрат μ .

Витікання рідини із – під щита

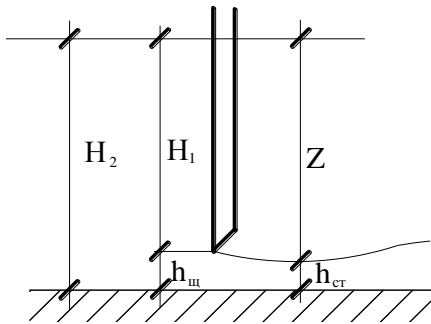


Рисунок 10.11

При витіканні рідини із – під щита розрахунок ведуть за формулою

$$Q = \varepsilon^I \varphi b h_{ш} \sqrt{2g (H_0 - \varepsilon^I h_{ш})}. \quad (10.34)$$

де ε^I – коефіцієнт вертикального стиснення струмени;

$h_{\text{щ}}$ – висота відкриття щита;

$$H_0 = H_2 + \frac{v_{\text{п}}^2}{2g}.$$

Значення коефіцієнтів швидкості і стиснення визначаються дослідним шляхом.

10.5 Витікання рідини із отворів при змінному напорі

При вивченні цього питання розглянемо випадок витікання рідини із резервуара в атмосферу. В практиці зустрічаються випадки витікання рідини і під рівень (постійний або змінний).

Представимо резервуар, заповнений рідиною до положення 1 – 1.

Введемо при цьому позначення:

Ω – площа горизонтального перерізу резервуара. Для Ω можна записати, що $\Omega = f_1(H)$;

Q – витрати рідини, що протікають через отвір

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH} = f_2(H);$$

$Q_{\text{п}}$ – витрати рідини, що поступають в резервуар.

Витрати $Q_{\text{п}}$ можуть мінятись з часом, тобто $Q_{\text{п}} = f(t)$.

Ми будемо розглядати випадок, коли $Q_{\text{п}} = \text{const}$.

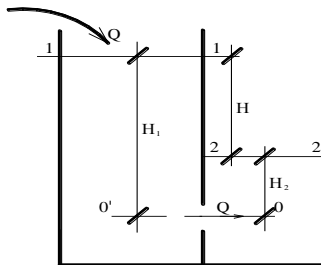


Рисунок 10.12

Якщо $Q_{\pi} > Q$, то резервуар буде наповнюватись і рівень води в ньому буде збільшуватись до тих пір, поки не отримається рівність $Q_{\pi} = Q$.

Розглянемо випадок, коли $Q_{\pi} < Q$ і визначимо час t , на протязі якого горизонт рідини 1-1 опуститься до положення 2-2.

При рішенні цієї задачі будемо міркувати наступним чином. За нескінченно малий відрізок часу dt із резервуара витікає об'єм рідини

$$dW_b = Q dt = \mu_0 \omega \sqrt{2 g H} dt. \quad (10.35)$$

За той же відрізок часу dt в резервуар поступає об'єм рідини

$$dW_{\pi} = Q_{\pi} dt. \quad (10.36)$$

Зміну об'єму рідини в резервуарі dW можна представити двома різними залежностями:

з однієї сторони

$$dW = Q_{\pi} dt - \mu_0 \omega \sqrt{2 g H} dt; \quad (10.37)$$

з другої сторони

$$dW = \Omega dH. \quad (10.38)$$

Прирівнявши праві частини залежностей (10.37 і 10.38), отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$Q_{\pi} dt - \mu_0 \omega \sqrt{2 g H} dt = \Omega dH. \quad (10.39)$$

Звідки після розділення змінних отримаємо

$$dt = \frac{\Omega dH}{\left(Q_{\pi} - \mu_0 \omega \sqrt{2 g H} \right)}. \quad (10.40)$$

Інтегруючи вираз (10.40) в межах від H_1 до H_2 , отримаємо шуканий час

$$t = \int_{H_1}^{H_2} \frac{\Omega}{\left(Q_{\pi} - \mu_0 \omega \sqrt{2 g H} \right)} dH = \int_{H_2}^{H_1} \frac{\Omega dH}{\left(\mu_0 \omega \sqrt{2 g H} - Q_{\pi} \right)}. \quad (10.41)$$

Інтеграл (10.41) при $\Omega \neq \text{const}$ може бути вирішений методом кінцевих різниць.

