Тема 1 Нарисна геометрія

1.1 Введення

Предмет нарисної геометрії – побудова зображень геометричних фігур (об'єктів) на площини й сукупність способів розв’язання геометричних задач за заданими зображеннями цих фігур.

Історична довідка – необхідність відображати фігури на площині виникла у людини тоді, коли в неї виникла потреба зберегти або передати інформацію про побачене, тобто, візуальну інформацію. Технологічно доступним для людини був один простий спосіб - відтворити побачене на гладкій поверхні, наприклад, на поверхні каменю. В результаті, візуальна інформація стала графічної. Імовірно, потреба відтворення і закріплення геометричної інформації могла спочатку виникнути при розв’язанні задач землекористування (γεω – земля, μετρια – вимірювати) і будівництва. У Шумерському царстві у Месопотамії, як носій інформації використовували спеціально зроблені глиняні таблички. Пізніше в древньому Єгипті папірус і пергамент і ще пізніше, в 2-ому столітті в Китаї був винайдений папір. Таким чином, із самого початку людина вирішувала можливість відображення потрібного їй об'єкта на поверхні. Зручніше за все на плоскій поверхні, тобто, на площині. Звідси випливає, що ще в стародавності інтуїтивно або усвідомлено, людина знаходила і використовувала способи відображення, тобто, проекціювання зображення на площину.

Задача зображення матеріальних об'єктів вирішувалося по-різному. Головне, чого було потрібно досягти, це наочності і відтворюваності зображеного. Наочність досягається при використанні проекцій, які зараз називають перспективними, коли відтворюється зображення об'єкта таке, яким його бачить людина. При цьому проекціюючі промені виходять із однієї точки - центра проекцій, яким при спостереженні в реальності є око людини. Для досягнення відтворюваності зображення, тобто, такого відображення геометричної інформації на площині, за якою можна точно відтворити реальний об'єкт, необхідно, щоб всі проекціюючі промені були паралельні один одному, і площин проекції було не менше двох.

В 1799 році француз Гаспар Монж (1746...1818) опублікував знамениту працю «Geometrie descriptive», у якій була запропонована система прямокутного проекціювання і методи розв’язання геометричних задач методами, що використовують побудови із застосуванням лінійки і циркуля. Методи, запропоновані Монжем, майже без змін використовуються дотепер.

Розвиток комп'ютерної техніки дозволив повернутися з новими інструментами до задачі, що виникла багато тисячоріч назад: як максимально вірогідно зберегти інформацію про матеріальний об'єкт. Тепер ми маємо інструменти для віртуального тривимірного моделювання практично будь-яких матеріальних об'єктів, у тому числі сукупностей окремих об'єктів. По отриманій моделі можна автоматично одержати проекції об'єкта на будь-які площини і, далі, роздрукувати ці проекції у вигляді звичних для людини плоских малюнків і креслень. Комп'ютерні технології розвили можливості людини до автоматизованого виготовлення реальних об'єктів - деталей машин і навіть скульптурних зображень за їх віртуальними моделями.

1.2 Позначення, які застосовуються

A, B, C, … 1, 2, 3,...... – точки;

a, b, c, d,.. – прямі і криві лінії, у тому числі зарезервовані позначення прямих ліній:

> ***h*** – горизонталь,
>
> ***f*** – фронталь,
>
> ***p*** – профільна пряма.

Θ, Λ, Σ, Γ, Φ, Ω - поверхні;

α, β, γ - кути;

Π_1 – горизонтальна площина проекцій;

Π_2 – фронтальна площина проекцій;

Π_3 – профільна площина проекцій;

$\in$ − належить ($A \in a$ – точка ***A*** належить лінії ***a***)

$\notin$ − не належить ($A \notin a$ – точка ***A*** не лежить лінії ***a***)

$\subset$ − включає ($a \subset \Lambda$ – лінія ***a*** належить (є підмножиною) поверхні ***Λ***);

$\not\subset$ − не включає;

$\equiv$ − збіг ($A_1 \equiv B_1$ – проекція A_1 точки ***A*** збігається с проекцією B_1 точки ***B***);

$\cup$ − об'єднання фігур (множин);

$\cap$ − перетин фігур (множин);

$\perp$ − перпендикулярність;

$\|$ − паралельність;

$\dot{-}$ − неперетин (для прямих ліній - схрещування) ($a \dot{-} b$ – прямі лінії ***a*** і ***b*** схрещуються);

$\angle$ − плоский або двогранний кут, значення кута;

$\cong$ − конгруентні;

$\sim$ − подібні;

$\frown$ − дотичні фігури.

1.3 Метод проекцій

Метод проекцій – метод відображення реальних або віртуальних об'єктів (фігур) на площині (у загальному випадку – на поверхні).

Використовують два основних методи проекціювання:

1. центральне проекціювання;
2. паралельне проекціювання.

1.3.1 Центральні проекції

Для одержання центральної проекції необхідні три елементи:

1. **об'єкт проекціювання**;
2. **центр проекціювання** - точка, яка позначається звичайно ***S***;
3. **поверхня (площина) проекціювання** – поверхня, на яку відображається об'єкт проекціювання (Рис.).

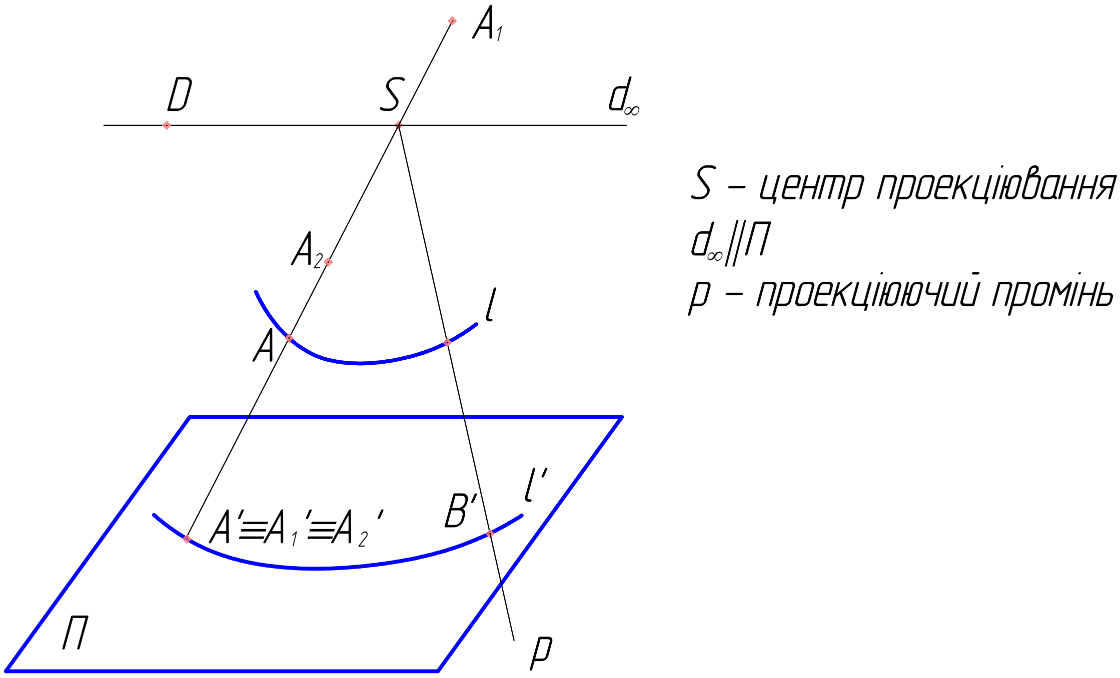


Рис. 1.1 Проекціювання кривої

Властивість центральної проекції – за центральної проекцією точки **неможливо** відновити положення точки в просторі.

Для того, щоб за центральною проекцією точки можна було відновити її положення в просторі, необхідні додаткові умови. Наприклад, це координати центра проекціювання і відстань від точки до її проекції уздовж променя проекціювання.

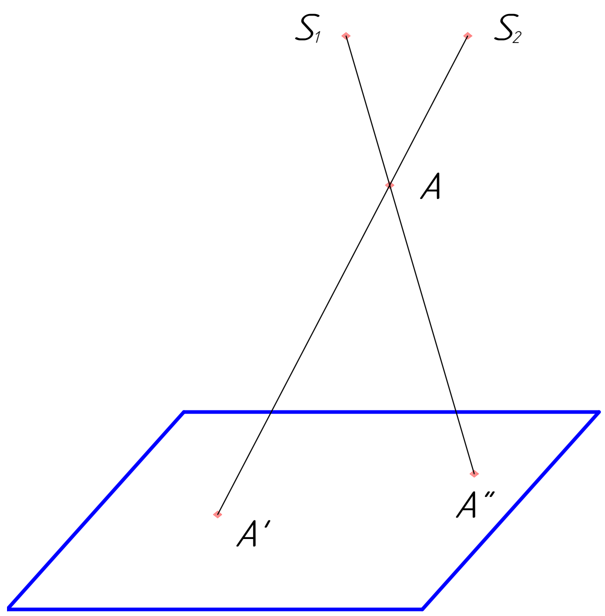


Рис. 1.2 Центральне проекціювання точки

Одна точка може мати будь-яку кількість проекцій залежно від вибору центра проекціювання (

Рис. 1.2).

Один із видів центрального проекціювання - перспектива.

1.3.2 Паралельні проекції

Якщо помістити центр проекціювання в бісконечність, промені проекціювання стануть паралельними (Рис. 1.3). Проекції із взаємно паралельними променями проекціювання називаються паралельними проекціями.

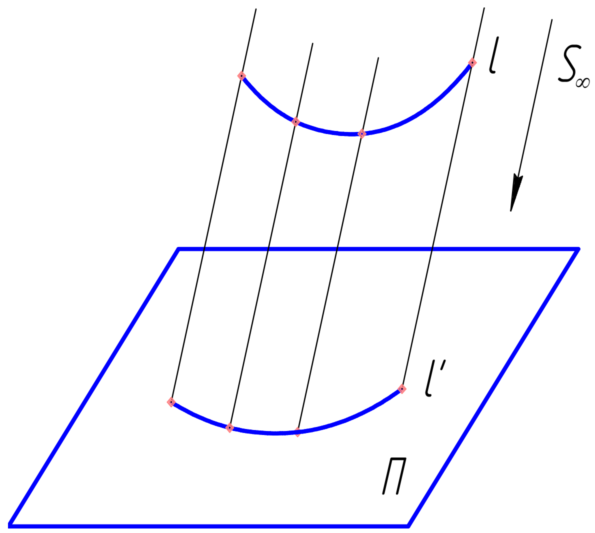


Рис. 1.3 Паралельне проекціювання точки

Позначимо $\boldsymbol{S_\infty}$ напрямок проекціювання. Тоді перетин променя $\boldsymbol{p}||\boldsymbol{S_\infty}$, який проходить через точку ***A***, з площиною ***П*** дає проекцію ***A'*** точки ***A*** на площину ***П.***

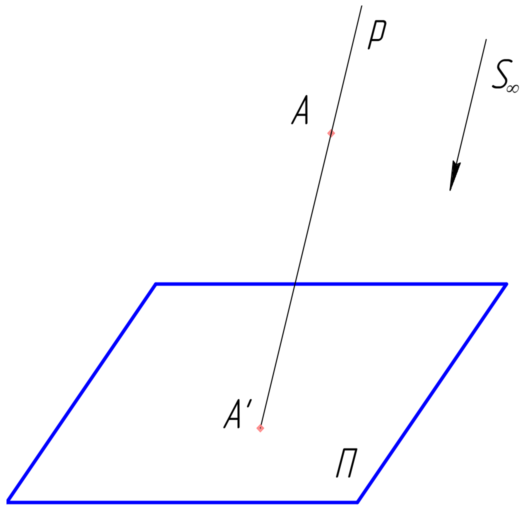


Рис. 1.4 Паралельне проекціювання кривої

Для побудови паралельної проекції лінії ***l*** необхідно одержати проекції всіх її точок на площину. При цьому проекціюючі промені, паралельні один одному, утворять циліндричну поверхню. Тому паралельне проектування іноді називають **циліндричним** (Рис. 1.4).

Центральне проекціювання за тією ж причиною називають **конічним**.

Якщо напрямок проекціювання перпендикулярний площині проекцій – проекціювання називається **прямокутним**. В інших випадках – **косокутним**.

1.4 Основні властивості центральних і паралельних проекцій:

- у даній системі проекціювання кожна точка простору має єдину проекцію;
- проекція прямої лінії - пряма лінія;
- якщо точка ***A*** належить лінії ***l*** ($A \in l$), то проекція ***A'*** точки належить проекції ***l'*** лінії ($A' \in l'$);
- пряма, паралельна площини проекцій, паралельна своїй проекції на цю площину.

1.5 Додаткові властивості паралельних проекцій:

- лінія, що лежить у площині, паралельній площині проекцій, проекціюється на неї без спотворення;
- проекції взаємно паралельних прямих паралельні;
- відношення проекцій відрізків прямої дорівнює відношенню самих відрізків (Рис.);

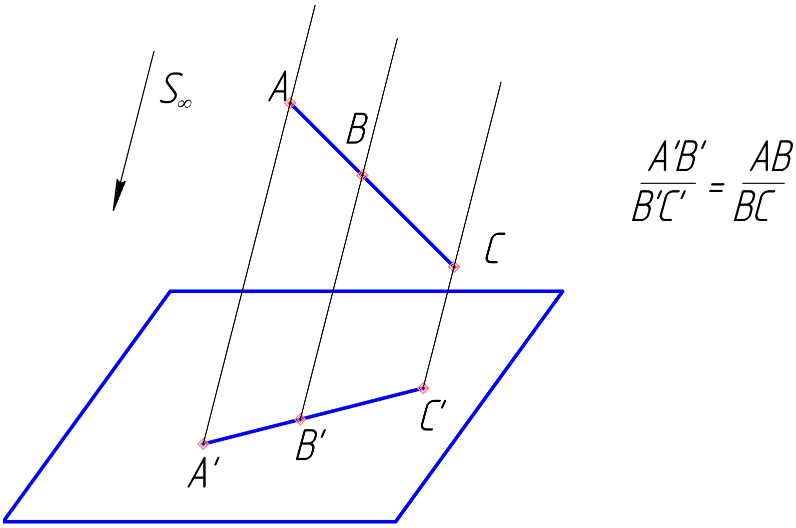


Рис. 1.5

- Відношення проекцій відрізків паралельних прямих дорівнює відношенню цих відрізків (Рис.);

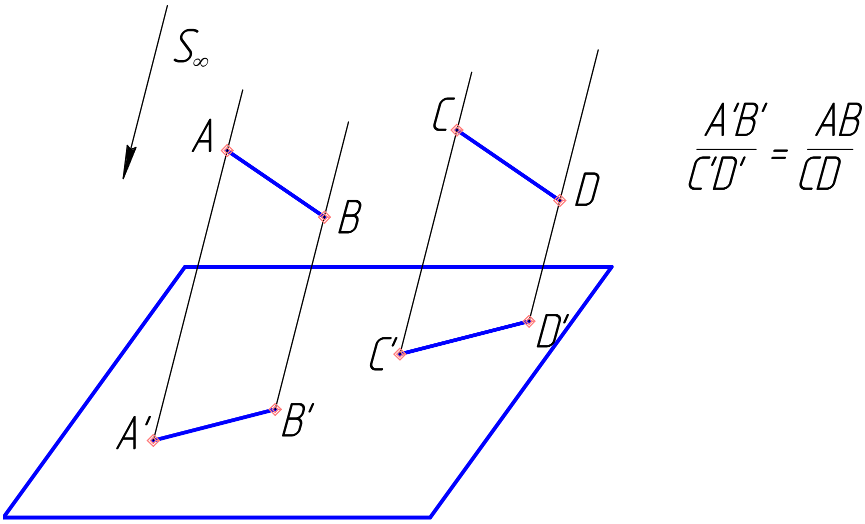


Рис. 1.6

1.6 Ортогональна система проекціювання. Точка в просторі.

У нарисній геометрії, як взагалі в інженерній графіці, як база відліку використовується ортогональна система координат, утворена трьома взаємно перпендикулярними (ортогональними) площинами проекцій:

$\boldsymbol{\Pi_1}$ – горизонтальної;

$\boldsymbol{\Pi_2}$ – фронтальної;

$\boldsymbol{\Pi_3}$ – профільної.

Ортогональну систему координат інакше називають Декартової на честь французького філософа і математика Рене Декарта (XV століття).

Лінія $\boldsymbol{x}$ перетину горизонтальної площини $\boldsymbol{\Pi_1}$ із фронтальною площиною $\boldsymbol{\Pi_2}$ ($\boldsymbol{x = \Pi_1 \cap \Pi_2}$) називається віссю ***абсцис***;

Лінія $\boldsymbol{z}$ перетину фронтальної площини $\boldsymbol{\Pi_2}$ із профільною площиною $\boldsymbol{\Pi_3}$ ($\boldsymbol{z = \Pi_2 \cap \Pi_3}$) називається віссю ***аппликат***;

Лінія $\boldsymbol{y}$ перетину горизонтальної площини $\boldsymbol{\Pi_1}$ із профільною площиною $\boldsymbol{\Pi_3}$ ($\boldsymbol{y = \Pi_1 \cap \Pi_3}$) називається віссю ***ординат***.

Проекціювання виконується в напрямках перпендикулярних площинам проекцій.

Положення точки $\boldsymbol{A}$ в просторі визначено, якщо визначені її координати $\boldsymbol{x; y; z}$ у декартової системі координат (Рис. 1.7).

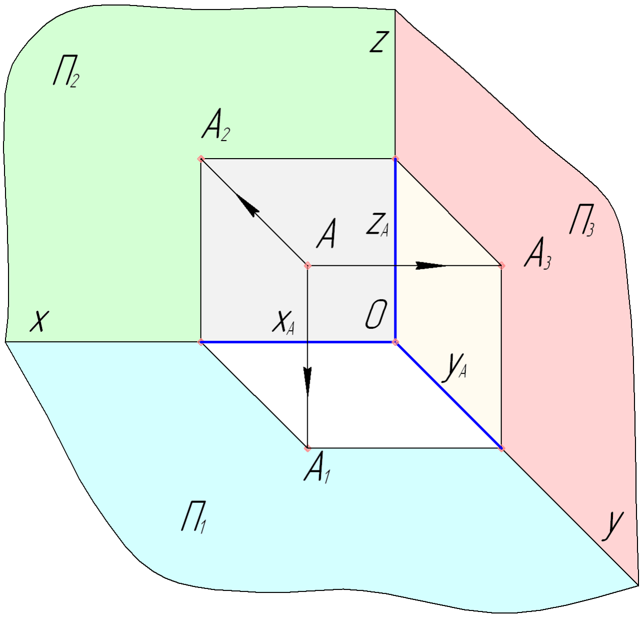


Рис. 1.7 Ортогональне проекціювання точки

При цьому проекціювання точки на площини проекцій дає її проекції

- $\boldsymbol{A_1}$ на горизонтальну ПП;
- $\boldsymbol{A_2}$ на фронтальну;
- $\boldsymbol{A_3}$ на профільну.

На цих площинах проекції визначені парами координат:

на $\boldsymbol{\Pi_1}$ – $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$;

на $\boldsymbol{\Pi_2}$ – $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{z}$;

на $\boldsymbol{\Pi_3}$ – $\boldsymbol{y}$ і $\boldsymbol{z}$.

Звідси видно, що будь-які пари проекцій точки в ортогональній системі проекціювання містять всю необхідну інформацію для визначення положення точки в просторі.

