http://edu1.distedu.ru/engine.php?c=1000000038

Тема 1 Начертательная геометрия 2

Тема 2 Положение прямой относительно плоскостей проекций. Прямые общего и особого (частного) положения. Длина отрезка общего положения. Углы наклона отрезка к плоскостям проекций. Взаимное расположение точки и прямой, двух прямых. Следы прямой. 11

Тема 3 Плоскость. Точка и прямая на плоскости. Главные линии плоскости. Прямая, параллельная плоскости. 26

Тема 4 Взаимное положение геометрических фигур: прямая и плоскость, две плоскости. 36

Тема 5 Взаимное положение геометрических фигур. Перпендикулярность прямых (проекции прямого угла). Линии ската. Взаимно-перпендикулярные прямая и плоскость, две плоскости. 47

Тема 6 Метрические и позиционные задачи начертательной геометрии 55

Тема 7 Методы преобразования комплексного чертежа. Преобразование системы проектирования. Способ замены плоскостей проекций. Четыре основных позиционных задачи. 69

Тема 8 Объемные фигуры. Многогранники. Построение пересечений многогранников плоскостями. Построение разверток многогранников. 85

Тема 9 Поверхности вращения. 94

Тема 10 Пересечение прямой линии с поверхностью многоугольника, с поверхностью тела вращения. Взаимное пересечение поверхностей многоугольников. 111

Тема 11 Взаимное пересечение поверхностей тел вращения 117

Тема 12 Кривые линии 123

Тема 13 Поверхности 134

Тема 14 Аксонометрические проекции 151

Тема 15 Параметризация геометрических фигур 158

Тема 1 Начертательная геометрия (теория построения изображений)

1.1 Введение

Предмет начертательной геометрии – построение изображений геометрических фигур (объектов) на плоскости и совокупность способов решения геометрических задач по заданным изображениям этих фигур.

Историческая справка – необходимость отображать фигуры на плоскости возникла у человека тогда, когда у него возникла потребность сохранить или передать информацию об увиденном, то есть, визуальную информацию. Технологически доступным для человека был один простой способ – воспроизвести увиденное на гладкой поверхности, например, на поверхности камня. В результате, визуальная информация стала графической. Вероятно, потребность воспроизведения и закрепления геометрической информации могла первоначально возникнуть при решении задач землепользования (γεω – земля, μετρια – измерять) и строительства. В Шумерском царстве в Месопотамии, в качестве носителя информации использовали специально сделанные глиняные таблички. Позднее в древнем Египте папирус и пергамент и еще позднее, во 2-ом веке в Китае была изобретена бумага. Таким образом, с самого начала человек решал задачу отображения нужного ему объекта на поверхности. Удобнее всего на плоской поверхности, т.е., на плоскости. Отсюда следует, что еще в древности интуитивно или осознано, но человек находил и использовал способы отображения, т.е., проектирования изображения на плоскость.

Задача изображения материальных объектов решалась по-разному. Главное, чего требовалось достичь, это наглядности и воспроизводимости изображенного. Наглядность достигается при использовании проекций, которые сейчас называют перспективными, когда воспроизводится изображение объекта такое, каким его видит человек. При этом лучи проектирования исходят из одной точки – центра проектирования, которым при наблюдении в реальности является глаз человека. Для достижения воспроизводимости изображения, то есть, такого отображения геометрической информации на плоскости, по которой можно точно воспроизвести реальный объект, необходимо, чтобы все лучи проектирования были параллельны друг другу, и плоскостей проекции было не меньше двух.

В 1799 году француз Гаспар Монж (1746…1818) опубликовал знаменитый труд «Geometrie descriptive», в котором была предложена система прямоугольного проектирования и методы решения геометрических задач методами, использующими построения с применением линейки и циркуля. Методы, предложенные Монжем, почти без изменений используются до настоящего времени.

Развитие компьютерной техники позволило вернуться с новыми инструментами к задаче, которая возникла много тысячелетий назад: как максимально достоверно сохранить информацию о материальном объекте. Теперь мы имеем инструменты для виртуального трехмерного моделирования практически любых материальных объектов, в том числе совокупностей отдельных объектов. По полученной модели можно автоматически получить проекции объекта на любые плоскости и, далее, распечатать эти проекции в виде привычных для человека плоских рисунков и чертежей. Компьютерные технологии развили возможности человека до автоматизированного изготовления реальных объектов - деталей машин и даже скульптурных изображений по их виртуальным моделям.

1.2 Применяемые обозначения

A, B, C, … 1, 2, 3,.. – точки;

a, b, c, d,.. – прямые и кривые линии, в том числе зарезервированные обозначения прямых линий:

- ***h*** – горизонталь,
- ***f*** – фронталь,
- ***p*** – профильная прямая.

*Q****,*** *L****,*** *S****,*** *G****,*** *F****,*** *W* - поверхности;

α, β, γ - углы;

Π_1 – горизонтальная плоскость проекции;

Π_2 – фронтальная плоскость проекции;

Π_3 – профильная плоскость проекции;

$\in$ **-** принадлежит ($A \in a$ – точка ***A*** принадлежит линии ***a***)

$\notin$ - не принадлежит ($\boldsymbol{A} \notin \boldsymbol{a}$ – точка $\boldsymbol{A}$ не лежит на линии $\boldsymbol{a}$)

$\subset$ - включает ($L \subset \boldsymbol{a}$ – поверхность L включает линию $\boldsymbol{a}$)

$\not\subset$ - не включает;

$\equiv$ - совпадение ($\boldsymbol{A_1} {}^{o} \boldsymbol{B_1}$ – проекция $\boldsymbol{A_1}$ точки $\boldsymbol{A}$ совпадает с проекцией $\boldsymbol{B_1}$ точки $\boldsymbol{B}$);

$\cup$ - объединение фигур (множеств);

$\cap$ - пересечение фигур (множеств);

$\perp$ - перпендикулярность;

$\parallel$ - параллельность;

$\dot{-}$ - непересечение (для прямых линий - скрещивание) ($\boldsymbol{a} \dot{-} \boldsymbol{b}$ – прямые линии $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ скрещиваются);

$\angle$ - плоский или двугранный угол, значение угла;

$\cong$ - конгруэнтны;

~ - подобны;

$\frown$ - касательные фигуры.

1.3 Метод проекций

Метод проекций – метод отображения реальных или виртуальных объектов (фигур) на плоскости (в общем случае – на поверхности).

Используют два основных метода проектирования:

1. центральное проектирование;
2. параллельное проектирование.

1.3.1 Центральные проекции

Для получения центральной проекции необходимы три элемента:

1. **объект проектирования**;

2. **центр проектирования** - точка, обозначаемая обычно ***S***;
3. **поверхность (плоскость) проектирования** – поверхность, на которую отображается объект проектирования (

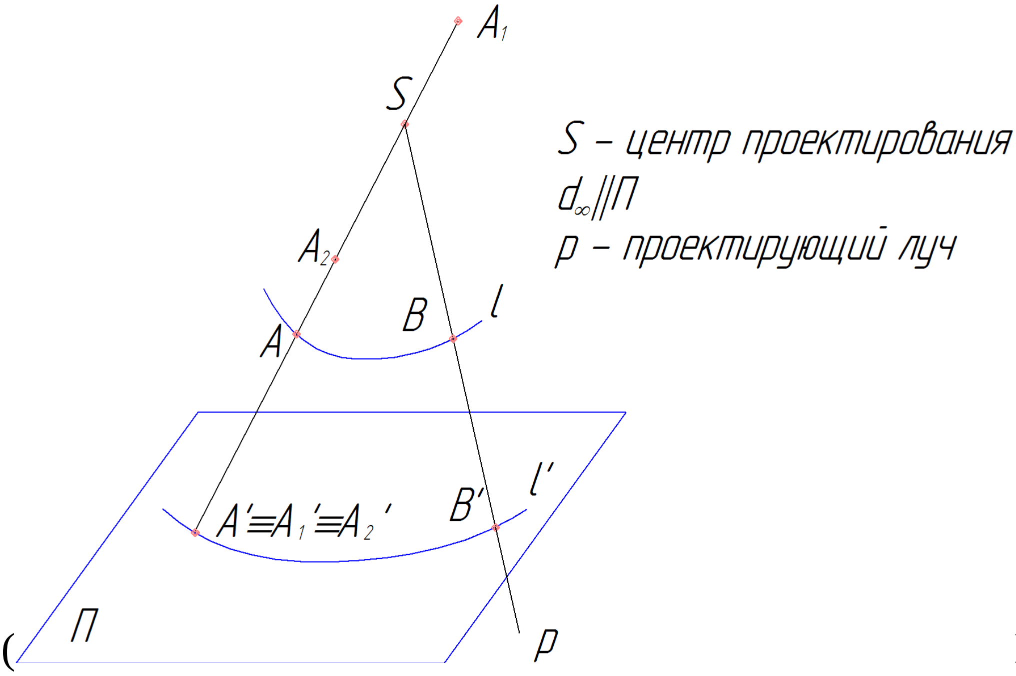


Рис. 1.1).

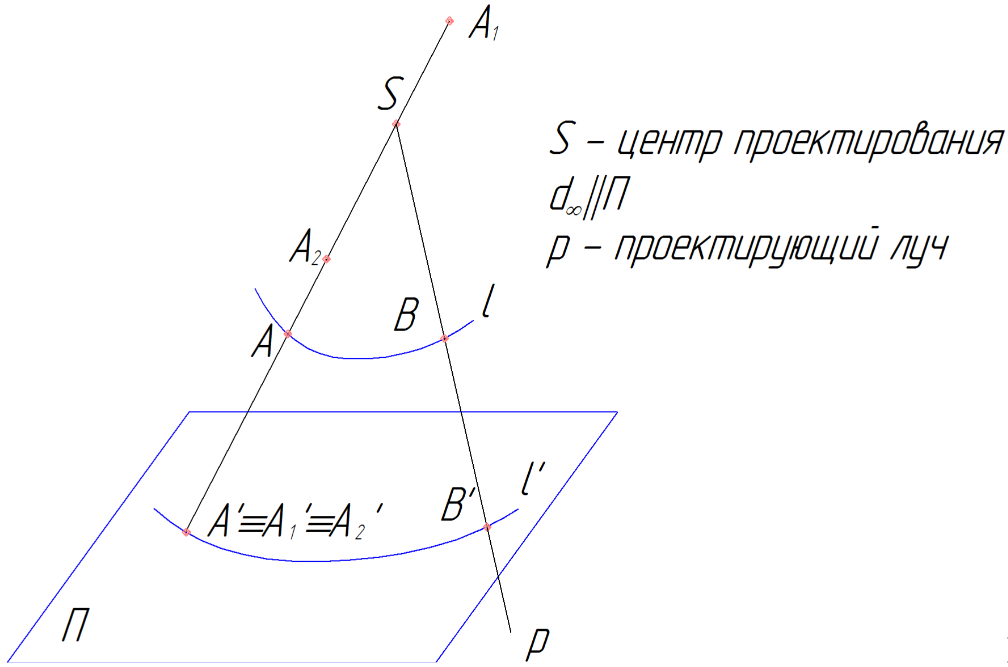


Рис. 1.1 Проектирование кривой

Свойство центральной проекции – по центральной проекции точки **невозможно** восстановить положение точки в пространстве.

Для того, чтобы по центральной проекции точки можно было восстановить ее положение в пространстве, необходимы дополнительные условия. Например, это координаты центра проектирования и отстояние точки от ее проекции вдоль луча проектирования.

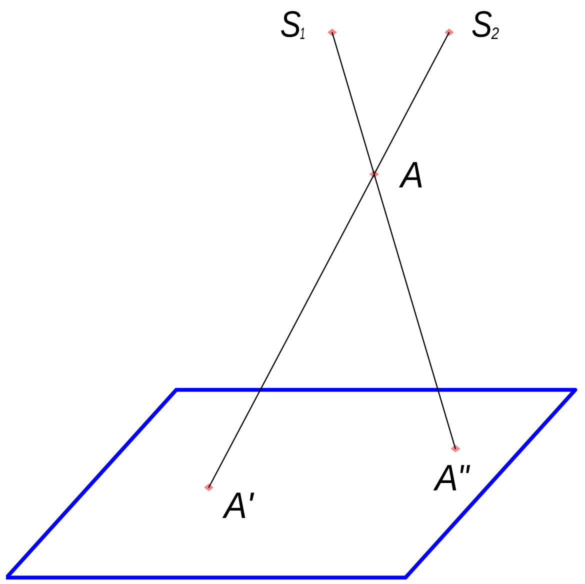


Рис. 1.2 Центральное проектирование точки

Одна точка может иметь любое количество проекции в зависимости от выбора центра проектирования (Рис. 1.2).

Один из видов центрального проектирования – перспектива.

1.3.2 Параллельные проекции

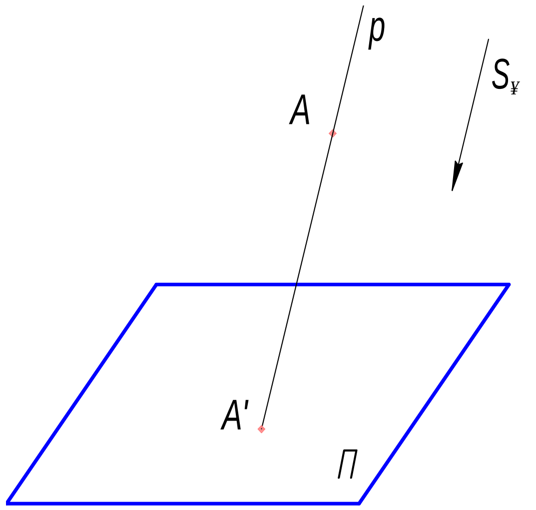


Рис. 1.3 Параллельное проектирование точки

Если поместить центр проектирования в бесконечности, лучи проектирования станут параллельными (Рис. 1.3). Проекции с взаимно-параллельными лучами проектирования называются параллельными проекциями.

Обозначим $\boldsymbol{S_\infty}$ направление проектирования. Тогда пересечение луча $\boldsymbol{p||S_\infty}$**,** проходящего через точку ***A***, с плоскостью ***П*** дает проекцию ***A'*** точки ***A*** на плоскость ***П***.

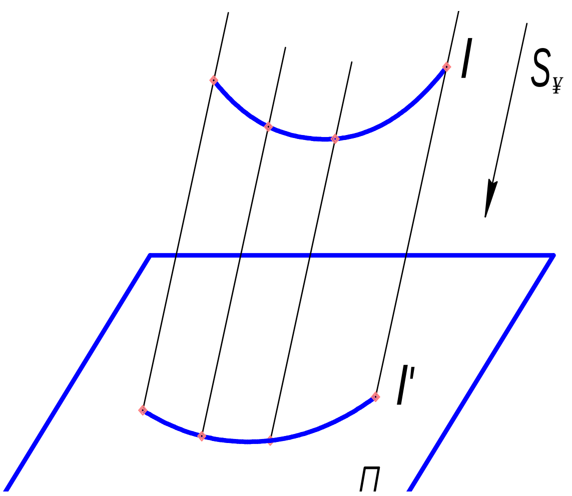


Рис. 1.4 Параллельное проектирование кривой

Для построения параллельной проекции линии ***l*** необходимо получить проекции всех ее точек на плоскости. При этом проектирующие лучи, будучи параллельными друг другу, образуют цилиндрическую поверхность. Поэтому параллельное проектирование иногда называют **цилиндрическим** (Рис. 1.4).

Центральное проектирование по той же причине называют **коническим**.

Если направление проектирования перпендикулярно плоскости проекции – проектирование называется **прямоугольным**. В остальных случаях – **косоугольным**.

1.4 Основные свойства центральных и параллельных проекций:

- в данной системе проектирования каждая точка пространства имеет единственную проекцию;
- проекция прямой линии – прямая линия;
- если точка ***A*** принадлежит линии ***l (A Î l)***, то проекция ***A'*** точки принадлежит проекции ***l'*** линии (***A' Î l')***;
- прямая, параллельная плоскости проекции, параллельна своей проекции на эту плоскость.

1.5 Дополнительные свойства параллельных проекций:

- линия, лежащая в плоскости, параллельной плоскости проекции, проектируется на нее без искажения;
- проекции взаимно параллельных прямых параллельны;
- отношение проекций отрезков прямой равно отношению самих отрезков (Рис. 1.5);

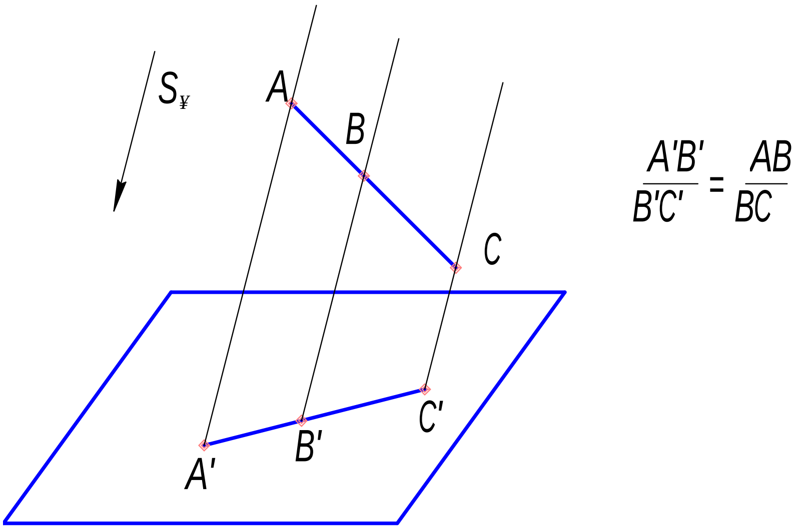


Рис. 1.5

- Отношение проекций отрезков параллельных прямых равно отношению этих отрезков (Рис. 1.6);

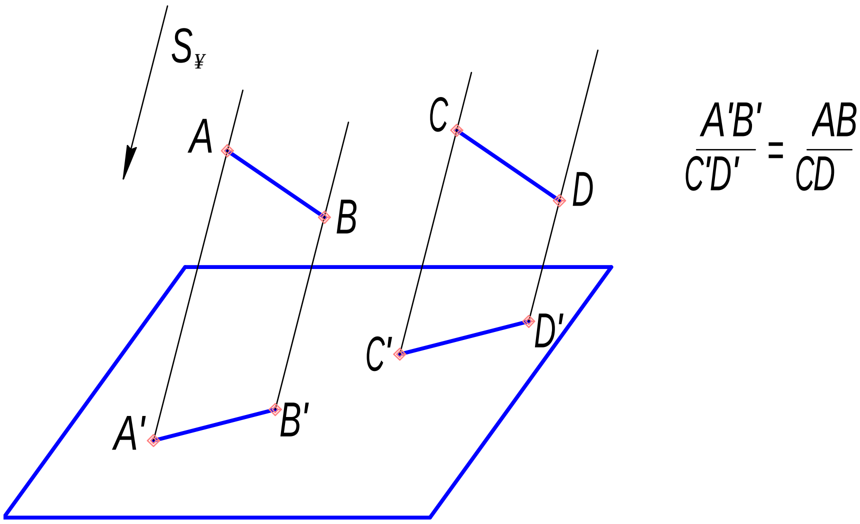


Рис. 1.6

1.6 Ортогональная система проектирования. Точка в пространстве.

В начертательной геометрии, как вообще в инженерной графике, в качестве базы отсчета используется ортогональная система координат, образованная тремя взаимно перпендикулярными (ортогональными) плоскостями проекций:

Π_1 – горизонтальной;

Π_2 – фронтальной;

Π_3 – профильной.

Ортогональную систему координат иначе называют декартовой в честь французского философа и математика Рене Декарта (XV век).

> Линия $\boldsymbol{x}$ пересечения горизонтальной плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ с фронтальной плоскостью $\boldsymbol{\Pi_2}$ ($\boldsymbol{x = \Pi_1 Ç \Pi_2}$) называется осью ***абсцисс***;
>
> Линия $\boldsymbol{y}$ пересечения фронтальной плоскости $\boldsymbol{\Pi_2}$ с профильной плоскостью $\boldsymbol{\Pi_3}$ ($\boldsymbol{z = \Pi_2 Ç \Pi_3}$) называется осью ***аппликат***;
>
> Линия $\boldsymbol{z}$ пересечения горизонтальной плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ с профильной плоскостью $\boldsymbol{\Pi_3}$ ($\boldsymbol{y = \Pi_1 Ç \Pi_3}$) называется осью ***ординат***.

Проектирование производится в направлениях перпендикулярных плоскостям проекций.

Положение точки $\boldsymbol{A}$ в пространстве определено, если определены ее координаты $\boldsymbol{x_A; y_A; z_A}$ в декартовой системе координат (Рис. 1.7).

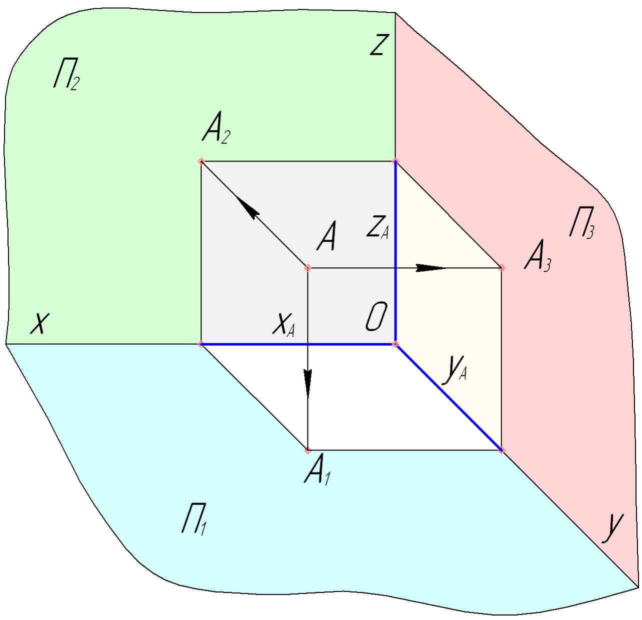


Рис. 1.7 Ортогональное проектирование точки

При этом проектирование точки на плоскости проекций дает ее проекции

- $\boldsymbol{A_1}$ на горизонтальную ПП;
- $\boldsymbol{A_2}$ на фронтальную;
- $\boldsymbol{A_3}$ на профильную.

На этих плоскостях проекции определены пары координат:

на $\boldsymbol{\Pi_1}$ – $\boldsymbol{x_A}$ и $\boldsymbol{y_A}$;

на $\boldsymbol{\Pi_2}$ – $\boldsymbol{x_A}$ и $\boldsymbol{z_A}$;

на $\boldsymbol{\Pi_3}$ – $\boldsymbol{y_A}$ и $\boldsymbol{z_A}$.

Отсюда видно, что любая пара проекций точки в ортогональной системе проектирования содержит всю необходимую информацию для определения положения точки в пространстве.

1.7 Плоский чертеж

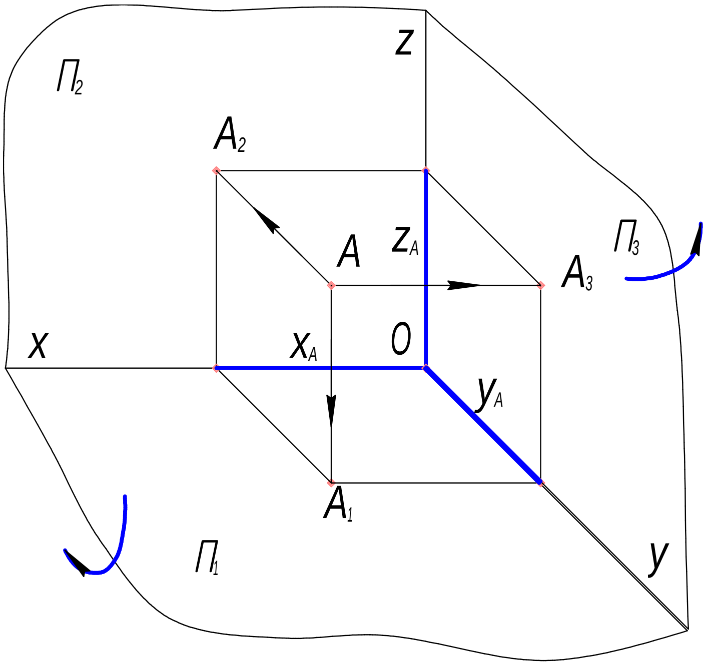


Рис. 1.8 Образование плоского чертежа

Если разрезать ортогональную систему координат с проекциями точки ***A*** рассечь вдоль оси ***y*** и затем повернуть горизонтальную плоскость проекции ***П₁*** вокруг оси ***x*** до совмещения с фронтальной плоскостью проекций ***П₂***, затем повернуть профильную плоскость проекции ***П₃*** вокруг оси ***z*** также до совмещения с фронтальной плоскостью проекций ***П₂***, получится следующий плоский чертеж (Рис. 1.8)

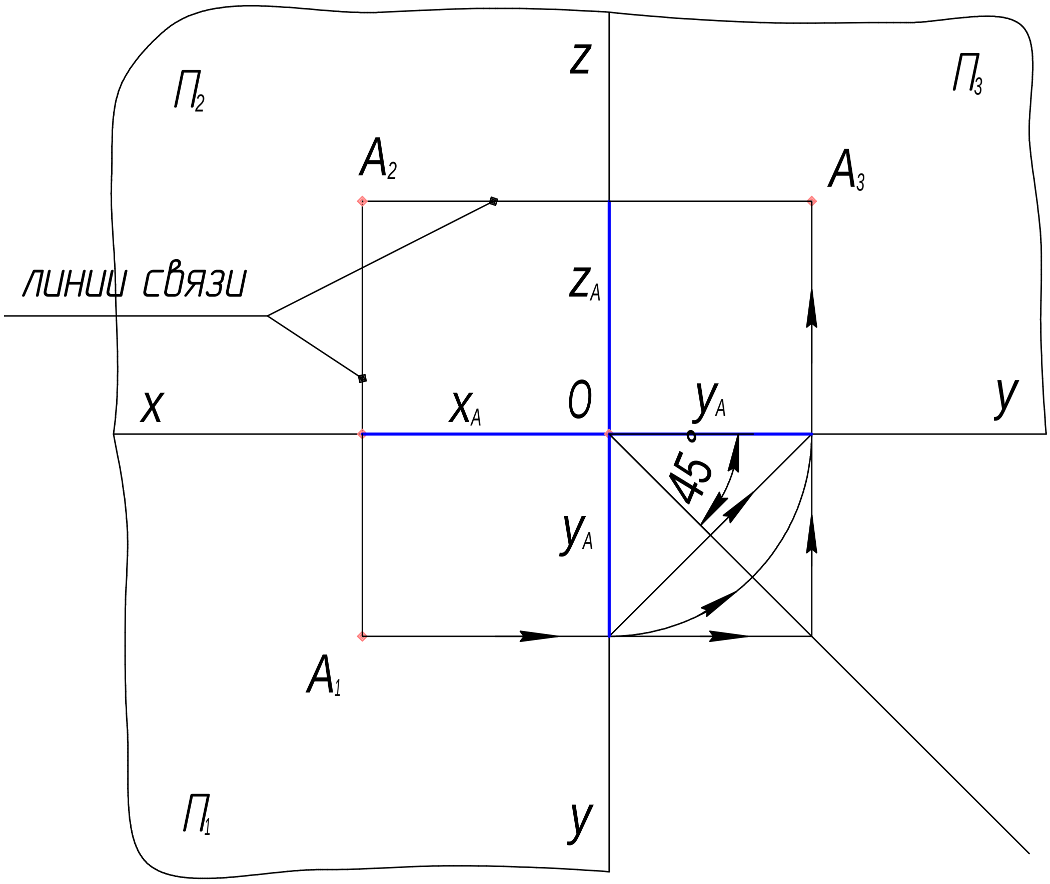


Рис. 1.9 Плоский проекционный чертеж

Такой чертеж в начертательной геометрии принято называть эпюрой Монжа.

Тема 2 Положение прямой относительно плоскостей проекций. Прямые общего и особого (частного) положения. Длина отрезка общего положения. Углы наклона отрезка к плоскостям проекций. Взаимное расположение точки и прямой, двух прямых. Следы прямой.

2.1 Прямая общего положения

В аналитической геометрии прямая определяется как линия пересечения двух плоскостей из совместного решения двух уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

В начертательной геометрии на комплексном чертеже прямую задают ее проекциями (Рис. 2.1).