У випадку, коли $Q_{\pi} = 0$ і $\Omega = \text{const}$, залежність (10.41) спрощується і набуває вигляду

$$t = \frac{\Omega}{\mu_0 \omega \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2\Omega}{\mu_0 \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (10.42)$$

Час повного опорожнення резервуара отримується, якщо в (10.42) підставити $H_2 = 0$:

$$t_o = \frac{2\Omega \sqrt{H_1}}{\mu_0 \omega \sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu_0 \omega \sqrt{2g} H_1} = \frac{2\Omega H_1}{Q_1}, \quad (10.43)$$

де знаменник представляє собою витрати $Q_1 = \mu_0 \omega \sqrt{2g H_1}$ через отвір при рівні рідини в резервуарі H_1 .

$$\text{Таким чином} \quad t_o = \frac{2\Omega H_1}{Q_1} \rightarrow t_o = \frac{W}{Q_{\text{сеп}}}, \quad (10.44)$$

де W - об'єм рідини, що витікає із резервуара.

Л Е К Ц І Я №11

Тема: Рух рідини в напірних трубопроводах

Література:

1.Богомолів А.И., Михайлов К.А. Гидравлика, М.: Стройиздат, стр, 163 – 177, 398 – 405.

2.Чугаев Р.Р. Гидравлика (Техническая механика жидкости). Л.: Энергия, стр. 156 – 184, 276 - 286.

11.1 Класифікація водопровідних мереж. Основні розрахункові залежності і задачі, що рішення за їх допомогою

Найбільш простим і найбільш характерним прикладом руху рідини в напірних трубопроводах являється рух води в водопровідній мережі.

Водопровідні мережі звично бувають двох систем – розгалужені або тупикові

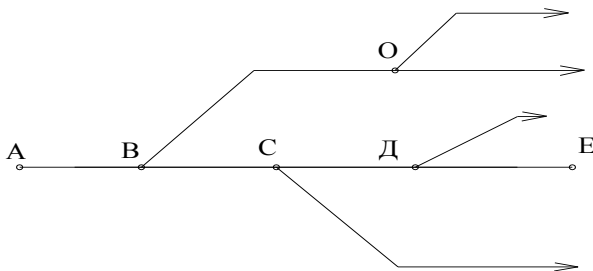


Рисунок 11.1

і замкнуті або кільцеві

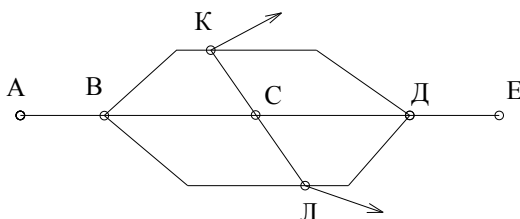


Рисунок 11.2

Розгалужені відносяться по схемі розрахунку до простих водопроводів, а замкнуті – до складних.

Розгалуженою мережею трубопроводів називається мережа, що має основний трубопровід і приєднані до нього окремі трубопроводи з незамкнутими ділянками. Місця розгалуження трубопроводів називаються вузлами.

Замкнута або кільцева мережа отримується із тупикової шляхом замикання кінців цієї мережі додатковою лінією трубопроводу.

Основна розрахункова залежність для розрахунку водопровідних мереж може бути отримана із формули Вейсбаха – Дарсі або формули Шезі. Як відомо, втрати напору по довжині

при турбулентному русі визначається за формулою Вейсбаха – Дарсі

$$h_{\ell} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (11.1)$$

а місцеві втрати напору виражаються залежністю

$$h_i = \zeta_i \frac{v^2}{2g}. \quad (11.2)$$

Повні втрати виражаються залежністю

$$h_{\omega} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v^2}{2g}. \quad (11.3)$$

Не трудно замітити, що повні втрати напору можуть бути представлені в наступному вигляді

$$h_{\omega} = \lambda \frac{L_{\text{розр}}}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (11.4)$$

де $L_{\text{розр}}$ – розрахункова довжина трубопроводу, що визначається залежністю

$$L_{\text{розр}} = \ell + \ell_{\text{екв}}, \quad (11.5)$$

$$\text{а} \quad \ell_{\text{екв}} = \frac{\sum \zeta_i}{\lambda} d. \quad (11.6)$$

Для довгих трубопроводів, де місцевими втратами напору можна знехтувати в порівнянні з втратами по довжині, $L_{\text{розр}} = \ell$.