1.7 Плоский рисунок

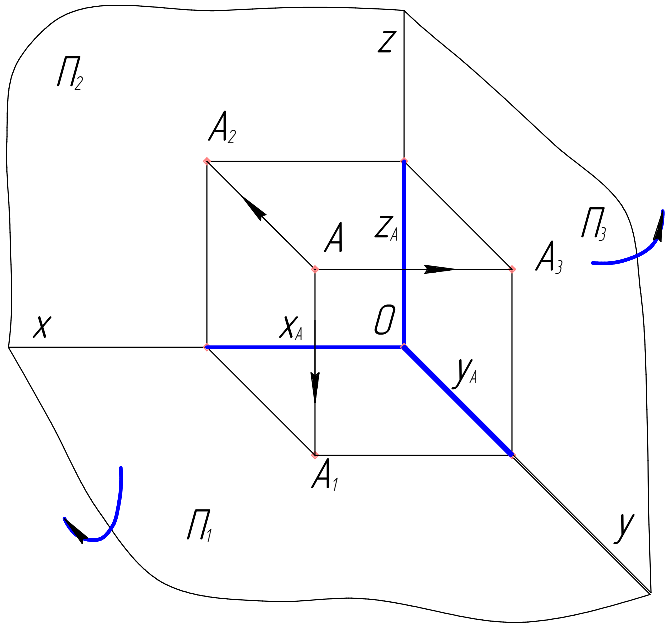


Рис. 1.8 Утворення плоского (комплексного) рисунка

Якщо ортогональну систему координат із проекціями точки ***A*** розсікти уздовж осі ***y*** і потім повернути горизонтальну площину проекцій Π_1 навколо осі ***x*** до сполучення із фронтальною площиною проекцій Π_2, потім повернути профільну площину проекції Π_3 навколо осі ***z*** також до сполучення із фронтальною площиною проекцій Π_2, вийде наступний плоский рисунок (Рис. 1.8)

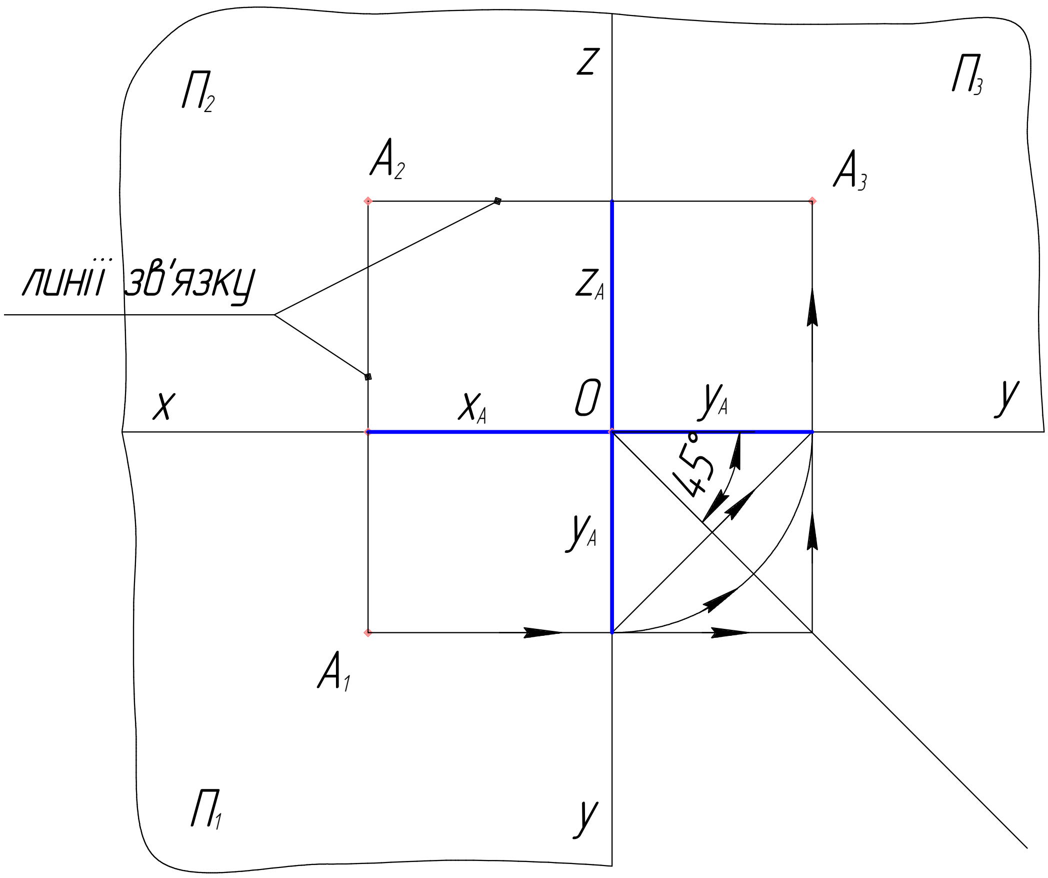


Рис. 1.9 Комплексний рисунок точки

Такий рисунок в нарисній геометрії прийнято називати эпюром Монжа.

Тема 2 Аксонометричні проекції

2.1 Основні поняття і визначення

Аксонометрія – вимірювання по осях.

Комплексні ортогональні проекції (епюри Монжа) мають ту властивість, що на кожну із площин проекцій проекціюються тільки два виміри просторової фігури. Маючи проекції на дві будь-які площини, ми одержуємо всю необхідну інформацію про кожну точку фігури. Тобто, за двома проекціями можна відновити (виготовити) зображену на комплексному рисунку фігуру. Для того, щоб фігура найкращим, тобто найбільш повним образом відображалася на комплексному рисунку, її розташовують стосовно площин проекцій так, щоб утворюючу фігуру грані, ребра, контури відображалися без викривлення. Для цього найбільш характерні грані, ребра і контури, осі окремих частин фігури повинні бути паралельними площинам проекцій. При цьому ребра і грані фігури, якщо вони перпендикулярні один одному, відтворюються тільки у двох вимірах. При такому розташуванні фігури стосовно площин проекцій комплексний рисунок не дає наочності, що дозволила б не тільки задати геометрію фігури, але й представити, як ця фігура виглядає в цілому, в об'ємі.

Для наочного об'ємного подання фігури необхідно, щоб якимсь образом на плоскому зображенні фігури відображалися всі три її виміри. Така задача вирішується, якщо розгорнути фігуру разом з пов'язаної з нею системою координат стосовно площини проекціювання, інакше кажучи, до паперу, так, щоб відображалися всі три виміри по осях проекцій. При цьому головні напрямки, тобто ребра і грані, не будуть проектуючими. Таке проекціювання фігури називається аксонометрією.

Якщо промені проекціювання в аксонометрії залишилися перпендикулярними площині рисунка, аксонометрія називається прямокутної (ортогональної). Якщо промені проекціювання спрямовані не під прямим кутом до площини рисунка - косокутної.

Розглянемо ортогональне проекціювання одиничного куба (куб з ребром довжиною, рівній одиниці) на площину, коли ребра куба не паралельні або перпендикулярні площини проекціювання.

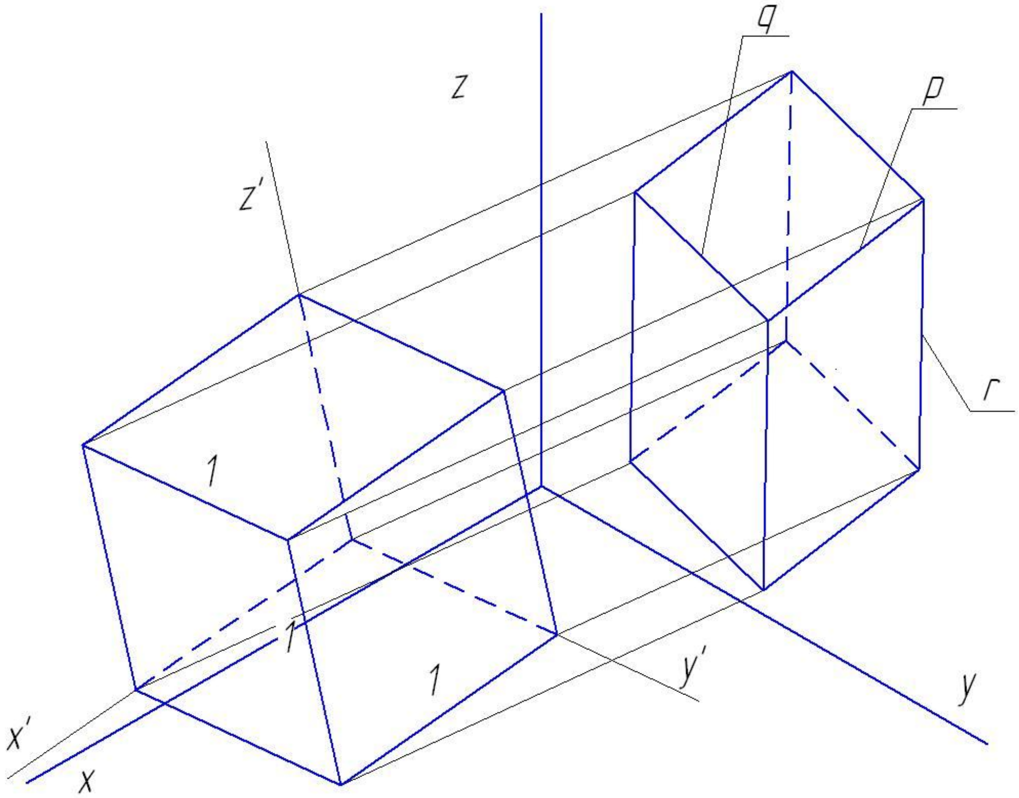


Рис. 2.1

Ми бачимо, що ребра куба, тому що вони стали відрізками загального положення, відтворені на рисунку не в натуральну величину, із викривленням. Ці викривлення чисельно дорівнюють проекціям одиничних ребер куба на площину проекціювання. Якщо їх позначити:

- уздовж осі ***x – p***
- уздовж осі ***y – q***
- уздовж осі ***z – r***

тоді координати будь-якої точки в системі координат, осі якої нахилені до площини проекціювання будуть відтворені на площині проекціювання зі значеннями

- $x' = p*x$
- $y' = q*y$
- $z' = r*z$

Залежно від того, як зорієнтована система координат, пов'язана з фігурою, стосовно площини проекціювання, коефіцієнти викривлення можуть змінюватися від 0...1.

Якщо всі три коефіцієнти викривлення рівні між собою, така аксонометрична проекція називається ізометрією. Якщо два коефіцієнти викривлення рівні між собою а третій відрізняється від перших двох, тоді маємо диметрію. Якщо всі всі коефіцієнти викривлення різні - триметрію.

При прямокутному проекціюванні для коефіцієнтів викривлення справедливе співвідношення

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2, \textit{ïðè÷îìó}$$

$$0 \le p \le 1; \qquad 0 \le q \le 1; \qquad 0 \le r \le 1.$$

$$1 \le p^2 + q^2 \le 2;$$

$$1 \le p^2 + r^2 \le 2;$$

$$1 \le q^2 + r^2 \le 2.$$

Виходячи із цих співвідношень, можна визначити коефіцієнти викривлення по осях при їх різному положенні стосовно площини проекціювання.

2.2 Прямокутні аксонометричні проекції

2.2.1 Прямокутна ізометрія

Всі три осі пов'язаної з фігурою системи координат ***Oxyz*** нахилені до аксонометричної площини проекціювання під одним кутом. На площині ці осі зображуються під кутом 120^0 друг до друга. Стосовно площини проекціювання кут осей координат складе $35^0 16'$. Т. я. ***p=q=r***, коефіцієнти викривлення по осях будуть

$$3p^2 = 2; \qquad p^2 = \frac{2}{3}; \qquad p \approx 0.86$$

На практиці, тому що аксонометричні проекції не використовуються для відновлення геометрії фігури, а вирішують тільки задачу її візуалізації, використовують набагато більш прості для виконання побудов коефіцієнти викривлення по осях ***p=q=r=1***.

При цьому ізометричне зображення фігури виявляється збільшеним стосовно її реального зображення в ***1/0,86=1,22*** рази.

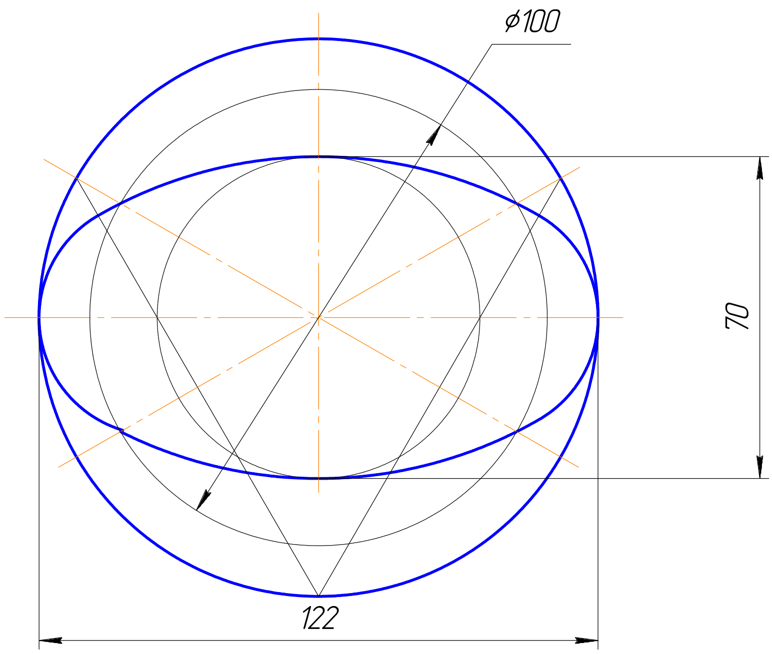
<u>Побудова плоскої фігури в ізометрії:</u>

<u>Побудова ізометричних проекцій кола</u>

Тому що коефіцієнти викривлення по осях рівні, форма еліпсів, отриманих з кіл на гранях, паралельних площинам проекцій, будуть однаковими. При цьому, великий діаметр еліпса буде ***Dб = 1,22D***, малий діаметр ***Dм=0,7D***, де ***D*** – діаметр кола, яке проекціюється.

Для орієнтації осей еліпсів в ізометричній проекції діє правило: вісь малого діаметра еліпса паралельна осі координат, відсутньої на площині розташування кола. Вісь великого діаметра перпендикулярна осі малого діаметра.

Звичайно при побудові еліпс заміняють овалом



2.2.2 Прямокутна диметрія

Розташування осей координат на аксонометричній площині в прямокутній диметрії наступне:

Oz – вертикальна;

Ox – під кутом до горизонталі $7^{0}10'$;

Oy – під кутом $41^{0}25'$

Коефіцієнти викривлення при цьому будуть ***p=q=0.94; r=0.47.*** На практиці використовують коефіцієнти ***p=q=1; r=0.5.*** Коефіцієнти збільшення зображення при цьому будуть по осях ***1/0,94=1,064***.

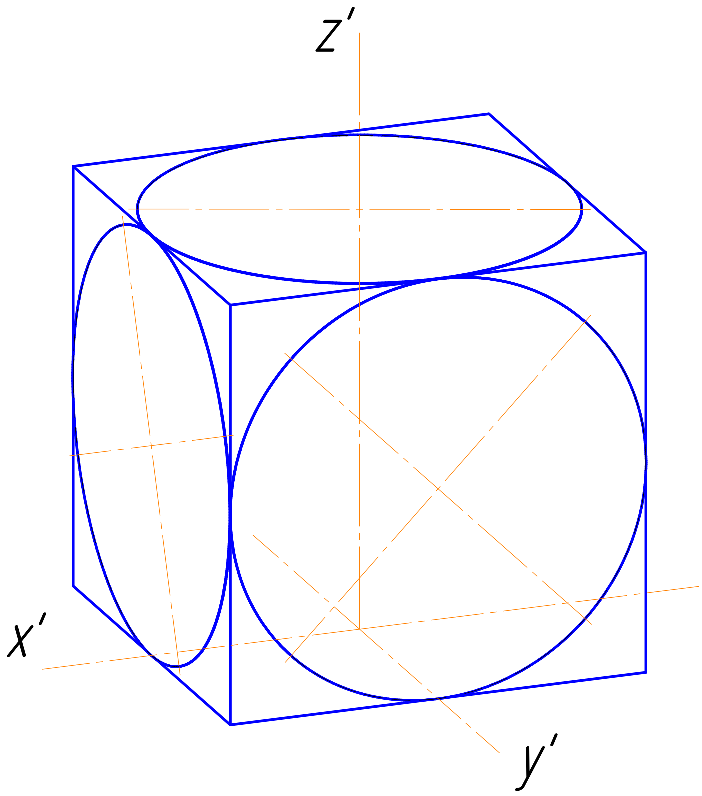
Необхідний напрямок осі ***Ox*** дає побудова ухилу 1:8, осі ***Oy*** – ухилу 7:8.

<u>Побудова кола в прямокутній диметрії</u>

У площині ***x'Oz'*** коло стає еліпсом з діаметрами

Dб = 1,06d; Dм = 0.95d

У площинах ***x'Oy'*** й ***y'Oz'*** еліпси будуть мати діаметри ***Dб = 1,06d; Dм = 0.35d.***



Z'
X'
Y'

Тема 3 Положення прямої відносно площин проекцій. Прямі загальної і окремого положення. Довжина відрізка загального положення. Кути нахилу відрізка до площин проекцій. Взаємне розташування точки і прямої, двох прямих. Сліди прямої.

3.1 Пряма загального положення

В аналітичній геометрії рівняння прямої має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

У нарисній геометрії на комплексному рисунку пряму задають її проекціями (Рис. 3.1).

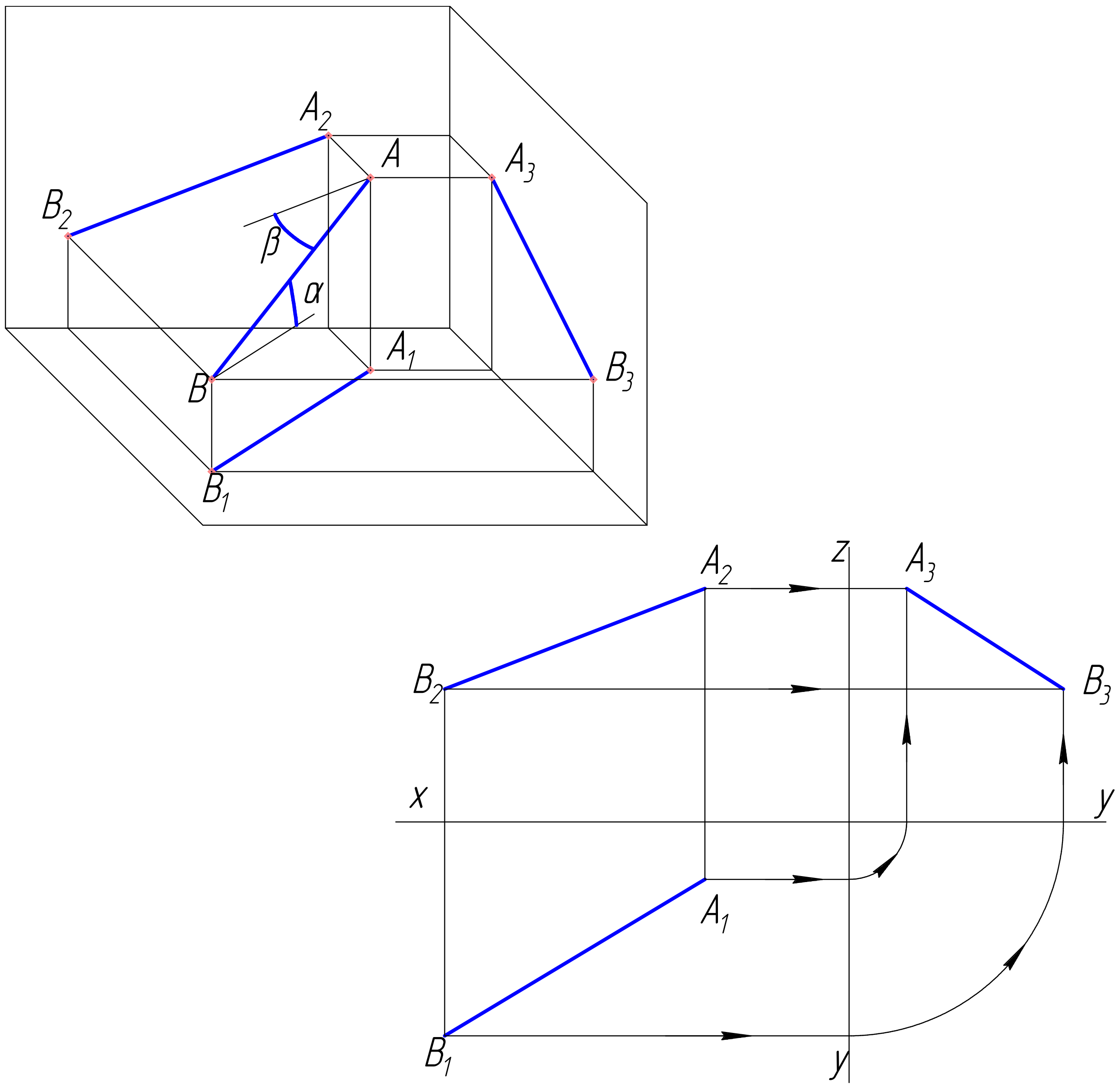


Рис. 3.1 Проекційний рисунок відрізка прямої

Властивості проекцій відрізка прямої:

- пряма $\boldsymbol{AB}$ – має прямі проекції $\boldsymbol{A_1B_1}$, $\boldsymbol{A_2B_2}$ і $\boldsymbol{A_3B_3}$;
- проекції прямої не більше самої прямої

$$A_1B_1 \le AB; \qquad A_2B_2 \le AB; \qquad A_3B_3 \le AB;$$

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos\alpha; \qquad A_2B_2 = AB \cdot \cos\beta; \qquad A_3B_3 = AB \cdot \cos\gamma.$$

Якщо кути $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ між прямою і площинами проекцій не дорівнюють нулю і не рівні 90^o, маємо пряму загального положення.