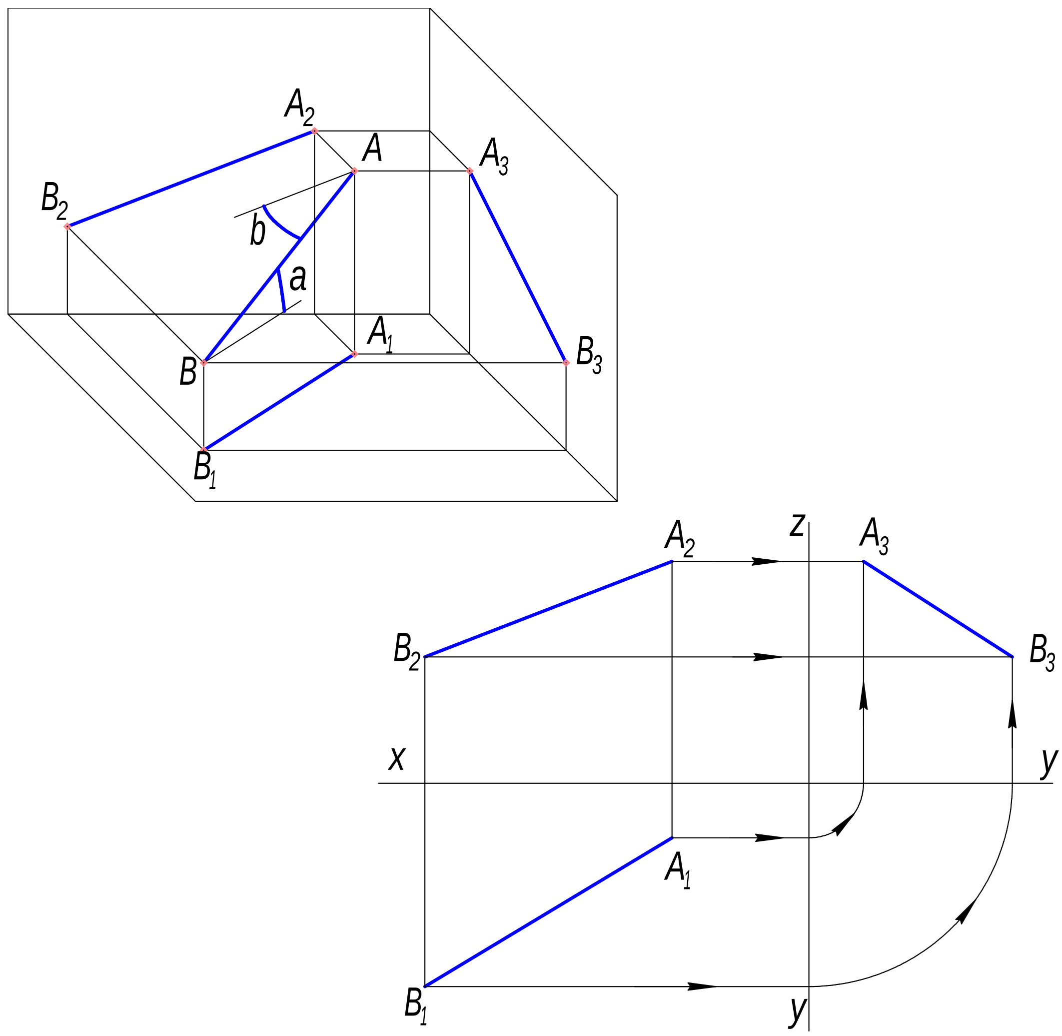


Рис. 2.1 Проекционный чертеж отрезка прямой

Свойства проекций отрезка прямой:

- прямая $\boldsymbol{AB}$ – имеет прямые проекции $\boldsymbol{A_1B_1}$, $\boldsymbol{A_2B_2}$ и $\boldsymbol{A_3B_3}$;
- проекции прямой не больше самой прямой

$$A_1B_1 \le AB; \qquad A_2B_2 \le AB; \qquad A_3B_3 \le AB;$$

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos a; \qquad A_2B_2 = AB \cdot \cos b; \qquad A_3B_3 = AB \cdot \cos g.$$

Если углы a, b, g между прямой и плоскостями проекций не равны нулю и не равны 90^o, имеем прямую общего положения.

2.2 Прямые линии особого (частного) положения

1. Прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ ($\boldsymbol{AB} \parallel \boldsymbol{\Pi_1}$), иначе – лежащая в плоскости, параллельной $\boldsymbol{\Pi_1}$, называется – ***горизонталь*** (Рис. 2.2).

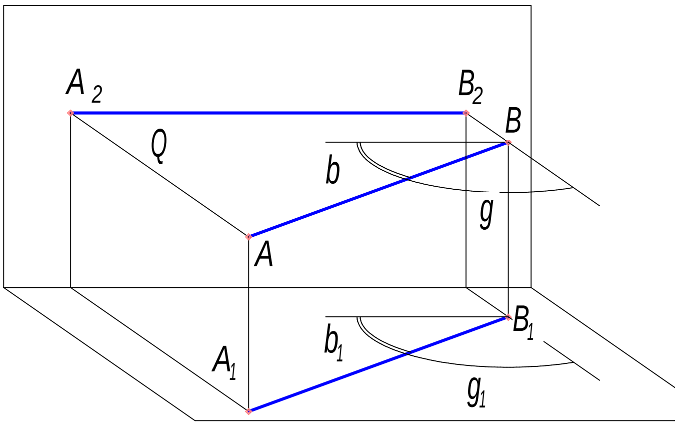


Рис. 2.2 Горизонталь

Проведем через прямую $\boldsymbol{AB}$ плоскость $\boldsymbol{\Theta} \parallel \boldsymbol{\Pi_1}$.

Тогда видим, что $\boldsymbol{A_2B_2}$ 2 $\boldsymbol{x_{1,2}}$.

Видим также, что $\boldsymbol{A_1B_1} = \boldsymbol{AB}$, т.к. имеем прямоугольник $\boldsymbol{A_1B_1AB}$, у которого противоположные стороны равны и параллельны.

То есть, говорят, что линия $\boldsymbol{AB}$ проектируется на $\boldsymbol{\Pi_1}$ в натуральную величину. Угол $\boldsymbol{\beta}$ между прямой $\boldsymbol{AB}$ и фронтальной плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$, а также угол $\boldsymbol{\gamma}$ меду прямой $\boldsymbol{AB}$ и профильной плоскостью проекций $\boldsymbol{\Pi_3}$ проектируется на $\boldsymbol{\Pi_1}$ в натуральную величину (Рис. 2.3).

2. ***Фронталь*** (фронтальная прямая) – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$. Фронталь имеет фронтальную проекцию, ревную натуральной величине прямой. Углы между фронталью, горизонтальной и профильной плоскостями на фронтальной плоскости проекций отображаются в натуральную величину;

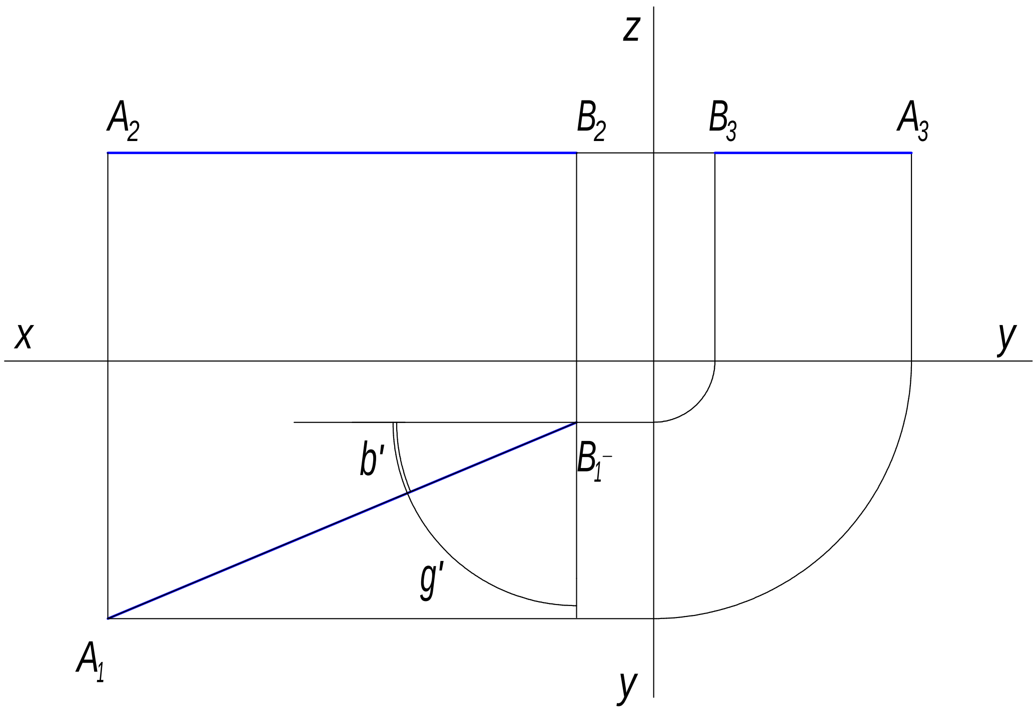


Рис. 2.3 Проекции горизонтали

3. ***Профильная прямая*** - прямая, параллельная профильной плоскости проекций ***П₃***. иная прямая имеет профильную проекцию, равную натуральной величине прямой. Углы между профильной прямой, горизонтальной и фронтальной плоскостями на профильную плоскость проекций проектируются в натуральную величину.
4. Линия, параллельная двум плоскостям проекций, будет перпендикулярной третьей плоскости проекций. Ее проекция на эту плоскость будет точкой. Такая линия называется ***проектирующей*** на соответствующую плоскость (Рис. 2.4).

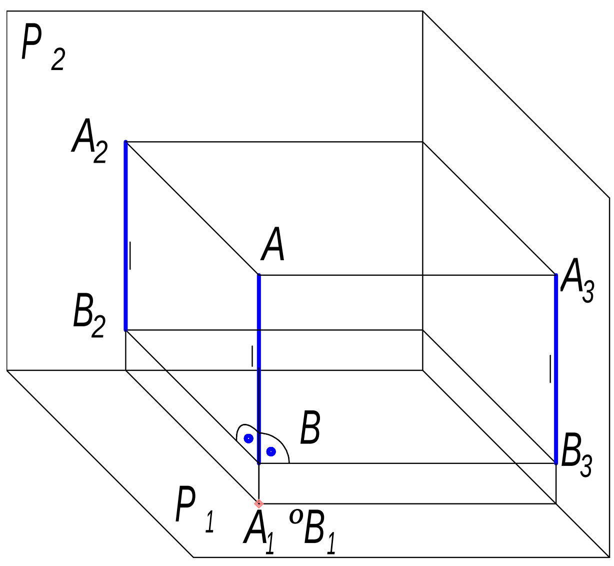


Рис. 2.4 Горизонтально-проектирующая прямая

Здесь линия **AB** – горизонтально-проектирующая.

5. Если есть две проекции линии, представляющие собой отрезки, совпадающие с линией связи, (т.е. ⊥ оси) и третьей проекции нет, исходная линия не определена и может иметь любую форму (Рис. 2.5).

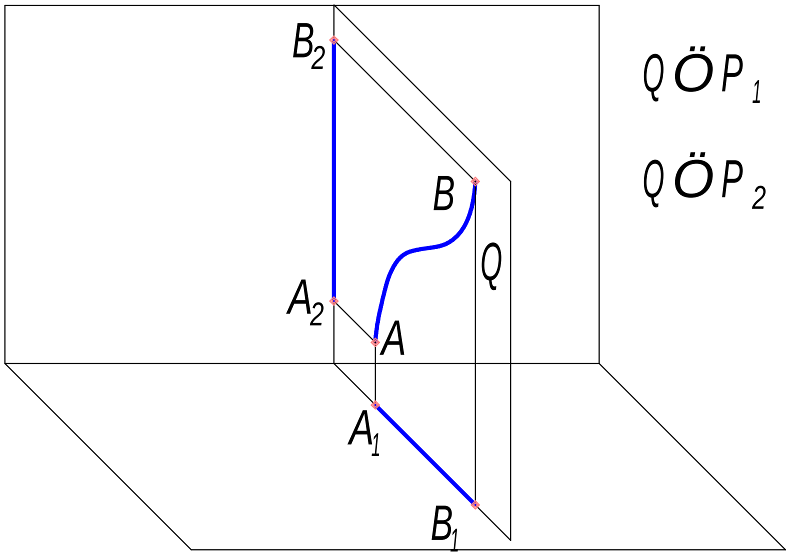


Рис. 2.5

2.3 Длина отрезка общего положения. Углы наклона прямой к плоскостям проекции

Определение натуральной величины отрезка по его проекциям на плоскости координат основано на построении прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза, это искомая натуральная длина отрезка, а катеты, один - это одна из проекций отрезка на плоскость проекций, другой катет – разность высот концов отрезка на другой плоскости проекций (Рис. 2.6).

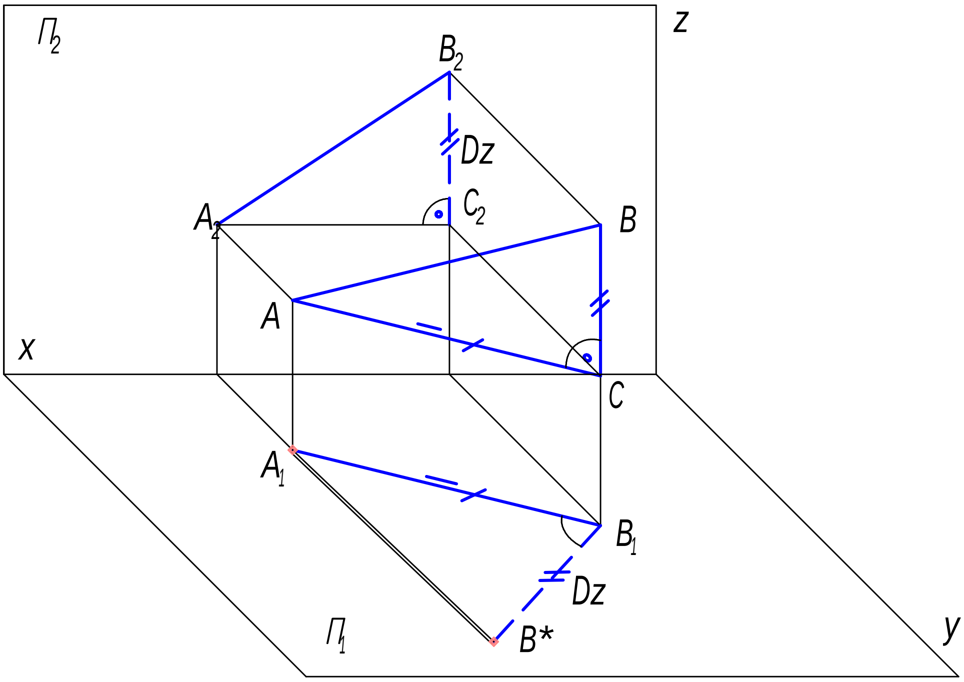


Рис. 2.6 Определение натуральной длины отрезка прямой

На проекционном чертеже эти элементы дадут необходимое построение (Рис. 2.7):

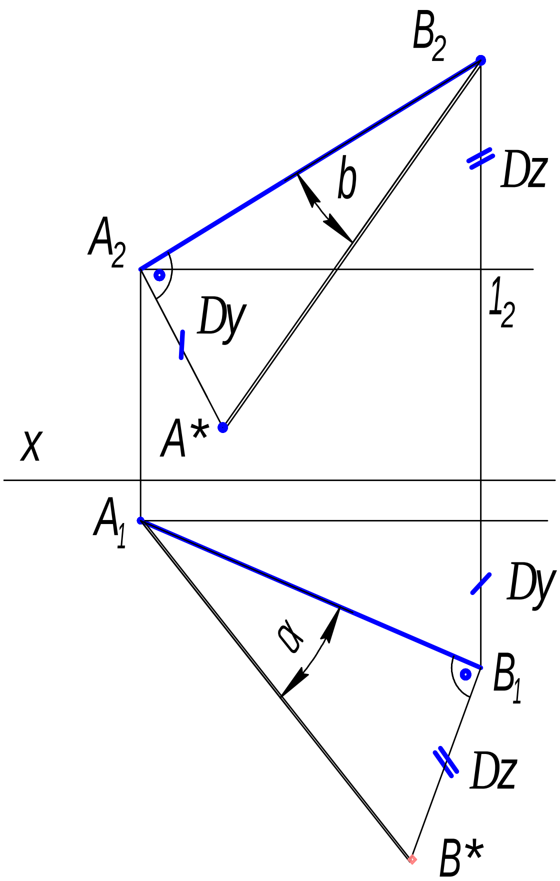


Рис. 2.7 Построение, дающее натуральную длину отрезка прямой

$BC = B_2C_2$ *т.к.*

$CC_2 \perp П_2$; $BB_2 \perp \Pi_{2;}$

$BC \perp \Pi_1$; $B_2C_2 \perp \Pi_1$

$B_2B\ II\ C_2C$; $B_2C_2\ II\ BC$

Аналогично - $AC = A_1B_1$

AB – гипотенуза ***ΔABC***, где

AC и ***BC*** – катеты.

$\boldsymbol{B_1\ B^* = BC = B_2C_2}$

$\boldsymbol{A_1B^* = AB}$

$\boldsymbol{B_2A^* = AB}$

2.4 Углы между прямой и плоскостями проекций

Угол между прямой общего положения и плоскостью проекций может быть не больше 90^0 , т.е. острый или прямой (Рис. 2.8).

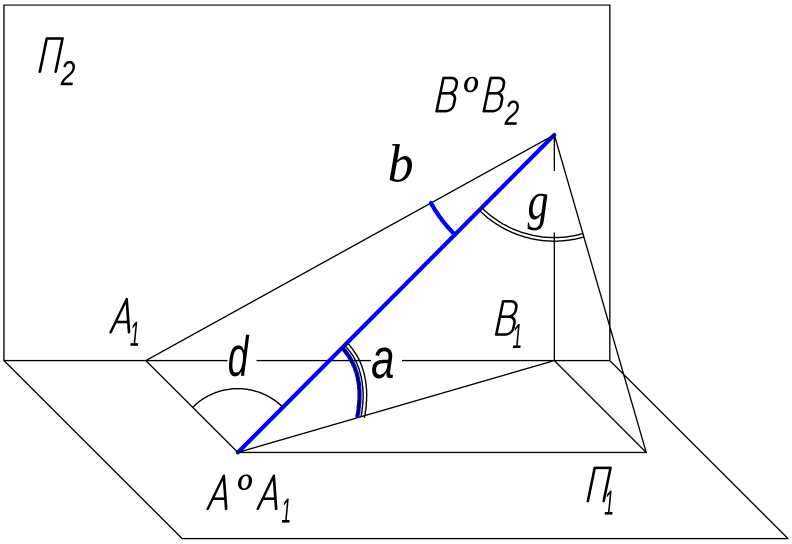


Рис. 2.8 Углы между прямой и плоскостями проекций

Сумма углов между прямой и двумя любыми плоскостями проекций не больше 90^0.

$$a + b \le 90^0$$

Для линий частного положения сумма углов:

горизонтали $b + g = 90^0$

фронтали $a + g = 90^0$

профильной $a + b = 90^0$

2.5 Следы прямой

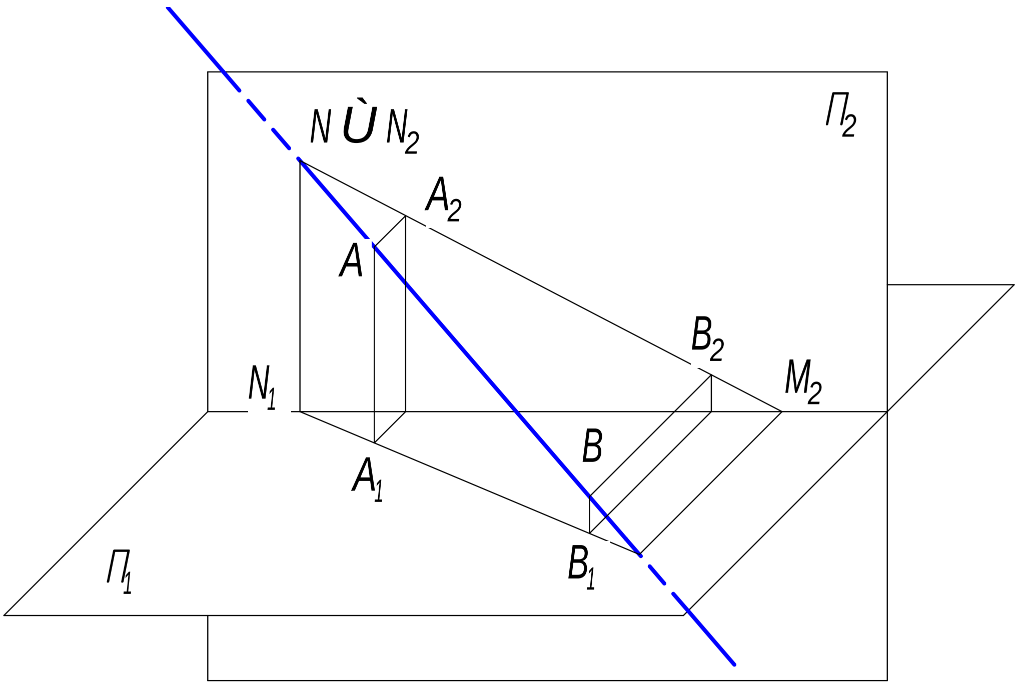


Рис. 2.9 Следы прямой

Следы прямой, это точки пересечения прямой с плоскостями проекций (Рис. 2.9, Рис. 2.10).

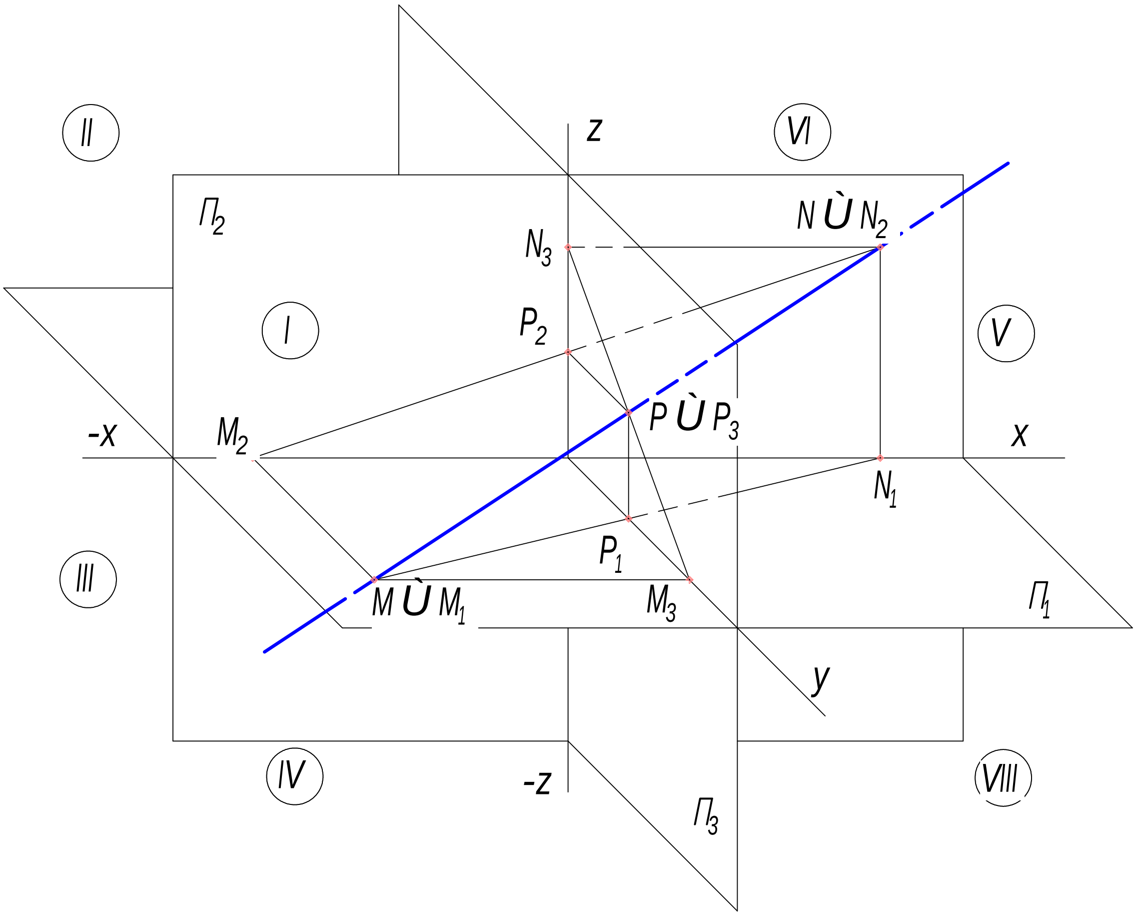


Рис. 2.10 Следы прямой в октантах пространства

Правило построения следов прямой (Рис. 2.11):

– Для нахождения фронтального следа $\boldsymbol{N}$ прямой $\boldsymbol{AB}$ нужно продолжить ее горизонтальную проекцию $\boldsymbol{A_1B_1}$ до пересечения с осью $\boldsymbol{x_{12}}$. Полученная точка пересечения будет горизонтальной проекцией $\boldsymbol{N_1}$ следа прямой $\boldsymbol{AB}$ на фронтальной плоскость проекций. Фронтальная проекция фронтального следа $\boldsymbol{N_2}$ найдется на пересечении продолжения фронтальной проекции $\boldsymbol{A_2B_2}$ линии $\boldsymbol{AB}$ с линии связи, проведенной из горизонтальной проекции $\boldsymbol{N_1}$ фронтального следа.

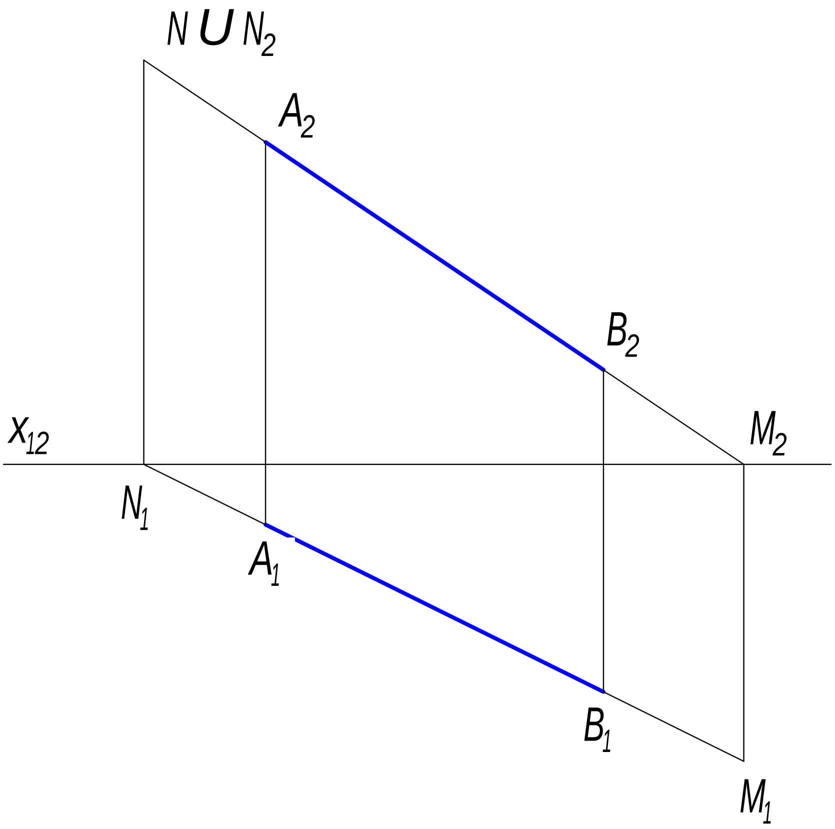


Рис. 2.11 Построение следов прямой

Аналогично,

– для нахождения горизонтального следа ***M*** прямой ***AB*** нужно продолжить ее фронтальную проекцию $\boldsymbol{A_2B_2}$ до пересечения с осью $\boldsymbol{x_{12}}$. Полученная точка пересечения будет фронтальной проекцией $\boldsymbol{M_2}$ следа прямой ***AB*** на фронтальной плоскость проекций. Горизонтальная проекция фронтального следа $\boldsymbol{M_1}$ найдется на продолжении горизонтальной проекции $\boldsymbol{A_1B_1}$ линии ***AB*** по линии связи.

Следы прямой, проходящей через IV, I, V, VI октанты (Рис. 2.12).

Если прямая параллельна плоскости проекций, она не имеет на ней следа.