В формулі (11.4) швидкість виразимо через витрати і площу поперечного перерізу. Тоді

$$h_{\omega} = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} Q^2 L_{\text{розр}}. \quad (11.7)$$

Виразимо $\frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} = \frac{1}{K^2}$. К назвемо витратною характеристикою.

$$\text{Тоді} \quad h_{\omega} = \frac{Q^2}{K^2} L_{\text{розр}}. \quad (11.8)$$

Аналогічну формулу можна отримати із формули Шезі

$$v = C \sqrt{R I}.$$

Знаючи, що $R = \frac{d}{4}$, а $I = \frac{h_{\omega}}{L}$ і, виразивши швидкість через витрату і площу, отримаємо

$$Q^2 = \frac{\pi^2 d^4}{16} C^2 \frac{d}{4} \frac{h_{\omega}}{L}.$$

$$\text{Звідки} \quad h_{\omega} = \frac{64}{\pi^2 C^2 d^5} Q^2 L, \quad (11.9)$$

$$\text{де } \frac{64}{\pi^2 C^2 d^5} = \frac{1}{K^2}.$$

$$\text{Отже} \quad h_{\omega} = \frac{Q^2}{K^2} L. \quad (11.10)$$

$$\text{Раніше ми отримали} \quad \frac{8 \lambda}{\pi^2 g d^5} = \frac{1}{K^2}.$$

$$\text{Отже} \quad \frac{8 \lambda}{\pi^2 g d^5} = \frac{64}{\pi^2 C^2 d^5}.$$

$$\text{Звідки} \quad \lambda = \frac{8 g}{C^2}. \quad (11.11)$$

Залежність (11.8) або (11.10) і є основна розрахункова залежність для розрахунків напірних трубопроводів, у цій залежності між собою пов'язані чотири величини d , Q , L і h_{ω} . Якщо відомі три із показаних величин, то завжди можна знайти четверту.

При розрахунках розгалуженої і кільцевої мереж можна розглядати три типи задач, що вирішуються за допомогою основної розрахункової залежності.

Перший тип. По заданому плановому накресленні мережі, місцях її живлення, довжинах і діаметрах окремих ліній, при відомому розподілі витрат по вузлам, визначається напір необхідний для подолання сил опору при русі рідини по мережі, тобто

$$H = h_{\omega} = \frac{Q^2}{K^2} L.$$

За відомими L , d і Q знаходиться $H = h_w$.

Цей тип задач найбільш часто зустрічається при вирішуванні питань водопостачання міст, промислових центрів і т.п.

Другий тип. Мережа задається місцями її живлення, довжиною і діаметрами окремих ліній і наявними напорами. В результаті розрахунків визначаються повні витрати, поступаючи в мережу і їх розподіл по окремих ділянках трубопроводу, тобто за відомими h_w , L , d визначається Q .

Третій тип. Мережа задається тільки трасами, довжинами ліній і бажаним розподілом витрат по окремих ділянках трубопроводу при наявному в мережі напорі. При розрахунку визначаються діаметри ліній на окремих ділянках мережі, тобто за відомими Q , L , h_w визначається d .

Цей тип задач не має єдиного рішення у відношенні вибору діаметрів труб на окремих ділянках, так як одні і ті ж витрати можна подати по трубах різного діаметру, якщо забезпечити необхідний напір. При рішенні таких задач необхідно вводити додаткові умови, які б робили рішення задачі єдиним. До таких умов відноситься вимога мінімальної вартості мережі.

11.2 З'єднання простих трубопроводів

Найбільш розповсюдженими схемами з'єднання простих трубопроводів являються послідовне і паралельне з'єднання.

Послідовне з'єднання .

Розглянемо послідовне з'єднання кількох труб різної довжини і різних діаметрів, тобто розглянемо трубопровід змінного перетину.