3.2 Прямі лінії окремого положення

1. Пряма, паралельна горизонтальній площини проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ ($\boldsymbol{AB} \parallel \boldsymbol{\Pi_1}$), інакше – яка лежить в площині, паралельній $\boldsymbol{\Pi_1}$, називається – ***горизонталь*** (Рис.).

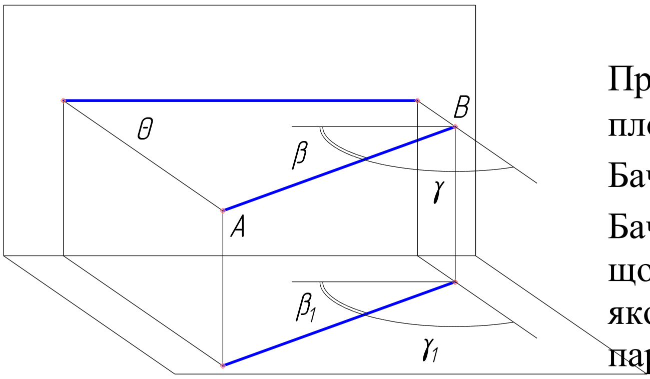


Рис. 3.2 Горизонталь

Проведемо через пряму $\boldsymbol{AB}$ площину $\boldsymbol{\Theta} \parallel \boldsymbol{\Pi_1}$.

Бачимо, що $\boldsymbol{A_2B_2} \parallel \boldsymbol{x_{1,2}}$.

Бачимо також, що $\boldsymbol{A_1B_1 = AB}$, тому що маємо прямокутник $\boldsymbol{A_1B_1AB}$, у якого протилежні сторони рівні і паралельні.

Тобто, говорять, що лінія $\boldsymbol{AB}$ проекціюється на $\boldsymbol{\Pi_1}$ у натуральну величину. Кут $\boldsymbol{\beta}$ між прямою $\boldsymbol{AB}$ і фронтальною площиною проекцій $\boldsymbol{\Pi_2}$, а також кут $\boldsymbol{\gamma}$ між прямою $\boldsymbol{AB}$ і профільною площиною проекцій $\boldsymbol{\Pi_3}$ проекціюється в натуральну величину (Рис. 3.3).

2. ***Фронталь*** (фронтальна пряма) – пряма, паралельна фронтальній площині проекцій $\boldsymbol{\Pi_2}$. Фронталь має фронтальну проекцію, рівну натуральній величині прямої. Кути між фронталлю, горизонтальною і профільною площинами на фронтальній площині проекцій відображаються в натуральну величину;

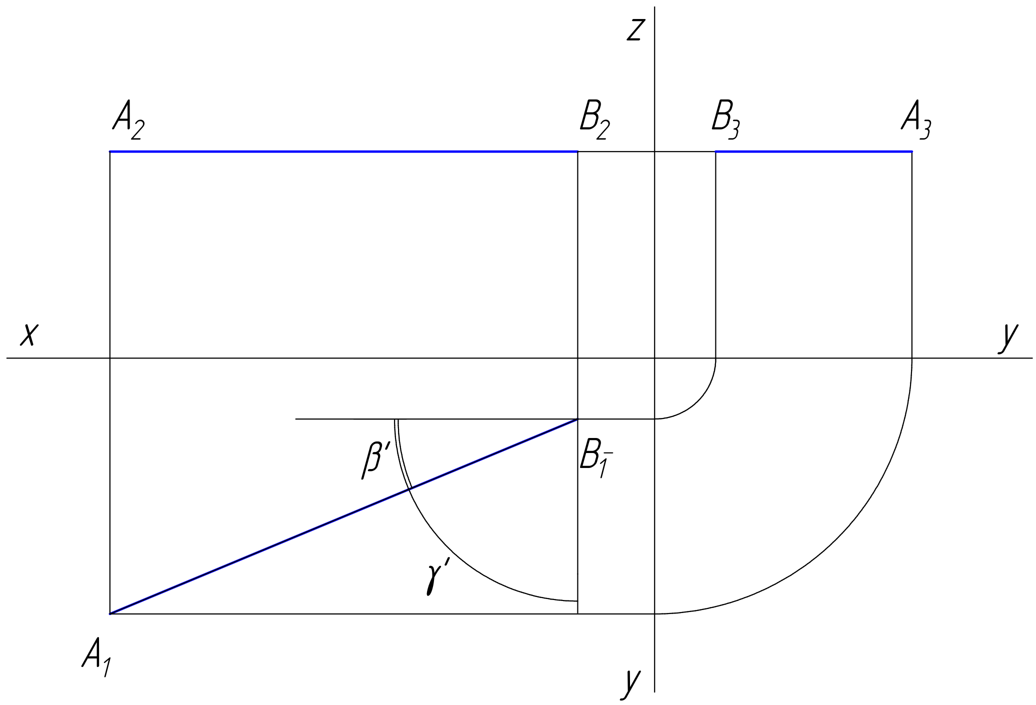


Рис. 3.3 Проекції горизонталі

3. ***Профільна пряма*** - пряма, паралельна профільній площини проекцій ***П*₃**. Профільна пряма має профільну проекцію, рівну натуральній величині прямої. Кути між профільною прямою, горизонтальною і фронтальною площинами на профільну площину проекцій проекціюються в натуральну величину.
4. Лінія, паралельним двом площинам проекцій, буде перпендикулярною третій площини проекцій. Її проекція на цю площину буде точкою. Така лінія називається проектуючою до відповідної площини (Рис. 3.4).

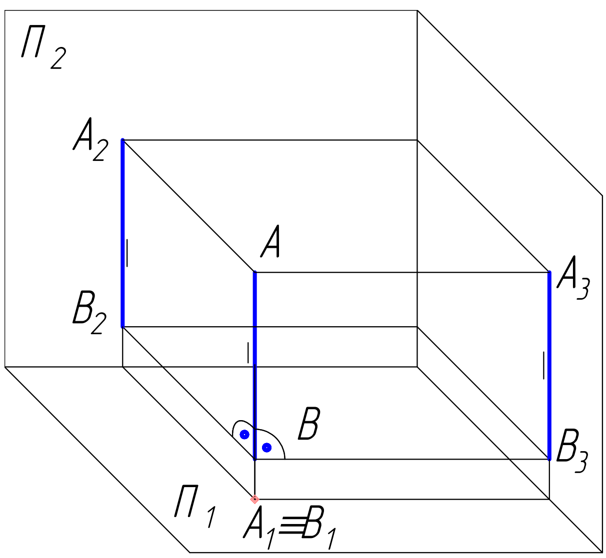


Рис. 3.4 горизонтально проектуюча пряма

Тут лінія ***AB*** – горизонтально проектуюча.

5. Якщо є дві проекції лінії, що представляють собою відрізки, які збігаються з лінією зв'язку, (тобто ⊥ осі) і третьої проекції немає, вихідна лінія не визначена і може бути будь-якої форми (Рис.).

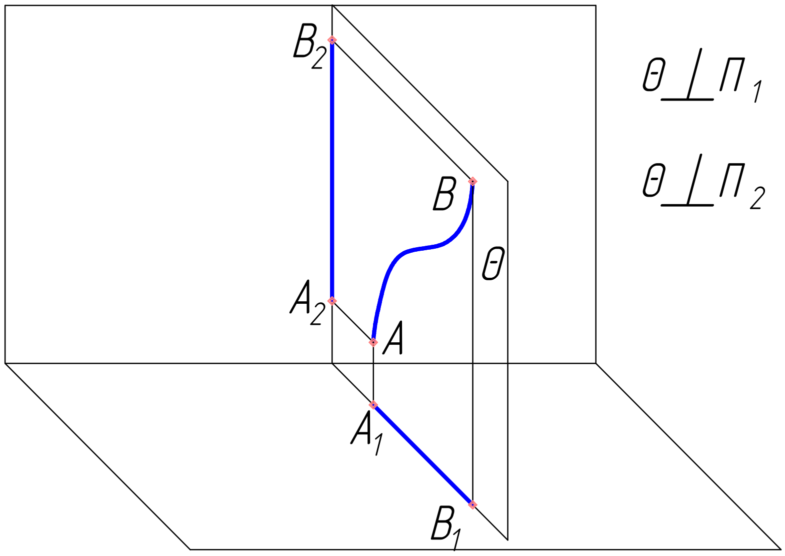


Рис. 3.5

3.3 Довжина відрізка загального положення. Кути нахилу прямої до площин проекцій

Визначення натуральної величини відрізка за його проекціями на площини координат засновано на побудові прямокутного трикутника, у якому гіпотенуза, це шукана натуральна довжина відрізка, а катети, один - це одна із проекцій відрізка на площину проекцій, інший катет – різниця висот кінців відрізка на іншій площині проекцій (Рис. 3.6).

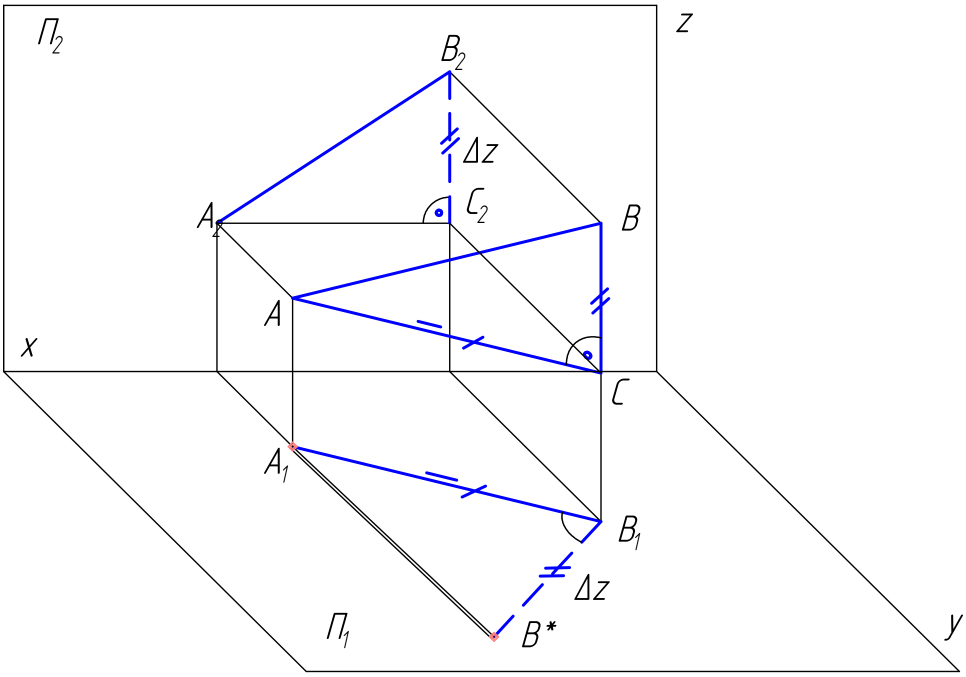


Рис. 3.6 Визначення натуральної довжини відрізка прямій

На проекційному рисунку ці елементи дадуть необхідні побудови (Рис. 3.7):

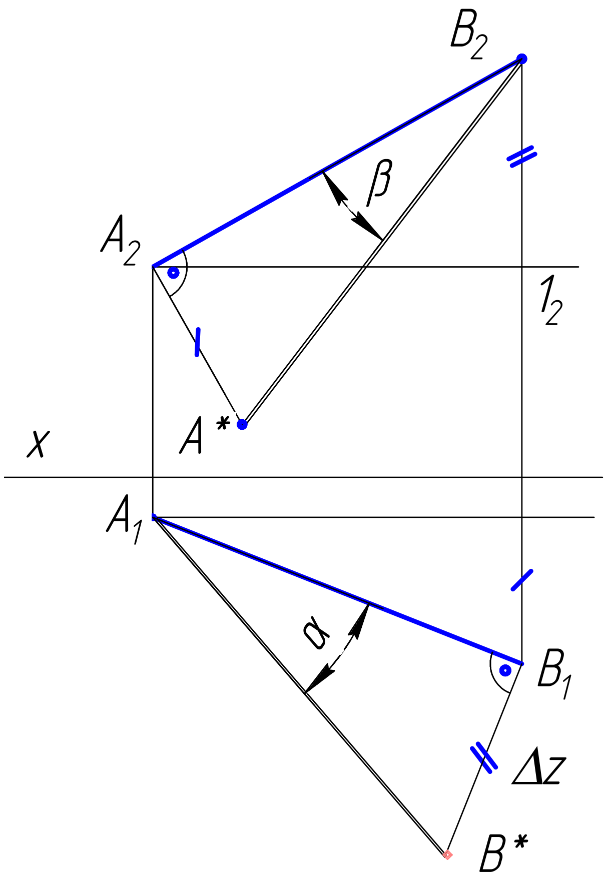


Рис. 3.7 Побудова, що дає натуральну довжину відрізка прямій

$BC = B_2C_2$ т.к.

$CC_2 \perp П_2$; $BB_2 \perp \Pi_2$;

$BC \perp \Pi_1$; $B_2C_2 \perp \Pi_1$

$B_2B \parallel C_2C$; $B_2C_2 \parallel BC$

Аналогічно - $AC = A_1B_1$

AB – гіпотенуза ***ΔABC***, де ***AC*** і ***BC*** – катети.

$B_1B^* = BC = B_2C_2$

$A_1B^* = AB$

$B_2A^* = AB$

3.4 Кути між прямою і площинами проекцій

Кут між прямою загального положення й площиною проекцій може бути не більше 90^0 , тобто гострий або прямій (Рис. 3.8).

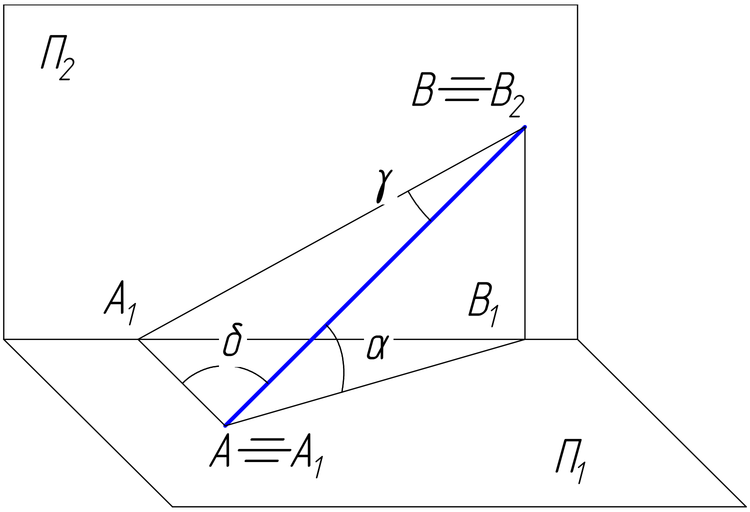


Рис. 3.8 Кути між прямою і площинами проекцій

Сума кутів між прямою і двома будь-якими площинами проекцій не більше 90^0.

$$\alpha + \beta \le 90^0$$

Для ліній окремого положення сума кутів:

горизонталі $\beta + \gamma = 90^0$

фронтали $\alpha + \gamma = 90^0$

профільної $\alpha + \beta = 90^0$

3.5 Сліди прямої

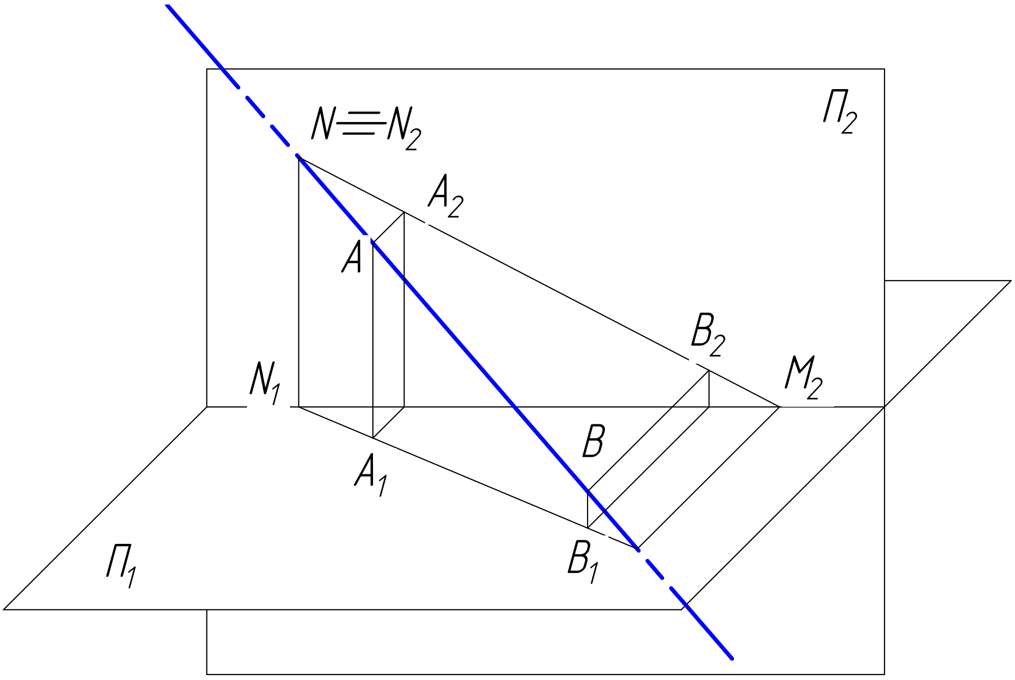


Рис. 3.9 Сліди прямої

Сліди прямій, це точки перетину прямій з площинами проекцій (Рис. 3.10).