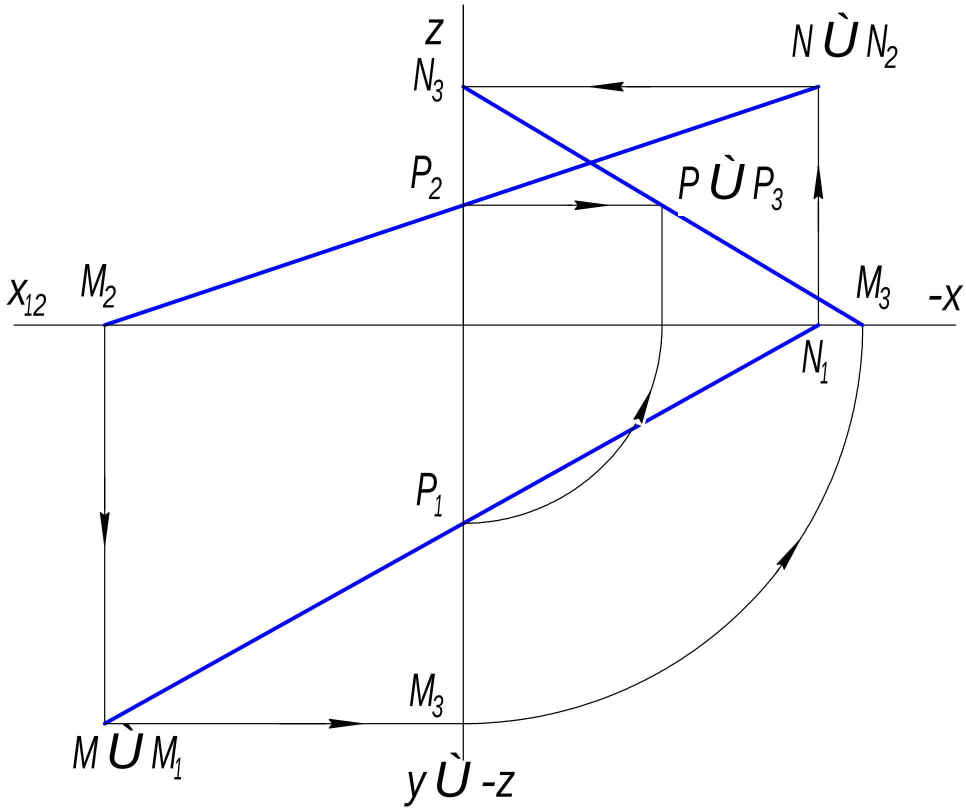


Рис. 2.12 Проекционный чертеж прямой, проходящей через IV, I, V, VI октанты

2.6 Взаимное положение точки и прямой

Если точка принадлежит на прямой, тогда ее проекции принадлежат проекциям прямой! Если две любые проекции точки лежат на двух таких же проекциях прямой, тогда точка принадлежит прямой. На рисунке (Рис. 2.13, Рис. 2.14) точка ***C*** принадлежит прямой ***AB***.

В общем случае, если точка принадлежит любой фигуре – линии или поверхности, тогда проекции точки лежат на соответствующих проекциях фигуры.

Одна проекция точки может оказаться лежащей на той же проекции прямой, однако, если любая другая проекция точки не лежит на аналогичной проекции прямой, тогда точка не принадлежит прямой (Рис. 2.13, Рис. 2.14).

Примеры:

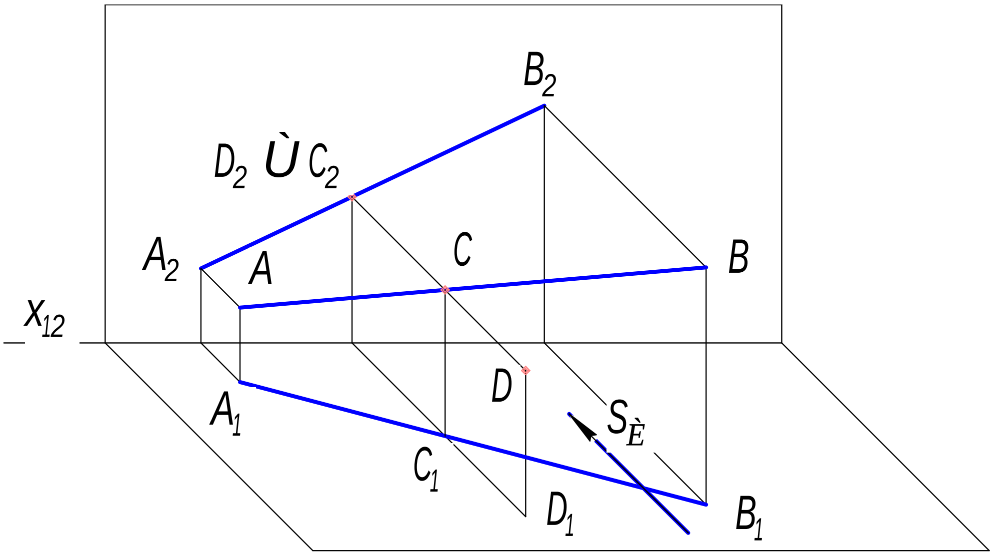


Рис. 2.13 Точка перед прямой

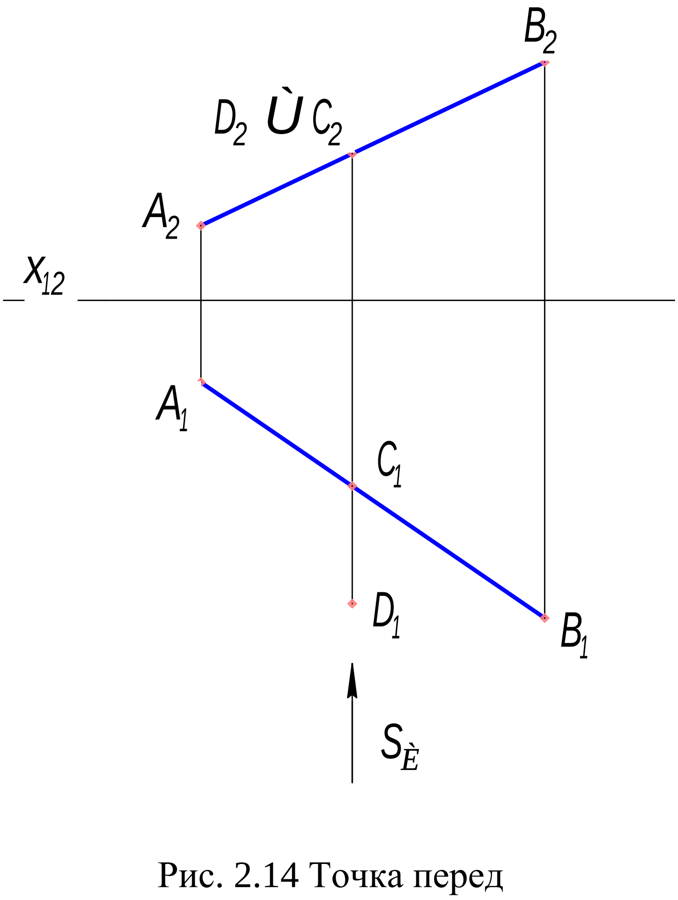


Рис. 2.14 Точка перед прямой на проекционном чертеже

На фронтальной плоскости проекции (.)***D*** лежит на фронтальной проекции линии ***AB*** (***D_2*** Î ***A_2B_2***)**,** но на горизонтальной плоскости проекций ***D_1*** Ï ***A_1B_1***. Отсюда, точка ***D*** не принадлежит линии ***AB*.** На линии ***AB*** лежит (.)***C*** и ее фронтальная проекция ***C_2*** совпадает с фронтальной проекцией ***D_2*** точки ***D***. Однако, горизонтальные проекции ***C_1*** и ***D_1*** не совпадают и, следовательно, эти точки не совпадают в пространстве. (.)***D***, глядя в направлении фронтальной плоскости проекций, лежит перед (.)***C***.

Точки, совпадающие на одной плоскости проекций и несовпадающие на другой плоскости, называются конкурирующими.

На горизонтальной плоскости проекций видно по стрелке взгляда ***$S_{È}$***, что (.)***D_1*** находится перед (.)***C_1***.

2.7 Взаимное положение двух прямых

В случае общего положения двух прямых друг по отношению к другу углы между проекциями этих прямых могут принимать любое значение от 0^0 до 90^0.

Существуют и обладают полезными свойствами для решения задач начертательной геометрии частные взаимные положения прямых:

2.7.1 Взаимно параллельные прямые

Если две любые проекции двух прямых параллельны, тогда прямые параллельны в пространстве!

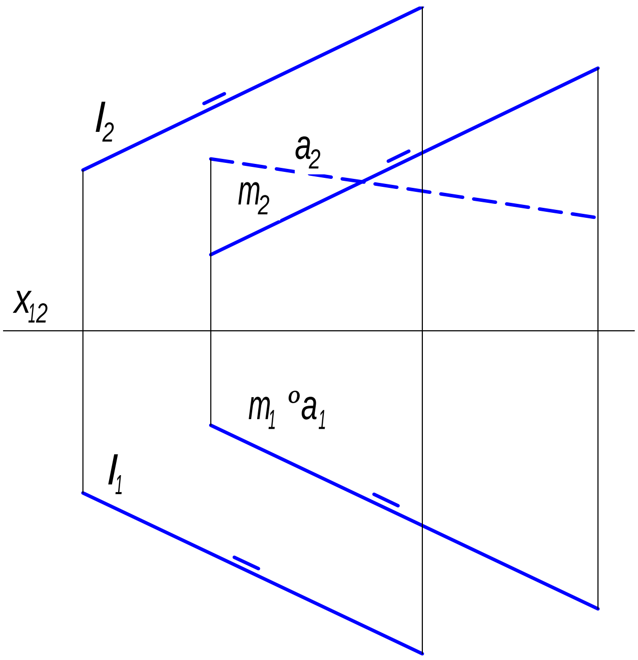


Рис. 2.15 Параллельные прямые

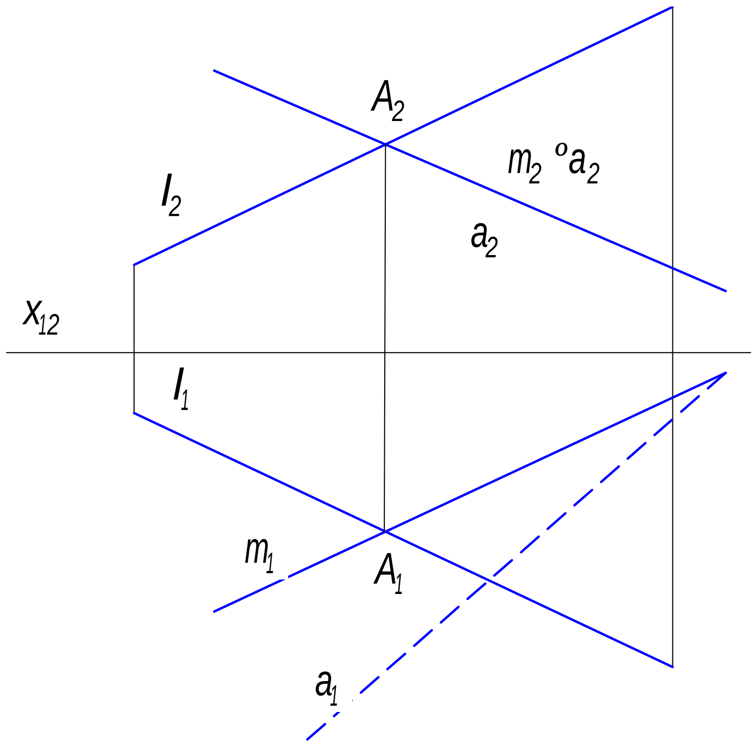
Прямые ***l*** и ***m*** параллельны (***l*** || ***m***).

Прямые ***l*** и ***a*** непараллельны, т.е. скрещиваются (***l***∸***a***), несмотря на то, что горизонтальные проекции линий ***l*** и ***a*** параллельны. Линии ***l*** и ***a*** непараллельны т.к. проекции этих линии на фронтальную плоскость непараллельны.

2.7.2 Пересекающиеся прямые

Если линии[1] пересекаются в пространстве, тогда проекции точек пересечения линий являются точками пересечения проекций линий на плоскостях проекций. Иначе, линии пересекаются в пространстве, если на двух любых плоскостях пересекаются проекции этих линий (Рис. 2.16).

[1] - строго говоря, это относится к любым прямым или кривым линиям



Прямые $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{m}$ пересекаются ($\boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m}$) к точке $\boldsymbol{A}$.

Прямые $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{a}$ не пересекаются. Эти прямые скрещивающиеся.

Для проекционного чертежа условием пересечения двух линий является нахождение точек пересечения проекций этих линий на двух любых плоскостях проекций на одной линии связи.

Рис. 2.16 Пересекающиеся и скрещивающиеся прямые

2.7.3 Скрещивающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны друг другу в пространстве.

Точки пересечения проекций двух скрещивающихся прямых на двух любых плоскостях проекций не лежат на одной линии связи (см. Рис. 2.16).

2.7.4 Проекции плоских углов

Рассмотрим прямоугольное проектирование некоторого произвольного угла $\angle \boldsymbol{ABC} = \alpha$ на плоскость $\boldsymbol{\Pi}$ (Рис. 2.17)

Лучи проектирования $\boldsymbol{S}_{¥}$, перпендикулярные плоскости проектирования, образуют со сторонами заданного угла проектирующие плоскости Q и S, на поверхности которых расположены стороны $\angle \boldsymbol{ABC}$.

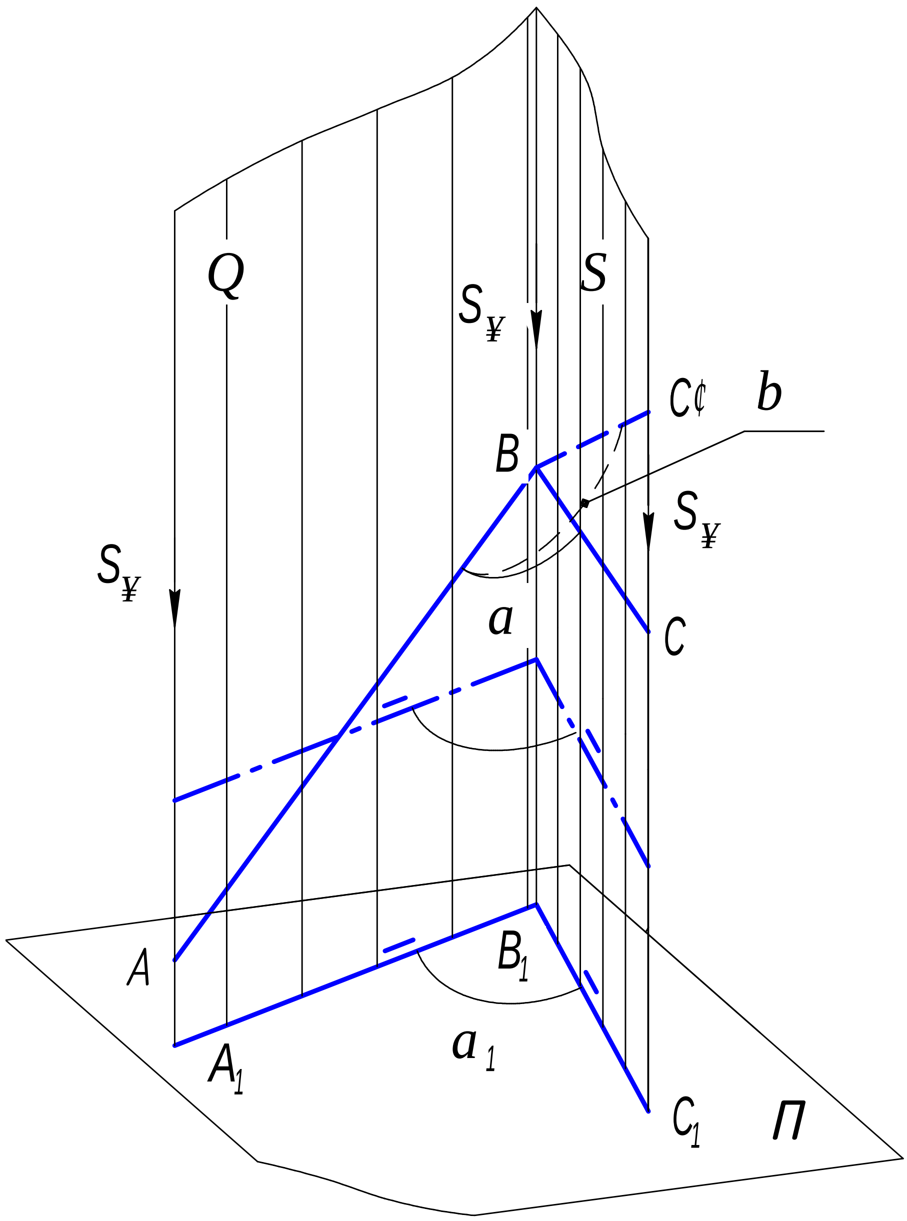


Рис. 2.17 Параллельные проекции углов

Предположим, заданный $\angle \boldsymbol{ABC}$ острый ($\angle \boldsymbol{ABC}$<**90**^{0}) и его проекция на $\boldsymbol{П_1}$ также меньше 90^0. В общем случае $\angle \boldsymbol{ABC}^{1}\angle \boldsymbol{A_1B_1C_1}$ ($a^{1}a_1$). Проекция угла будет равна углу в том случае, когда стороны угла будут параллельны плоскости проектирования ($\angle$**A¢B¢C¢**=$\angle \boldsymbol{A_1B_1C_1}$). Если (.)***C*** переместить вдоль луча проектирования на некоторое расстояние от заданного положения, например, в положение ***C¢***. Тогда угол изменится и приобретет значение *b*. Допустим, угол *b* оказался тупым. Однако проекция угла осталась той же. Таким образом, одну и ту же проекцию могут иметь разные углы, причем, как острые, так и тупые. В общем случае углы величиной от 0^0 до 180^0 могут иметь ортогональную проекцию на плоскость со значением от 0^0 до 180^0. Проекция острого угла в зависимости от положения его сторон по отношению к плоскости проектирования может оказаться тупым углом и проекция тупого угла острым.

Особое значение в начертательной геометрии имеет проектирование прямого угла.

Если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекции, то ортогональная проекция прямого угла на эту плоскость будет прямым углом (Рис. 2.18).

Доказательством этого утверждения может, например, быть следующим:

Пусть сторона ***BC*** прямого угла ***ABC*** параллельна плоскости проектирования *P* (***BC***||*P*). Она образует со своей проекцией $\boldsymbol{B_1C_1}$ плоскость *D*, перпендикулярную плоскости проектирования ***П***.

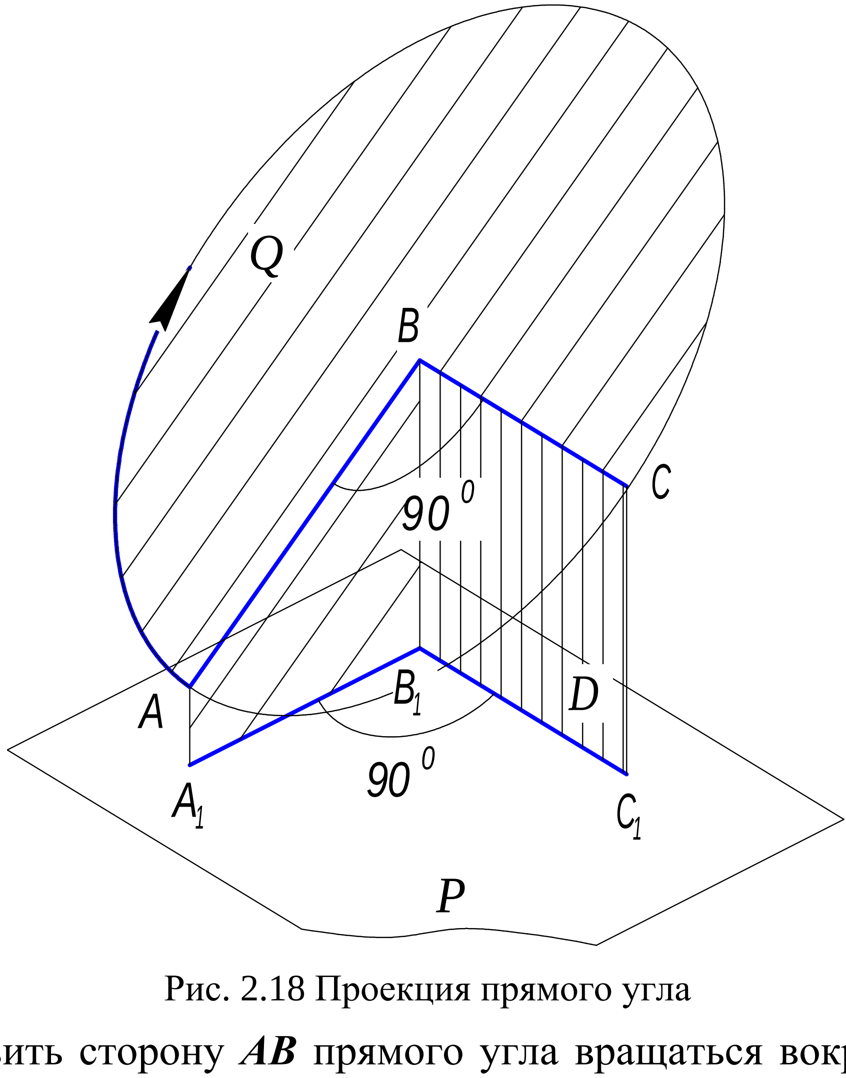


Рис. 2.18 Проекция прямого угла

Если заставить сторону ***AB*** прямого угла вращаться вокруг стороны ***BC***, она образует плоскость *Q*, которая будет перпендикулярна оси вращения ***BC*** и, следовательно, перпендикулярна параллельной ей плоскости ***П*** (*Q*⊥***П***)**.** Плоскость *Q* будет также перпендикулярна плоскости *D*, которой принадлежит перпендикуляр ***BC*** (ось вращения

AB) к плоскости *Q*. Таким образом, плоскости *D* и *Q* образуют двугранный прямой угол. При пресечении прямого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной обеим плоскостям, образующим двугранный угол, а это плоскость ***П***, будет получен прямой линейный угол как мера двугранного угла. Таким образом, при любом положении стороны ***AB*** прямого угла ***ABC***, если сторона ***BC*** параллельна плоскости проектирования ***П***, ее проекция $\boldsymbol{A_1B_1}$, лежащая на линии пересечения плоскости *Q* с плоскостью ***П***, образует с проекцией $\boldsymbol{B_1C_1}$ стороны ***BC*** прямой угол.

На проекционном чертеже, если проекция угла, одна из сторон которого является линией уровня, является прямым углом, тогда сам угол также прямой (Рис. 2.19).

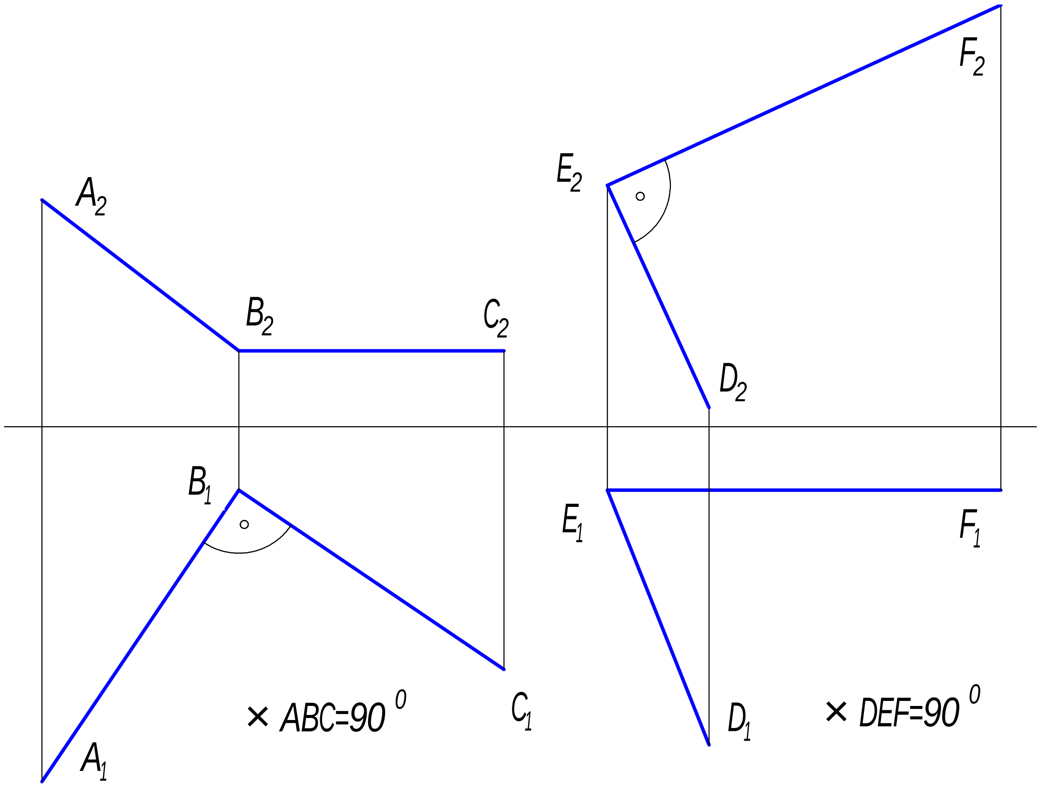


Рис. 2.19 Прямой угол на проекционном чертеже

Если ни одна сторона прямого угла не параллельна плоскости проекции, проекция прямого угла на эту плоскость проекции может принимать любое значение от 0^0 до 180^0.

Тема 3 Плоскость. Точка и прямая на плоскости. Главные линии плоскости. Прямая, параллельная плоскости.

3.1 Задание плоскости на чертеже

Плоскость, это поверхность, задаваемая уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Это поверхность первого порядка, т.к. переменные ***x***, ***y***, ***z*** присутствуют в уравнении поверхности в первой степени.

Положение плоскости может быть задано:

1. тремя точками (Рис. 3.1);

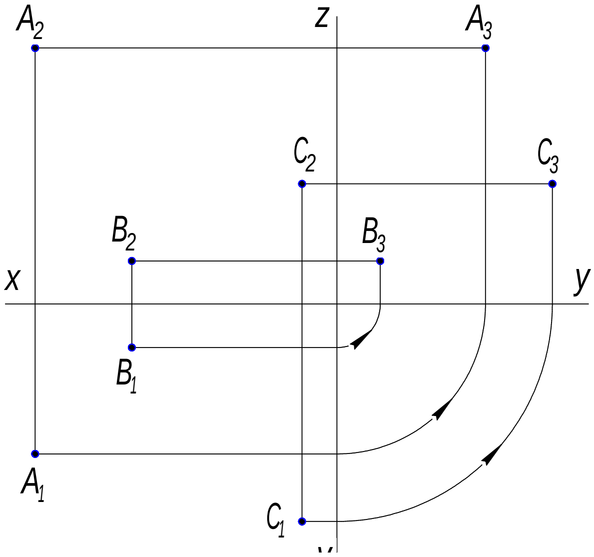


Рис. 3.1 Задание плоскости тремя точками

2. прямой и не принадлежащей ей точкой (Рис. 3.2);

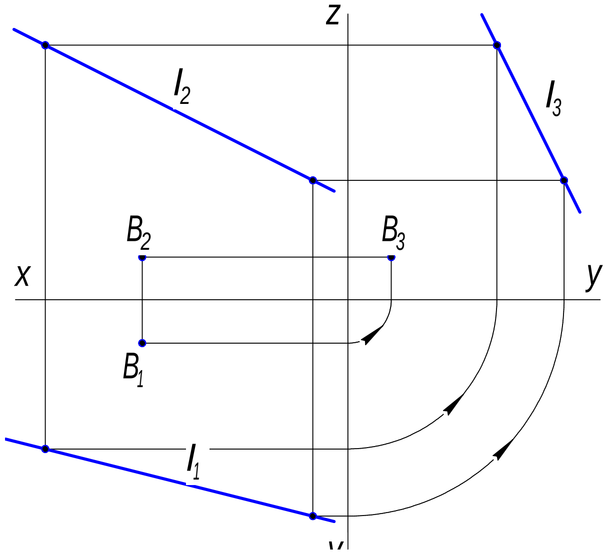


Рис. 3.2 Задание плоскости точкой и прямой

3. двумя пересекающимися прямыми (Рис. 3.3);

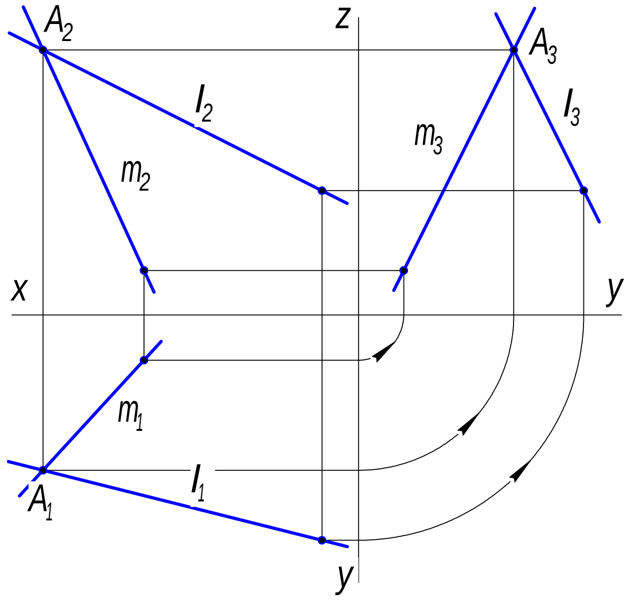


Рис. 3.3 Задание плоскости двумя пересекающимися прямыми

4. двумя параллельными прямыми (Рис. 3.4);

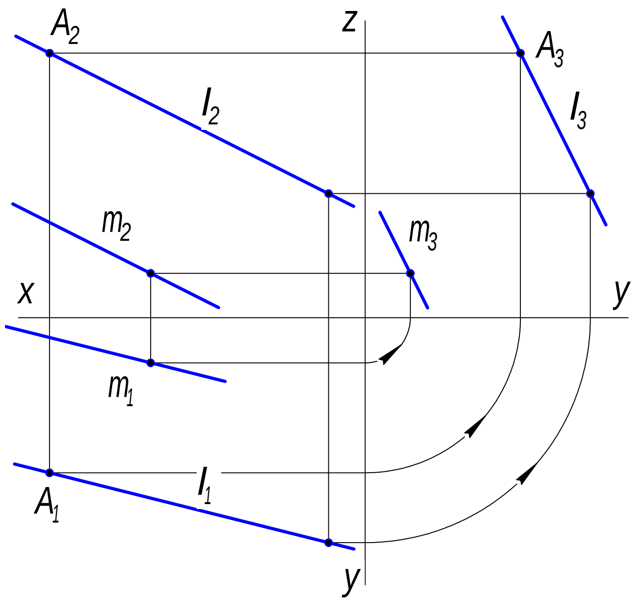


Рис. 3.4 Задание плоскости двумя параллельными прямыми

5. треугольником (три точки) (Рис. 3.5).