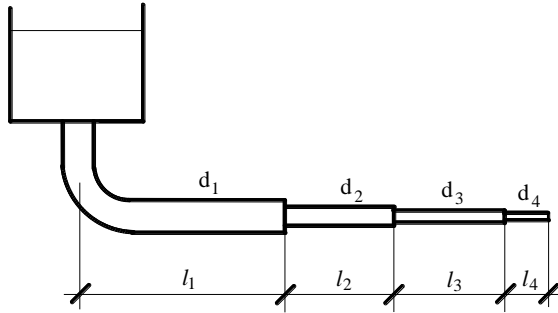


Рисунок 11.3

При достатньо великій довжині трубопроводу місцевими втратами напору можна знехтувати і тоді

$$\sum h_w = h_1 + h_2 + h_3 + h_4.$$

При подачі води по такому трубопроводу витрата на усіх послідовно з'єднаних трубах буде один і той же

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q.$$

Отже

$$\begin{aligned} \sum h &= \frac{Q^2}{K_1^2} \ell_1 + \frac{Q^2}{K_2^2} \ell_2 + \frac{Q^2}{K_3^2} \ell_3 + \frac{Q^2}{K_4^2} \ell_4 = \\ &= Q^2 \left(\frac{\ell_1}{K_1^2} + \frac{\ell_2}{K_2^2} + \frac{\ell_3}{K_3^2} + \frac{\ell_4}{K_4^2} \right). \end{aligned} \quad (11.12)$$

Позначимо $\frac{1}{K^2}$ через A і назвемо його питомим опором трубопроводу.

Добуток $A \cdot \ell$ позначимо через S . S буде представляти собою гідравлічний опір трубопроводу. Тоді

$$\sum h = Q^2 (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots), \quad (11.13)$$

Тобто при послідовному з'єднанні трубопроводів різного діаметру їх гідравлічні опори складуються.

Паралельне з'єднання труб

Покажемо на схемі паралельне з'єднання кількох трубопроводів між точками М і N. Для спрощення розрахунків припустимо, що трубопроводи розташовані в горизонтальній площині.

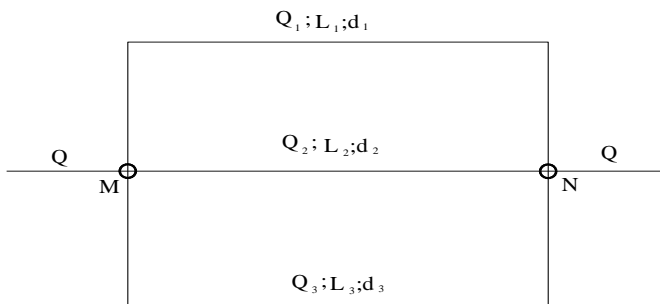


Рисунок 11.4

Опори трубопроводів позначимо S_1 , S_2 , S_3 , а витрати в гілках відповідно Q_1 , Q_2 , Q_3 .

Загальні витрати по такому трубопроводу складуть

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (11.14)$$

Втрати напору на кожній із віток визначаються за формулами:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= Q_1^2 S_1 \\ h_2 &= Q_2^2 S_2 \\ h_3 &= Q_3^2 S_3 \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

Із формул (11.15) отримаємо:

$$Q_1 = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{S_1}}; \quad Q_2 = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{S_2}}; \quad Q_3 = \frac{\sqrt{h_3}}{\sqrt{S_3}}; \quad (11.16)$$

Так як усі трубопроводи починаються в одній і тій же точці М і закінчуються в точці N, втрати на усіх трубопроводах будуть однакові, тобто

$$h_1 = h_2 = h_3 = h. \quad (11.17)$$

з урахуванням цього повні витрати Q складуть

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} \right) \sqrt{h}. \quad (11.18)$$

Відношення $\frac{1}{\sqrt{S}}$ назовемо провідністю трубопроводу а.