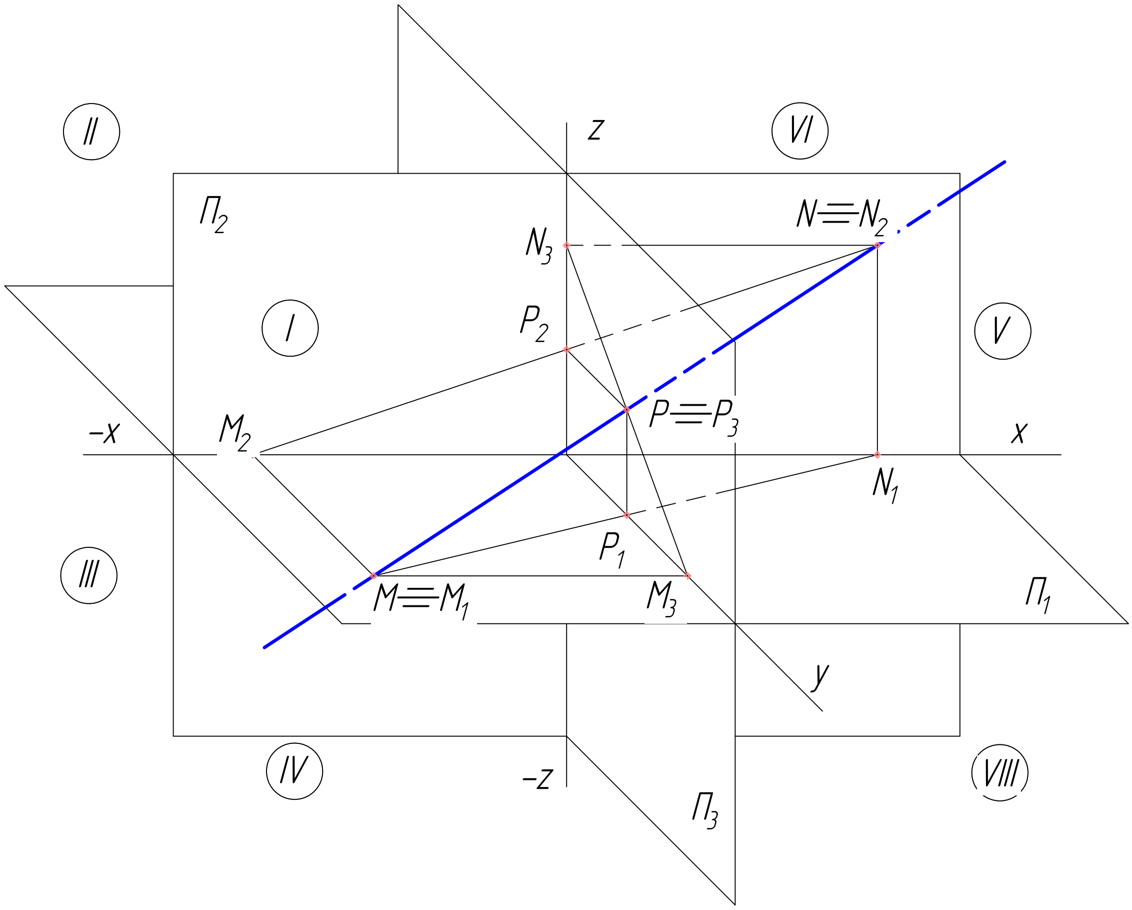


Рис. 3.10 Сліди прямої в октантах простору

Правило побудови слідів прямої (Рис. 3.):

– Для знаходження фронтального сліду $\boldsymbol{N}$ прямої $\boldsymbol{AB}$ потрібно продовжити її горизонтальну проекцію $\boldsymbol{A_1B_1}$ до перетину з віссю $\boldsymbol{x_{12}}$. Отримана точка перетину буде горизонтальною проекцією $\boldsymbol{N_1}$ сліду прямої $\boldsymbol{AB}$ на фронтальній площині проекцій. Фронтальна проекція фронтального сліду $\boldsymbol{N_2}$ найдеться на перетині продовження фронтальної проекції $\boldsymbol{A_2B_2}$ лінії $\boldsymbol{AB}$ з лінією зв'язку, проведеної з горизонтальної проекції $\boldsymbol{N_1}$ фронтального сліду.

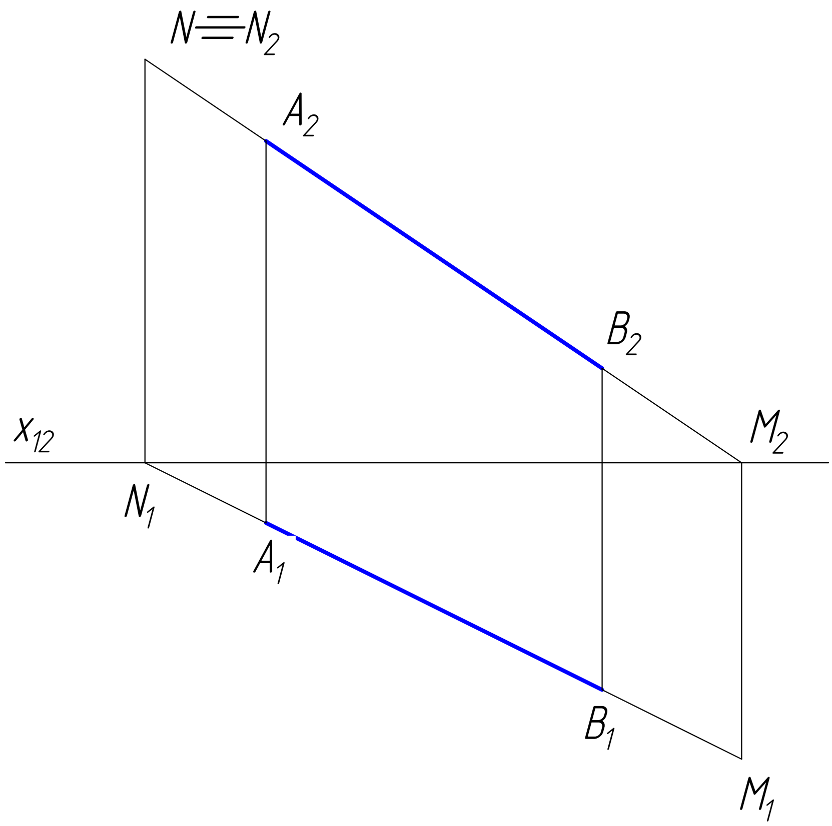


Рис. 3.11 Побудова слідів прямої

Аналогічно,

- для знаходження горизонтального сліду ***M*** прямої ***AB*** потрібно продовжити її фронтальну проекцію $\boldsymbol{A_2B_2}$ до перетину з віссю $\boldsymbol{x_{12}}$. Отримана точка перетину буде фронтальною проекцією $\boldsymbol{M_2}$ сліду прямої ***AB*** на фронтальній площині проекцій. Горизонтальна проекція фронтального сліду $\boldsymbol{M_1}$ найдеться на продовженні горизонтальної проекції $\boldsymbol{A_1B_1}$ лінії ***AB*** по лінії зв'язку.

Сліди прямої, що проходити через IV, I, V, VI октанти (Рис. 3. 12).

Якщо пряма паралельна площини проекцій, вона не має на ній сліду.

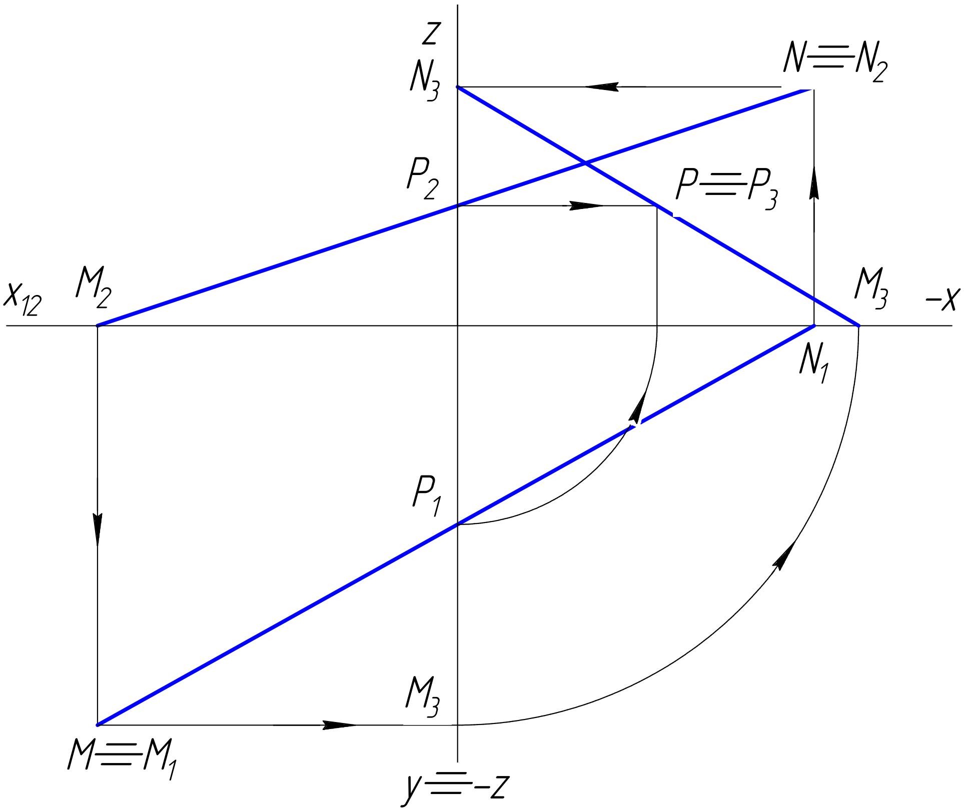


Рис. 3. 12 Комплексний рисунок прямої, що проходить через IV, I, V, VI октанти

3.6 Взаємне положення точки і прямої

Якщо точка лежить на прямій, її однойменні проекції належать однойменним проекціям прямої. Якщо дві будь-які проекції точки лежать на двох таких же проекціях прямої, тоді точка належить прямій. На малюнку 3.13 С належить прямій ***AB***.

У загальному випадку, якщо точка належить будь-якій фігурі - лінії або поверхні, тоді проекції точки лежать на відповідних проекціях фігури.

Одна проекція точки може виявитися такою, що належить тій же проекції прямої, однак, якщо будь-яка інша проекція точки не лежить на аналогічній проекції прямої, тоді точка не належить прямій (Рис. 3. 13, Рис. 3.14).

Приклади:

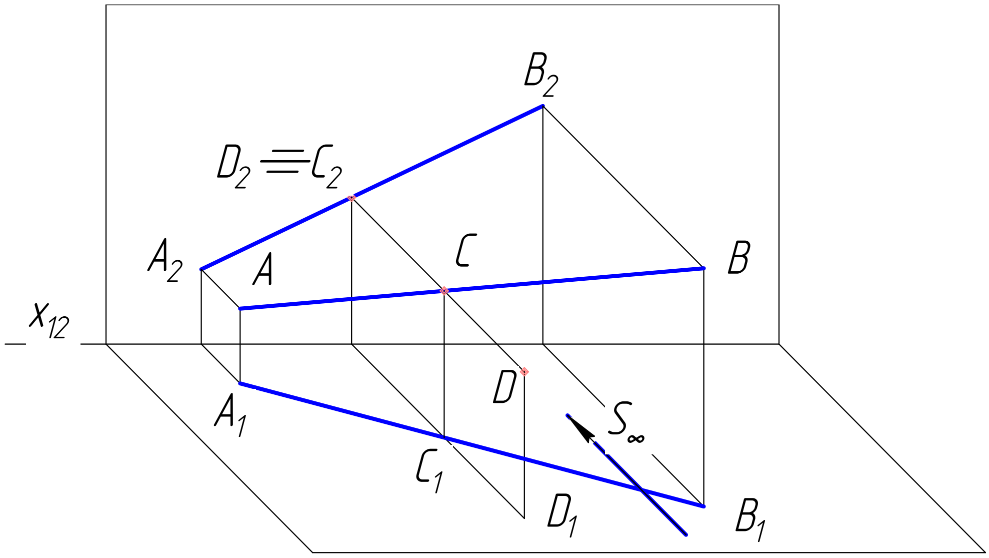


Рис. 3. 13 Точка перед прямою

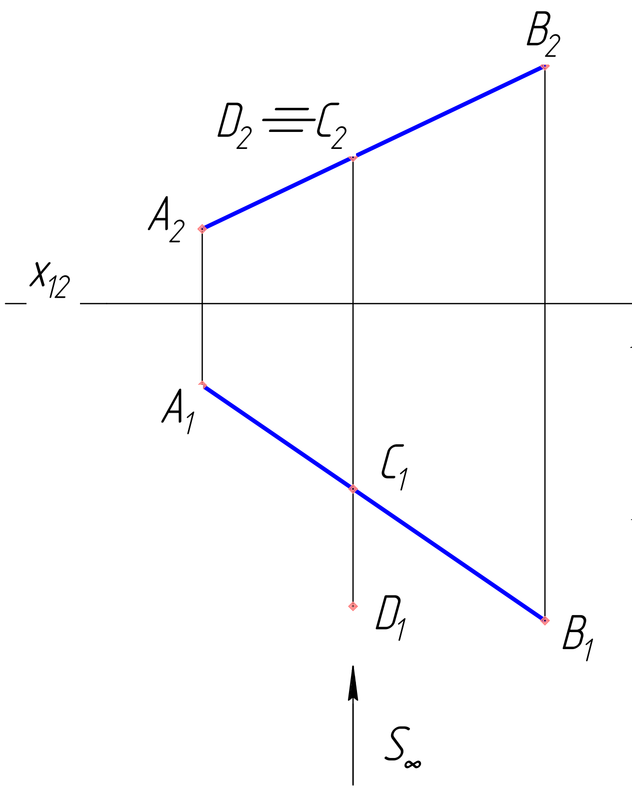


Рис. 3.14 Точка перед прямою на комплексному рисунку

На фронтальній площині проекцій (Рис. 3. 13, Рис. 3.14) ***D*** лежить на фронтальній проекції лінії ***AB*** ($D_2 \in A_2B_2$), але на горизонтальній площині проекцій $D_1 \notin A_1B_1$. Звідси, точка ***D*** не належить лінії ***AB.*** На лінії ***AB*** лежить (Рис. 3. 13, Рис. 3.14) точка ***C*** і її фронтальна проекція C_2 збігається із фронтальною проекцією D_2 точки ***D***. Однак, горизонтальні проекції C_1 й D_1 не збігаються, отже, ці точки не збігаються в просторі. ***D***, дивлячись у напрямку фронтальної площини проекцій, лежить перед ***C.***

Точки, проекції яких збігаються на одній площині проекцій і не збігаються на іншій площині, називаються конкуруючими.

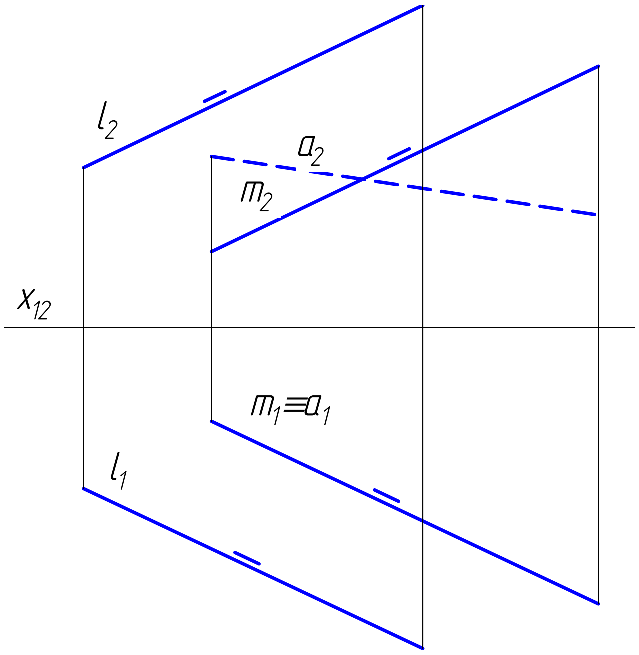
3.7 Взаємне положення двох прямих

У випадку загального положення двох прямих друг стосовно друга, кути між проекціями цих прямих можуть приймати будь-яке значення від 0^0 до 90^0.

Існують і мають корисні властивості для розв’язання задач нарисної геометрії окремі взаємні положення прямих:

3.7.1 Взаємно паралельні прямі

Якщо дві будь-які проекції двох прямих паралельні, тоді прямі паралельні в просторі.



Прямі ***l*** і ***m*** паралельні (***l*** || ***m***).

Прямі ***l*** й ***a*** непаралельні, тобто схрещуються (***l*** $\dot{-}$ ***a***), незважаючи на те, що горизонтальні проекції ліній ***l*** й ***a*** паралельні. Лінії ***l*** і ***a*** непаралельні тому що проекції цих лінії на фронтальну площину непаралельні.

Рис. 3.15 Паралельні прямі

3.7.2 Прямі, які перетинаються

Якщо лінії[1] перетинаються в просторі, тоді проекції точок перетину ліній є точками перетину проекцій ліній на площинах проекцій. Інакше, лінії перетинаються в просторі, якщо на двох будь-яких площинах перетинаються проекції цих ліній (Рис. 3.16).

---

[1] - строго кажучи, це відноситься до будь-яких прямих або кривих линій

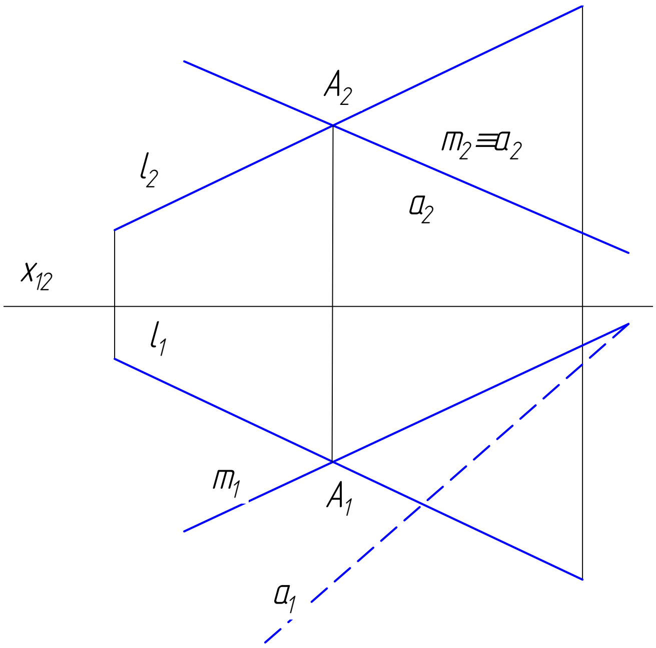


Рис. 3.16 Прямі, які перетинаються і перехресні прямі

Прямі l й m перетинаються (l⌒m) в точці A.

Прямі l й a не перетинаються. Ці прямі перехресні.

Для проекційного рисунка умовою перетину двох ліній є знаходження точок перетину проекцій цих ліній на двох будь-яких площинах проекцій на одній лінії зв'язку.

3.7.3 Перехресні прямі

Перехресні прямі не перетинаються і не паралельні одна одній в просторі. Точки перетину проекцій двох перехресних прямих на двох будь-яких площинах проекцій не лежать на одній лінії зв'язку (Рис. 3.16).

3.7.4 Проекції плоских кутів

Розглянемо прямокутне проекціювання деякого довільного кута $\angle \boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{\alpha}$ на площину $\boldsymbol{\Pi}$ (Рис. 3.17)

Промені проекціювання $\boldsymbol{S_\infty}$, перпендикулярні площині проекцій, утворять зі сторонами заданого кута проектуючі площини ***Θ і Σ***, на поверхні яких розташовані сторони ∠ABC.