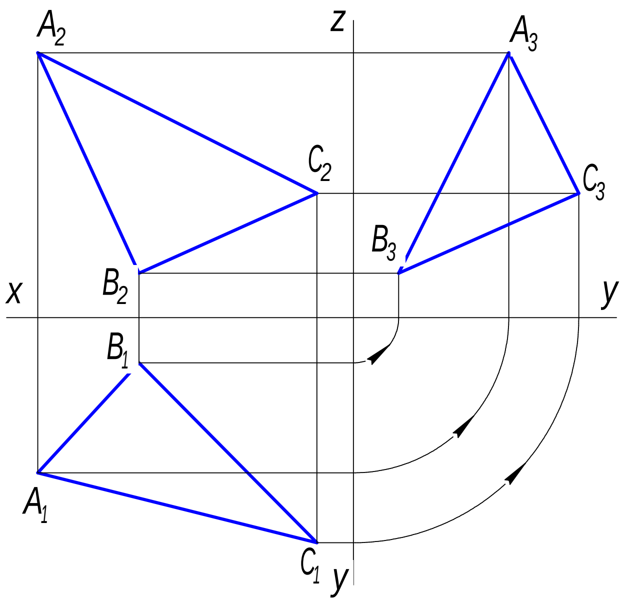


Рис. 3.5 Задание плоскости треугольником

Базовый способ задания плоскости – по трем точкам. Остальные – производные, так как могут быть построены по заданным трем точкам.

В начертательной геометрии для многих задач удобным является задание плоскости следами ее пересечения с плоскостями проекций. **Следы плоскости**, это линии пересечения плоскости с плоскостями проекций (Рис. 3.6).

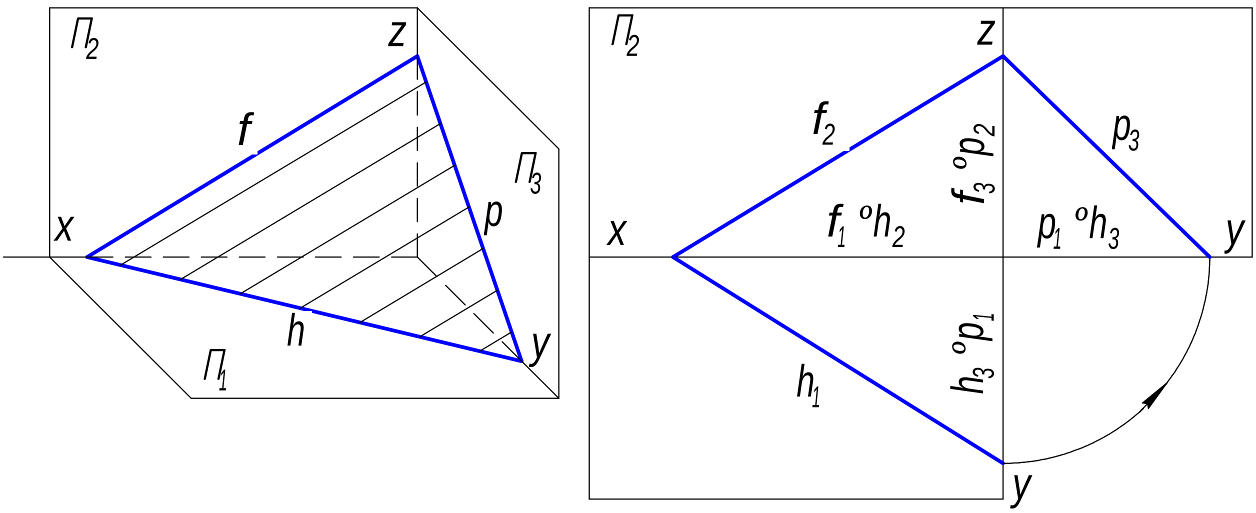


Рис. 3.6 Задание плоскости следами

Плоскость общего положения имеет три следа: на горизонтальной, на фронтальной и на профильной плоскости проекций. Два любых следа плоскости однозначно определяют ее в заданной системе проектирования. По заданным двум следам плоскости может быть построен третий след.

3.2 Плоскости особого (частного) положения

3.2.1 Проектирующие плоскости

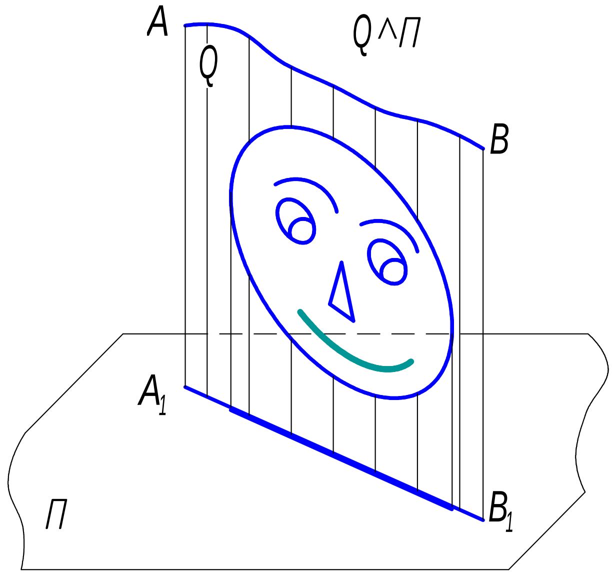


Рис. 3.7 Проектирующая плоскость

Плоскость, перпендикулярная плоскости проекции, в проекции на эту плоскость вырождается в прямую. В эту линию вырождаются вместе с плоскостью и все фигуры, принадлежащие этой плоскости. Такая плоскость называется проектирующей на плоскость проекции (Рис. 3.7).

Свойство проектирующей плоскости собирать в свой след все принадлежащие ей фигуры называется **собирательным** свойством.

Линия, в которую вырождается проектирующая плоскость, является следом проектирующей плоскости на плоскости проекции.

a) Горизонтально-проектирующая плоскость –

это плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (Рис. 3.8).

Здесь ***h*** – горизонтальный след плоскости, заданной пересекающимися прямыми ***AB*** и ***AC***. Иначе эта плоскость также может быть задана своими следами ***h*** и ***f***.

NB[1]! – фронтальный и профильный следы горизонтально-проектирующей плоскости **перпендикулярны** оси ***x*** и ***y*** соответственно.

b) Фронтально-проектирующая плоскость –

плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций

c) Профильно-проектирующая плоскость –

плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций

[1] - NB – nota bene (лат.) – обрати внимание.

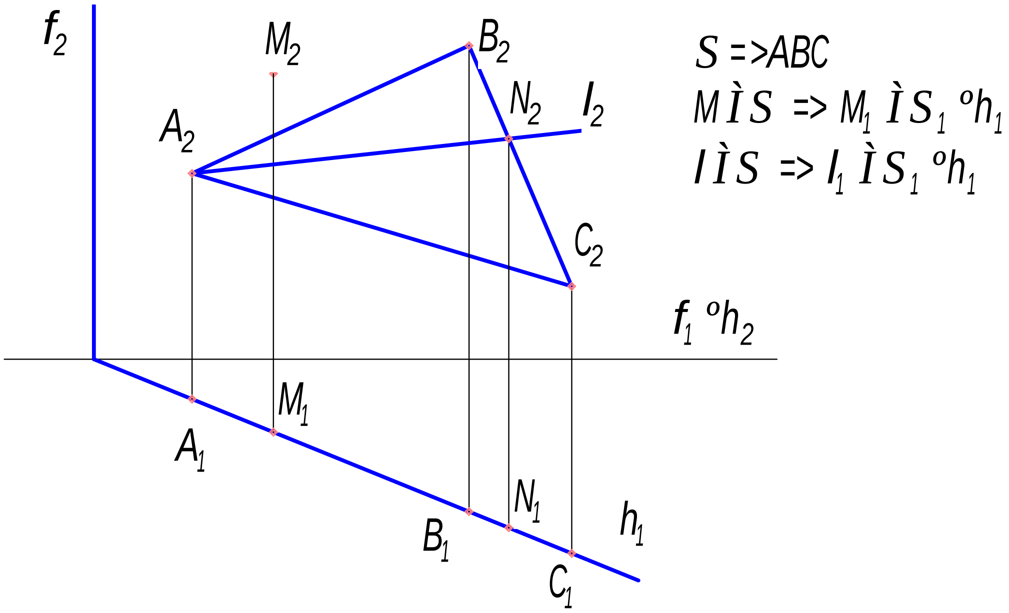


Рис. 3.8 Горизонтально–проектирующая плоскость на проекционном чертеже

Все точки и линии на проектирующей плоскости принадлежат следу плоскости на плоскости проекции.

3.2.2 Плоскости уровня

Плоскости, ^ к двум ПП называются плоскостями уровня. Плоскости уровня параллельны своим ПП.

а) Горизонтальная плоскость уровня ***Г||П₁*** (Рис. 3.9);

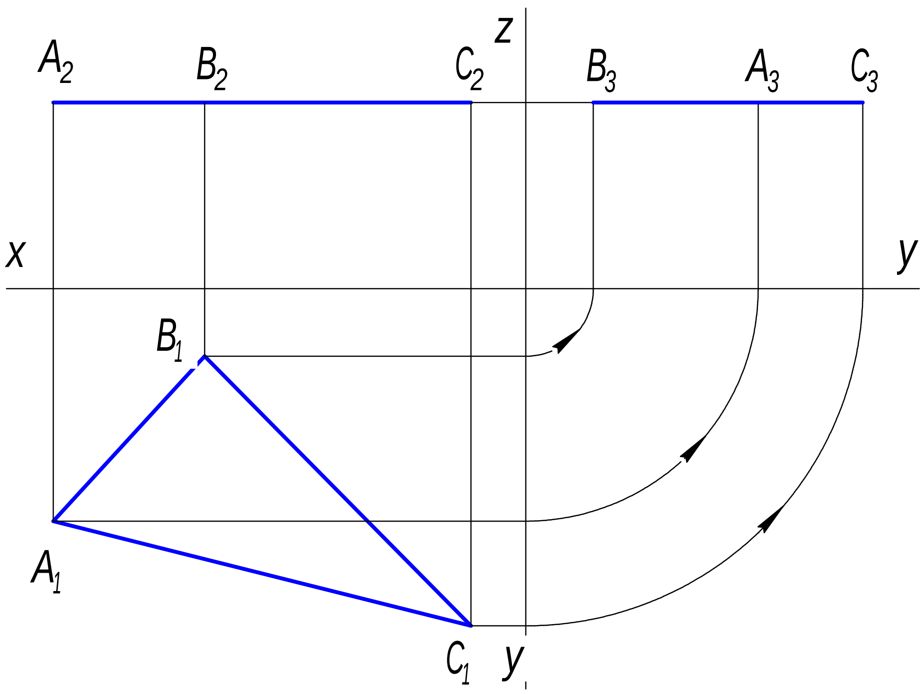


Рис. 3.9 горизонтальная плоскость

b) Фронтальная $F \parallel \boldsymbol{\Pi_2}$;

c) Профильная $\boldsymbol{\Pi} \parallel \boldsymbol{\Pi_3}$

Плоскость уровня на своей плоскости проекции не имеет следа.

Все точки и линии, расположенные на плоскости уровня принадлежат двум имеющимся следам плоскости.

3.3 Прямая на плоскости.

Прямая принадлежит плоскости, если она:

- проходит через две точки, принадлежащие плоскости (Рис. 3.10);

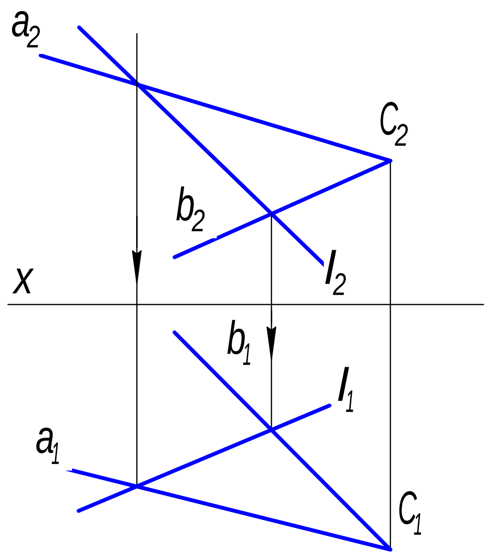


Рис. 3.10
Принадлежность прямой плоскости. Признак 1

проходит через одну точку на плоскости параллельно прямой, принадлежащей плоскости (

- Рис. 3.11);

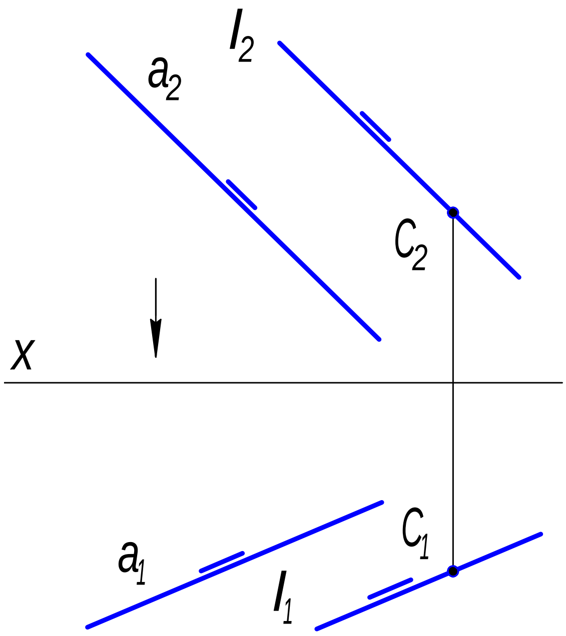


Рис. 3.11 Принадлежность прямой плоскости. Признак 2

- проходит через одну точку на плоскости параллельно прямой, параллельной этой плоскости.

Пример построения прямой на плоскости (Рис. 3.12):

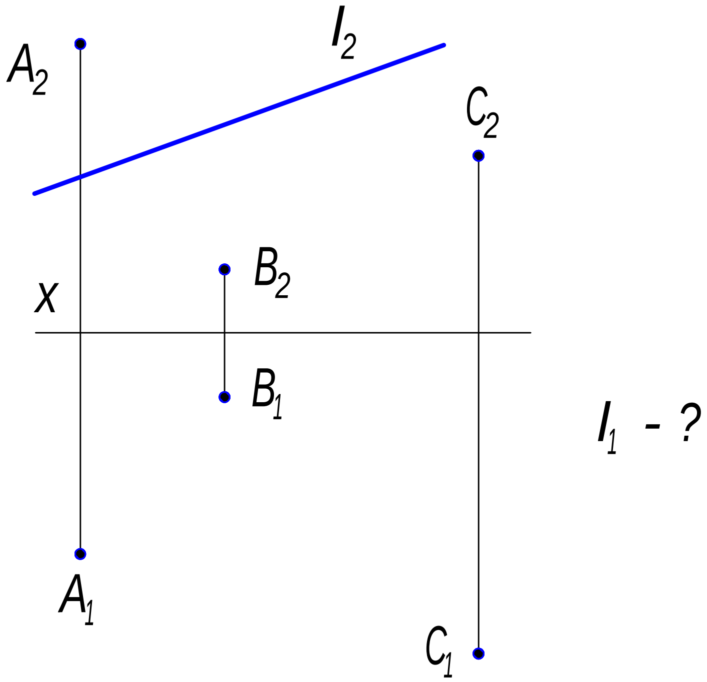


Рис. 3.12 Задача: построить на плоскости ***ABC*** прямую, заданную фронтальной проекцией

3.4 Главные линии плоскости

Для решения многих задач начертательной геометрии используют линии частного положения – **линии уровня**.

Линии уровня, это линии на плоскости, параллельные ПП.

Линия, параллельная горизонтальной ПП – **горизонталь**,

Фронтальной – **фронталь**,

Профильной ПП – **профильная лин**ия.

Так как линии уровня параллельны своим плоскостям проекций, на других ПП их проекции будут параллельны осям координат. Например, фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x_{12} .

Примеры построения линий уровня:

- Горизонталь ***h*** (Рис. 3.13);

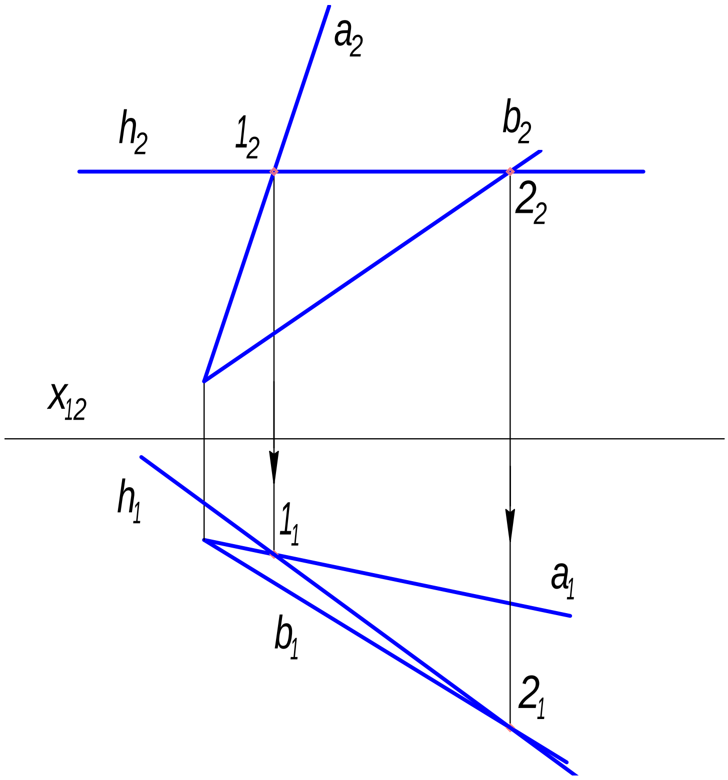


Рис. 3.13 Горизонталь на плоскости

Если плоскость задана следами, линии уровня ***h*** и ***f*** будут параллельны следам на своих плоскостях проекции: горизонтали горизонтальным следам, фронтали фронтальным следам и т.д. (Рис. 3.14). По сути, след плоскости является линией уровня, бесконечно близкой плоскости проекции.

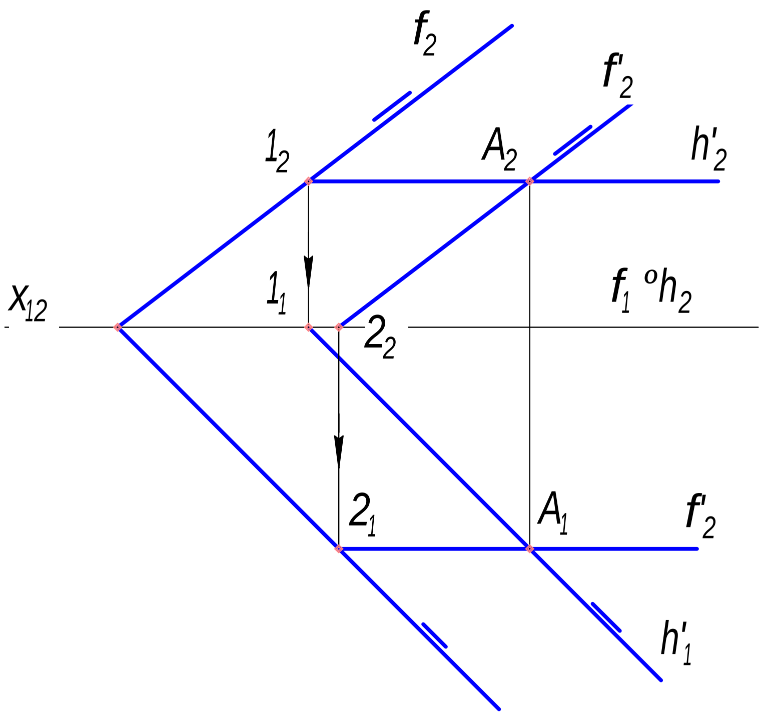


Рис. 3.14 Линии уровня плоскости, заданной следами

3.5 Точка на плоскости

Точка лежит на плоскости, если она принадлежит любой прямой на этой плоскости. Таким образом, для построения точи на плоскости необходимо сначала построить вспомогательную прямую на плоскости такую, чтобы она проходила через заданную проекцию искомой точки и, затем, найти точку на построенной вспомогательной линии вдоль линии связи.

Примеры построения точки на плоскости (Рис. 3.15):

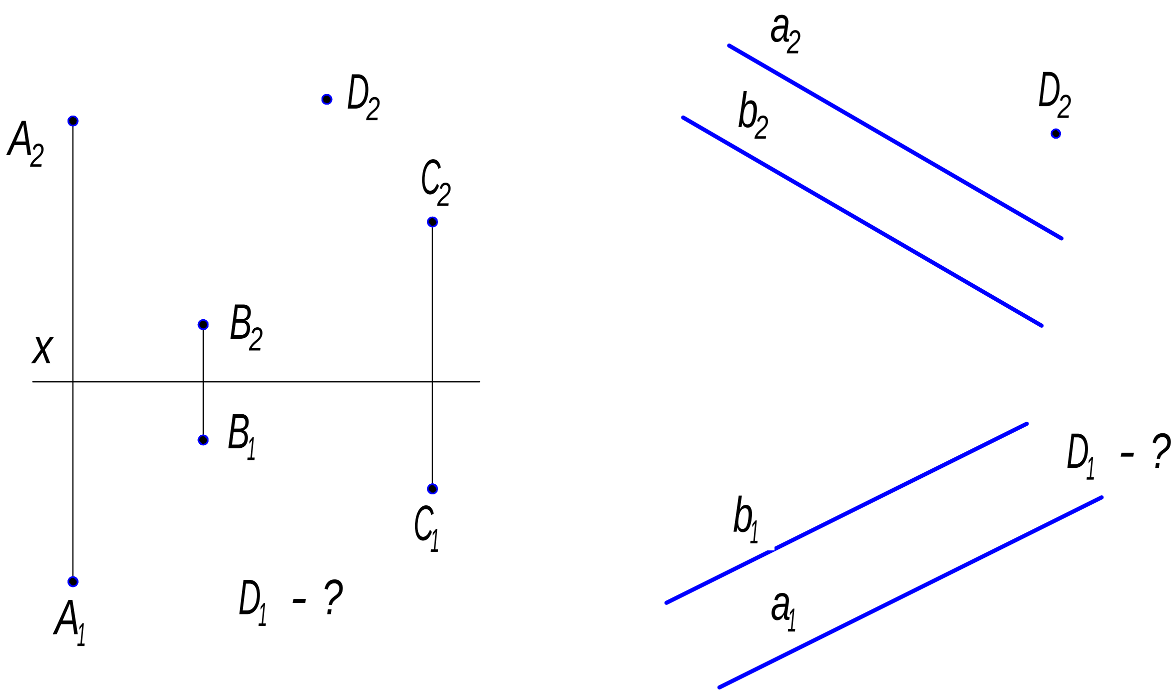


Рис. 3.15 Точка на плоскости

Построение точки на плоскости, заданной следами.

Если плоскость задан следами, в качестве линий, принадлежащих плоскости, с помощью которых проверяется принадлежность точки плоскости, используются линии уровня, которые легко строить, проводя параллельно заданным следам (Рис. 3.16). При этом следует помнить, что проекция точки, принадлежащей следу плоскости, на другой плоскости проекций окажется на оси, разделяющей плоскости проекций (см. (.)***1***).

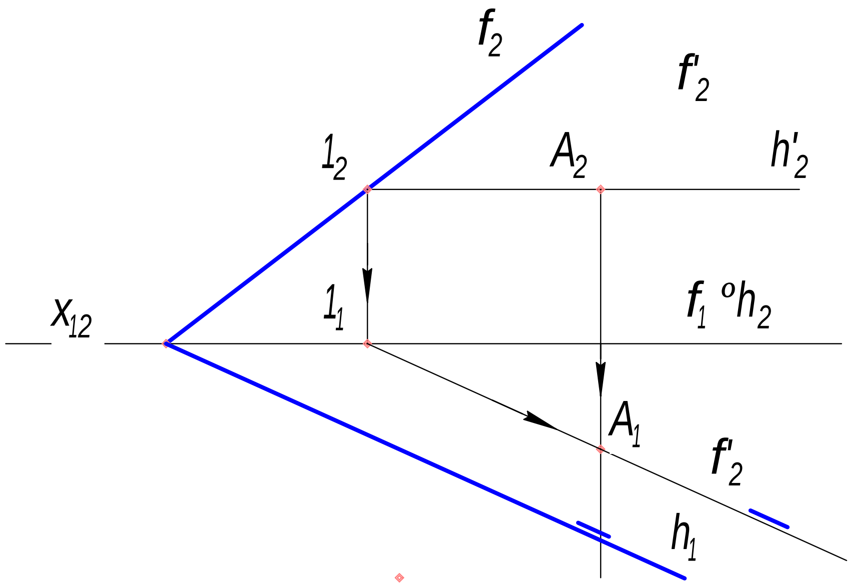


Рис. 3.16 Использование линий уровня для построения очки на плоскости, заданной следами

Тема 4 Взаимное положение геометрических фигур: прямая и плоскость, две плоскости.

Прямая и плоскость, а также две плоскости могут быть:

- параллельны друг другу,
- пересекаться,
- перпендикулярны друг другу.

4.1 Параллельные фигуры

4.1.1 Прямая, параллельная плоскости

Пример 1 (Рис. 4.1).

Есть плоскость ***Σ(aÇb).***

Задана ***(.)A*** и фронтальная проекция $\boldsymbol{l_2}$ прямой.

Провести через ***(.)A*** прямую, параллельную плоскости ***Σ***

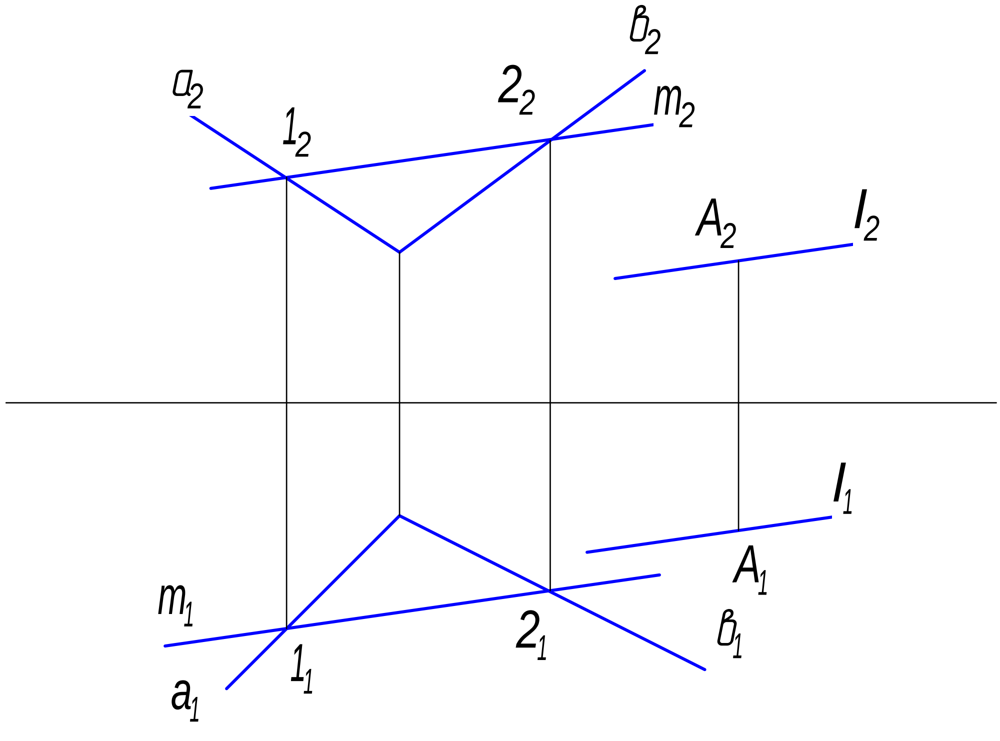


Рис. 4.1 Построение прямой, параллельной плоскости

Пример 2. Через ***(.)A*** провести горизонталь, параллельную плоскости ***Σ(ABC)*** (Рис. 4.2).