Тоді, як видно із формули (11.18), при паралельному з'єднанні трубопроводів провідності складуються, тобто

$$Q = \sum a \cdot \sqrt{h}. \quad (11.19)$$

11.3 Розрахунок насосної установки

а) Розрахунок усмоктуючої лінії насосної установки

Коротку ділянку трубопроводу від місця забору води до насоса називають усмоктуючою лінією. Вода підсмоктується по цій лінії до насоса під дією створеного в ньому розрідження. При розрахунку усмоктуючої лінії слід виходити із двох положень:

- вихідними даними для розрахунку являється рекомендована середня швидкість води в усмоктуючій лінії і допустима величина розрідження, яке створюється насосом;

- через невелику довжину усмоктуючої лінії місцеві втрати в них грають помітну роль в загальному балансі втрат напору, тому при розрахунку втрат необхідно користуватись залежностями, які враховують і шляхові, і місцеві втрати.

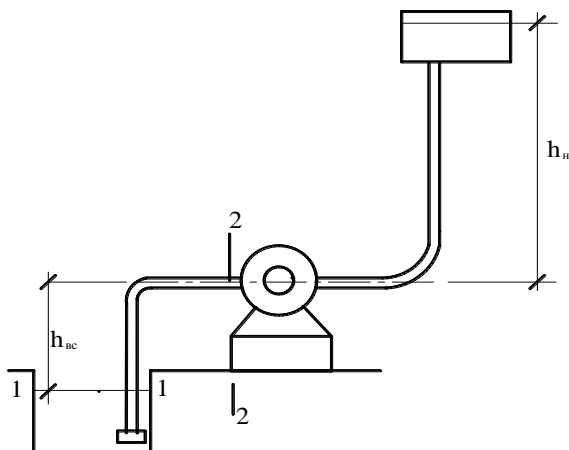


Рисунок 11.5

Діаметр усмоктуючої труби визначається при швидкості руху

$v_{\text{всм}} = 0,8 \div 1,25$ м/с (для попередніх розрахунків приймають середню швидкість $v_{\text{всм}} = 1,0$ м/с). таким чином

$$d_{\text{всм}} = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_{\text{всм}}}} \approx 1,25 Q^{\frac{1}{2}}. \quad (11.20)$$

Отриманий за розрахунком діаметр округляють до найближчого за сортаментом і перераховують швидкість води в усмоктуючій лінії.

Для виводу розрахункової залежності запишемо рівняння Бернуллі для двох перетинів: 1 – 1, розташованого на поверхні води в резервуарі і

2 – 2, перед входом в насос. Площину порівняння сумістимо з перетином

1 – 1. такий вибір розрахункових перетинів вигідний тим, що на поверхні води в резервуарі тиск дорівнює атмосферному ($p_1 = p_a$), а перед входом в насос тиск визначається в залежності від величини розрідження, яке створює насос. Крім того $Z_1 = 0$ і

$v_1 = 0$, так як розмір резервуара значно більший перетину труби. Координата $Z_2 = h_{\text{всм}}$ а швидкісний напір $\frac{v^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\omega^2}$, де Q -

витрата, а ω – площа поперечного перетину труби.

З урахуванням цього отримаємо

$$\frac{p_a}{\rho g} = h_{\text{всм}} + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{Q^2}{2g\omega^2} + \lambda \frac{\ell}{d} \frac{Q^2}{2g\omega^2} + \sum \zeta \frac{Q^2}{2g\omega^2}. \quad (11.21)$$

Із формули (11.21) $\frac{p_a - p_2}{\rho g} = h_{\text{вак}}$ - вакуумметрична

висота.

Із формули (11.21) висота усмоктування насоса може бути визначена за залежністю

$$h_{\text{всм}} = h_{\text{вак}} - \frac{Q^2}{2g\omega^2} \left(1 + \lambda \frac{\ell}{d} + \sum \zeta \right). \quad (11.22)$$

Допустимою вакуум метричною висотою для води можна прийняти $6 \div 7$ м. водяного стовпа.

Різні типи насосів допускають різну величину вакууму. Звично вакуум перед робочим колесом насоса повинен задовольняти умові

$$h_{\text{дфр/уфс}} \leq 4.0 \div 6.5 \text{ м.вод.стовпа.}$$

Отже висота усмоктування завжди менше вакуум метричної висоти, так як частина вакууму тратиться на подолання швидкісного напору $\frac{Q^2}{2g\omega^2}$, а також гідравлічних опорів.