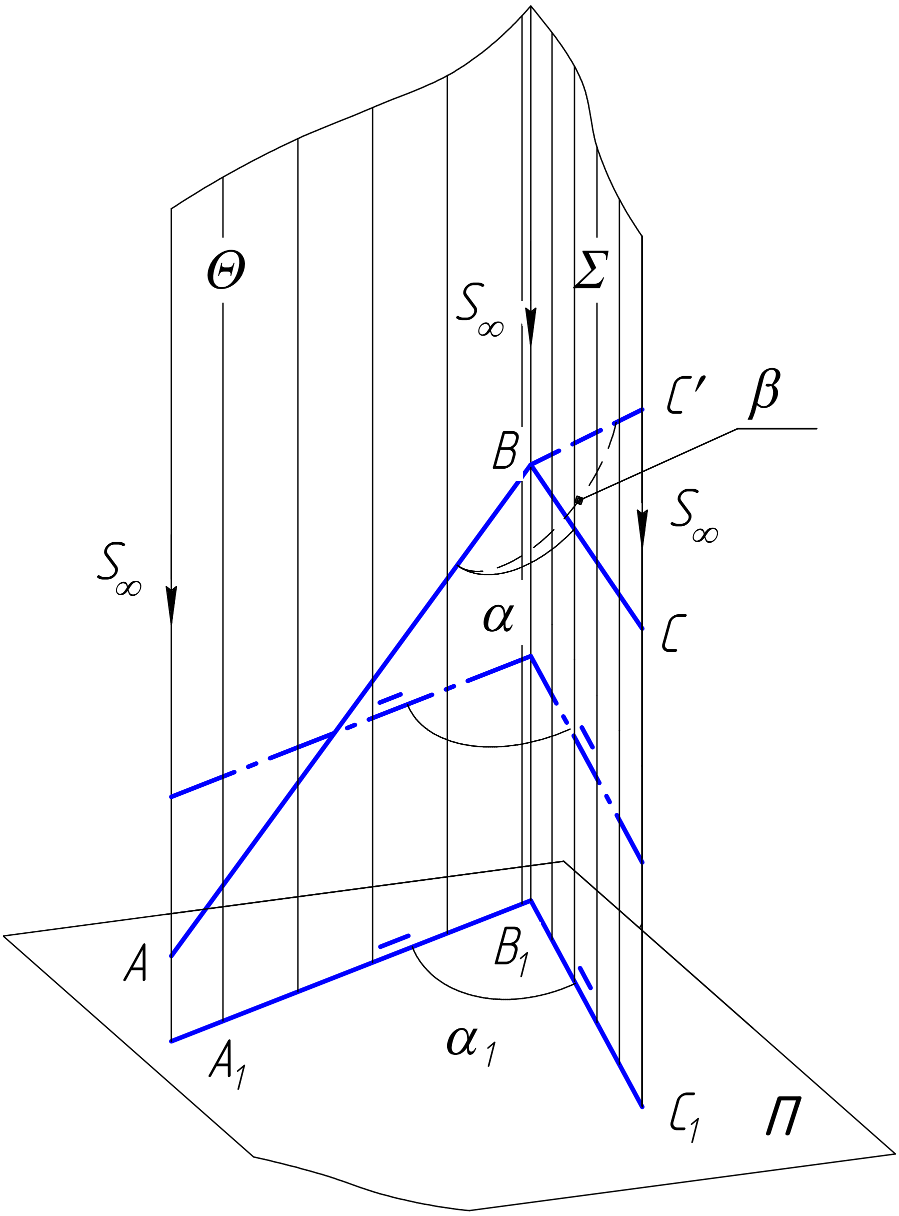


Рис. 3.17 Паралельні проекції кутів

Припустимо, заданий $\angle \boldsymbol{ABC}$ гострий ($\angle \boldsymbol{ABC}<\boldsymbol{90^0}$) і його проекція на $\boldsymbol{\Pi_1}$ також менше 90^0. У загальному випадку $\angle \boldsymbol{ABC}\neq\angle \boldsymbol{A_1У_1C_1}$ ($\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\alpha_1}$). Проекція кута буде дорівнювати куту в тому випадку, коли сторони кута будуть паралельні площини проекцій ($\angle \boldsymbol{A'B'З'}=\angle \boldsymbol{A_1У_1C_1}$). Якщо ***C*** перемістити уздовж променя проекціювання на деяку відстань від заданого положення, наприклад, у положення C'. Тоді кут зміниться і придбає значення β. Допустимо, кут β виявився тупим. Однак проекція кута залишилася тією ж. Таким чином, ту саму проекцію можуть мати різні кути, причому, як гострі, так і тупі. У загальному випадку кути величиною від 0^0 до 180^0 можуть мати паралельну проекцію на площину зі значенням від 0^0 до 180^0. Проекція гострого кута залежно від положення його сторін стосовно площини проекцій може виявитися тупим кутом і проекція тупого кута гострим.

Особливе значення в нарисній геометрії має проекціювання прямого кута.

Якщо одна зі сторін прямого кута паралельна площині проекцій, то ортогональна проекція прямого кута на цю площину буде прямим кутом (Рис. 3.18).

Доказом цього твердження може, наприклад, бути наступне:

Нехай сторона BP прямого кута ABC паралельна площини проекціювання Π ($BP \| \Pi$). Вона утворить зі своєю проекцією B_1C_1 площину Δ, перпендикулярну площині проекціювання Π.

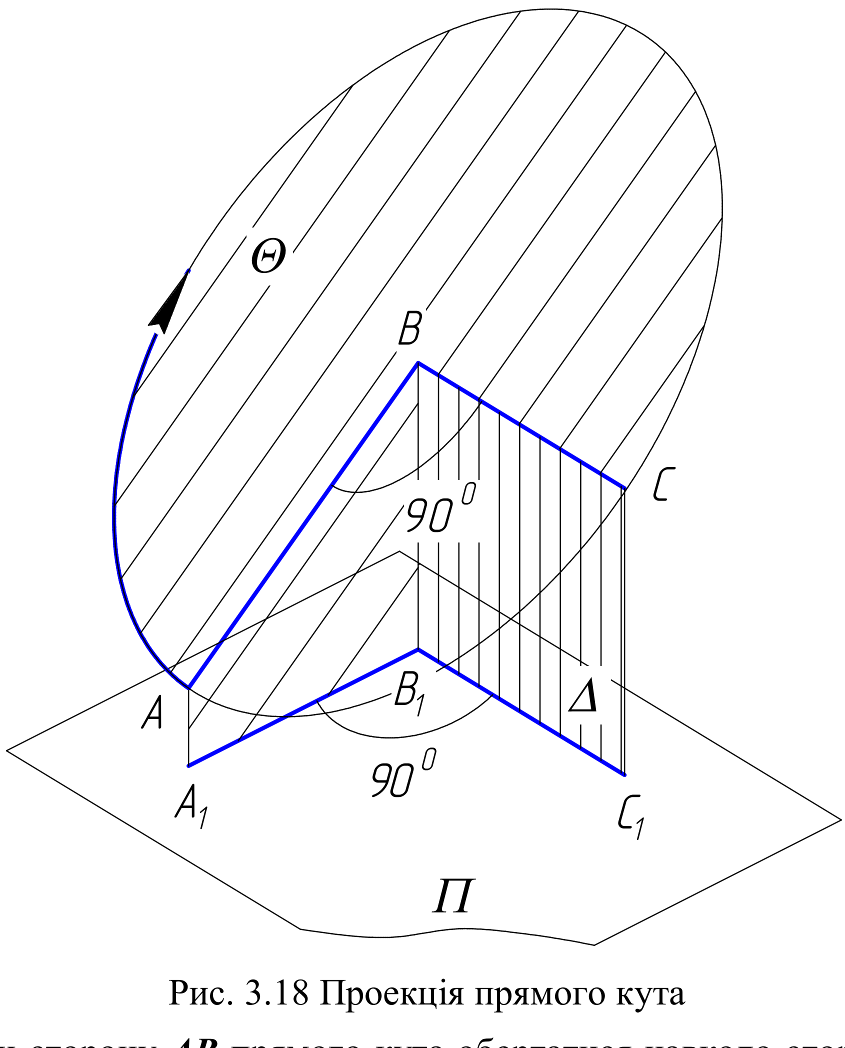


Рис. 3.18 Проекція прямого кута

Якщо змусити сторону AB прямого кута обертатися навколо сторони BP, вона утворить площину Θ, що буде перпендикулярна осі обертання BP, отже, перпендикулярна паралельній їй площини Π ($\Theta \perp \Pi$). Площина Θ буде також перпендикулярна площині Δ, якій належить перпендикуляр BP (вісь обертання

AB) до площини ***Θ***. Таким чином, площини ***Δ*** і ***Θ*** утворять двогранний прямий кут. При перетині прямого двогранного кута площиною, перпендикулярною обом площинам, що утворять двогранний кут, а це площина ***П***, буде отриманий прямий лінійний кут як міра двогранного кута. Таким чином, при будь-якому положенні сторони ***AB*** прямого кута ***ABC***, якщо сторона ***BP*** паралельна площині проекцій ***П***, її проекція $A_1У_1$, що лежить на лінії перетину площини ***Θ*** із площиною ***П***, утворить із проекцією B_1C_1 сторони ***BP*** прямий кут.

На проекційному рисунку, якщо проекція кута, одна зі сторін якого є лінією рівня, є прямим кутом, тоді сам кут також прямій (Рис. 3.19).

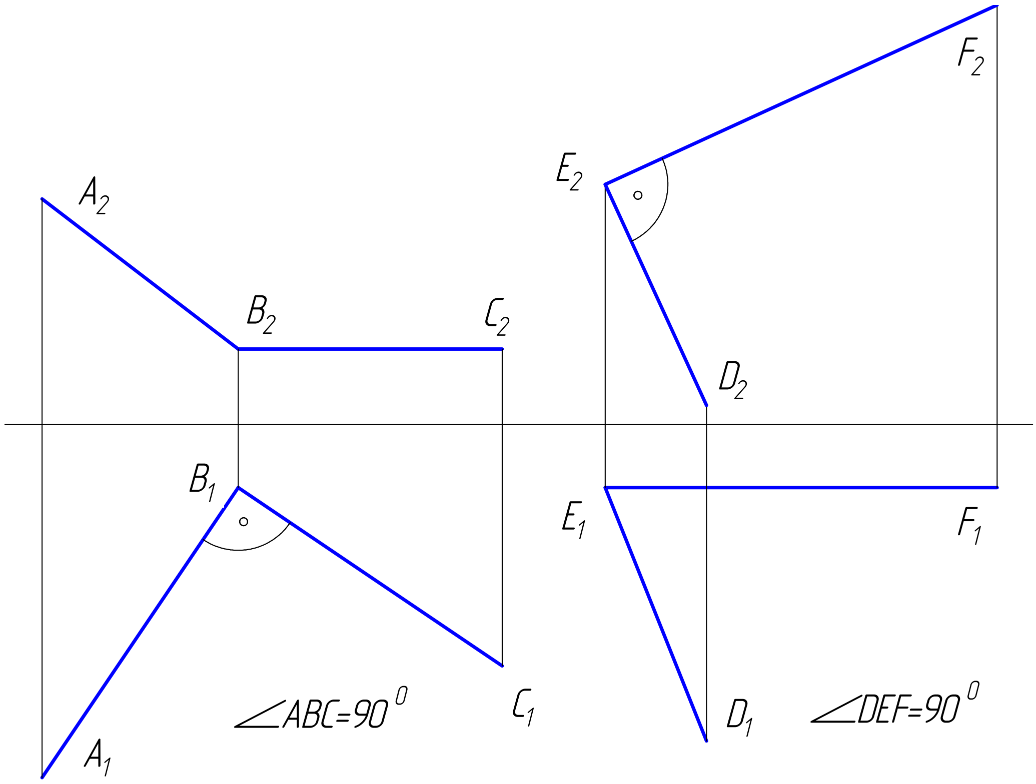


Рис. 3.19 Прямий кут на комплексному рисунку

Якщо жодна сторона прямого кута не паралельна площині проекцій, проекція прямого кута на цю площину проекцій може приймати будь-яке значення від 0^0 до 180^0.

Тема 4 Площина. Точка і пряма на площині. Головні лінії площини. Пряма, паралельна площини.

4.1 Завдання площини на рисунку

Площина, це поверхня, що задається рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Це поверхня першого порядку, тому що змінні ***x, y, z*** присутні в рівнянні поверхні в першому ступені.

Положення площини може бути задано:

1. трьома точками (Рис. 4.1);

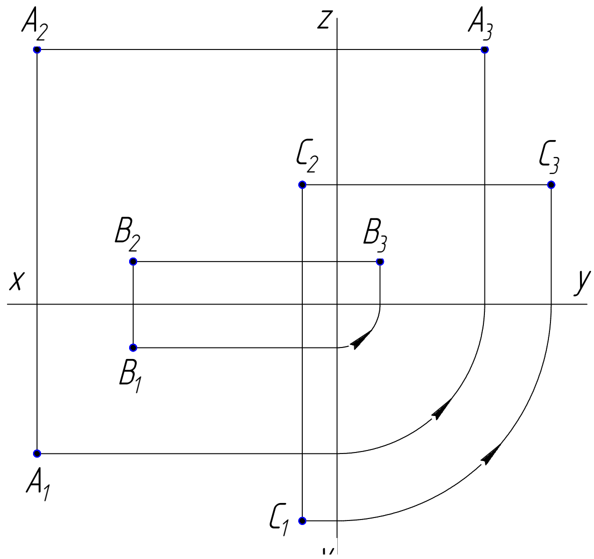


Рис. 4.1 Завдання площини трьома точками

2. прямою і точкою, яка не належить цій прямій (Рис. 4.2);

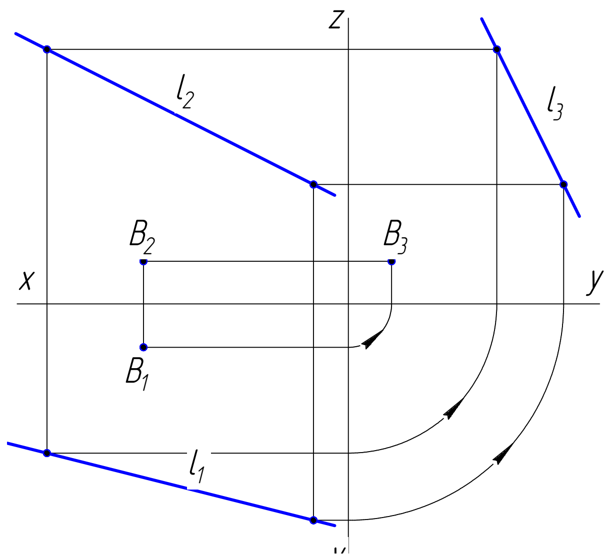


Рис. 4.2 Завдання площини точкою й прямою

3. двома прямими, які перетинаються (Рис. 4.3);

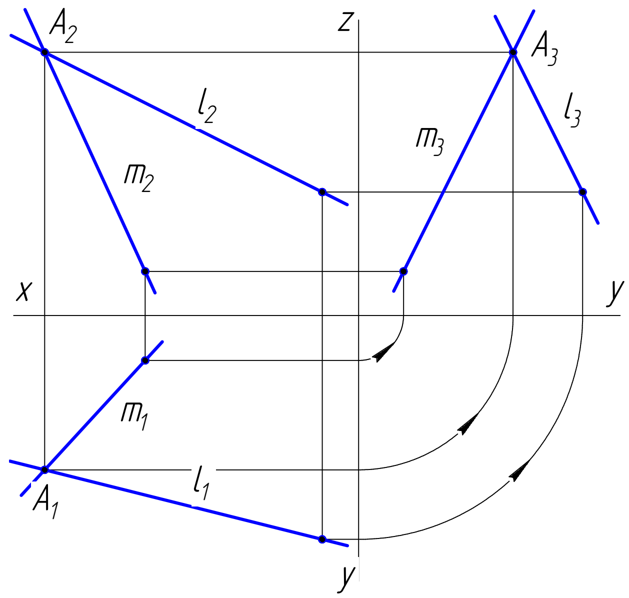


Рис. 4.3 Завдання площини двома прямими, які перетинаються

4. двома паралельними прямими (Рис. 4.);

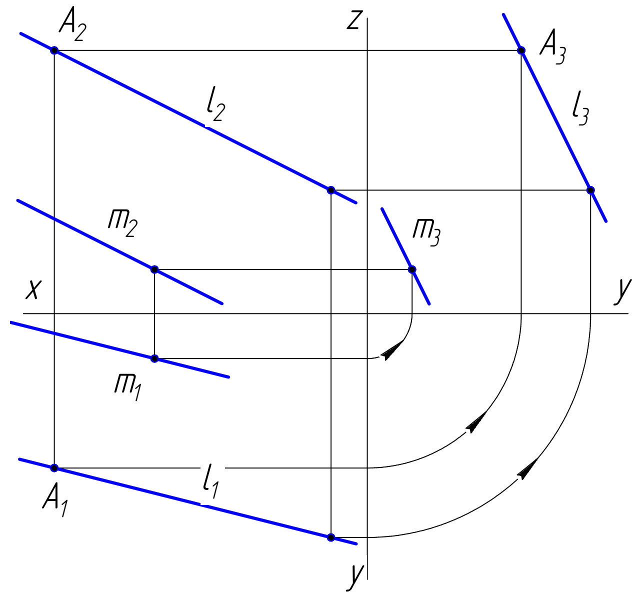


Рис. 4.6 Завдання площини двома паралельними прямими

5. відсіком площини (будь-яким многокутником) (Рис. 4.).

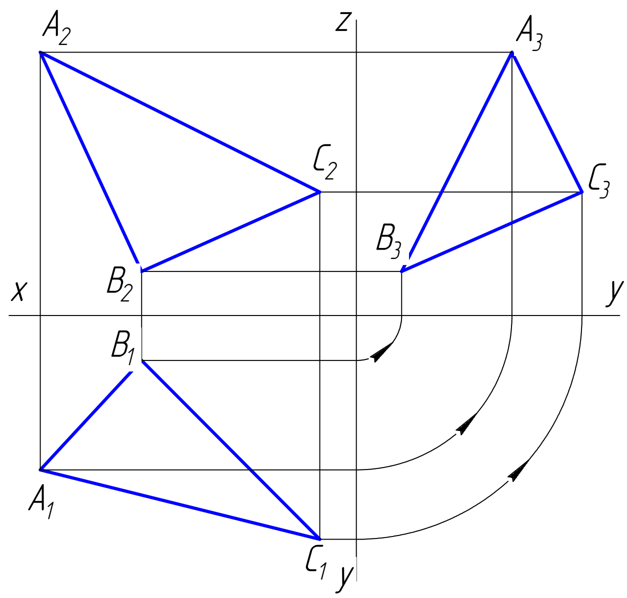


Рис. 4.6 Завдання площини відсіком (трикутником)

Базовий спосіб завдання площини - трьома точками. Інші - похідні, тому що можуть бути побудовані за заданими трьома точками.

У нарисній геометрії для багатьох задач зручним є завдання площини слідами її перетину із площинами проекцій. **Сліди площини**, це лінії перетину площини із площинами проекцій (Рис. 4.).

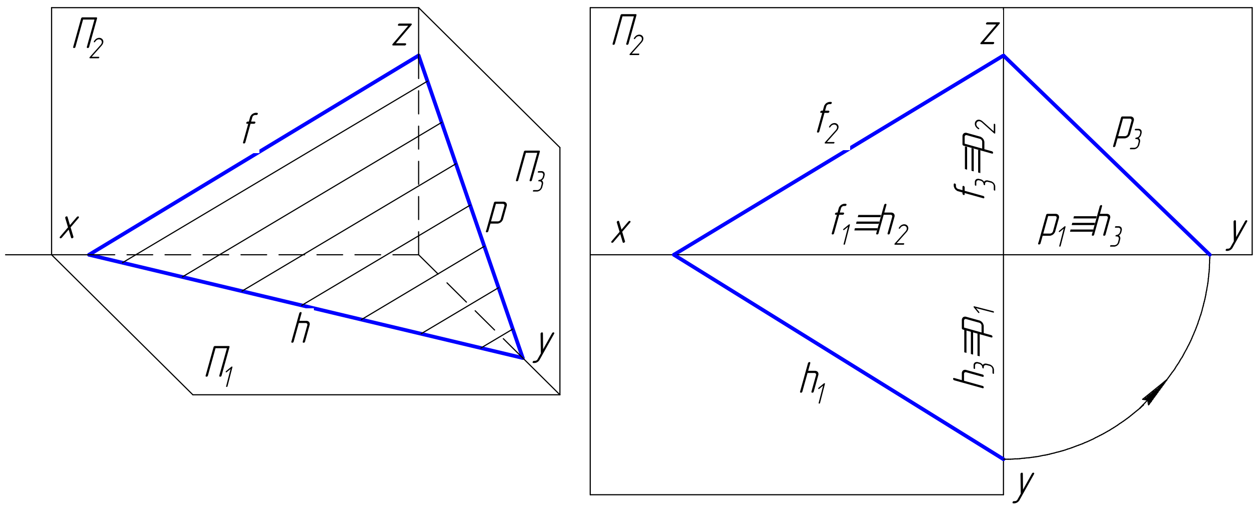


Рис. 4.7 Завдання площини слідами

Площина загального положення має три сліди: на горизонтальній, на фронтальній і на профільній площині проекцій. Два будь-яких сліди площини однозначно визначають її в заданій системі проекціювання. За заданими двома слідами площини може бути побудований третій слід.