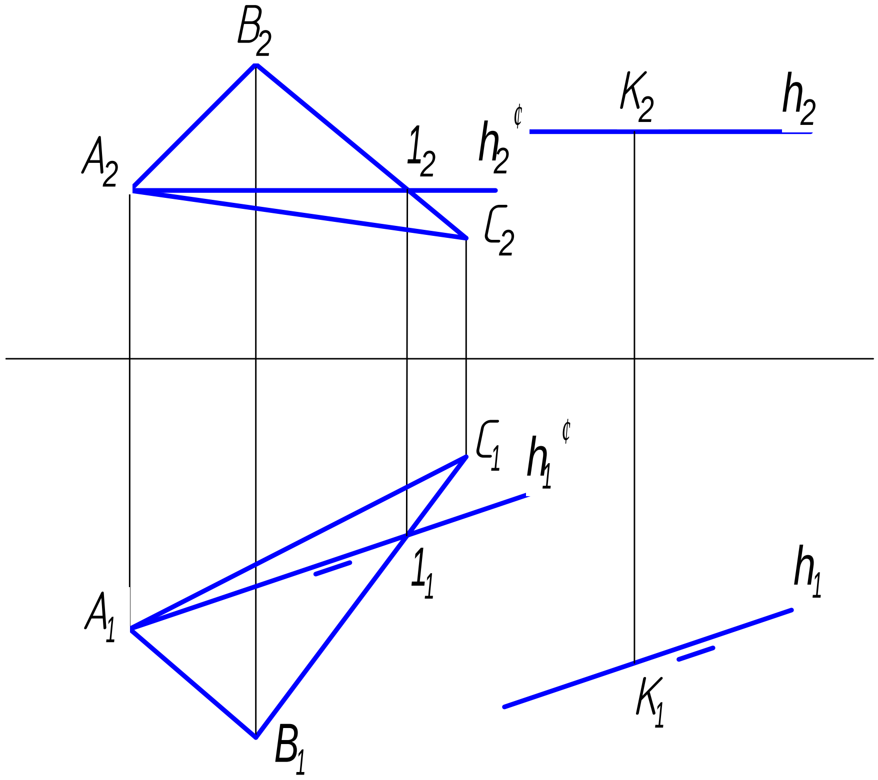
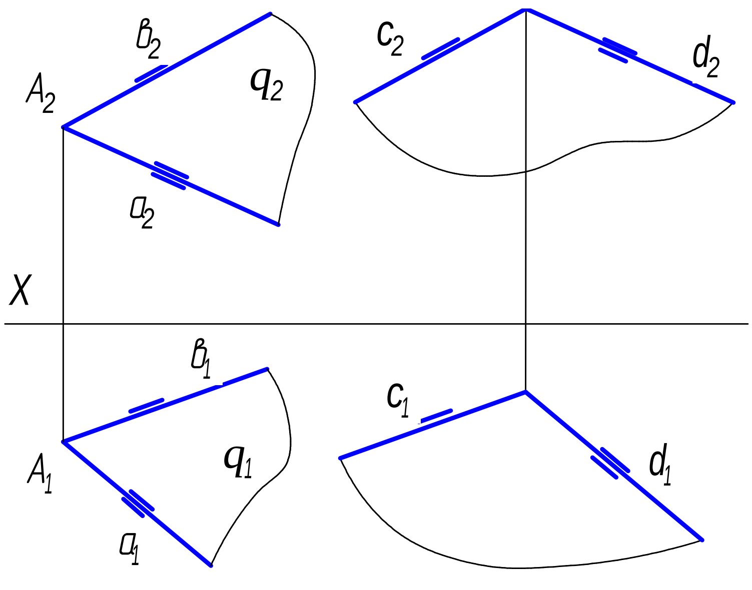


Рис. 4.2 Горизонталь, параллельная плоскости

4.1.2 Взаимно параллельные плоскости

Две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (Рис. 4.3).



$$\left.\begin{array}{l} a_1 // d_1 \\ a_2 // d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a // d$$

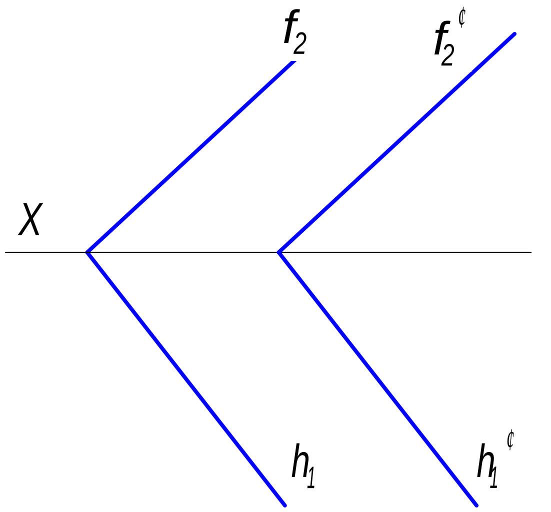
$$\left.\begin{array}{l} b_1 // c_1 \\ b_2 // c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b // c$$

$$пл.\Theta(a \cap b) // пл.\Delta(c // в)$$

Рис. 4.3 Взаимно параллельные плоскости

В качестве пересекающихся линий могут быть выбраны линии частного положения. Отсюда:

Если одноименные следы двух плоскостей параллельны. То параллельны сами плоскости.



$$\text{пл}.\Sigma(f \cap h) \,//\, \text{пл}.\mathrm{T}(f' \cap h')$$

Рис. 4.4 Параллельные плоскости, заданные следами

Пример 4.3: Через (.)***A*** провести плоскость ***Θ*** параллельно плоскости ***Г***, заданной двумя параллельными прямыми (Рис. 4.5).

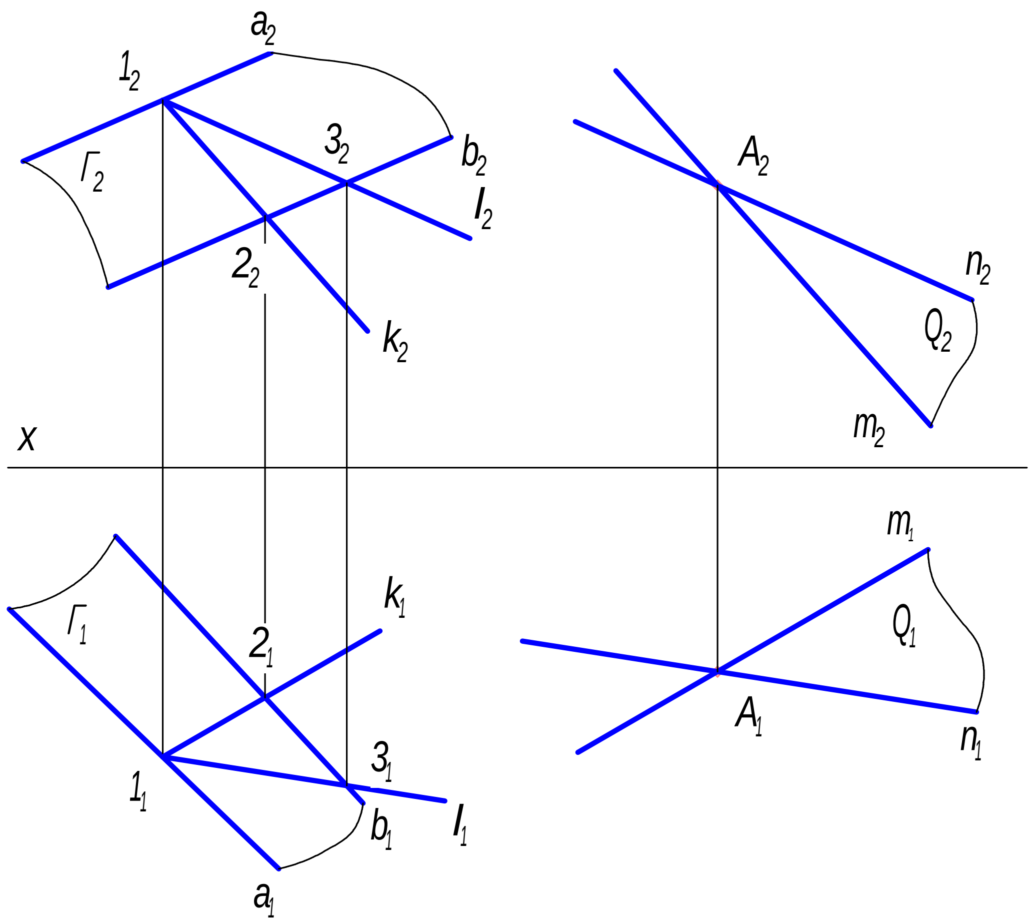


Рис. 4.5 Параллельные плоскости

Техника построения:

1. На плоскости ***Г*,** используя прямую ***a*** выбирается произвольная вспомогательная точка ***1***.

2. Через (.)***1*** проводятся две произвольные прямые ***l*** и ***k*** так, чтобы они пересекли другую прямую, задающую плоскость – линию ***b***.

3. Через заданную точку ***A*** проводят две прямые ***m*** и ***n*,** параллельные соответственно вспомогательным прямым ***l*** и ***k***. Эти две пересекающиеся прямые ***l*** и ***k*** зададут искомую плоскость Q, параллельную заданной плоскости ***Г***.

Пример 4.4: Через (.)***A*** провести плоскость ***Δ*** параллельно фронтально-проектирующей плоскости ***Σ*** (***m***||***n***) (Рис. 4.6).

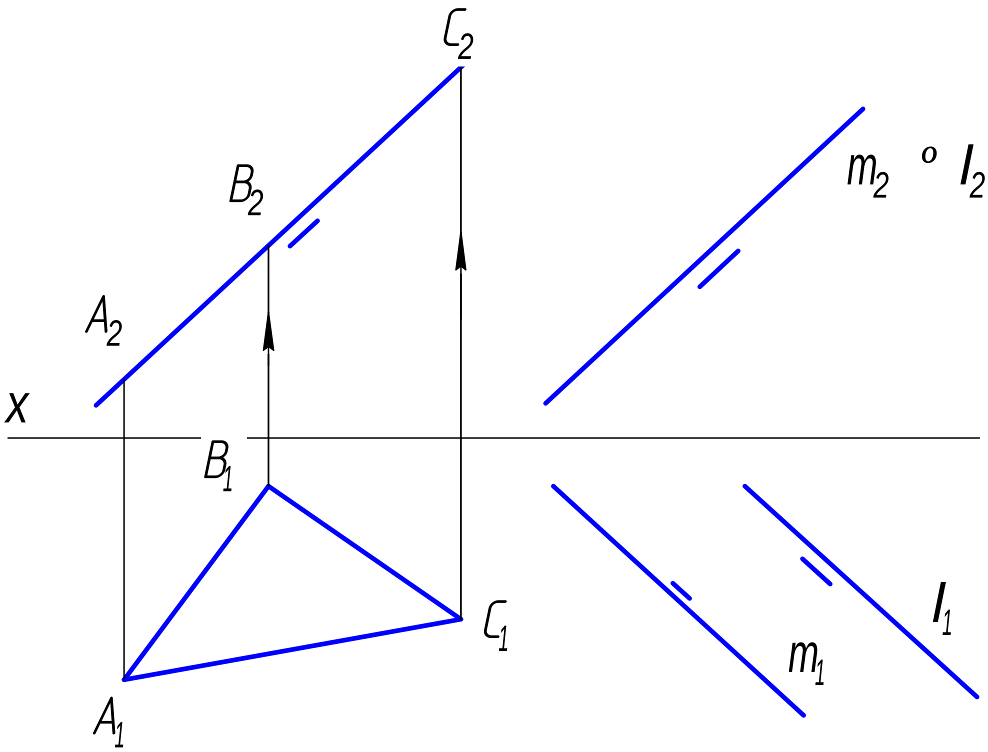


Рис. 4.6 Параллельные плоскости

Техника построения:

1. На фронтальной ПП через фронтальную проекцию $\boldsymbol{A_2}$ заданной точки ***A*** проводится прямая $\boldsymbol{A_2C_2}$ || $\boldsymbol{m_2{}^{o}n_2}$. Эта прямая будет фронтальным следом искомой плоскости D. Плоскость, параллельная фронтально-проектирующей плоскости должна быть сама фронтально-проектирующей плоскостью!
2. На горизонтальной ПП выбираются произвольно две точки $\boldsymbol{B_1}$ и $\boldsymbol{C_1}$.

3. Фронтальные проекции B_2 и C_2 точек B и C ищутся вдоль линий связи на построенном следе искомой плоскости D.

NB! Несмотря на то, что точки B и C были выбраны на горизонтальной ПП произвольно, плоскость, задаваемая точками ABC будет параллельной заданной фронтально-проектирующей плоскости потому, что на фронтальной ПП точки ABC располагаются на одной линии, параллельной фронтальному следу заданной плоскости Σ.

4.2 Пересечение прямой и плоскости. Точка пересечения

Рассмотрим частный случай, когда необходимо найти (.)K пересечения прямой общего положения l и горизонтально-проектирующей плоскости Σ.

Пример 4.9: Построить точку пересечения прямой l с горизонтально-проектирующей плоскостью Σ (Рис. 4.7):

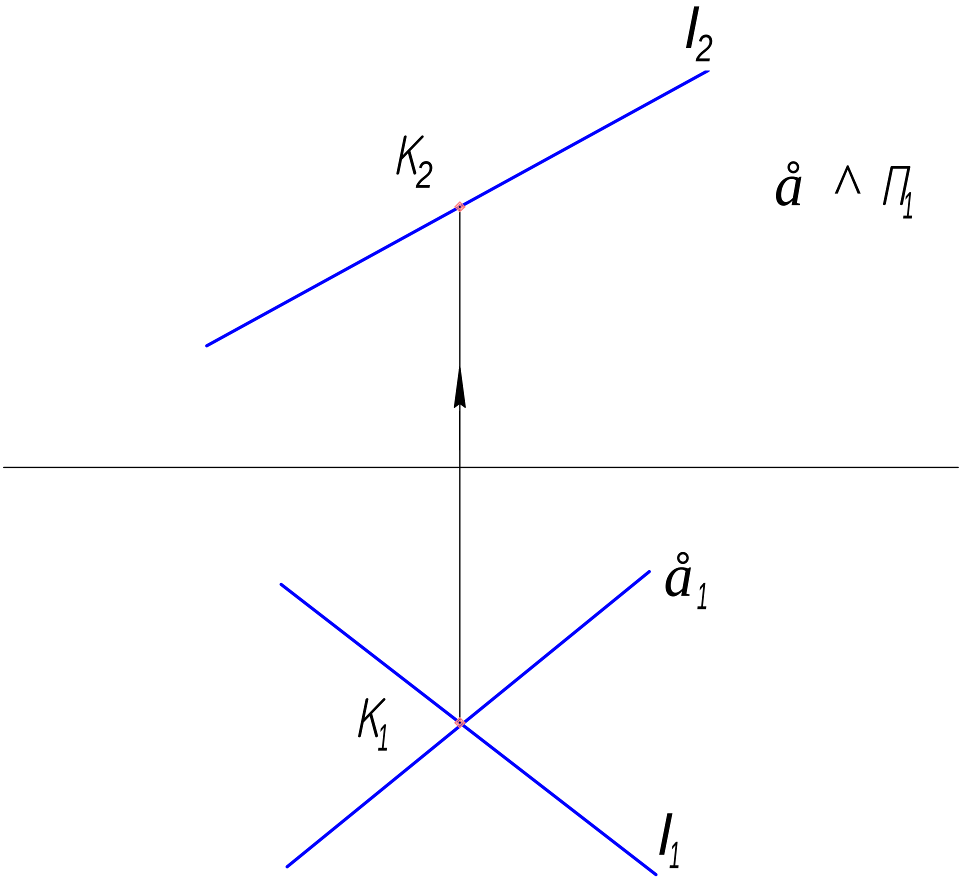


Рис. 4.7 Пересечение прямой с проектирующей плоскостью

Построение весьма простое. Так как проектирующая плоскость Σ обладает собирательным свойством, точка ее пересечения с линией l

находится как точка пересечения горизонтального следа Σ_1 плоскости и горизонтальной проекции l_1 линии. Фронтальная проекция точки пересечение найдена вдоль линии связи.

Для построения точки пересечения произвольной прямой с плоскостью общего положения в качестве вспомогательного элемента следует использовать вспомогательные проектирующие плоскости.

Пример 4.10: Построить точку пересечения прямой ***m*** с плоскостью ***Δ(aÇb)*** (Рис. 4.8).

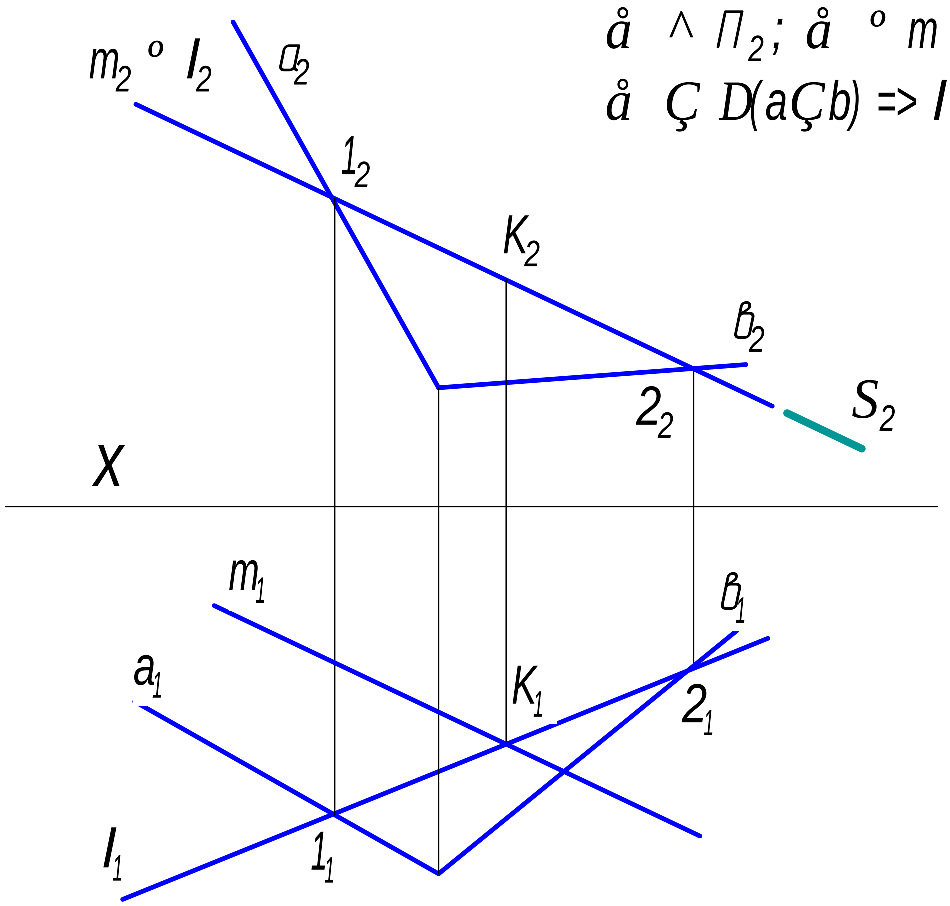


Рис. 4.8 Пересечения прямой с плоскостью

Для построения использована вспомогательная фронтально-проектирующая плоскость ***Σ***, проходящая через линию ***m***.

Линия ***l*** пересечения плоскостей ***ΣÇΔ*** лежит в одной плоскости с прямой ***m***, так как вспомогательная плоскость специально была проведена через прямую ***m***. Следовательно, находясь в одной плоскости, прямые ***l*** и ***m***, если они пересекутся, дадут точку, которая будет искомой точкой пересечения заданных прямой ***m*** и плоскости ***Δ***. Если прямые ***l*** и ***m*** окажутся параллельными, это будет означать, что заданные прямая ***m*** и плоскость ***Δ*** – параллельны.

4.3 Пересечение двух плоскостей.

Для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно найти две любые точки этой линии, либо одну точку и направление линии пересечения.

Если ищется линия пересечения двух плоскостей, одна из которых проектирующая, линия пересечения определяется простейшими построениями.

Пример 4.5: Построить линию пересечения плоскости Δ, заданной двумя прямыми $l \parallel m$ и горизонтальной плоскостью уровня Σ (Рис. 4.9).

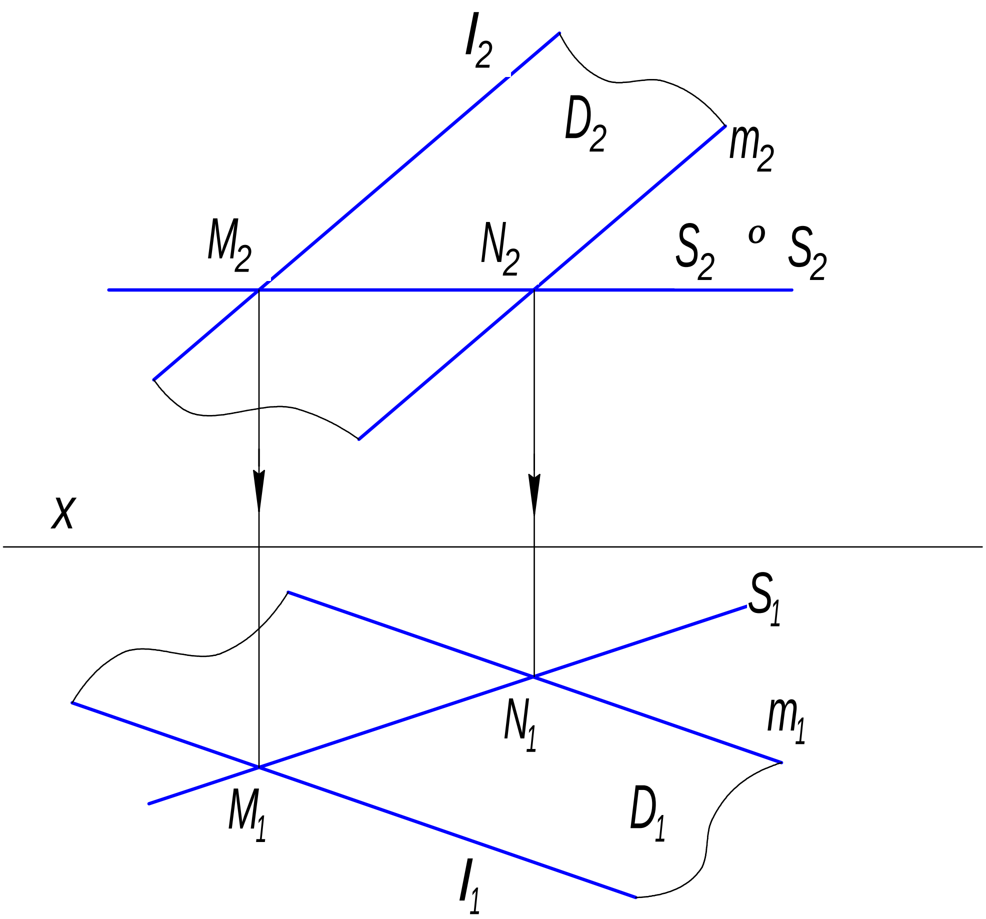


Рис. 4.9 Пересечение плоскостей

NB! Линия пересечения принадлежит горизонтальной плоскости уровня Σ, поэтому является горизонталью.

Простота построения линии пересечения плоскостей общего положения с плоскостями частного положения дает удобный инструмент построения линии пересечения двух плоскостей общего положения.

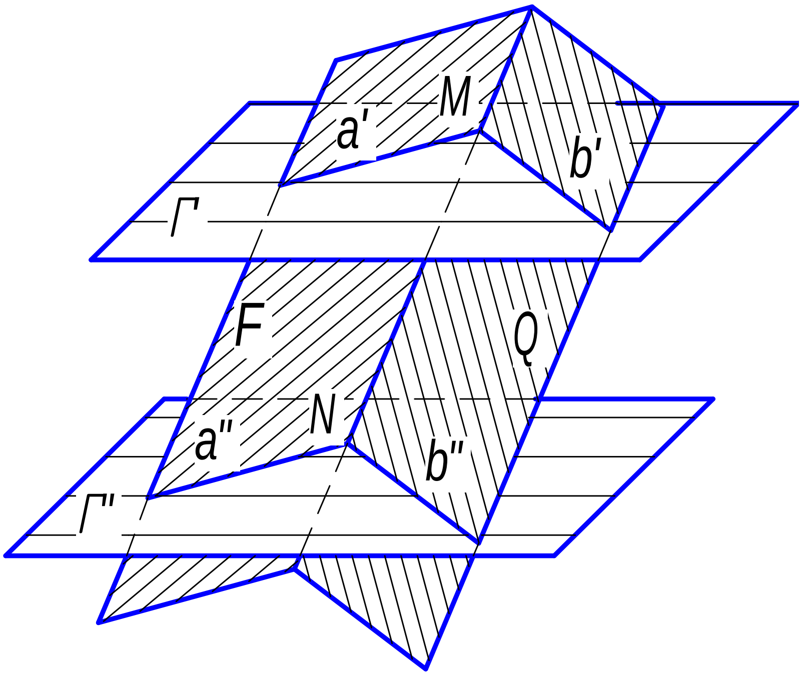


Рис. 4.10 Вспомогательные секущие плоскости

Таким инструментом являются вспомогательные секущие плоскости частного положения, например, плоскости уровня (Рис. 4.10).

Для построения линии пересечения плоскостей ***Ф*** и ***Θ*** использованы две горизонтальные плоскости ***Г'*** и ***Г''***. Точки пересечения ***M*** и ***N*** пар линий ***a'Çb'*** и ***a''Çb''*** пересечения плоскостей ***Ф*** и ***Θ*** вспомогательными плоскостями ***Г'*** и ***Г''*** соответственно дадут линию пересечения плоскостей ***Ф*** и ***Θ***.

Пример 4.6: Построить линию пересечения плоскостей ***Θ(a II b)*** и ***Λ(c Ç d)*** (Рис. 4.11).