б). Розрахунок нагнітальної лінії насосної установки

Тиском, що створюється насосом, вода подається по напірній лінії в напірний бак для подальшого розподілу по водопровідній мережі. Визначення діаметру напірної лінії являється задачею невизначеною, так як задану кількість води

можна пропустити по трубопроводах різних діаметрів при забезпеченні відповідного напору. Орієнтовно діаметр трубопроводу може бути визначений за формулою Лобачова

$$d = x Q^{0.42}, \quad (11.23)$$

де d – діаметр трубопроводу, м;

x – коефіцієнт, що знаходиться в межах $0,8 - 1,2$;

Q – витрата в $\text{м}^3/\text{сек.}$.

Розрахунок нагнітальної лінії насосної установки зводиться до визначення необхідної потужності установки.

Відмітимо, що в насосній установці виконується робота по підняттю завданого об'єму на геометричну висоту $Z_n = h_n + h_{\text{усм}}$ і по подоланню опорів руху рідини, яка характеризується висотою втраченого напору h_{ω} . Таким чином робота насосної установки рівносильна подачі води на загальну висоту $H = Z_n + h_{\omega}$.

Виразимо ККД (коефіцієнт корисної дії) насоса і двигуна через η , витрати води через Q , питому вагу води – γ . Необхідна потужність (вт) насосної установки визначиться за формулою

$$N = \frac{\gamma Q H}{\eta} = \frac{\gamma Q (Z_n + h_{\omega})}{\eta} = \frac{\gamma Q Z_n}{\eta} + \frac{\gamma Q h_{\omega}}{\eta} = N_1 + N_2. \quad (11.24)$$

Перша частина загальної потужності N_1 , тратиться на підняття води на необхідну висоту (Z_n). Ця частина потужності не залежить від діаметра труб. Друга частина потужності N_2 залежить від діаметра, так як

$$h_{\omega} = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v^2}{2g}. \quad (11.25)$$

Чим більша величина діаметра, тим менші втрати напору і, отже, менша потужність N_2 і навпаки.

Вигідно діаметр труб збільшувати, але це пов'язано зі збільшенням вартості. Таким чином це питання вирішується на основі економічних розрахунків.

11.4 Гідравлічний удар в трубах

В кінці вісімнадцятого століття на водопроводах часто спостерігались розриви труб в мережі. Під керівництвом М.Є.Жуковського були проведені спостереження за роботою водопровідних труб Москви. В результаті проведених досліджень було встановлено, що розрушення відбуваються в наслідок підвищення тиску при швидкому повному закриванні кранів у водопроводах, а також при зупинці чи запуску насосів, що подають воду у водопровідну мережу. Це явище було названо Жуковським *гідравлічним ударом*.

Явище гідравлічного удару являється винятковим випадком в гідравліці, коли необхідно враховувати стиснення рідини.

Гідравлічний удар викликає значне підвищення напруг в матеріалі труб, а це може спричинити розриви труб або значну їх деформацію. Запобігти негативної дії гідравлічного удару на міцність трубопроводів можна шляхом улаштування повітряних ковпаків, рідинних колон, амортизуючих гідравлічний удар, запобіжних клапанів, що відкриваються в момент удару та іншими пристроями.

Явище гідравлічного удару Н.Є.Жуковський розглядав стосовно до водопровідної труби постійного перерізу без відгалужень.

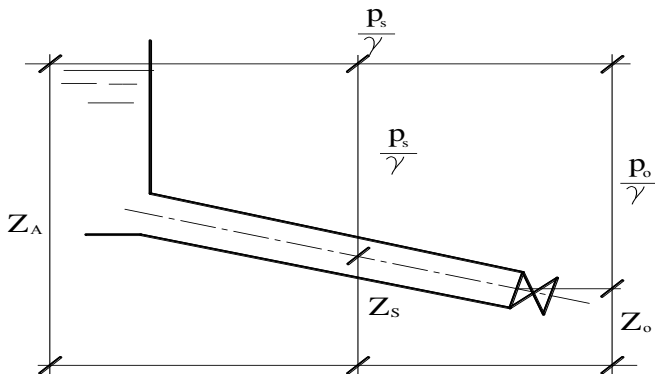


Рисунок 11.6

На основі багато чисельних експериментів Н.С.Жуковський встановив, що в момент перекриття труби засувкою відбувається зупинка найближчого до засувки шару рідини і кінетична енергія шару переходить в потенціальну, що викликає різке зростання тиску біля засувки і стискання цього шару рідини

Слідом за зупинкою найближчого до засувки шару відбувається зупинка усіх наступних шарів рідини аж до останнього біля резервуара. Кінетична енергія усіх шарів переходить в потенціальну, що і викликає стискання усього стовпа рідини.