4.2 Площини окремого положення

4.2.1 Проектуючі площини

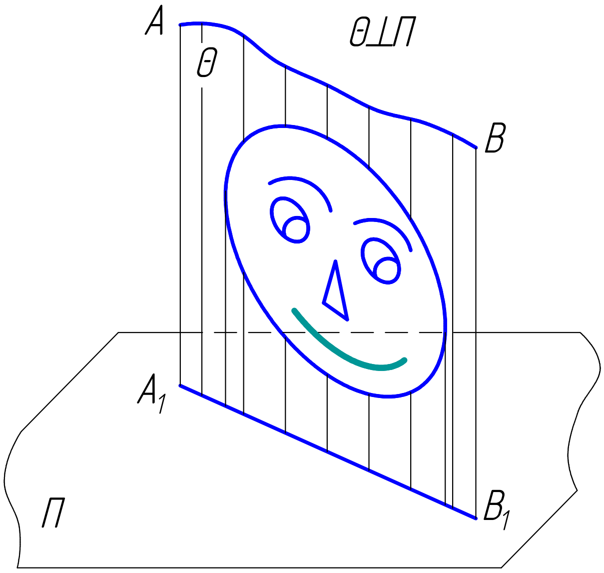


Рис. 4.8 Проектуюча площина

Площина, перпендикулярна площині проекції, у проекції на цю площину вироджується в пряму. У цю лінію вироджуються разом із площиною й всі фігури, що належать цій площині. Така площина називається проектуючою (Рис. 4.).

Властивість проектуючої площини збирати у свій слід всі належні їй фігури **називається** збиральною властивістю.

Линия, у яку вироджується проектуюча площина, є слідом площини на площину проекції.

a) горизонтально проектуюча площина -

   це площина, перпендикулярна горизонтальній площині проекцій (Рис. 4.).

Тут ***h*** – горизонтальний слід площини, заданої прямими ***AB*** і ***AC***, які перетинаються. Інакше ця площина також може бути задана своїми слідами ***h*** і ***f***.

NB[1] – фронтальний і профільний сліди горизонтально проектуючої площини перпендикулярні ***осі*** x і y відповідно.

b) фронтально проектуюча площина -

   площина, перпендикулярна фронтальній площині проекцій

c) профільно проектуюча площина -

   площина, перпендикулярна профільній площині проекцій

[1] - ***NB*** – nota bene (лат.) – зверни увагу.

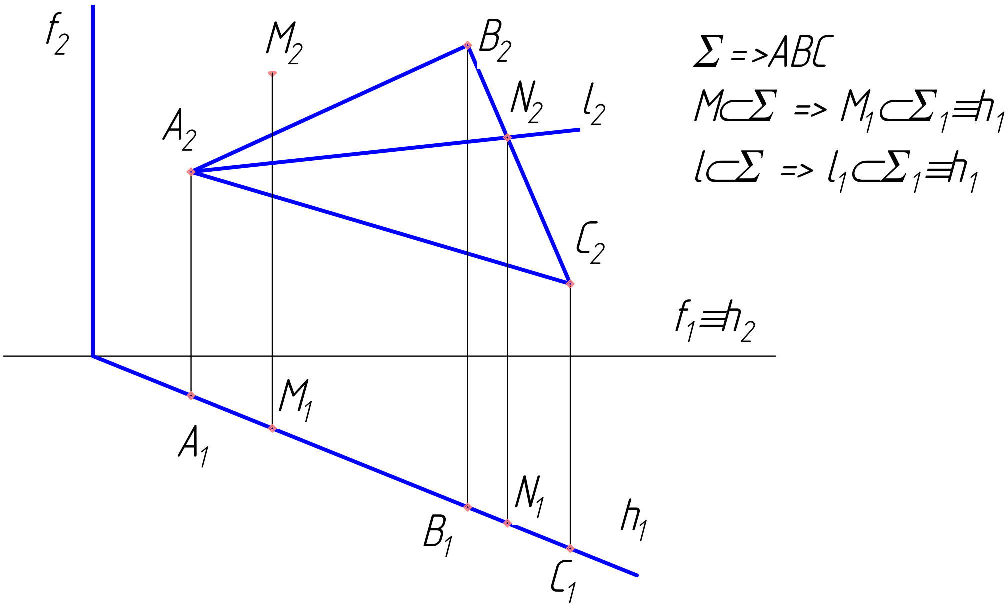


Рис. 4.9 горизонтально проектуюча площина на комплексному рисунку

Всі точки і лінії на проектуючій площині належать сліду площини на площині проекції.

4.2.2 Площини рівня

Площини, ⊥ до двох ПП називаються площинами рівня. Площини рівня паралельні своїм ПП.

a) Горизонтальна площина рівня ***Г***||***П₁*** (Рис. 4.);

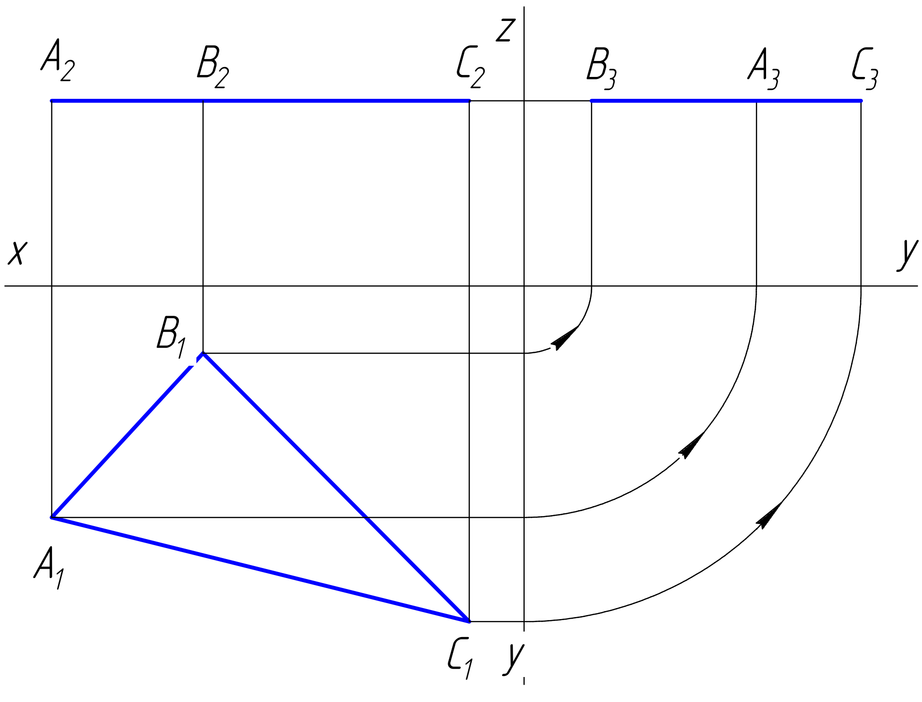


Рис. 4.10 горизонтальна площина

b) Фронтальна ***Ф*** || ***П₂***;

c) Профільна ***Ψ*** || ***П₃***

Плоскость рівня на своїй площині проекції не має сліду.

Всі точки і лінії, розташовані на площині рівня належать двом наявним слідам площини.

4.3 Пряма на площині.

Пряма належить площини, якщо вона:

- проходить через дві точки, що належать площини (Рис. 4.);

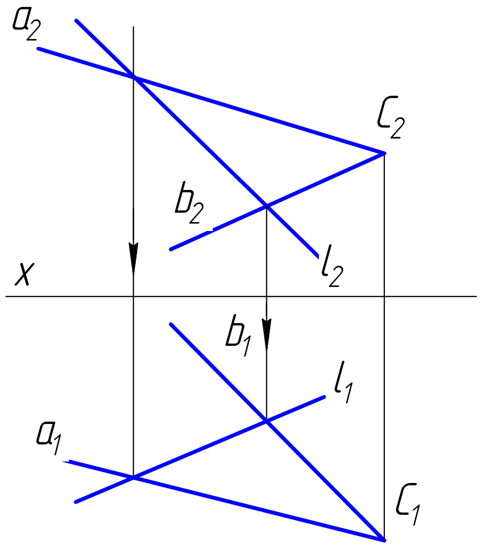


Рис. 4.11 Належність прямої площині. Ознака 1

- проходить через одну точку на площині паралельно прямій, яка належить площині (
- Рис. 4.1);

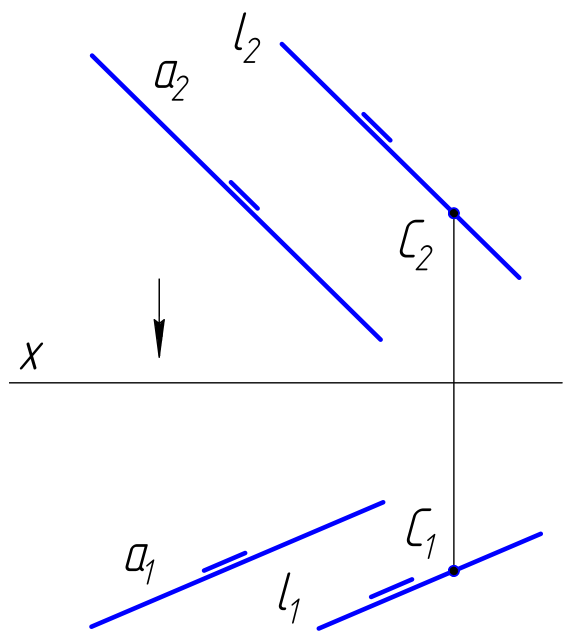


Рис. 4.12 Належність прямої площині. Ознака 2

- проходить через одну точку на площині паралельно прямій, яка паралельна цій площині.

Приклад побудови прямої на площині (Рис. 4.1):

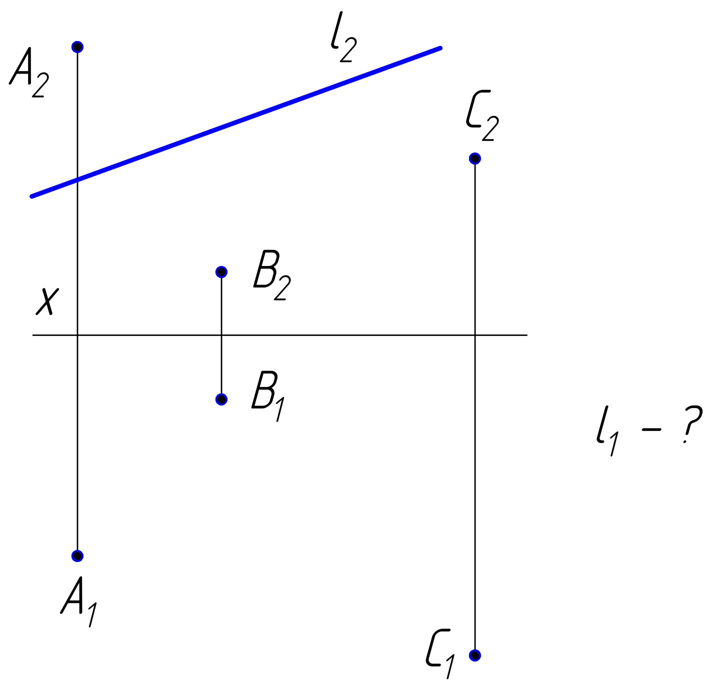


Рис. 4.13 Задача: побудувати на площині ***ABC*** пряму, задану фронтальною проекцією

4.4 Головні лінії площини

Для розв'язання багатьох задач нарисної геометрії використають лінії окремого положення – **лінії рівня**.

Лінії рівня, це лінії на площині, паралельні ПП.

Лінія, паралельна горизонтальній ПП – **горизонталь**,

Фронтальній – **фронталь**,

Профільній ПП – **профільна лінія**.

Тому що лінії рівня паралельні своїм площинам проекцій, на інших ПП їх проекції будуть паралельні осям координат. Наприклад, фронтальна проекція горизонталі паралельна осі $\boldsymbol{x_{12}}$.

Приклади побудови ліній рівня:

- Горизонталь ***h*** (Рис. 4.1);

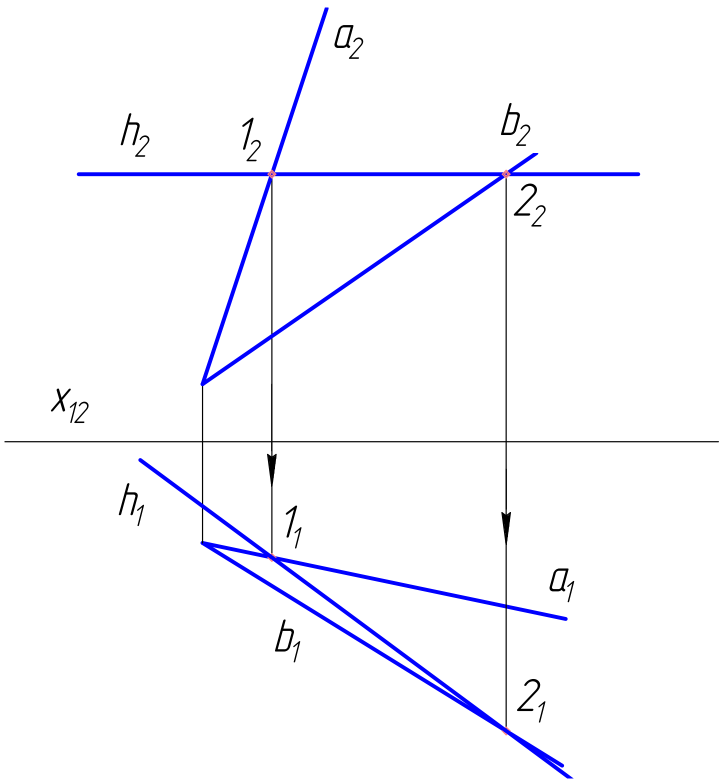


Рис. 4.14 Горизонталь площини

Якщо площина задана слідами, лінії рівня ***h*** й ***f*** будуть паралельні слідам на своїх площинах проекцій: горизонталі - горизонтальним слідам, фронталі - фронтальним слідам і т.п. (Рис. 4.1). По суті, слід площини є лінією рівня, нескінченно близькою площині проекцій.

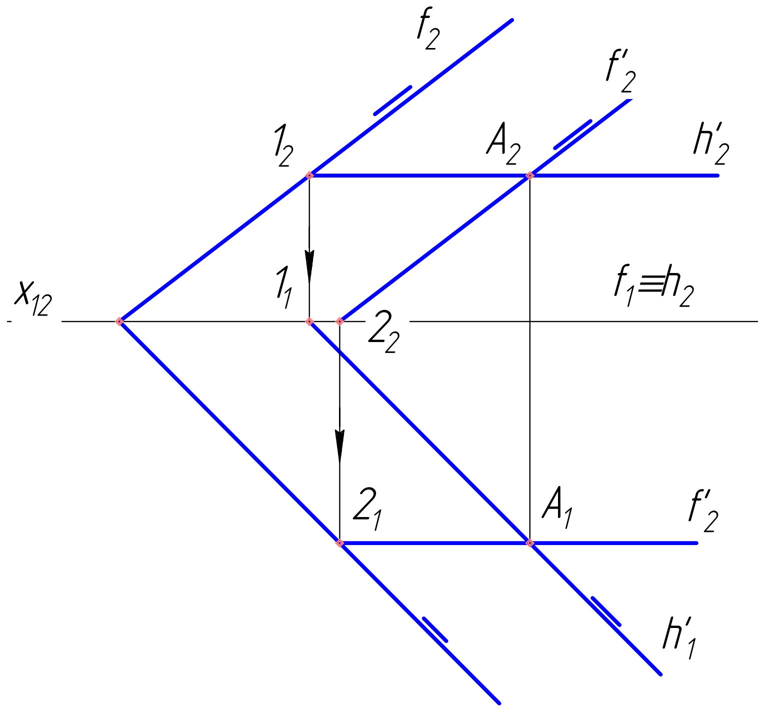


Рис. 4.15 Лінії рівня площини, заданої слідами

4.5 Точка на площині

Точка лежить на площині, якщо вона належить будь-якій прямій на цій площині. Таким чином, для побудови точи на площині необхідно спочатку побудувати допоміжну пряму на площині таку, щоб вона проходила через задану проекцію шуканої точки, потім знайти точку на побудованій допоміжній лінії уздовж лінії зв'язку.

Приклади побудови точки на площині (Рис. 4.1):

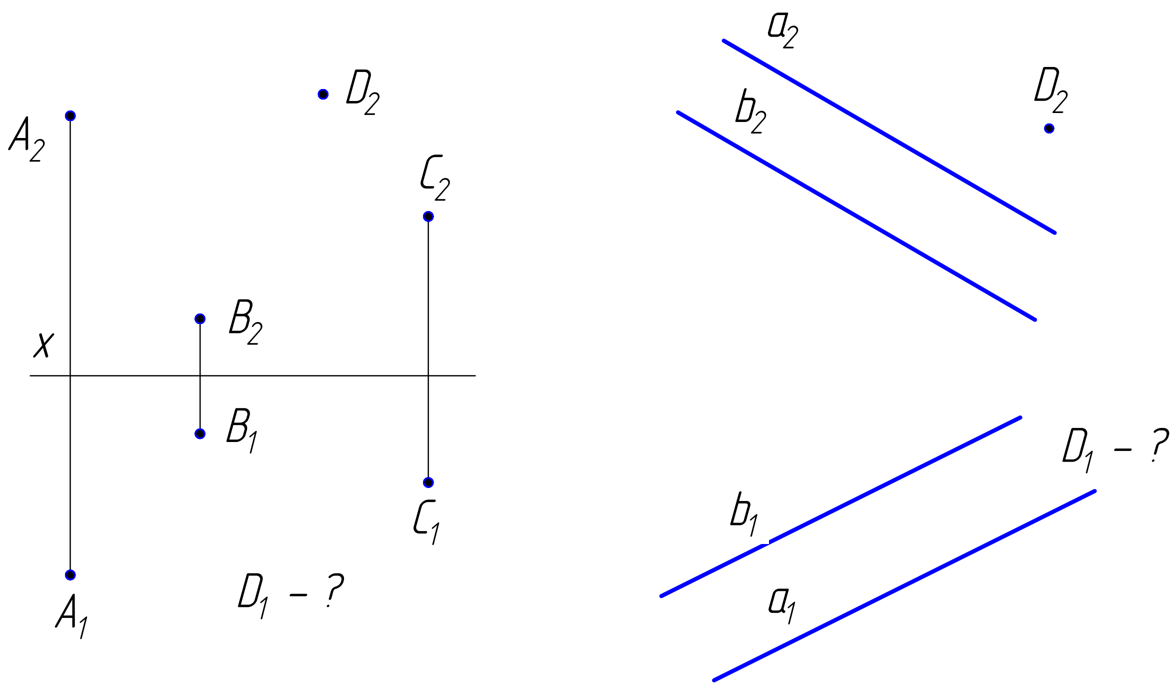


Рис. 4.16 Точка на площині

Побудова точки на площині, заданої слідами.

Якщо площина задана слідами, як лініями, що належить площини, за допомогою яких перевіряється приналежність точки площині, використовуються лінії рівня, які легко будувати, проводячи паралельно заданим слідам (Рис. 4.1). При цьому варто пам'ятати, що проекція точки, що належить сліду площини, на іншій площині проекцій виявиться на осі, що розділяє площині проекцій (Рис. 4.17 – точка 1).

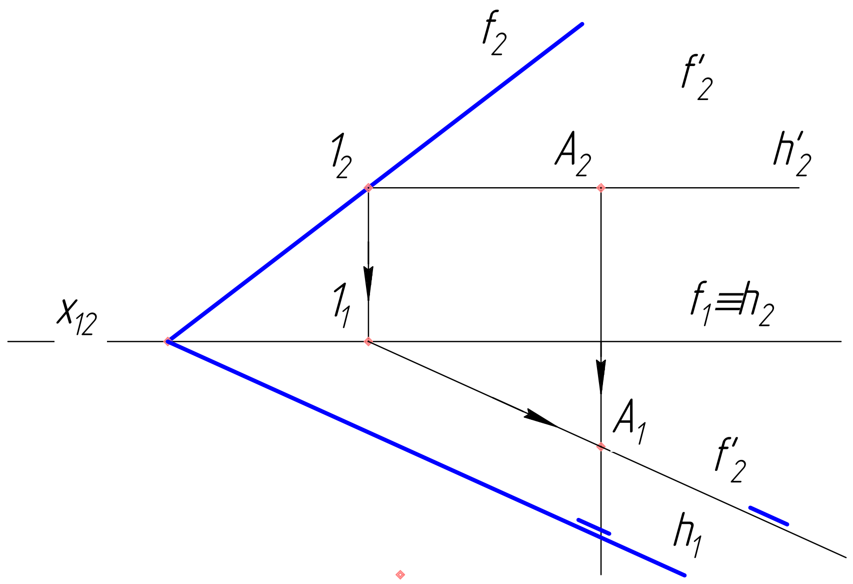


Рис. 4.17 Використання ліній рівня для побудови точки на площині, заданої слідами

Тема 5 Взаємне положення геометричних фігур: пряма і площина, дві площини.