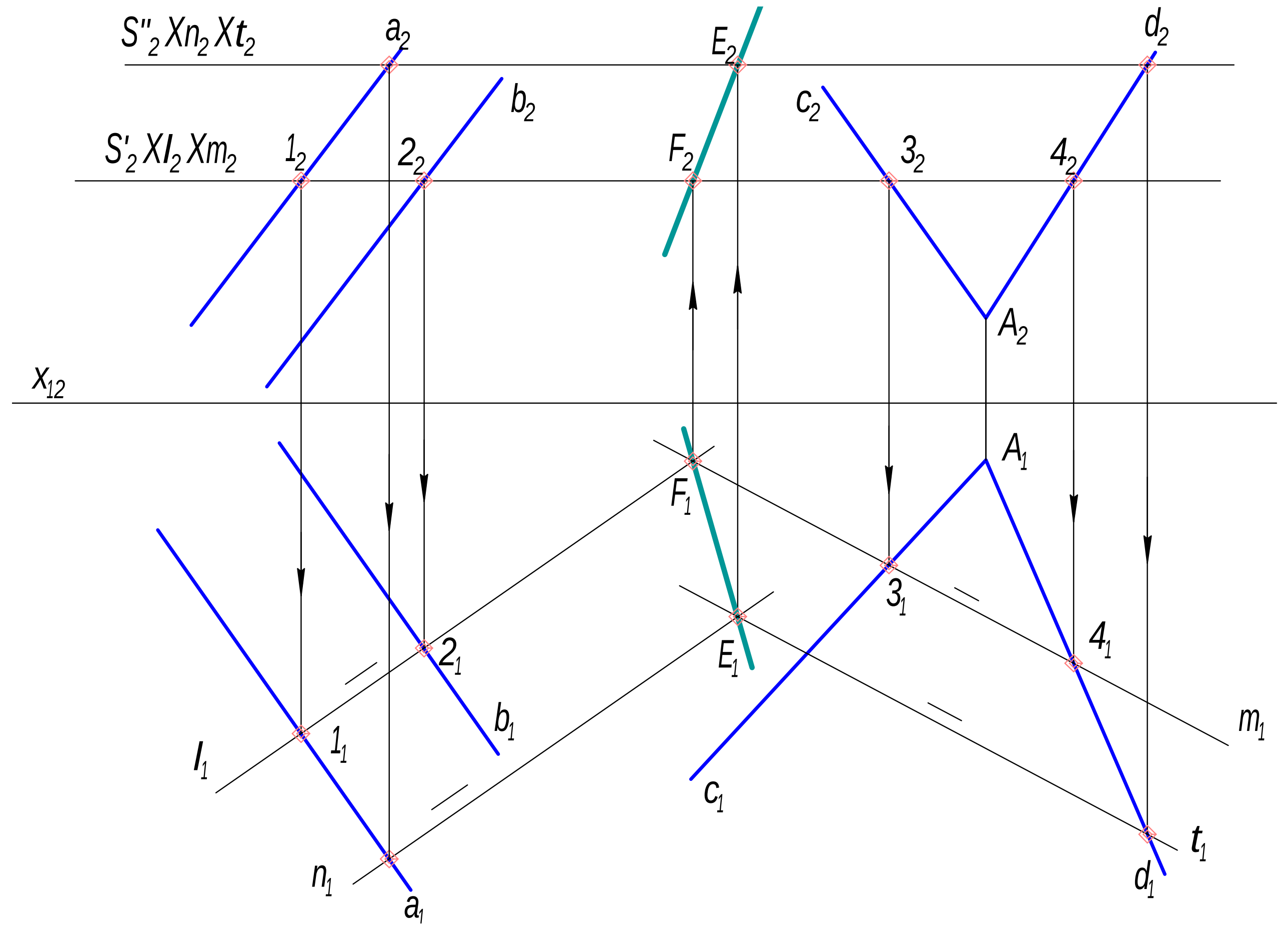


Рис. 4.11 Построение линии пересечения плоскостей

Для построения использованы горизонтальные плоскости ***Σ'*** и ***Σ''.***

Пример 4.7: Построить линию пересечения плоскости ***Φ(ABC)*** и плоскости ***T(l*** || ***m***) (Рис. 4.12).

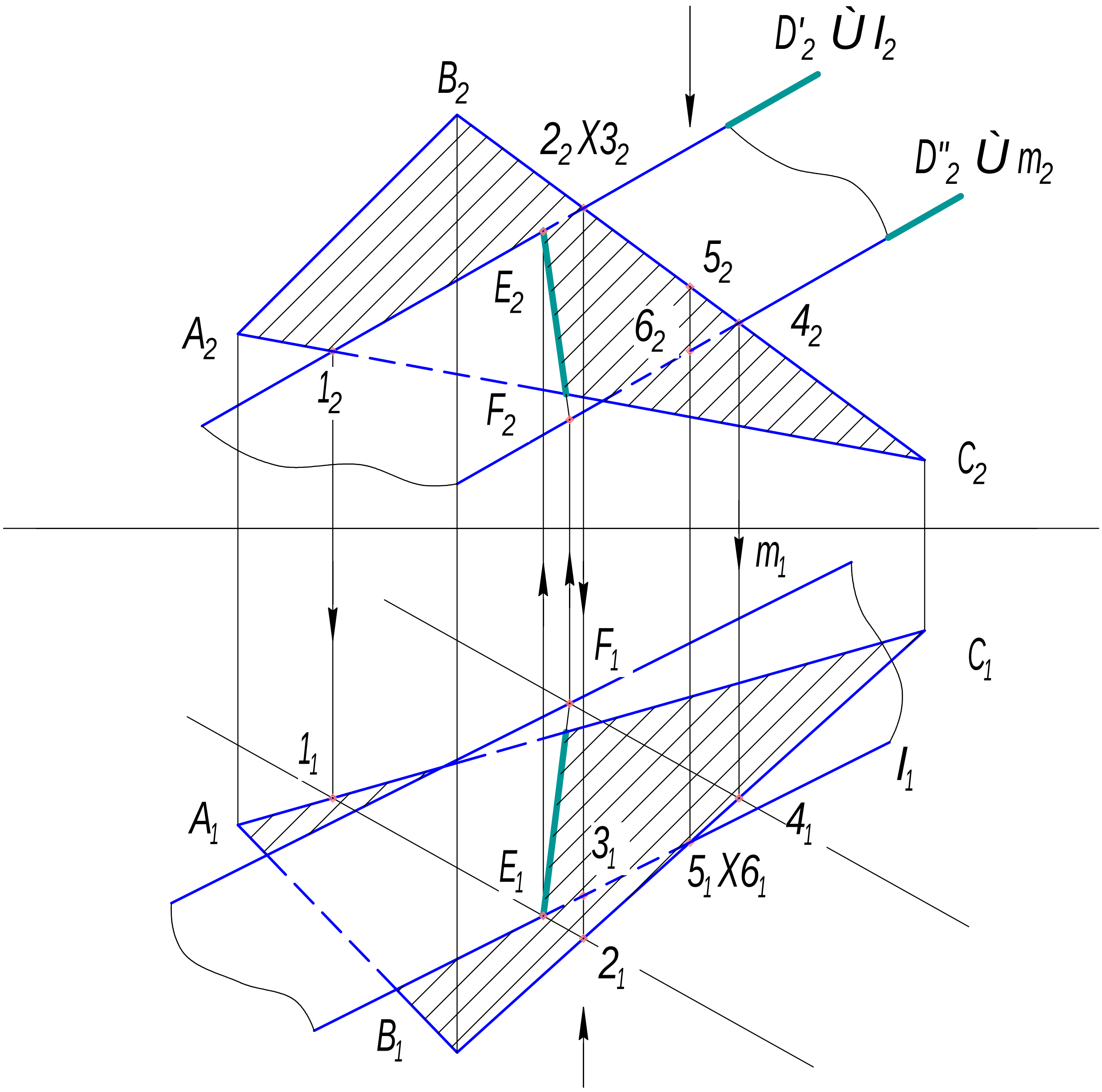


Рис. 4.12 Построение линии пересечения плоскостей

Для построения используются вспомогательные фронтально проектирующие плоскости ***Δ'*** и ***Δ''***, которые на фронтальной ПП проходят по фронтальным проекциям параллельных прямых ***l*** и ***m***, задающих плоскость ***T***. Вспомогательная плоскость ***Δ'*** пересекает заданную плоскость ***Ф(ABC)*** по линии ***12*** . Горизонтальная проекция этой прямой пересекает горизонтальную проекцию прямой ***l*** в точке $\boldsymbol{E_1}$. Эта точка ищется на фронтальной ПП вдоль линии связи. Точка ***E*** является общей для плоскости ***Ф(ABC)*** и ***T***(***l*** || ***m***). Таким образом, эта точка является одной из точек линии пересечения плоскостей ***Ф(ABC)*** и ***T***(***l*** || ***m***). Также найдена точка ***F*** пересечения плоскости ***Δ''*** с прямой ***m***. Точка ***F*** также является точкой линии пересечения плоскостей ***Ф(ABC)*** и ***T***(***l*** || ***m***). Соединение полученных точек ***E*** и ***F*** прямой дает искомую линию пересечения заданных плоскостей ***Ф(ABC)*** и ***T(l*** || ***m***).

Пример 4.8: Построить линию пересечения двух плоскостей, заданных следами: ***Σ(f;h)*** и ***Δ(f';h')*** (Рис. 4.13).

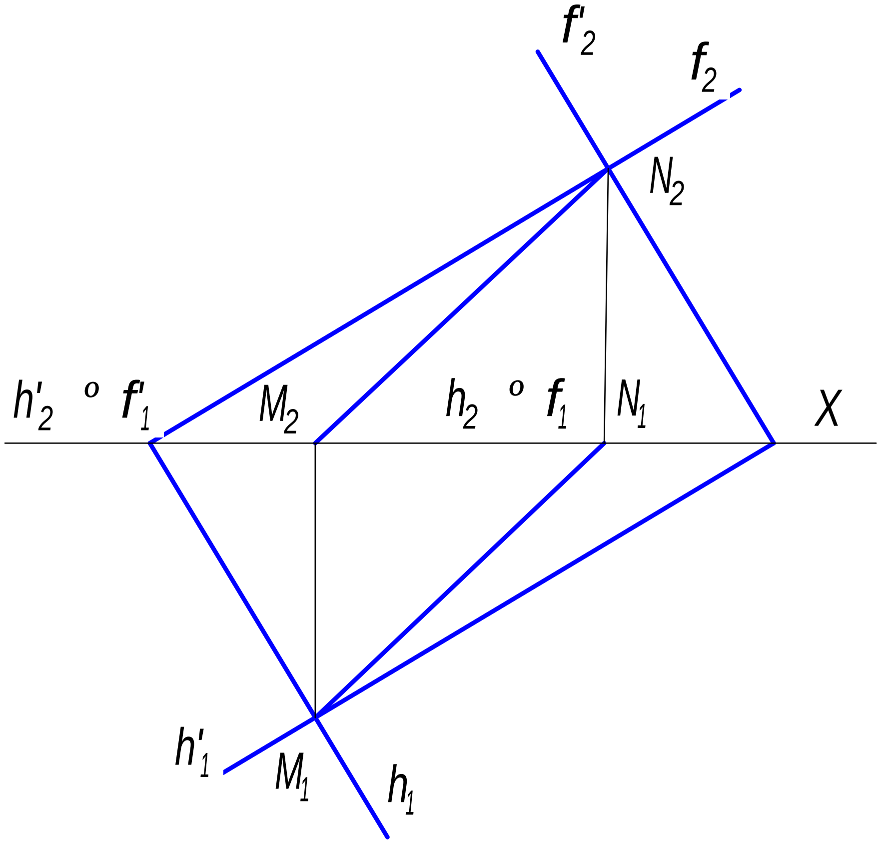


Рис. 4.13 Построение линии пересечения плоскостей

Точки линии пересечения, это (.)***M*** пересечения горизонтальных следов ***h*** и ***h'*** заданных плоскостей и (.)***N*** пересечения фронтальных следов ***f*** и ***f'***. Соединение этих точек на соответствующих плоскостях проекций дает проекции линии пересечения заданных плоскостей.

Тема 5 Взаимное положение геометрических фигур. Перпендикулярность прямых (проекции прямого угла). Линии ската. Взаимно-перпендикулярные прямая и плоскость, две плоскости.

5.1 Проекции прямого угла

Теорема: Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекции, то на этой плоскости проекций прямой угол изображается без искажения.

Следствие: две скрещивающиеся прямые сохраняют свою перпендикулярность на плоскостях проекции, если одна из них параллельна этой плоскости проекций.

Определение: две взаимно ⊥ пересекающиеся или скрещивающиеся прямые сохраняют свою перпендикулярность на горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций, если одна из этих прямых является горизонталью (фронталью) (Рис. 5.1).

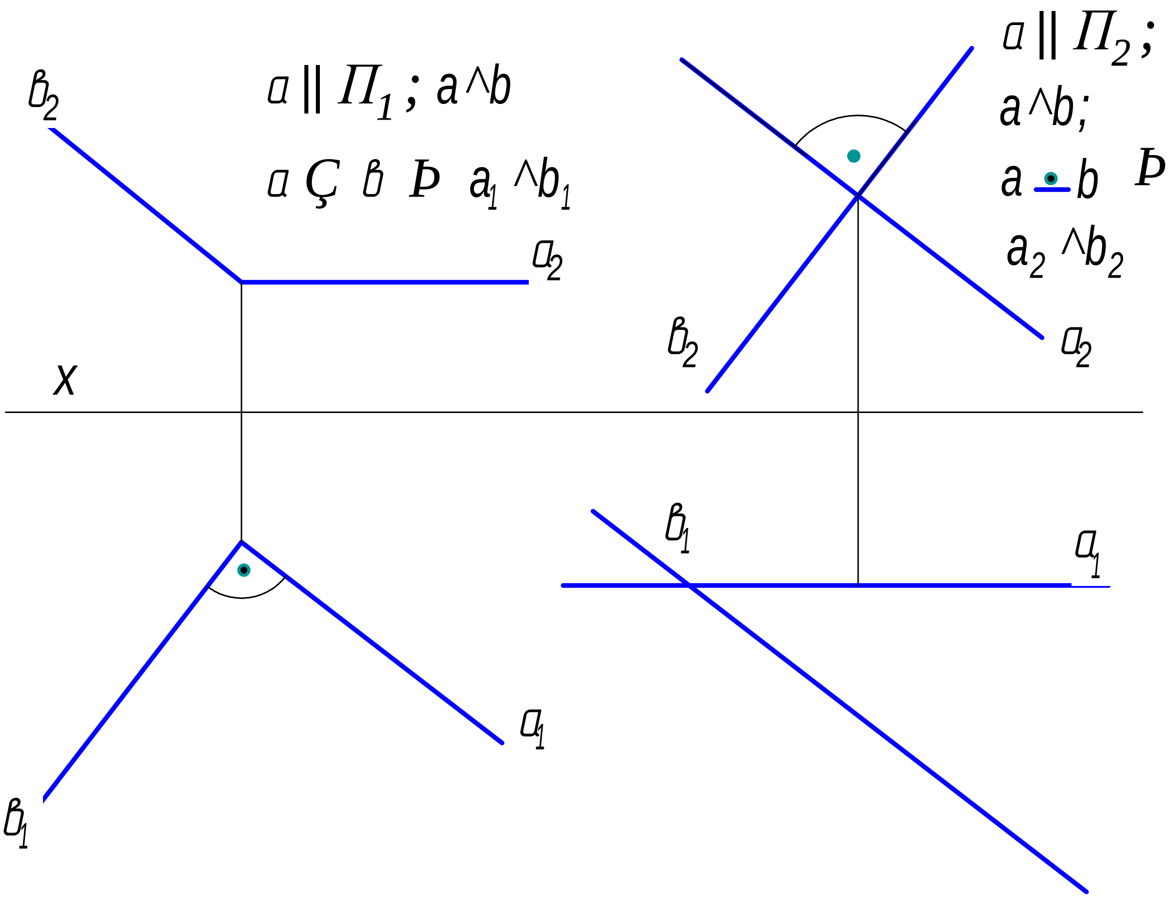


Рис. 5.1 Проекции прямого угла

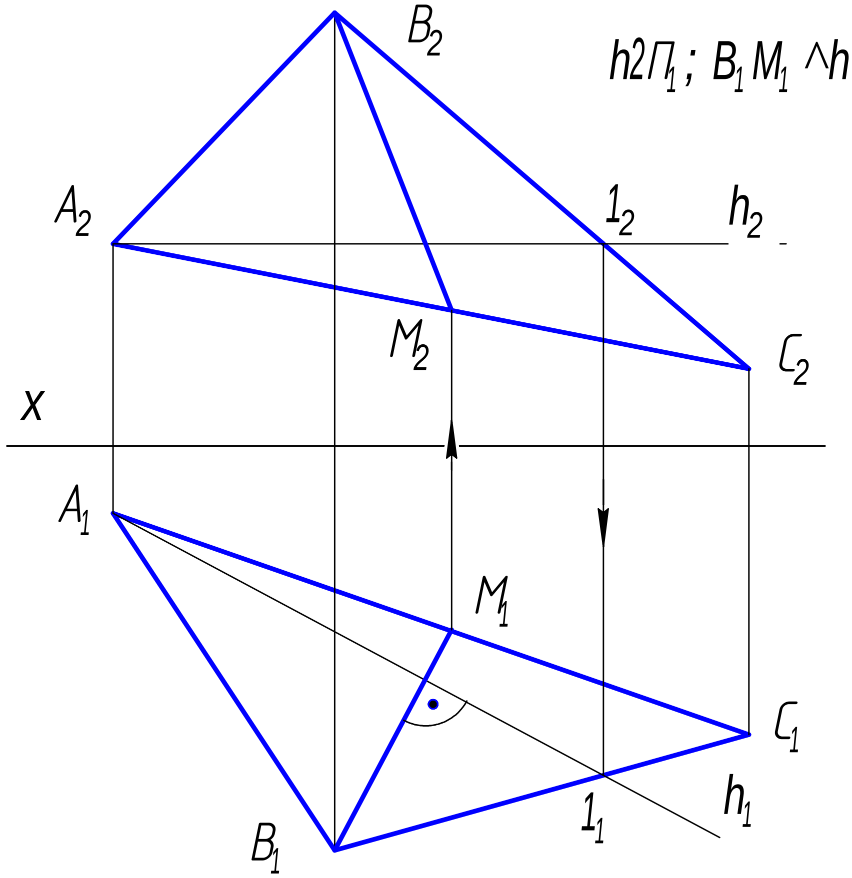
5.2 Линия ската

Прямая, принадлежащая плоскости, угол между которой и горизонтальной ПП является наибольшим, называется линией ската.

Линия ската является линейным элементом плоскости, используемым при определении величины двугранного угла между заданной плоскостью и горизонтальной ПП. Линия ската лежит в плоскости, ⊥ линии пересечения заданной плоскости с $\boldsymbol{\Pi_1}$.

Следовательно, линия ската, это прямая, принадлежащая плоскости, ⊥ горизонтали (горизонтальному следу) этой плоскости (Рис. 5.2).

Построение линии ската плоскости ***Θ***(***ABC***):



Угол между линией ската ***BM*** и горизонтальной ПП является углом наклона плоскости ***ABC*** к горизонтальной ПП.

Рис. 5.2 Линия ската плоскости

Задача: Определить угол между плоскостью ***Θ***(***ABC***) и ***П₁*** (Рис. 5.3).

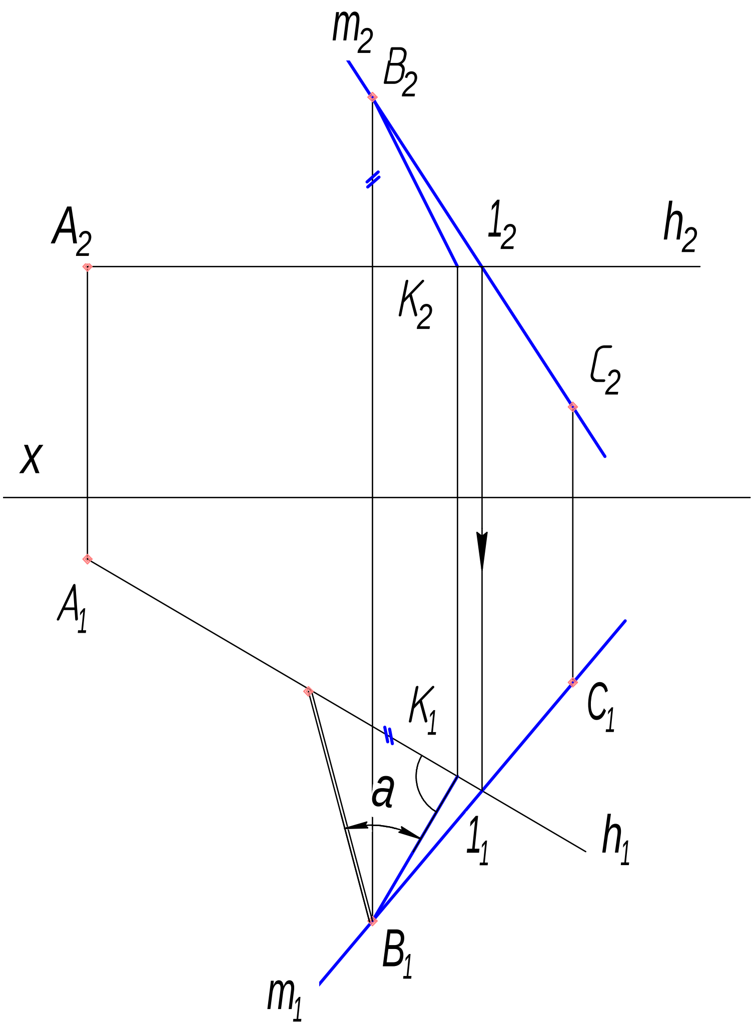


Рис. 5.3 Определение угла наклона плоскости

5.3 Перпендикулярность прямой и плоскости

Известно, что, если прямая ⊥ двум пересекающимся прямым на плоскости, тогда прямая ⊥ этой плоскости.

При построении прямой, ⊥ плоскости используют линии уровня, т.к. угол с этими прямыми сохраняет перпендикулярность на своих плоскостях проекций.

Пример: Плоскость $\boldsymbol{\Theta}$ задана двумя пересекающимися линиями уровня $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{h}$. Построить перпендикуляр к плоскости.

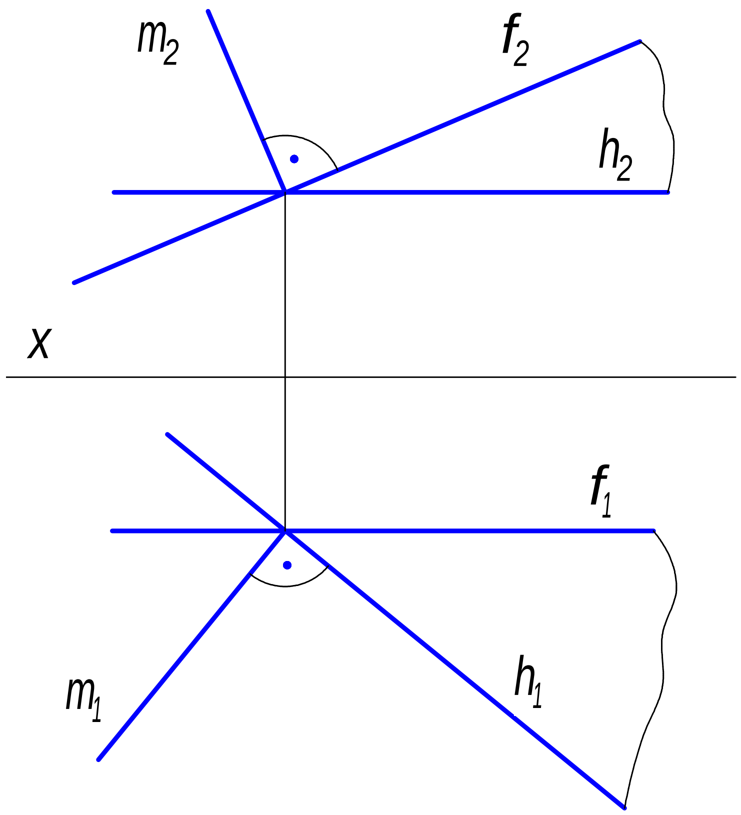


Рис. 5.4 Прямая, перпендикулярная плоскости

Проекция $\boldsymbol{m_1}$ перпендикуляра к плоскости $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{f}\cap\boldsymbol{h})$ на горизонтальной ПП будет перпендикулярна горизонтальной проекции $\boldsymbol{h_1}$ горизонтали. Проекция $\boldsymbol{m_2}$ перпендикуляра к плоскости $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{f}\cap\boldsymbol{h})$ на фронтальной ПП будет перпендикулярна фронтальной проекции $\boldsymbol{f_2}$ фронтали (Рис. 5.4).

$$\left.\begin{matrix} m_2 \perp f_2 \\ m_1 \perp h_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \perp \Theta(h \cap f)$$

Если плоскость задана другим способом, для построения линии, $\perp$ плоскости, сначала нужно на плоскости построить линии уровня. Затем, используя проекции линий уровня, строить перпендикуляр к этой плоскости.

В общем случае, если требуется провести $\perp$ к плоскости через заданную (.) пространства, он не обязательно пройдет через (.) пересечения линий уровня на плоскости.

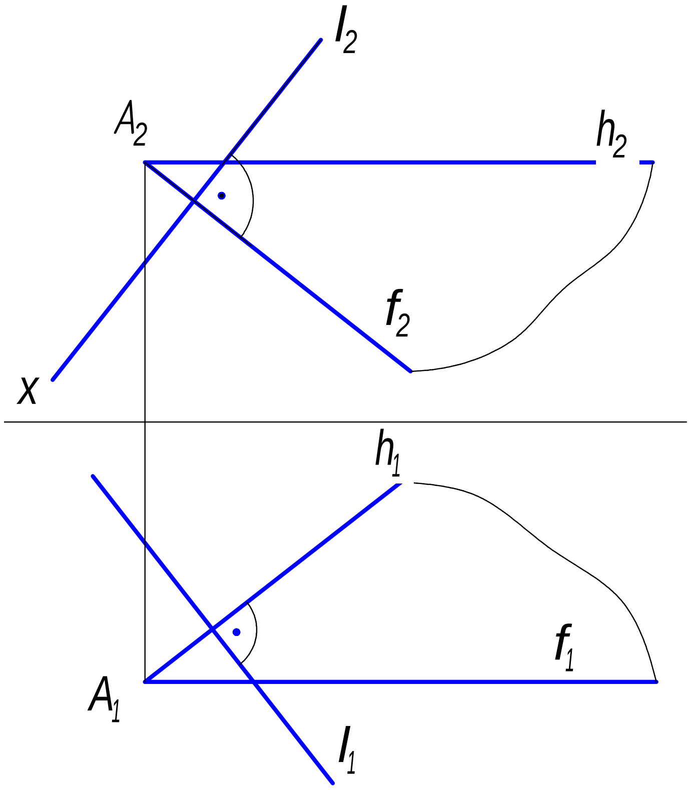
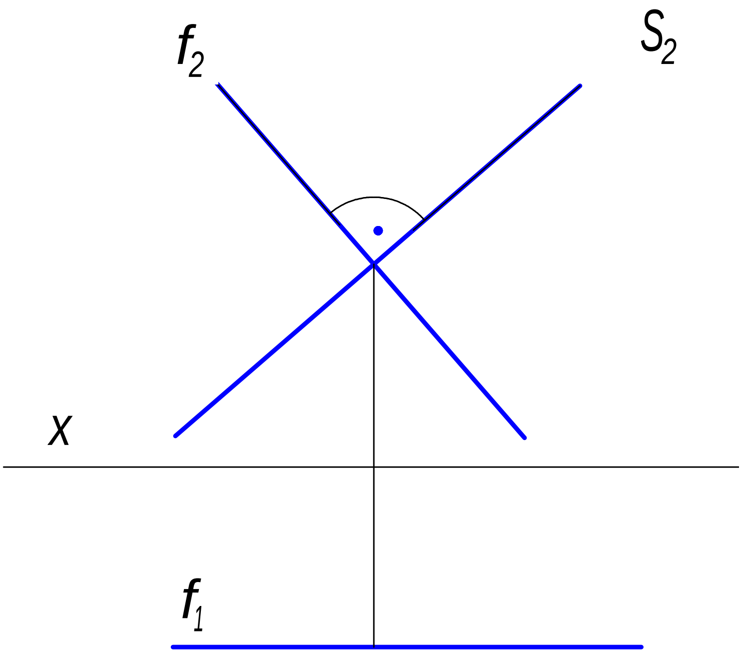


Рис. 5.5 Перпендикулярность прямой и плоскости

Обратная задача: через (.)$\boldsymbol{A}$ провести плоскость $\boldsymbol{\Theta}$^$\boldsymbol{l}$, заданной ее проекциями $\boldsymbol{l_1}$ и $\boldsymbol{l_2}$ (Рис. 5.5).

Решение: провести через (.)$\boldsymbol{A}$ пару прямых, одна из которых фронталь и ⊥ фронтальной проекции линии $\boldsymbol{l}$, другая горизонталь и ⊥ горизонтальной проекции линии $\boldsymbol{l}$.

Частный случай: перпендикуляр к проектирующей плоскости является линией уровня по отношению к соответствующей ПП (Рис. 5.6). Т.е., перпендикуляр к фронтально-проектирующей плоскости является фронталью,..



$$\left.\begin{array}{l}\Sigma \perp \Pi_2 \\ f \perp \Sigma\end{array}\right\} \Rightarrow f \,//\, \Pi_2$$

Рис. 5.6 Перпендикуляр к проектирующей плоскости

Примечание: прямые, перпендикулярные к плоскостям, используются для определения расстояния между (.) и плоскостью.

5.4 Перпендикулярность двух плоскостей

Известно, что плоскость перпендикулярна другой плоскости, если ей принадлежит перпендикуляр к этой плоскости. На этом свойстве основано построение взаимно-перпендикулярных плоскостей.

Пример: построить плоскость ***Θ***, проходящую через (.)***M*** перпендикулярно плоскости ***Δ(ABC)*** (Рис. 5.7).

Алгоритм:

Первый способ

1. В плоскости ***Θ*** строят горизонталь и фронталь;
2. Через (.)М проводят прямую, горизонтальная проекция которой ⊥ горизонтали, и фронтальная проекция ⊥ фронтали.