В момент зупинки останнього шару рідини в трубі тиск біля засувки досягає максимального значення. Перехід кінетичної енергії в потенціальну вздовж труби від засувки до резервуару проходить у вигляді хвилі, швидкість розповсюдження якої позначимо λ . Ця хвиля досягне резервуару при довжині труби ℓ через час $t = \ell / \lambda$ сек. в цей момент уся маса рідини знаходиться в стані спокою і стиснення. Цей стан дуже нестійкий, так як біля засувки установлюється дуже високий тиск (потенціальна енергія), під дією якого починається рух потоку в зворотному напрямку. Потенціальна енергія назад переходить в кінетичну. Тиск біля засувки різко зменшується до величини меншої атмосферного.

Така зміна тиску відбувається з великою швидкістю від шару до шару або в напрямку до засувки, або ж в напрямку до резервуару. На оба ці періоди тратиться час $\tau = 2 \ell / \lambda$ сек, який називають тривалістю фази (або просто фазою).

Підвищення і пониження тиску відбувається у вигляді хвилі, яка поступово затухає з течією часу (див. графік).

За першим відбувається другий і т.д. удари у закриту засувку. Тиск удару все більше і більше зменшується і, нарешті, відбувається повне затухання хвилі.

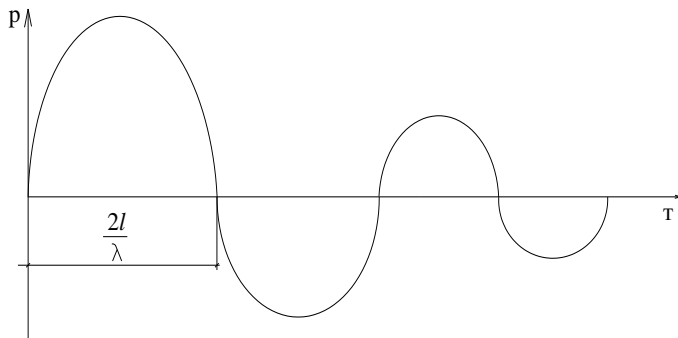


Рисунок 11.7

Величина ударного тиску $p_{уд}$ по пропозиції Н.Є.Жуковського визначається із припущення, що в момент удару кінетична енергія потоку цілком витрачується на роботу стиснення самої рідини в трубі і на роботу розширення стінок трубопроводу.

Не вдаючись детально в подробиці визначення кінетичної енергії і обох видів роботи вираз для ударного тиску отримаємо в наступному вигляді

$$p_{уд} = \rho v \lambda, \quad (11.26)$$

де ρ – щільність рідини;

v – швидкість руху потоку до удару;

λ – швидкість розповсюдження ударної хвилі, що визначається за залежністю

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{F}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{2 r_0}{\delta_c} \frac{F}{E}}}, \quad (11.27)$$

де E – модуль пружності матеріалу труби;

F – модуль пружності рідини;

r_0 – радіус трубопроводу;

δ_c – товщина стінок труби.

$$\text{При } E = Q, \lambda = \sqrt{\frac{F}{\rho}} = 1435 \text{ м.}$$

При бистрій зупинці руху рідини в трубопроводі, яка проходить за час $t_{\text{зак}} < \tau$ (тобто $t_{\text{зак}} < 2\ell/\lambda$) або менше фази удару, гідравлічний удар називається прямим.

У випадку зупинки руху рідини в трубопроводі не моментально, а поступово, тобто при $t_{\text{зак}} > \tau$, утворюється непрямий гідравлічний удар. Явища гідравлічного удару в цьому випадку протікають дещо по іншому.