Пряма і площина, а також дві площини можуть бути:

- паралельні одна одній,
- перетинатися,
- перпендикулярні одна одній.

5.1 *Паралельні фігури*

5.1.1 Пряма, паралельна площині

Приклад 5.1 (Рис. 5.1).

Є площина $\boldsymbol{\Sigma(a \cap b)}$.

Задана ***(.)A*** і фронтальна проекція $\boldsymbol{l_2}$ прямої.

Провести через ***(.)A*** пряму, паралельну площині $\boldsymbol{\Sigma}$

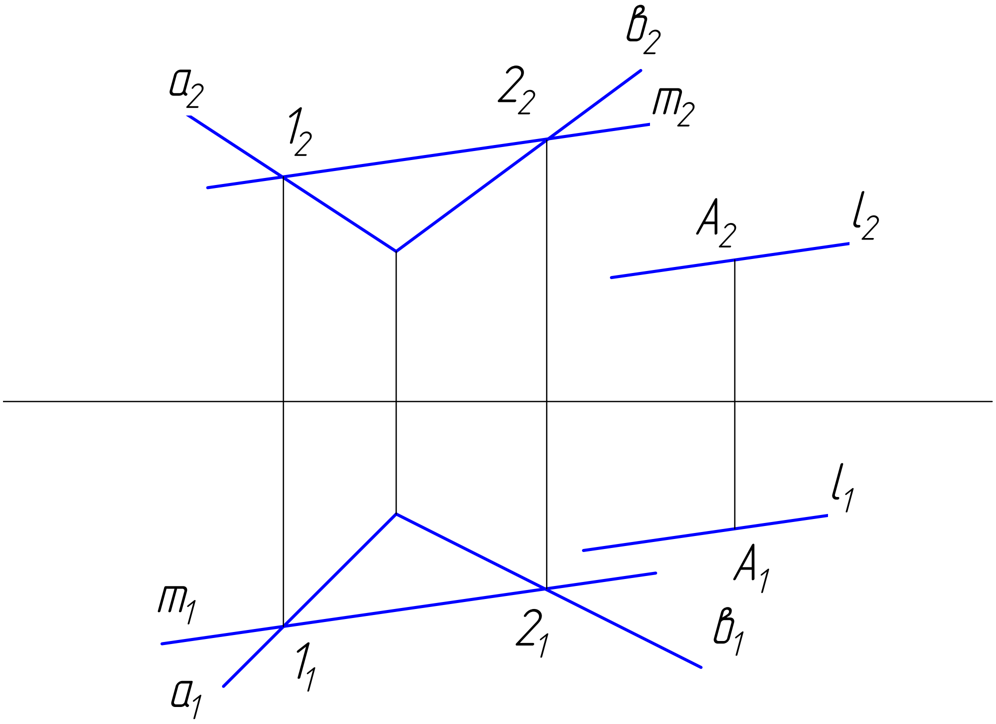


Рис. 5.1 Побудова прямої, паралельної площині

Приклад 5.2. Через ***(.)A*** провести горизонталь, паралельну площині ***Σ(ABC)*** (Рис. 5.2).

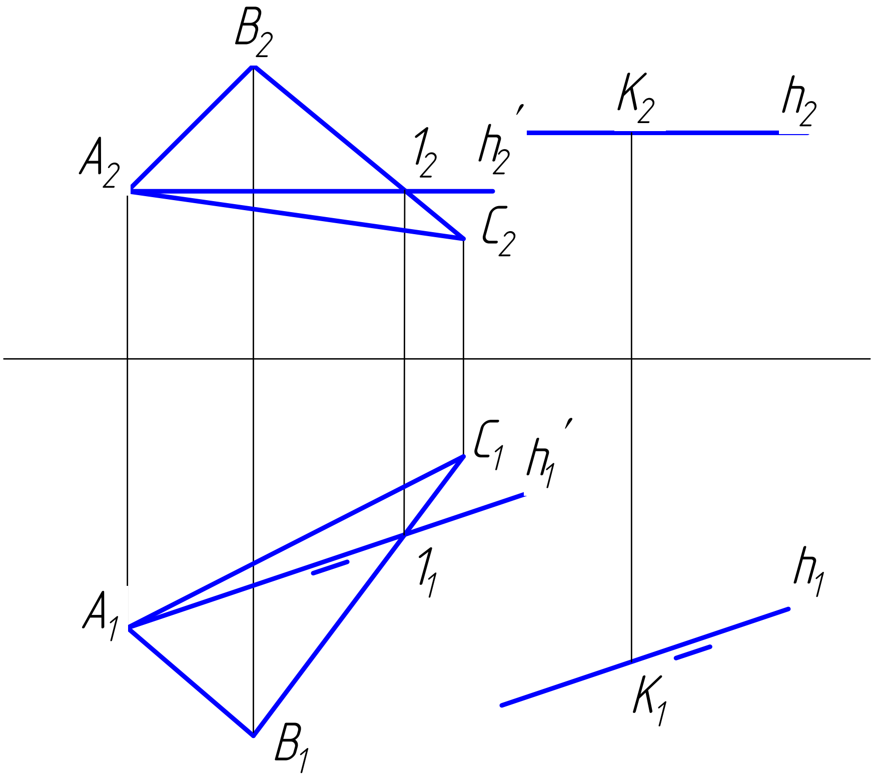
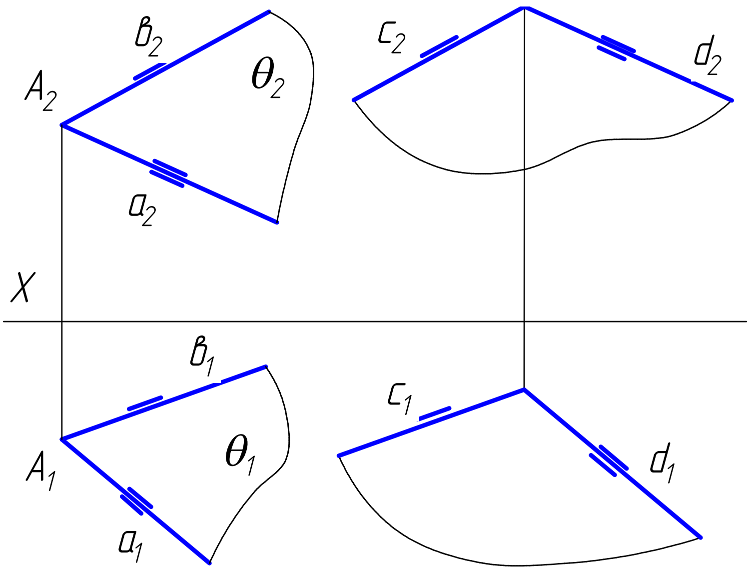


Рис. 5.2 Горизонталь, паралельна площині

5.1.2 Взаємно паралельні площини

Дві площини взаємно паралельні, якщо дві прямі,які перетинаються однієї площини паралельні двом прямим, які перетинаються другої площини (Рис. 5.3).



$$\left.\begin{array}{l} a_1 // d_1 \\ a_2 // d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a // d$$

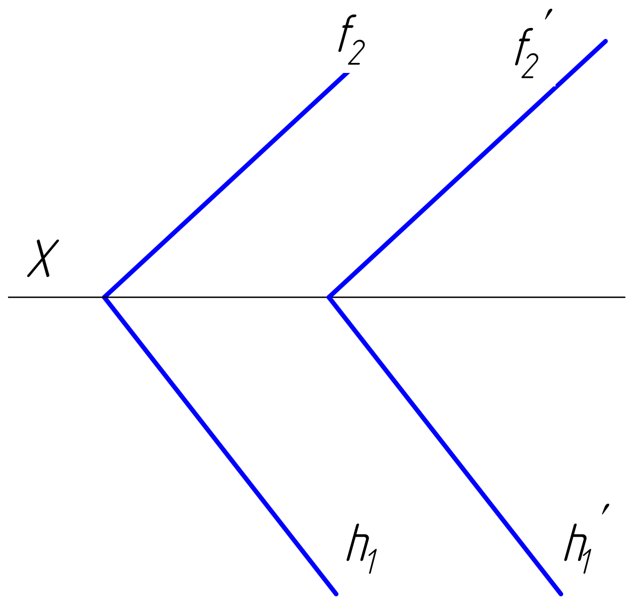
$$\left.\begin{array}{l} b_1 // c_1 \\ b_2 // c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b // c$$

$$пл.\Theta(a \cap b) // пл.\Delta(c // в)$$

Рис. 5.3 Взаємно паралельні площини

У якості прямих, які перетинаються можуть бути обрані прямі окремого положення. Звідси:

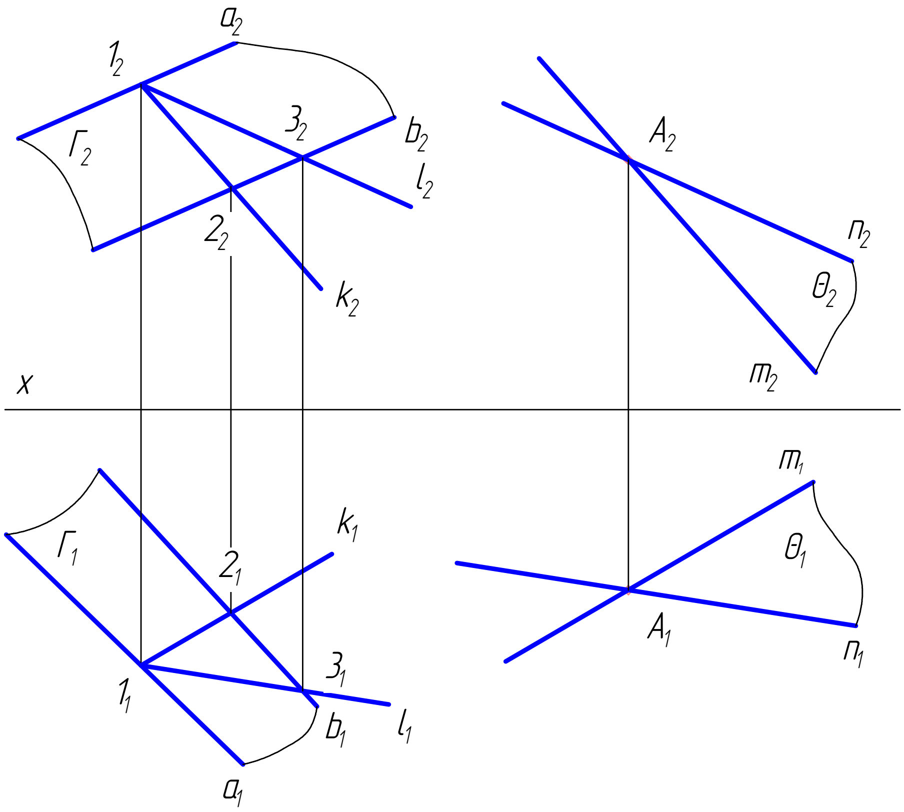
Якщо однойменні сліди двох площин паралельні, то паралельні самі площини.



$$пл.\Sigma(f \cap h) // пл.\mathrm{T}(f' \cap h')$$

Рис. 5.4 Паралельні площини, задані слідами

Приклад 5.3: Через (.)***А*** провести площину ***Θ*** паралельно площині ***Г***, заданої двома паралельними прямими



(

Рис. 5.).

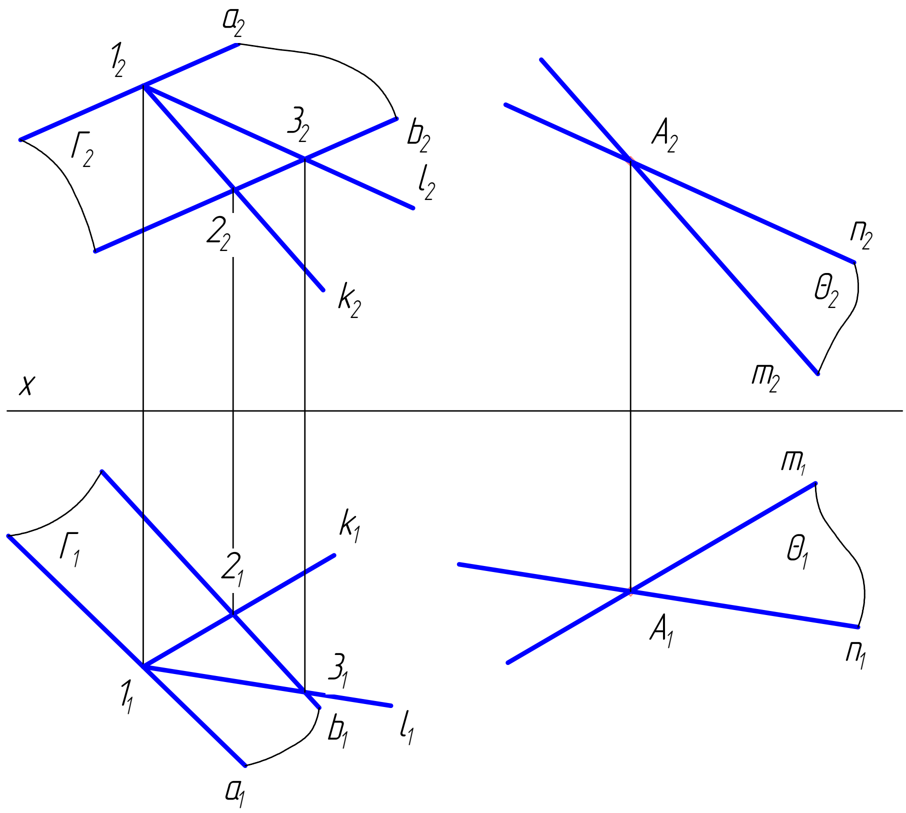


Рис. 5.6 Паралельні площини

Алгоритм побудови:

1. На площині ***Г,*** використовуючи пряму ***a*** вибирається довільна допоміжна точка ***1***.

2. Через (.)***1*** проводяться дві довільні прямі ***l*** і ***k*** так, щоб вони перетнули іншу пряму, що задає площину – лінію ***b***.

3. Через задану точку ***A*** проводять дві прямі ***m*** і ***n***, паралельні відповідно до допоміжних прямих ***l*** і ***k***. Ці дві прямі ***l*** і ***k***, які перетинаються зададуть шукану площину θ, паралельну заданій площині ***Г.***

Приклад 4.4: Через (.)***A*** провести площину ***Δ*** параллельно фронтально проектуючій площині ***Σ*** (***m***||***n***) (Рис. 5.).

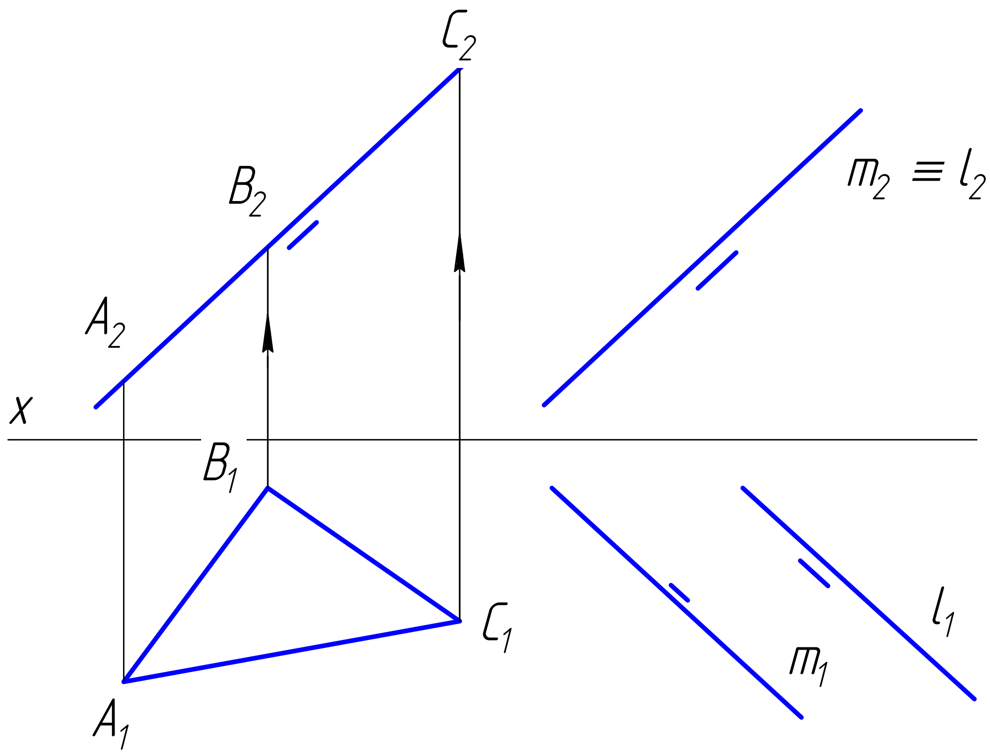


Рис. 5.7 Паралельні площини

Алгоритм побудови:

1. На фронтальній ПП через фронтальну проекцію A_2 заданої точки A проводиться пряма $A_2C_2 \parallel m_2 \equiv n_2$. Ця пряма буде фронтальним слідом шуканої площини Δ. Площина, паралельна фронтально проектуючій площині повинна бути сама фронтально проектуючою площиною.
2. На горизонтальній ПП вибираються довільно дві точки B_1 і C_1.
3. Фронтальні проекції B_2 і C_2 точок B и C шукаються уздовж ліній зв'язку на побудованому сліді шуканої площини Δ.

NB! Незважаючи на те, що точки B и C були обрані на горизонтальній ПП довільно, площина, що задається точками ABC буде паралельна заданій фронтально проектуючій площині тому, що на фронтальній ПП точки ABC розташовуються на одній лінії, паралельній фронтальному сліду заданої площини.

5.2 Перетин двох площин.

Для побудови лінії перетину двох площин досить знайти дві будь-які точки цієї лінії, або одну точку і напрямок лінії перетину.

Якщо шукається лінія перетину двох площин, одна з яких проектуюча, лінія перетину визначається найпростішими побудовами.

Приклад 5.5: Побудувати лінію перетину площини Δ, заданої двома прямими $l \parallel m$ і горизонтальною площиною рівня Σ (Рис. 5.).

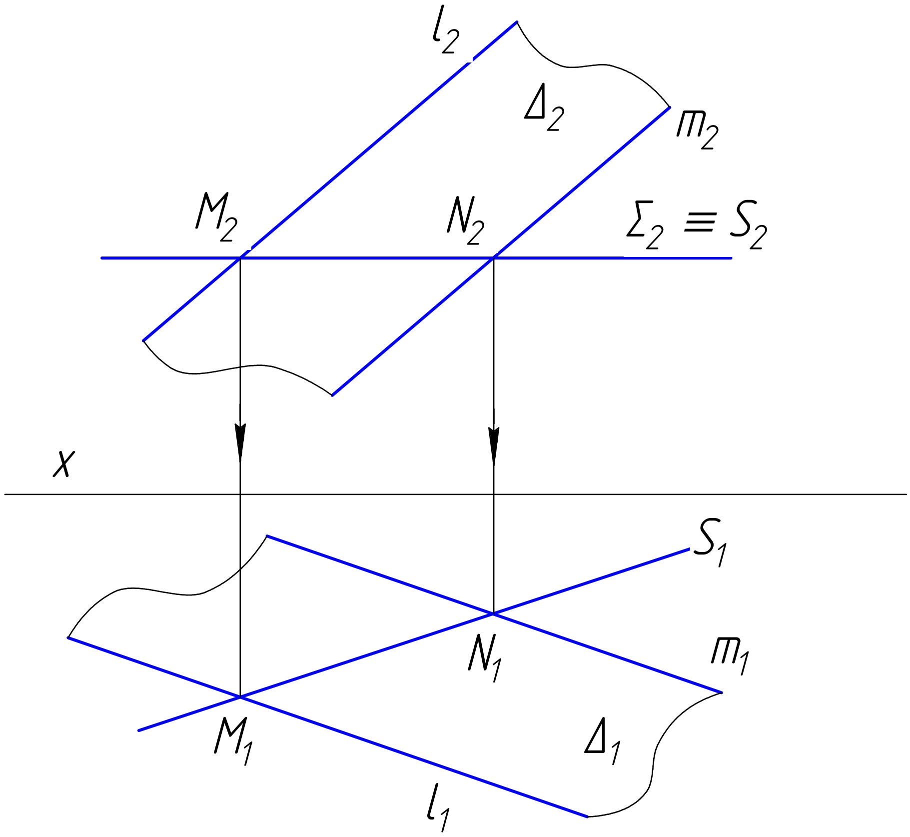


Рис. 5.8Перетин площин

NB! Лінія перетину належить горизонтальній площині рівня $\boldsymbol{\Sigma}$, тому є горизонталлю.