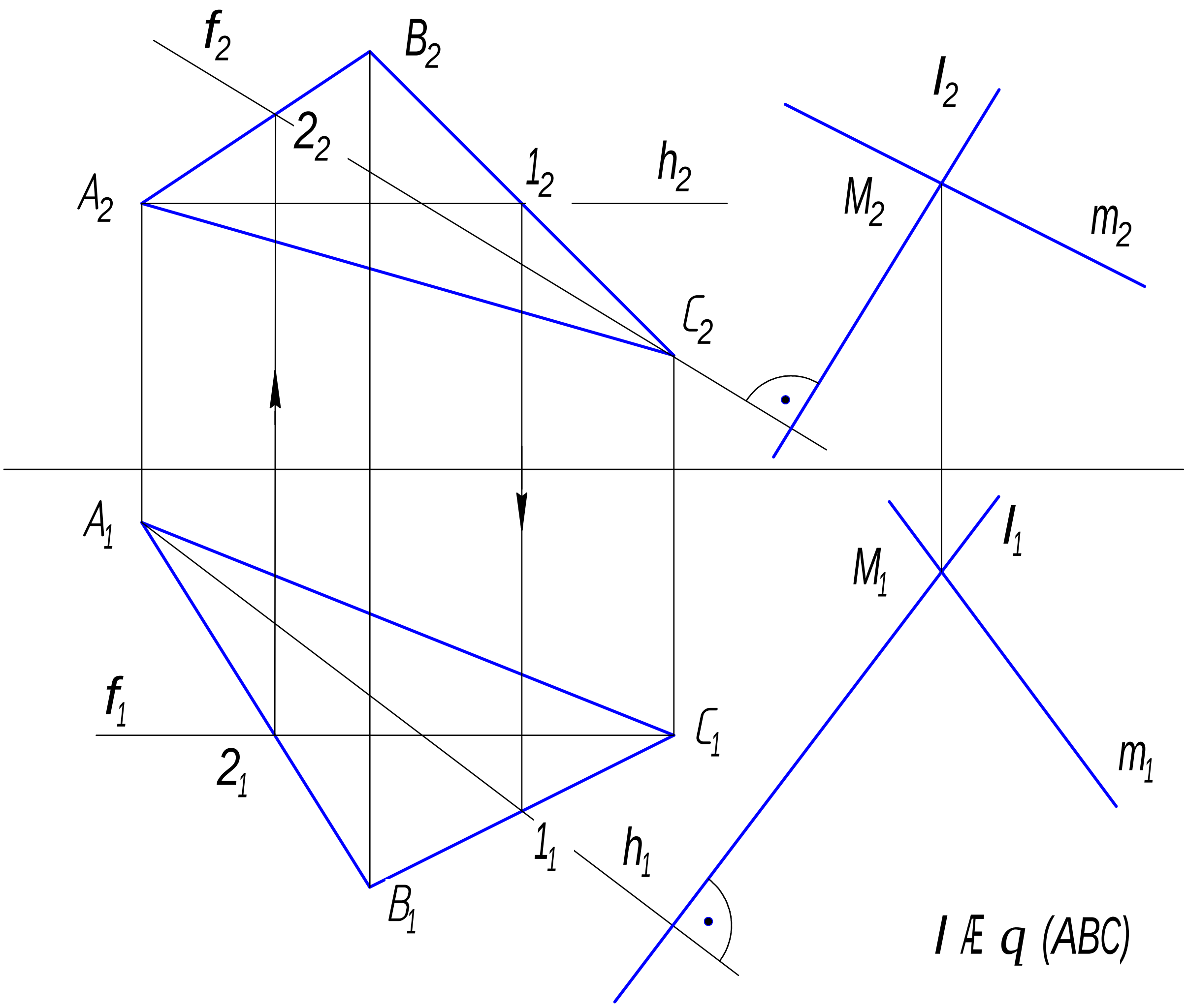


Рис. 5.7 Перпендикулярные плоскости

3. Через (.)***M*** проводят вторую, как угодно направленную прямую, не совпадающую с перпендикуляром.

Эти две прямые зададут требуемую плоскость.

Пункт 3 алгоритма указывает на то, что через точку можно провести к плоскости бесконечное число перпендикулярных плоскостей, т.е., их пучок. Для того, чтобы плоскость оказалась единственной, необходимо введение дополнительных условий, например, принадлежность искомой плоскости не одной, а двух заданных точек и т.п.

Второй способ (Рис. 5.8).

Проводим через точку M две прямые, одна из которых горизонталь и $\perp$ горизонтальной проекции одной из сторон Δ***ABC,*** другая фронталь и $\perp$ фронтальной проекции той же стороны Δ***ABC***.

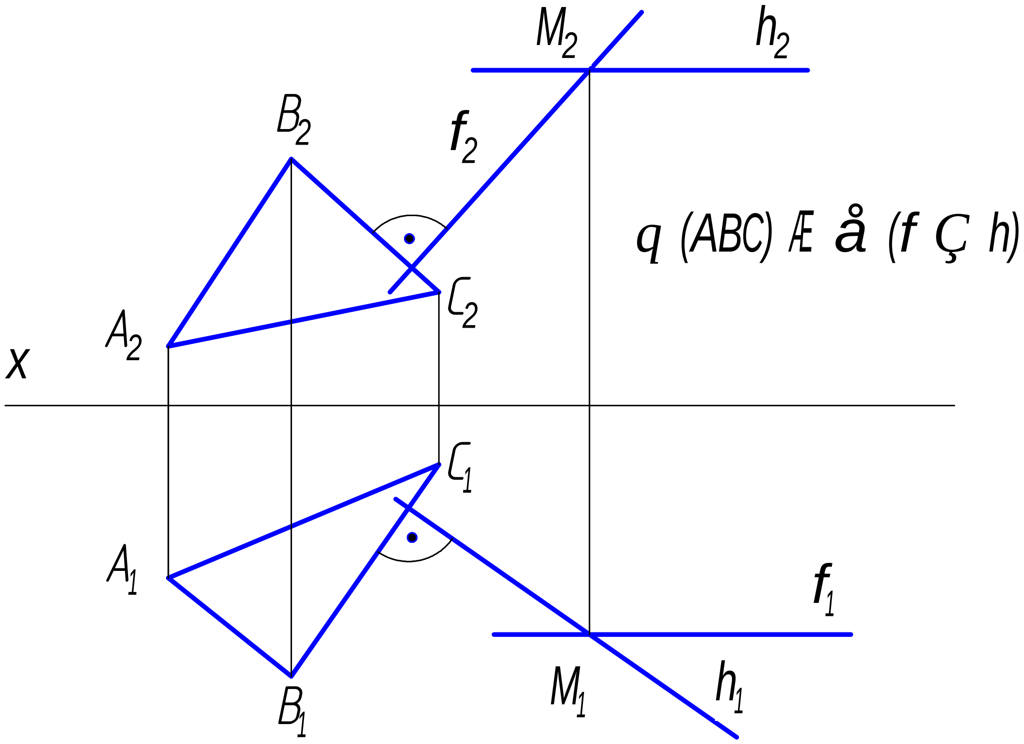


Рис. 5.8 Перпендикулярные плоскости

Пример: Провести через (.) ***К*** горизонтально-проектирующую плоскость ***Σ***, ⊥ плоскости общего положения ***Θ***, заданной следами (Рис. 5.9).

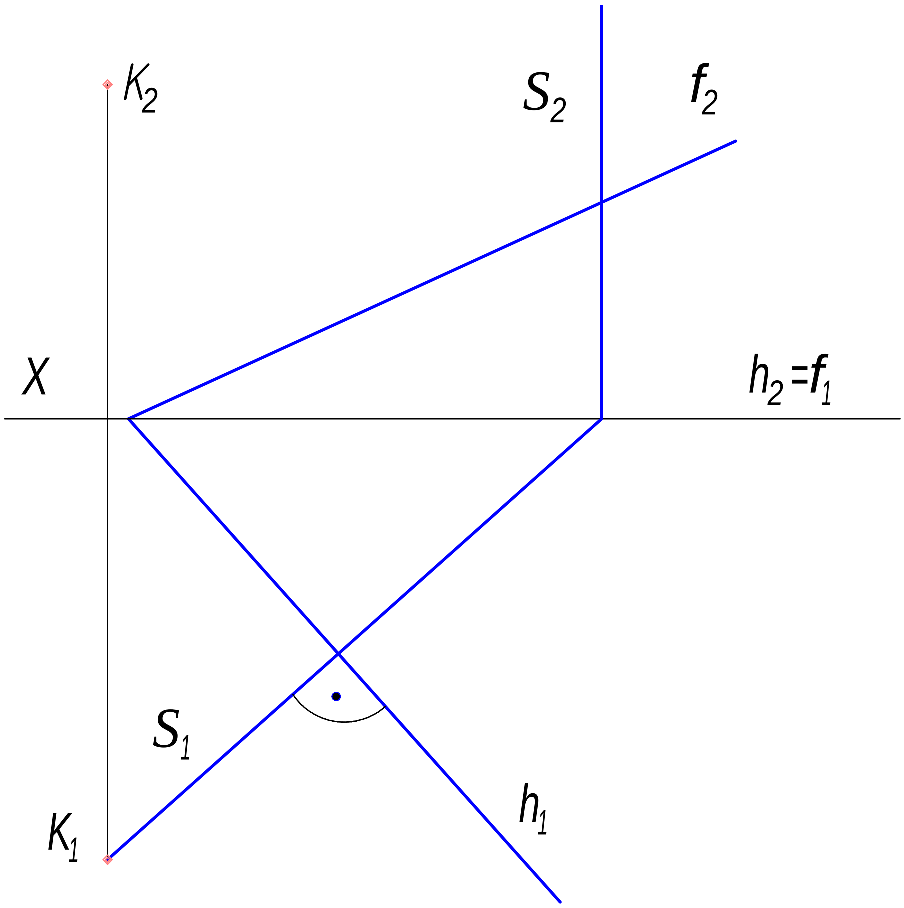


Рис. 5.9 Перпендикулярные плоскости

Тема 6 Метрические и позиционные задачи начертательной геометрии

6.1 Позиционные задачи.

Содержание позиционных задач: определение взаимного положения геометрических фигур – точек, прямых, плоскостей.

	Точка ***B***	Прямая ***b***	Плоскость ***Φ***
Точка ***A***	***A=B*** $A\,{}^1B$ $A_1{}^1B_1\ A_2{}^oB_2$ ***или*** $A_1{}^oB_1\ A_2{}^1B_2$ ***Конкурирующие точки.***	***A Î b*** ***A Ï b***	***A Î Φ*** ***A Ï Φ***
Прямая ***a***	***B Î a*** ***B Ï a***	***a _ b*** ***aêêb*** ***aÇb***	***a Î Φ*** ***aêêΦ*** ***aÇΦ***
Плоскость ***Θ***	***B Î Θ*** ***B Ï Θ***	***b Î Θ*** ***bêêΘ*** ***bÇΘ***	***ΦêêΘ*** ***ΦÇΘ***

6.2 Метрические задачи

Содержание и цель решения метрических задач начертательной геометрии – определение количественно измеряемых параметров геометрических элементов: расстояний, углов, отображений фигур.

Для решения метрических задач необходимо выбрать или получить построениями такое положение геометрических фигур, при котором искомые элементы отображаются в натуральную величину и могут быть измерены непосредственно метрическим инструментом. Например, геометрические фигуры проектируются без искажения, в натуральную величину и могут быть измерены тогда, когда они лежат в плоскости уровня. Есть другие частные положения фигур, когда необходимые для измерения элементы проектируются без искажения.

Ниже рассмотрен набор базовых вариантов положений фигур по отношению к плоскостям проекций, при которых решаются метрические задачи.

6.2.1 Прямая.

Отрезок прямой проектируется на ПП в натуральную величину, если он является линией уровня (Рис. 6.1).

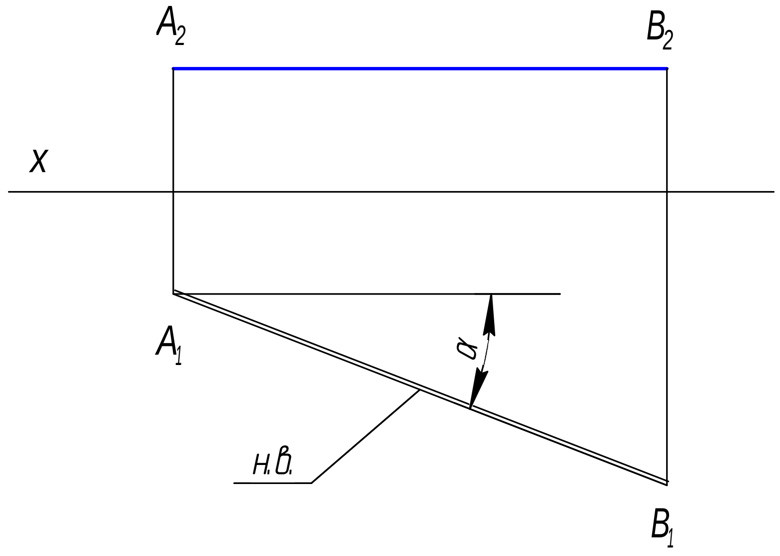


Рис. 6.1 Линия уровня - ***горизонталь***

6.2.2 Треугольник, и другие фигуры на плоскости уровня.

Любая фигура на плоскости уровня проектируется на «свою» плоскость проекций в натуральном виде (в натуральную величину) (Рис. 6.2).

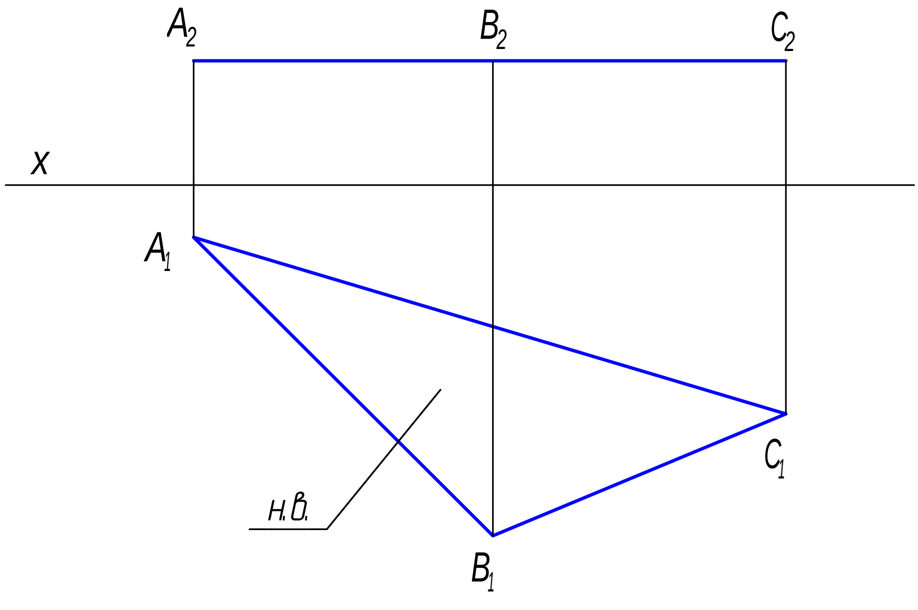


Рис. 6.2 Треугольник на горизонтальной плоскости уровня

6.3 *Определение углов*

6.3.1 Угол пересечения.

Как известно, две пересекающиеся прямые задают плоскость. Если эта плоскость по условию или в результате дополнительных построений заняла положение, параллельное плоскости проекции, тогда она является плоскостью уровня и угол между прямыми на этой плоскости проектируется без искажения, в натуральную величину (Рис. 6.3).

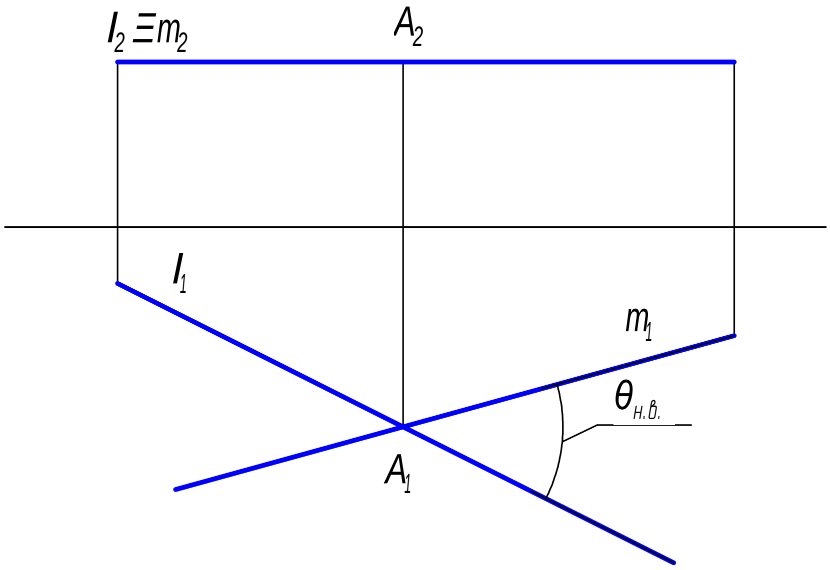


Рис. 6.3 Угол между прямыми на горизонтальной плоскости уровня

6.3.2 Угол скрещивания.

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между пересекающимися прямыми, одна из которых задана, а другая получена параллельным переносом второй заданной прямой до пересечения с первой.

Если две скрещивающиеся прямые параллельны плоскости проекции, то есть, являются линиями уровня, тогда угол между ними будет такой же, как и угол между проекциями этих прямых на «свою» плоскость проекций (Рис. 6.4).

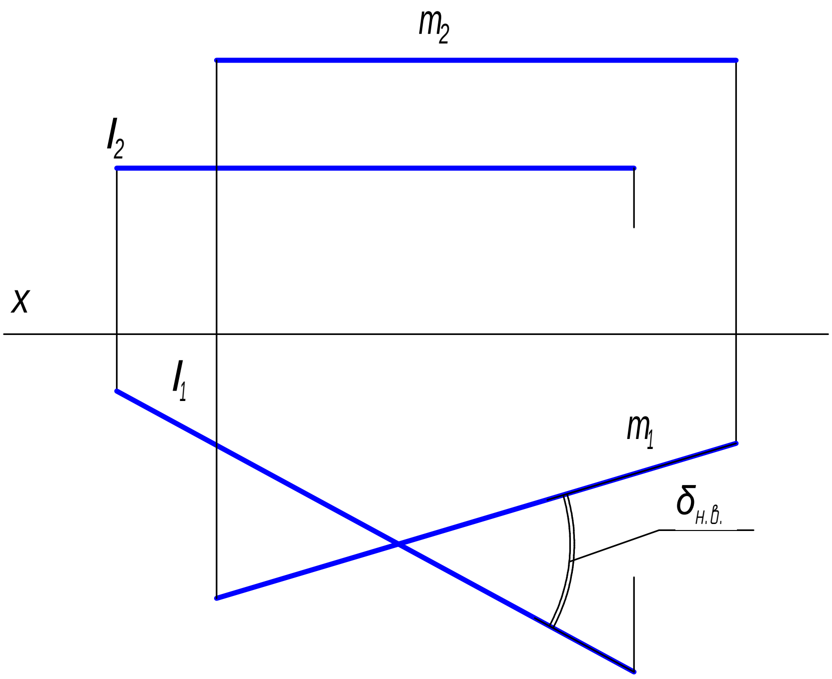


Рис. 6.4 Угол между скрещивающимися прямыми

6.3.3 Прямой угол.

Прямой угол проектируется в натуральную величину, если хотя бы одна сторона этого угла параллельна плоскости проекций, т.е., является линией уровня (см. 5.1).

6.3.4 Угол между прямой и плоскостью

Как известно, угол между прямой и плоскостью определяется как угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Для того, чтобы угол между прямой и ее проекцией на заданную плоскость отобразился на плоскости проекции в натуральную величину, нужно, чтобы прямая и ее проекция на заданную плоскость были параллельны этой плоскости проекции.

Это возможно в том случае, если заданная плоскость перпендикулярна плоскости проекций, то есть является проектирующей плоскостью, а заданная прямая линией уровня (Рис. 6.5).

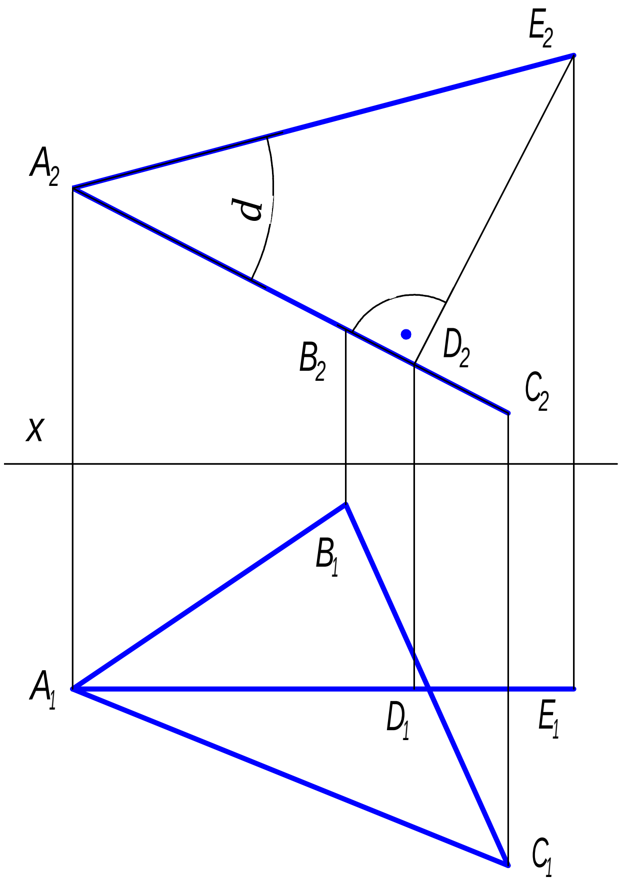


Рис. 6.5 Угол между прямой и плоскостью

Θ(AEÇAD)^S(ΔABC);

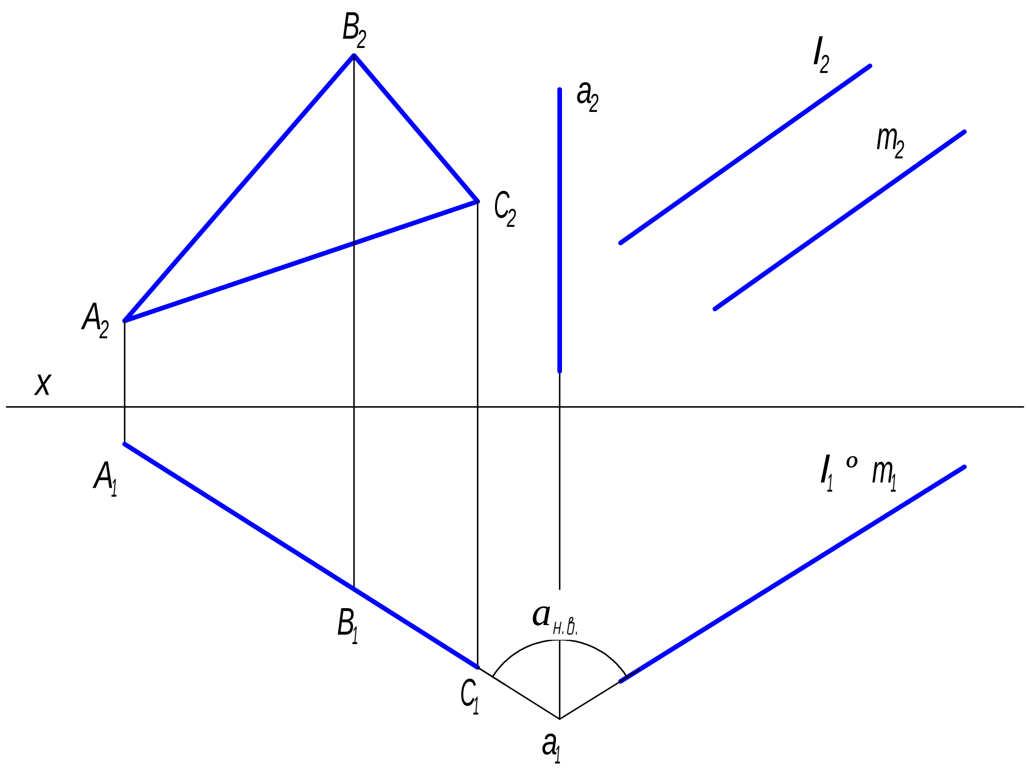
ΘúúÕ$_2$ Þ å^Õ$_2$

AEÙå = ĐE$_2$A$_2$D$_2$

6.3.5 Угол между двумя плоскостями.

По определению, мерой двугранного угла между двумя плоскостями является линейный угол, образованный двумя линиями пересечения заданных плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной обоим заданным плоскостям. Такая третья плоскость будет перпендикулярна линии взаимного пересечения заданных плоскостей.

Двугранный угол спроектируется на плоскость проекций в натуральную величину, если будет лежать в плоскости, параллельной плоскости проекции. Для этого линия пересечения заданных плоскостей должна быть перпендикулярной этой плоскости проекции. Тогда обе заданные плоскости также будут перпендикулярны к этой плоскости проекции. То есть, для того, чтобы двугранный угол между плоскостями проектировался в натуральную величину, они должны быть проектирующими плоскостями (Рис. 6.6).



a = *Q*(***ΔABC***)*ÇW*(***l*** || ***m***)***; a***$^ P_1$ Þ *Q*$^ P_1$***;*** *W*$^ P_1$.

Рис. 6.6 Угол между двумя плоскостями

6.4 Определение расстояний

6.4.1 Расстояние между двумя точками

Если две точки одинаково удалены от плоскости проекции, т.е. лежат в плоскости, параллельной плоскости проекции, тогда отрезок прямой, соединяющий эти точки спроектируется на плоскость проекции в натуральную величину. Длина проекции отрезка, будучи равной длине самого отрезка, станет мерой расстояния между двумя точками (Рис. 6.7).

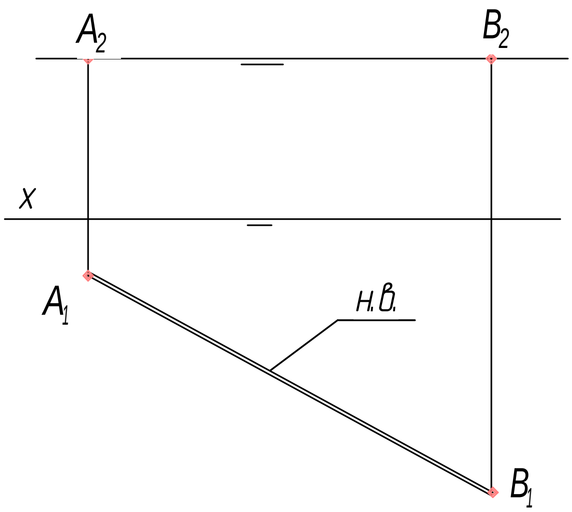


Рис. 6.7 Расстояние между точками

6.4.2 Расстояние между точкой и прямой

При определении расстояния между точкой и прямой могут быть рассмотрены три типовых случая:

1. Прямая является проектирующей. Тогда перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, являющийся мерой расстояния между точкой и прямой, будет параллелен плоскости проекции, т.е. будет линией уровня. Этот перпендикуляр спроектируется на плоскость проекции без искажения и эта проекция будет мерой расстояния между точкой и прямой (Рис. 6.8).

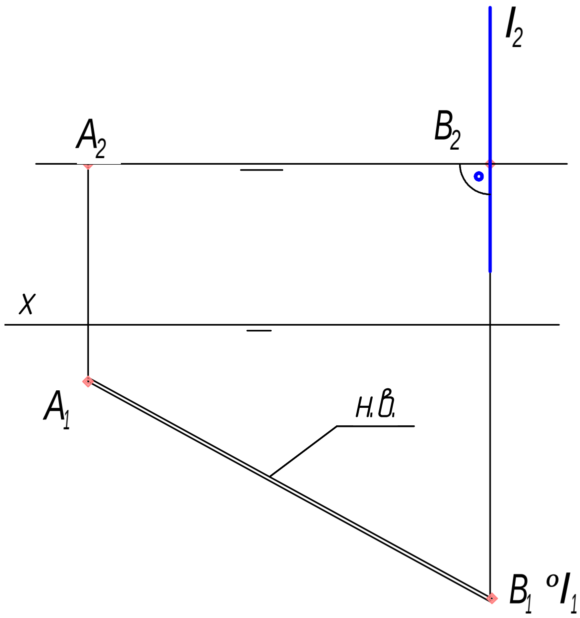


Рис. 6.8 Расстояние от точки до прямой. Случай 1

2. Точка и прямая задают плоскость, в которой прямая является линией ската. Тогда перпендикуляр, проведенный из точки на прямую окажется линией уровня и спроектируется на плоскость проекции в натуральную величину (Рис. 6.9).

