УДК 622.

А.І. Корольов, студент;
І.М.Лаппо, асистент
Красноармійський індустріальний інститут Донецького національного технічного університету
м. Красноармійськ, Україна
E-mail: tpm@krasn.dn.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ АНАЛІТИЧНОЇ ФІЗИКИ ПРИ РОЗРАХУНКУ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ

Вивчення теплових процесів є одним із пріоритетних розділів сучасних інженерних досліджень у машинобудуванні та інших галузях промисловості. Аналітичне дослідження теплових процесів зводиться до вивчення просторово-часової зміни температури, тобто визначається залежністю: $\Theta = f(x, y, z, \tau)$. Існують три групи методів вирішення теплової задачі:

1. Аналітичні: метод Фур'є, метод інтегральних перетворень, метод джерел.
2. Численні: метод скінченних елементів, метод скінченних різниць.
3. Математичного та фізичного моделювання.

Розглянемо використання одного із найбільш поширених аналітичних методів – методу Фур'є - для вирішення стаціонарної граничної теплової задачі. Треба знайти рішення для теплоізольованого з одного боку нескінченного стрижню. Теплопровідність стрижня λ, Вт/м^2 ·°С; густина ρ, кг/м^3; теплоємність c, Дж/кг·°С. Теплові джерела у стрижні відсутні. Початкова температура стрижня задана у вигляді безперервної та обмеженої функції $\Phi_0(x)$:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \omega\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\,;\ -\infty < x < +\infty\,;\ \tau > 0 \tag{1}$$

$$\Theta(x,0) = \Phi_0(x)\,;\ -\infty < x < +\infty\,; \tag{2}$$

$$\Theta(x,\tau) < +\infty\,;\ |x| < +\infty\,,$$

де Θ – температура стрижня, °С; τ – поточний час, с; ω – коефіцієнт температуропровідності: $\omega = \lambda/c\rho$, м^2/с.

Знаходимо частне рішення, застосовуючи метод розділення змінних та суперпозиції Фур'є у вигляді:

$$\Theta(x,\tau) = T(\tau)\psi(x)\,. \tag{3}$$

Підставляємо праву частину рівняння в (1) та розділяємо змінні:

$$\frac{1}{\omega}\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\gamma^2 \tag{4}$$

де γ^2- постійна розділення. Маємо:

$$T'(\tau)+\left(\sqrt{\omega}\gamma\right)^2 T(\tau)=0\,; \tag{5}$$

$$\psi''(x)+\gamma^2\psi(x)=0\,. \tag{6}$$

Інтегруємо рівняння (5), (6) та отримуємо:

$$T(\tau)=A\exp\left[-\left(\sqrt{\omega}\gamma\right)^2\tau\right]. \tag{7}$$

$$\psi(x)=B\cos\gamma x+C\sin\gamma x\,. \tag{8}$$

Частне рішення рівняння (1) має вид:

$$\Theta=\left(ABcos\gamma x+ACsin\gamma x\right)\cdot e^{-\tau\left(\sqrt{\omega}\gamma\right)^2}\,. \tag{9}$$

де *A, B, C* – постійні інтегрування.

Замінимо: $AB=a_0$; $AC=b_0$, де a_0, b_0 - довільні постійні, можуть бути довільними функціями від γ. Тоді маємо наступне сімейство частних рішень рівняння (1):

$$\Theta=\left(a_0(\gamma)\cos\gamma x+b_0(\gamma)\sin\gamma x\right)\cdot e^{-\tau(\sqrt{\omega}\gamma)^2}\,. \tag{10}$$

В зв'язку з тим, що граничні умови відсутні, параметр γ залишається довільним і може приймати всі значення від -∞ до +∞. Використовуємо метод суперпозицій Фур'є, інтегруємо (10) по параметру γ, та отримаємо рішення рівняння (1):

$$\Theta(x,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(a_0(\gamma)\cos\gamma x+b_0(\gamma)sin\gamma x\right)e^{-\tau\left(\sqrt{\omega}\gamma\right)^2}\right]\partial\gamma\,. \tag{11}$$

Визначимо невідомі $a_0(\gamma), b_0(\gamma)$ так, щоб виконувались початкові умови (2), тоді:

$$\Theta(x,0)=\Phi_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(a_0(\gamma)\cos\gamma x+b_0(\gamma)sin\gamma x\right)\right]\partial\gamma\,. \tag{12}$$