Простота побудови лінії перетину площин загального положення із площинами окремого положення дає зручний інструмент побудови лінії перетину двох площин загального положення.

Таким інструментом є допоміжні січні площини окремого положення, наприклад, площини рівня (Рис. 5.).

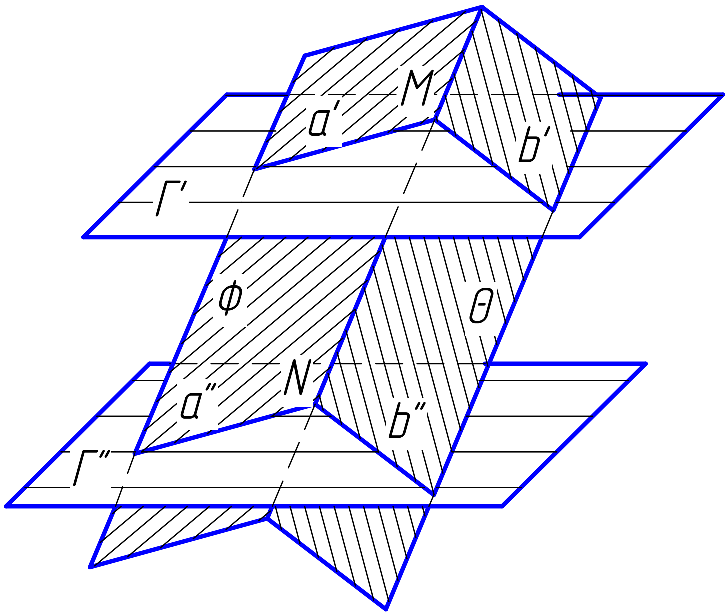


Рис. 5.9 Допоміжні січні площини

Для побудови лінії перетину площин ***Φ*** і ***Θ*** використано дві горизонтальні площини ***Γ'*** і ***Γ''***. Точки перетину ***M*** і ***N*** пар ліній ***a'∩b'*** й ***a''∩b''*** перетину площин ***Φ*** і ***Θ*** допоміжними площинами ***Γ'*** і ***Γ''*** відповідно дадуть лінію перетину площин ***Φ*** і ***Θ***.

Приклад 4.6: Побудувати лінію перетину площин ***Θ(a II b)*** і ***Λ(c ∩ d)*** (Рис. 5.).

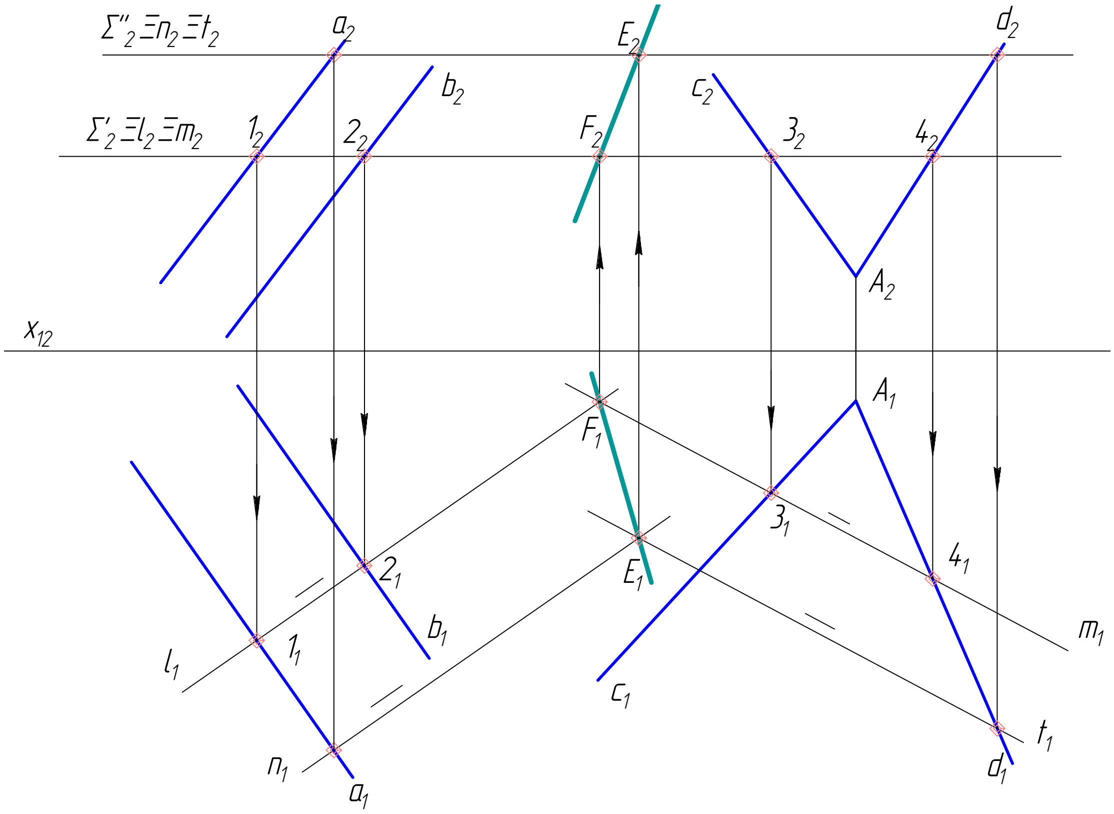


Рис. 5.10 Побудова лінії перетину площин

Для побудови використані горизонтальні площини ***Σ'*** й ***Σ''.***

Приклад 5.7: Побудувати лінію перетину площини ***Ф(ABC)*** і площини ***T(l* || *m*)** (Рис. 5.1).

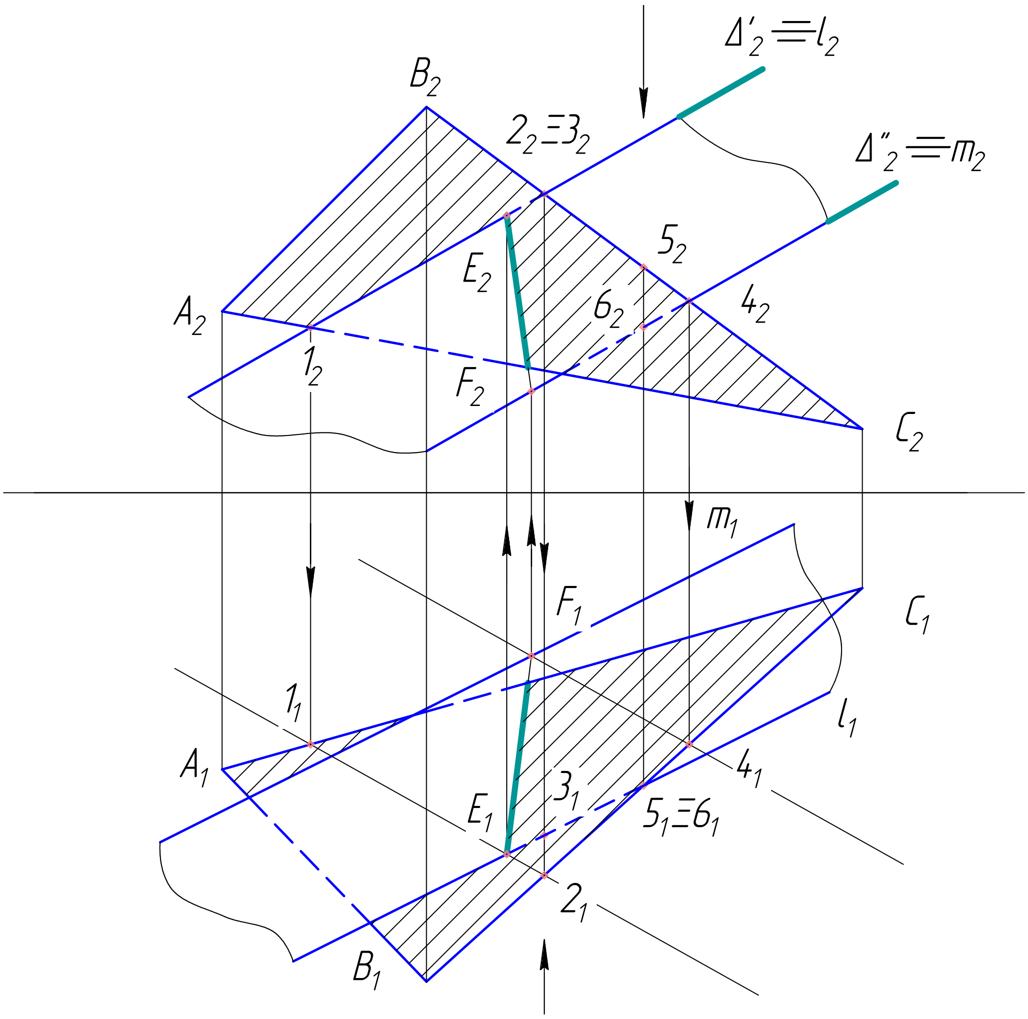


Рис. 5.11 Побудова лінії перетину площин

Для побудови використовуються допоміжні фронтально проектуючі площини ***Δ'*** й ***Δ''***, які на фронтальній ПП проходять по фронтальних проекціях паралельних прямих ***l*** і ***m***, що задають площину ***T.*** Допоміжна площина ***Δ'*** перетинає задану площину ***Ф(ABC)*** по лінії ***12*** . Горизонтальна проекція цієї прямої перетинає горизонтальну проекцію прямої ***l*** у точці E_1. Ця точка шукається на фронтальній ПП уздовж лінії зв'язку. Точка ***E*** є загальною для площини ***Ф(ABC)*** і ***T(l* || *m*)**. Таким чином, ця точка є однієї із точок лінії перетину площин ***Ф(ABC)*** і ***T(l* || *m*)**. Також знайдена точка ***F*** перетину площини ***Δ''*** із прямою ***m***. Точка ***F*** також є точкою лінії перетину площин ***Ф(ABC)*** і ***T(l* || *m*)**. З'єднання отриманих точок ***E*** и ***F*** прямою дає шукану лінію перетину заданих площин ***Ф(ABC)*** і ***T(l* || *m*)**.

Приклад 4.8: Побудувати лінію перетину двох площин, заданих слідами: ***Σ(f;h)*** і ***Δ(f';h')*** (Рис. 5.1).

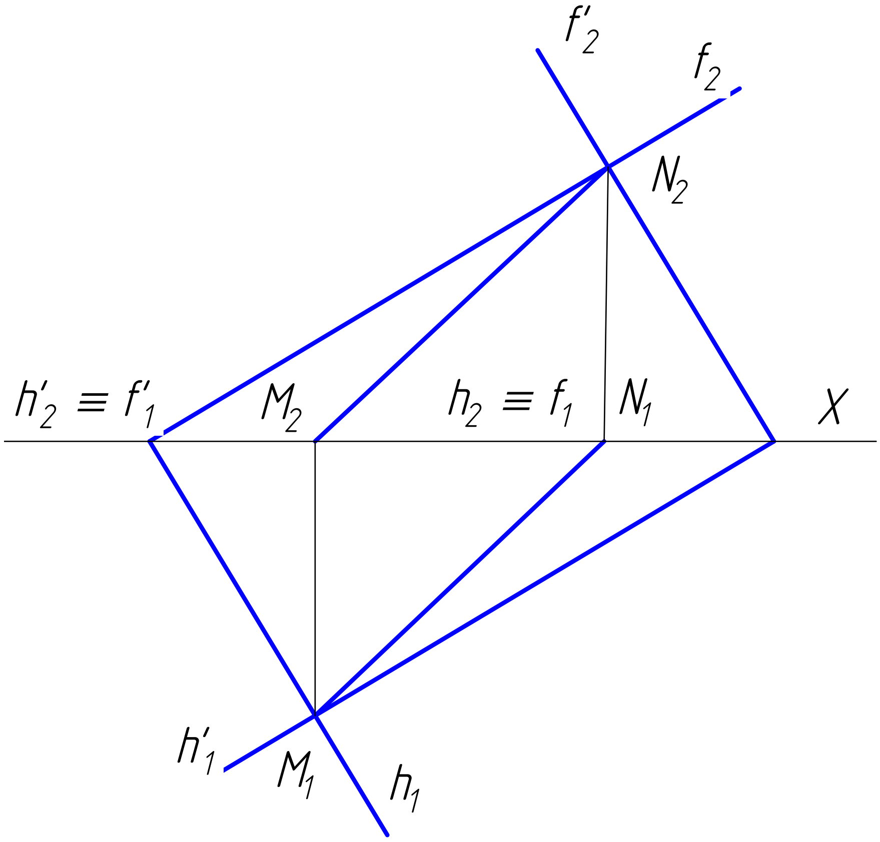


Рис. 5.12 Побудова лінії перетину площин

Точки лінії перетину це (.)***M*** - точка перетину горизонтальних слідів ***h*** й ***h'*** заданих площин і (.)***N*** – точка перетину фронтальних слідів ***f*** й ***f'***. З'єднання цих крапок на відповідних площинах проекцій дає проекції лінії перетину заданих площин.

5.3 Перетин прямої і площини. Точка перетину

Розглянемо окремий випадок, коли необхідно знайти (.)***K*** перетину прямої загального положення ***l*** і горизонтально проектуючої площини.

Приклад 5.9: Побудувати точку перетину прямої ***l*** с горизонтально проектуючою площиною (Рис. 5.1):

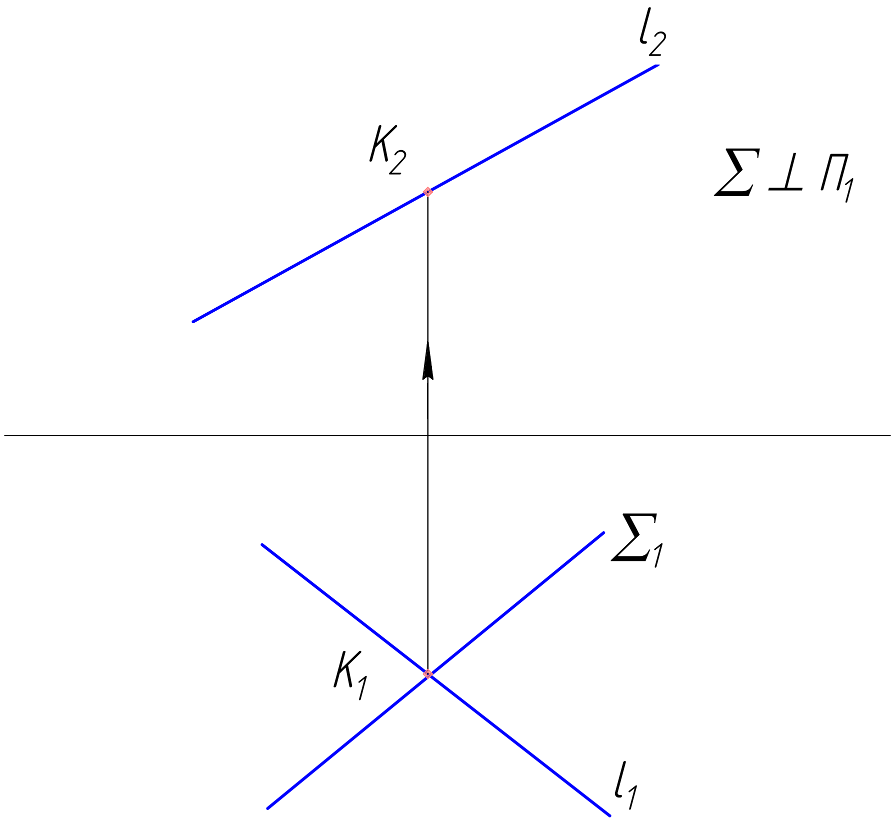


Рис. 5.13 Перетин прямої із проектуючою площиною

Побудова досить проста, тому що проектуючи площина має збиральну властивість, точка її перетину з лінією $\boldsymbol{l}$ визначається як точка перетину горизонтального сліду $\boldsymbol{\Sigma_1}$ площині і горизонтальної проекції $\boldsymbol{l_1}$ лінії. Фронтальна проекція точки перетину знайдена уздовж лінії зв'язку.

Для побудови точки перетину довільної прямої із площиною загального положення як допоміжний елемент варто використати допоміжні проектуючі площини.

Приклад 5.10: Побудувати точку перетину прямої ***m*** із площиною ***Δ(a⌒b)*** (Рис. 5.1).

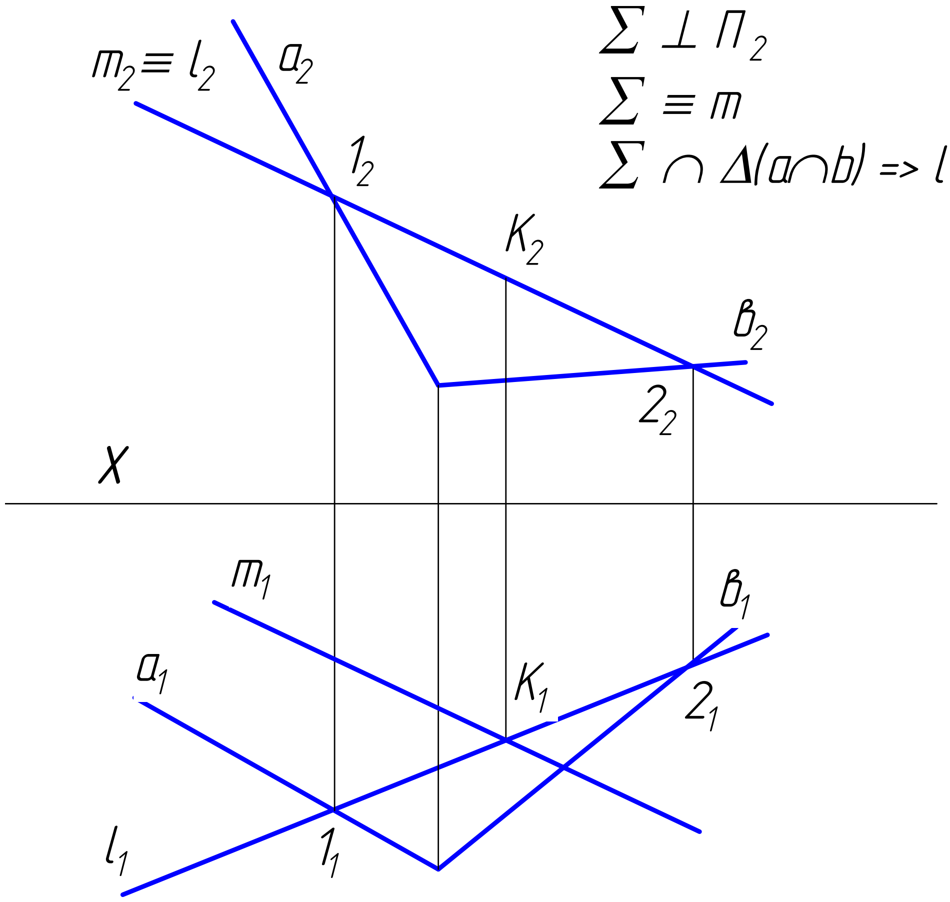


Рис. 5.14 Перетин прямої із площиною

Для побудови використана допоміжна фронтально проектуючи площина, яка проходить через лінію ***m***.

Лінія ***l*** перетину площин ***Σ⌒Δ*** лежить в одній площині із прямій ***m***, тому що допоміжна площина спеціально була проведена через пряму ***m***. Отже, перебуваючи в одній площині, прямі ***l*** й ***m***, якщо вони перетнуться, дадуть точку, що буде шуканою точкою перетину заданих прямої ***m*** і площини ***Δ***. Якщо прямі ***l*** й ***m*** виявляться паралельними, це буде означати, що задані пряма ***m*** і площина ***Δ*** - паралельні.