Тиск при непрямому ударі дещо нижче і визначається за формулою

$$p_{\text{уд}} = \rho \cdot v \cdot \lambda \cdot \frac{\tau}{t_{\text{зак}}}. \quad (11.28)$$

11.5 Гідравлічний таран

Гідравлічний удар, як видно, явище негативне, шкідливе. Проте воно знайшло застосування і для корисних цілей. Самим розповсюдженим прикладом використання явища гідравлічного удару являється гідравлічний таран. Гідравлічний таран – це пристрій, призначений для підняття води на велику висоту (водопідйомник).

Основними частинами гідравлічного тарану являються скидний клапан 1, напірний клапан 2 і напірно – повітряний ковпак 3.

Принцип дії гідравлічного тарана полягає в наступному: вода із водопідйому по трубі живлення 4 попадає в гідравлічний таран і, проходячи через скидний клапан 1, виливається назовні. Під дією струмини клапан 1 закривається, в тубі відбувається моментальна зупинка руху води і внаслідок цього виникає підвищений ударний тиск. Під дією підвищеного тиску відкривається напірний кран 2 і частина води поступає в повітряний ковпак. Тиск в трубі 4 падає до тиску нижче атмосферного і тоді під дією атмосферного тиску знову

відкривається клапан 1 і вода, приходячи в рух, виливається знову назовні. З цього моменту явище повторяється знову.

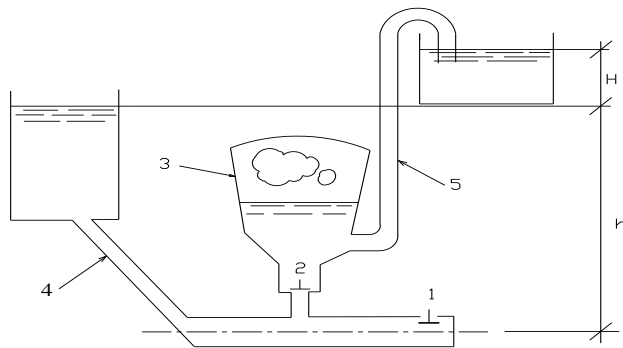


Рисунок 11.8

Вода, попадаючи в напірно – повітряний ковпак, стискає повітря, що знаходиться там. В момент, коли в трубі живлення 4 тиск падає, напірний клапан 2 закривається. Вода під дією стисненого повітря подається в напірну трубу 5 і по ній до споживача.

Для нормальної роботи тарана важливо правильно підібрати вагу скидного клапану 1. чим важче ударний клапан 1, тим більше води скидається назовні і тим менше отримується коефіцієнт корисної дії тарана.

Кількість ударів скидного (ударного) клапана 1 регулюється вантажами і установлюється в залежності від довжини і діаметра труби живлення, висоти піднімання рідини.

Бажано, щоб число ударів за хвилину складало 100.

Коефіцієнт корисної дії визначається за залежністю

$$\eta = \frac{q H}{Q h}, \quad (11.29)$$

де q – продуктивність тарана, л/хв.;

Q – загальні витрати установки, л/хв.;

H – висота підняття води, м;

h – висота падіння води, м.
коефіцієнт корисної дії орієнтовно повинен складати
0,4 – 0,7.

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення «малий отвір в тонкій стінці».
2. Наведіть основні формули швидкості і витрат при протіканні рідини через малий отвір в тонкій стінці.
3. Що таке коефіцієнти стиснення, швидкості, витрат?
4. Чим відрізняється формула витрат для затопленого отвору від формули для вільного отвору.
5. Що таке насадок? Розрахункова залежність.
6. Які насадки зустрічаються в техніці?
7. Розрахункова залежність для витікання рідини через великий отвір.
8. Час повного опорожнення ємкості через отвір.
9. Класифікація водопровідних мереж.
10. Основна розрахункова залежність для розрахунку водопроводів.
11. Типи задач при розрахунку водопровідних мереж.
12. Розрахункові залежності при послідовному поєднанні труб.
13. Розрахункові залежності при паралельному поєднанні труб.
14. Що таке усмоктуюча лінія насосної установки?
15. Що таке нагнітальна лінія насосної установки?
16. Що таке гідравлічний удар?
17. Величина ударного тиску.
18. Що таке гідравлічний таран? Його призначення.
19. Принцип роботи гідравлічного тарана.