Розкладемо початкову функцію Φ_0(x) в інтеграл Фур'є:

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)\cos\gamma(\xi-x)\partial\xi\,. \tag{13}$$

Так як $cos\gamma(\xi-x)=\cos\gamma\xi\cos x+sin\gamma\xi sin\gamma x$, то інтеграл Фур'є можно записати у вигляді:

$$\Phi_0(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)cos\gamma\xi\partial\xi\right)\cos\gamma x+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)sin\gamma\xi\partial\xi\right)sin\gamma x\right]\partial\gamma \text{ (14}$$

Так як функція $cos\gamma(\xi-x)$ - парна відносно γ, то можно записати:

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\partial\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)cos\gamma(\xi-x)\partial\xi\,. \tag{15}$$

Знаходимо коефіцієнти розкладання, порівнюючи формулу (12) з разкладенням в інтеграл Фур'є (14):

$$a_0(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)cos\gamma\xi\partial\xi\ , \tag{16}$$

$$b_0(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)sin\gamma\xi\partial\xi\ . \tag{17}$$

Якщо підставимо ці значення в (11) і змінимо порядок інтегрування, то отримаємо рішення рівняння (1), в якому внутрішній інтеграл по γ не містить заданої функції $\Phi_0(\xi)$:

$$\Theta(x,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)\partial\xi\int_{0}^{+\infty}e^{-\tau\left(\sqrt{\omega}\gamma\right)^2}cos\gamma(x-\xi)\partial\gamma\ . \tag{18}$$

Здійснимо заміну змінної $\gamma=\dfrac{\sigma}{\sqrt{\tau}\sqrt{\omega}}$ та введемо позначення $\dfrac{x-\xi}{\sqrt{\tau}}=a$,

тоді будемо мати:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau\left(\sqrt{\omega}\gamma\right)^2}cos\gamma(x-\xi)\partial\gamma=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}cos\sigma a\partial\sigma=\frac{1}{\sqrt{\tau}}I(a). \tag{19}$$

Інтеграл $I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}cos\sigma a\partial\sigma$ може бути розрахований наступним чином.

Маючи на увазі, що $I(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\partial\sigma=\sqrt{\pi}$ є інтеграл Пуассона, візьмемо похідну $I'(a)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma e^{-\sigma^2}sin\sigma a\partial\sigma$. Перетворемо $I'(a)$, інтегруя по частинам:

$$I'(a)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma e^{-\sigma^2}sin\sigma a\partial\sigma=\frac{1}{2}e^{-\sigma^2}sin\sigma a\Big|\ -\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma a\partial\sigma=-\frac{a}{2}I(a)$$

$$\frac{I'(a)}{I(a)}=-\frac{a}{2},\ \ln I(a)=-\frac{a^2}{4}+\ln C,\quad I(a)=C\cdot e^{-\frac{a^2}{4}}.$$

Так як $I(0)=\sqrt{\pi}$, то довільна постійна $C=\sqrt{\pi}$. Тоді $I(a)=\sqrt{\pi}\cdot e^{-\frac{a^2}{4}}$, а так як $\dfrac{x-\xi}{\sqrt{\tau}}=a$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau(\sqrt{\omega}\gamma)^2}\cos\gamma(x-\xi)\partial\gamma=\frac{1}{\sqrt{\omega\tau}}I(a)=\sqrt{\frac{\pi}{\omega\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\omega\tau}}. \tag{20}$$

Підставимо отриману формулу в (18) і остаточно будемо мати:

$$\Theta(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\omega\tau}} \partial\xi$$

Таким чином ми отримали рішення диференційного рівняння (1) методом Фур'є в декартовій системі координат для одномірної осесиметричної стаціонарної задачі. Однак для двух- і трьохмірних завдань цей метод технічно менш зручний, оскільки виникає складність, а іноді і неможливість безпосереднього інтегрування диференціального рівняння теплопровідності. А оскільки аналітичне рішення теплової задачі ставить метою отримання загального рішення, то воно виходить дуже складним і виявляється можливим лише для твердого тіла простої форми (пластина, циліндр) і при цілому ряду спрощуючих передумов. Коли застосування аналітичних методів недоцільно, використовують численні методи.

Список використаних джерел

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 480 с.
2. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. Коздоба Л.А. М., изд-во «Наука», 1975 г.
3. А.В.Лыков. Теория теплопроводности – М.: Издательство «Высшая школа», 1967 г.