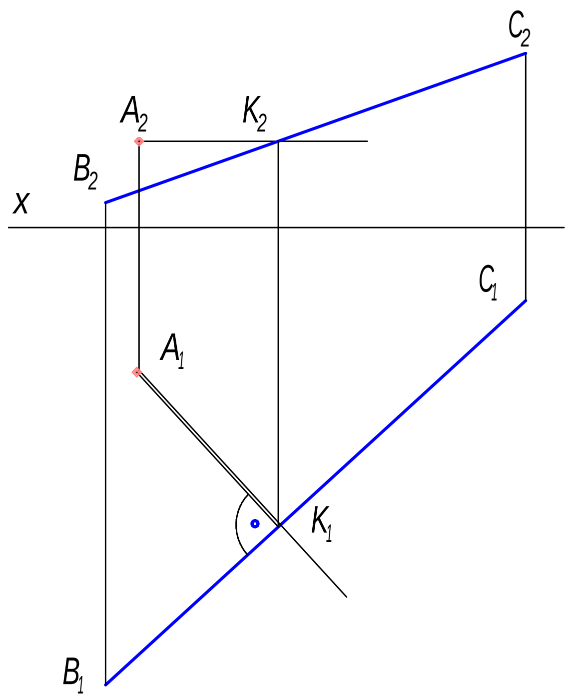


Рис. 6.9 Расстояние от точки до прямой. Случай 2

3. Точка и прямая образуют плоскость уровня. Тогда геометрические фигуры на плоскости, в том числе и перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, будет проектироваться в натуральную величину.

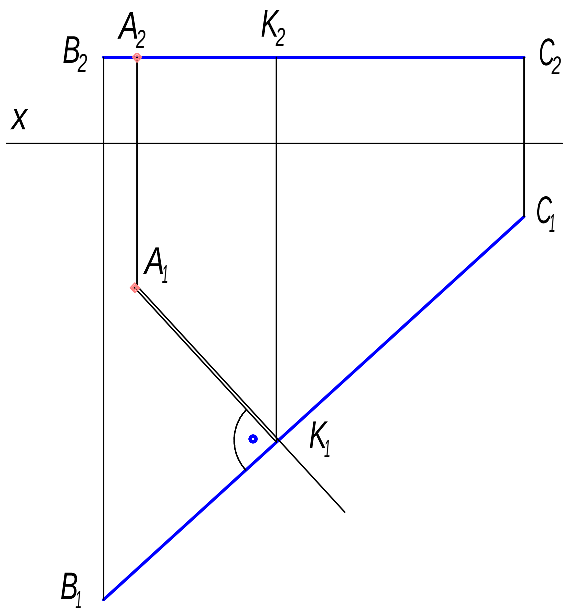


Рис. 6.10 Расстояние от точки до прямой. Случай 3

6.4.3 Расстояние от точки до плоскости

Для того, чтобы отрезок, являющийся мерой расстояния между точкой и плоскостью, спроектировался в натуральную величину на плоскость проекции, необходимо, чтобы он был линией уровня по отношению к этой плоскости проекции. По определению такой отрезок, это перпендикуляр, опущенный из точки на заданную плоскость. Перпендикуляр к плоскости будет линией уровня, если эта плоскость является проектирующей (Рис. 6.11).

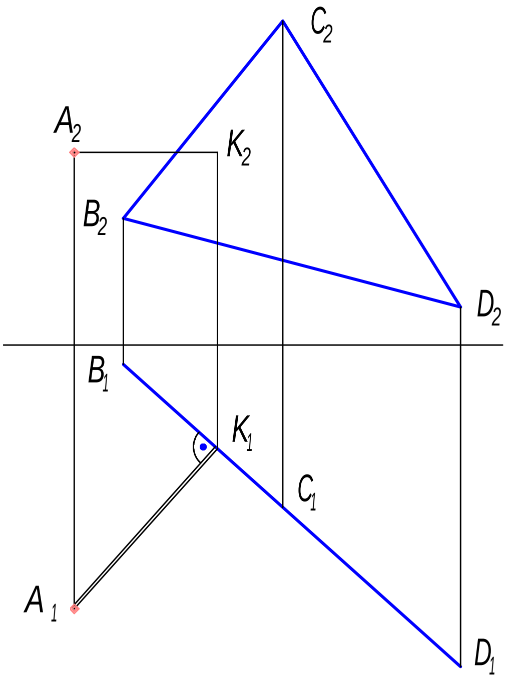


Рис. 6.11 Расстояние от точки до плоскости

6.4.4 Расстояние между параллельными прямыми

При определении расстояния между параллельными прямыми могут быть рассмотрены четыре типовых случая:

1. Параллельные прямые образуют плоскость уровня. Тогда взаимный перпендикуляр между параллельными прямыми спроектируется на плоскость проекции без искажения (Рис. 6.12).

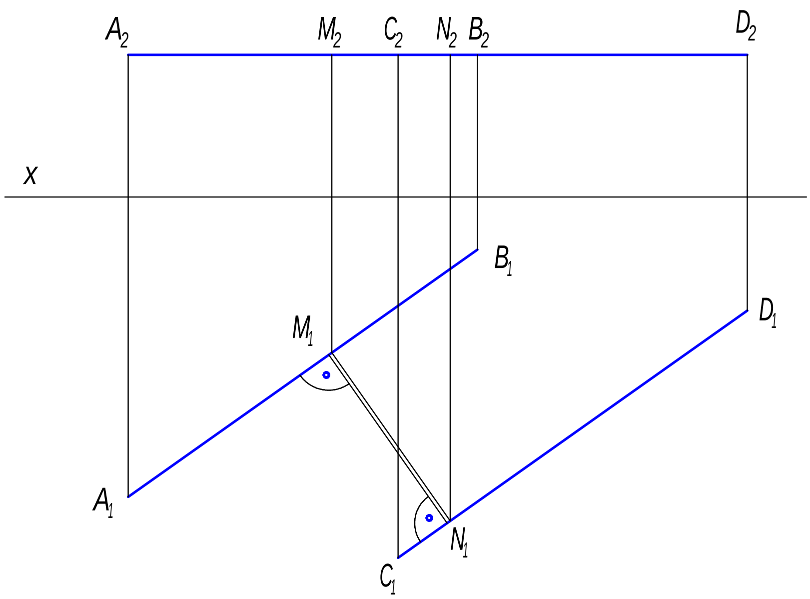


Рис. 6.12 Расстояние между параллельными прямыми. Случай 1

2. Параллельные прямые являются проектирующими линиями. Тогда перпендикуляр между ними будет линией уровня и спроектируется без искажения.

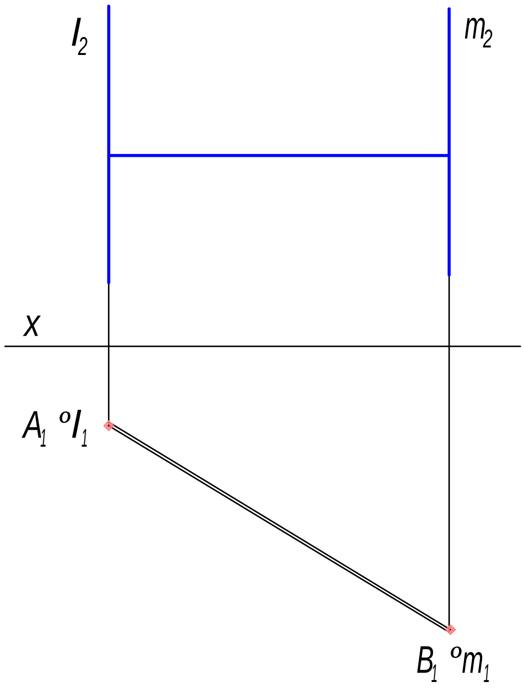


Рис. 6.13 Расстояние между параллельными прямыми. Случай 2

3. Параллельные прямые являются линиями уровня., принадлежащими проектирующей плоскости. Тогда перпендикуляр между ними является проектирующей прямой. На другой плоскости проекции проектирующая прямая отображается в натуральную величину (Рис. 6.14).

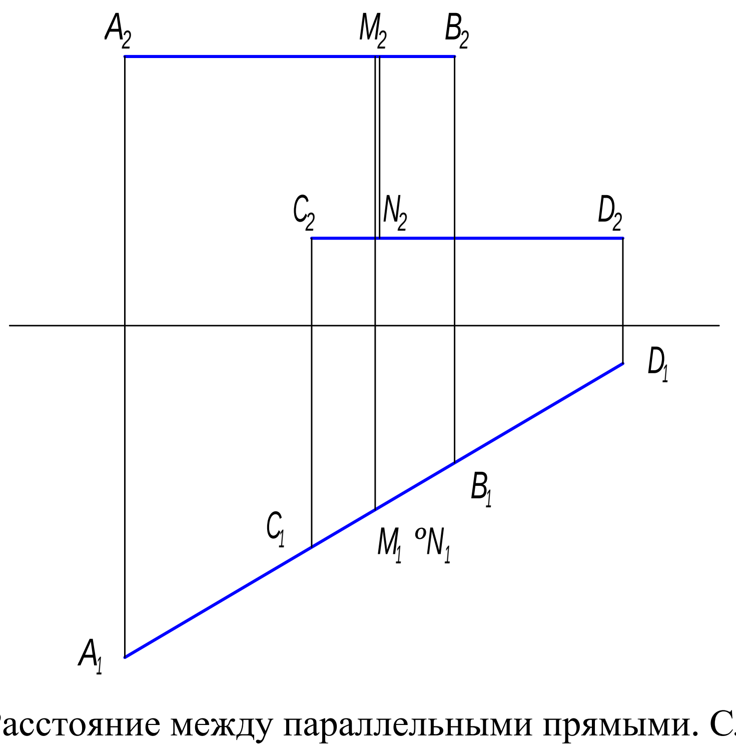


Рис. 6.14 Расстояние между параллельными прямыми. Случай 3

4. Параллельные прямые образуют плоскость, в которой они являются линиями ската. Тогда перпендикуляр между ними будет на ПП изображаться как перпендикуляр между проекциями этих прямых. Он будет являться линией уровня, проекция которой не искажается (Рис. 6.15).

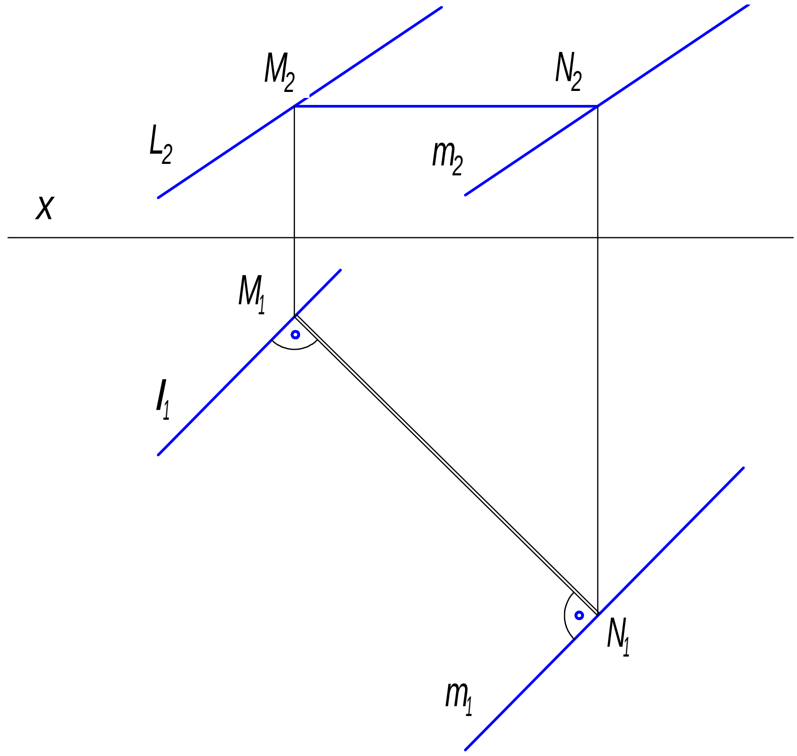


Рис. 6.15 Расстояние между параллельными прямыми. Случай 4

6.4.5 Расстояние между скрещивающимися прямыми

При определении расстояния между скрещивающимися прямыми могут быть рассмотрены два типовых случая:

1. Мерой расстояния между скрещивающимися прямыми является их общий перпендикуляр. Этот перпендикуляр будет изображаться на ПП в натуральную величину, если он является линией уровня. Это возможно тогда, когда одна из скрещивающихся прямых является проектирующей прямой (Рис. 6.16).

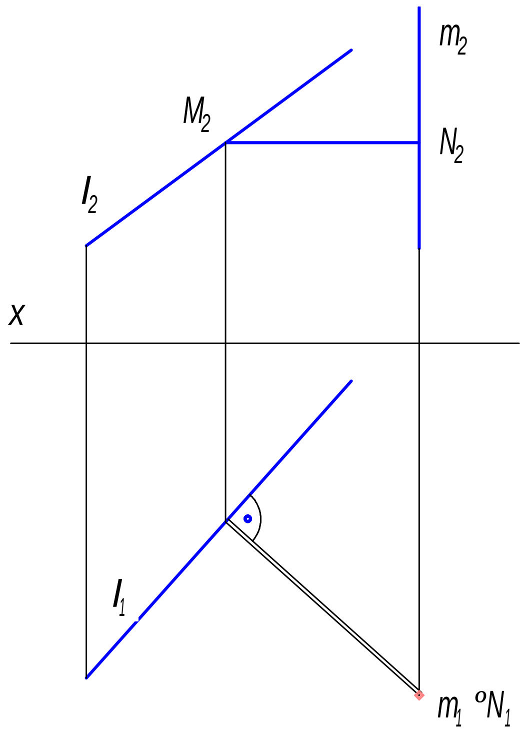


Рис. 6.16 Расстояние между скрещивающимися прямыми. Случай 1

2. Общий перпендикуляр между двумя скрещивающимися прямыми окажется линией уровня, если две параллельные плоскости, в каждой из которых лежит одна из скрещивающихся прямых, будут проектирующими плоскостями (Рис. 6.17).

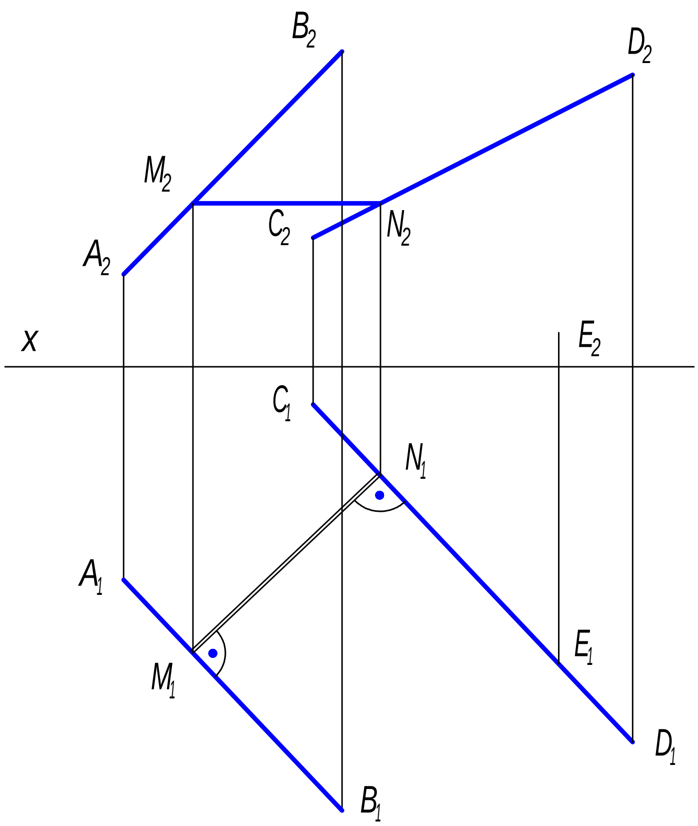


Рис. 6.17 Расстояние между скрещивающимися прямыми. Случай 2

6.4.6 Расстояние между прямой и плоскостью

Расстояние между прямой и плоскостью имеет геометрический смысл, только если прямая параллельна плоскости. Перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой на плоскость, будет линией уровня, если заданная плоскость является проектирующей (Рис. 6.18).

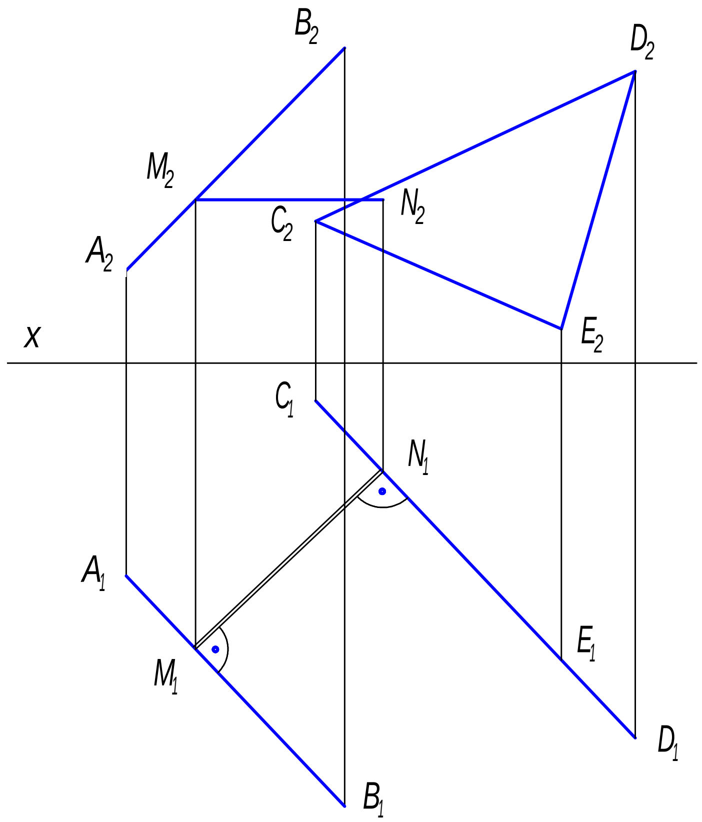


Рис. 6.18 Расстояние между прямой и плоскостью

6.4.7 Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Перпендикуляр между двумя параллельными плоскостями, являющийся мерой расстояния между ними, буде линией уровня, проектирующейся в натуральную величину, если заданные плоскости проектирующие (Рис. 6.19).

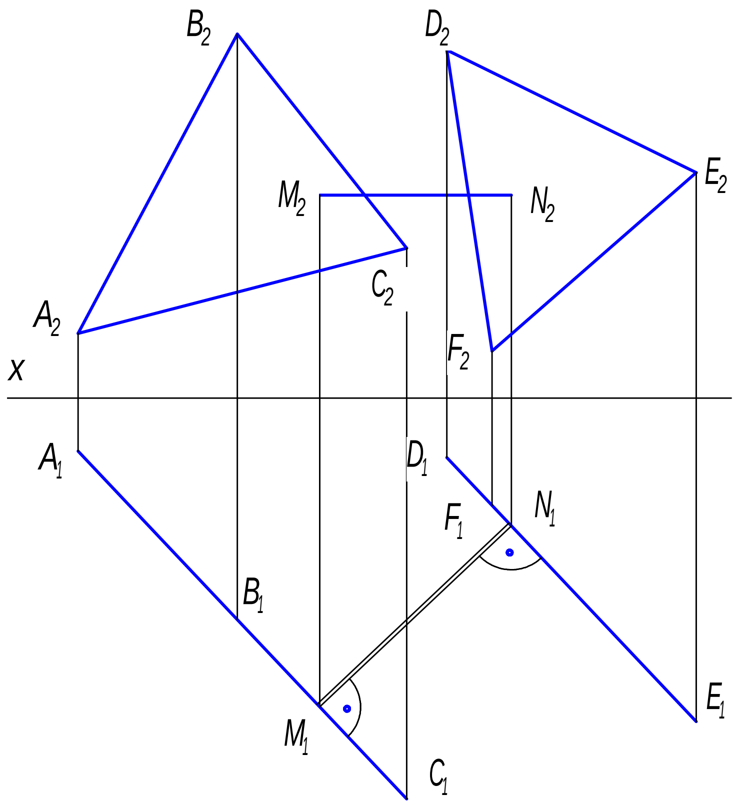


Рис. 6.19 Расстояние между параллельными плоскостями

Тема 7 Методы преобразования комплексного чертежа. Преобразование системы проектирования. Способ замены плоскостей проекций. Четыре основных позиционных задачи.

7.1 Метод преобразования проекций. Цель и суть.

В реальности геометрические фигуры могут занимать разное положение, чаще общее, что затрудняет решение метрических и позиционных задач. Цель метода преобразования проекций – так изменить систему проектирования фигуры, чтобы фигура в новой системе заняла частное положение такое, при котором простым измерение могут быть получены метрические параметры фигур, или можно сразу понять взаимное положение фигур.

Изменение системы проектирования может быть реализовано двумя основными способами:

1. Замена плоскостей проекций. При этом способе положение объекта проектирования остается неизменным; изменяется положение плоскостей проекций.
2. Вращение, совмещение или плоскопараллельное перемещение фигур. При реализации этой группы способов система плоскостей проекций остается неизменной, изменяется положение фигур относительно нее.

7.2 Способ замены ПП.

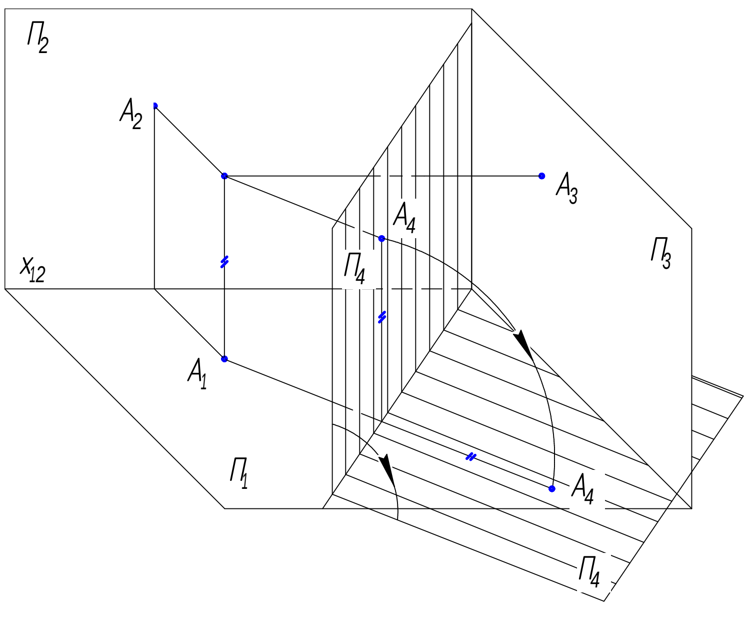


Рис. 7.1 Замена $\boldsymbol{П_2}$ на $\boldsymbol{П_4}$

Рассмотрим в системе плоскостей проекций $\boldsymbol{П_1/П_2}$ точку $\boldsymbol{A}$. Ее проекции в этой системе $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$. Введем новую плоскость проекций $\boldsymbol{П_4 \perp П_1}$. Точка $\boldsymbol{A}$ будет в этой плоскости иметь проекцию $\boldsymbol{A_4}$ (Рис. 7.1). Так как высота точки не изменилась, отстояние проекции $\boldsymbol{A_4}$ точки $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{П_4}$ от плоскости $\boldsymbol{П_1}$ будет такое же, как на плоскости $\boldsymbol{П_2}$.

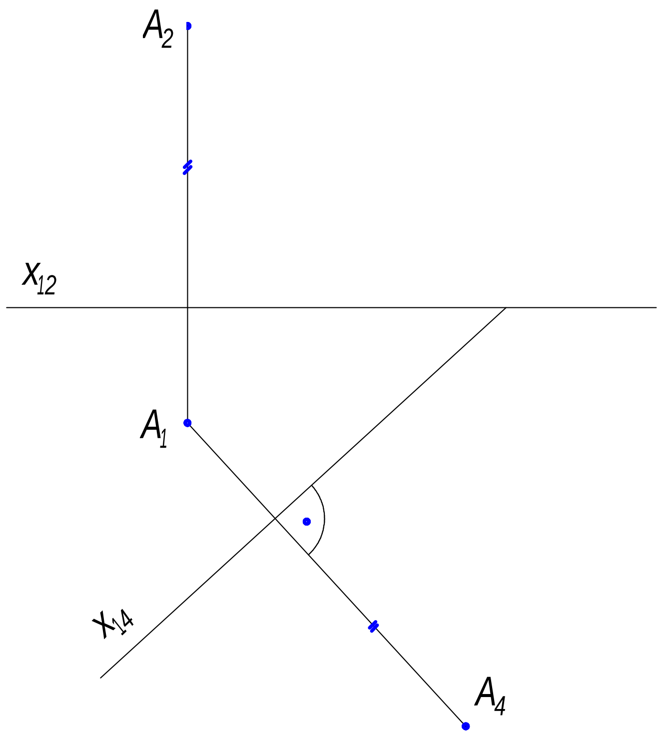


Рис. 7.2 Точка на новой плоскости проекций на проекционном чертеже

Если развернуть плоскость $\boldsymbol{\Pi_4}$ на 90^0 до совмещения с плоскостью $\boldsymbol{\Pi_1}$, линия пересечения плоскостей проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ и $\boldsymbol{\Pi_4}$ будет осью $\boldsymbol{x_{14}}$. Линии проектирования точки $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ и $\boldsymbol{\Pi_4}$ образуют линию связи между проекциями точки $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_4}$ в новой системе проектирования $\boldsymbol{\Pi_1}/\boldsymbol{\Pi_4}$ (Рис. 7.2).

Аналогично можно сделать замену плоскости $\boldsymbol{\Pi_2}$ на $\boldsymbol{\Pi_5}$ или $\boldsymbol{\Pi_3}$ на $\boldsymbol{\Pi_6}$.

Более того, можно сделать последовательно несколько замен плоскостей проекций, соблюдая правило равенства координат точки в заменяемой и в новой плоскости проекции.

Метрические задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций, могут быть сведены к четырем основным задачам:

Задача 1. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения стала параллельной новой плоскости проекций (линией уровня) (Рис. 7.3).

Решение:

$\boldsymbol{AB}$ – прямая общего положения

$$x_{14} \parallel A_1B_1; \qquad \Pi_4 \perp \Pi_1;$$

$$\Pi_4 \parallel AB \;\Rightarrow\; A_4B_4 = AB;$$

$$a = (AB)\hat{\ }\Pi_1$$

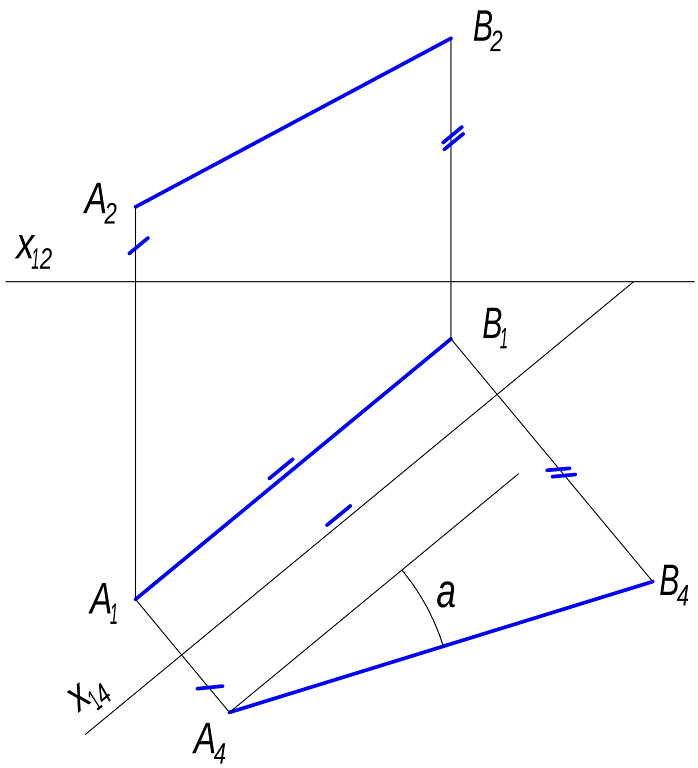


Рис. 7.3 Преобразование общего положения прямой в частное (прямая уровня) заменой плоскости проекции

Задача 2. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость, заданная треугольником ***ABC*** стала в новой системе проектирования проектирующей (Рис. 7.4).

Решение:

Для того, чтобы плоскость ***ABC*** стала проектирующей, новая плоскость проекции $\boldsymbol{\Pi_4}$ в системе $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_4}$ должна быть ⊥ плоскости ***ABC***. Это условие выполняется, если $\boldsymbol{\Pi_4}$ будет ⊥ линии уровня, параллельной Π_1, т.е. горизонтали.

Заодно получено значение угла $\boldsymbol{\alpha}$ наклона плоскости ***ABC*** к горизонтальной плоскости проекции. В решении используется свойство сохранения прямого угла с линией уровня.

Такое преобразование используется для определения:

1. Углов наклона плоскости к плоскостям проекций;
2. Расстояния от точки до плоскости;
3. Расстояния между параллельными плоскостями.

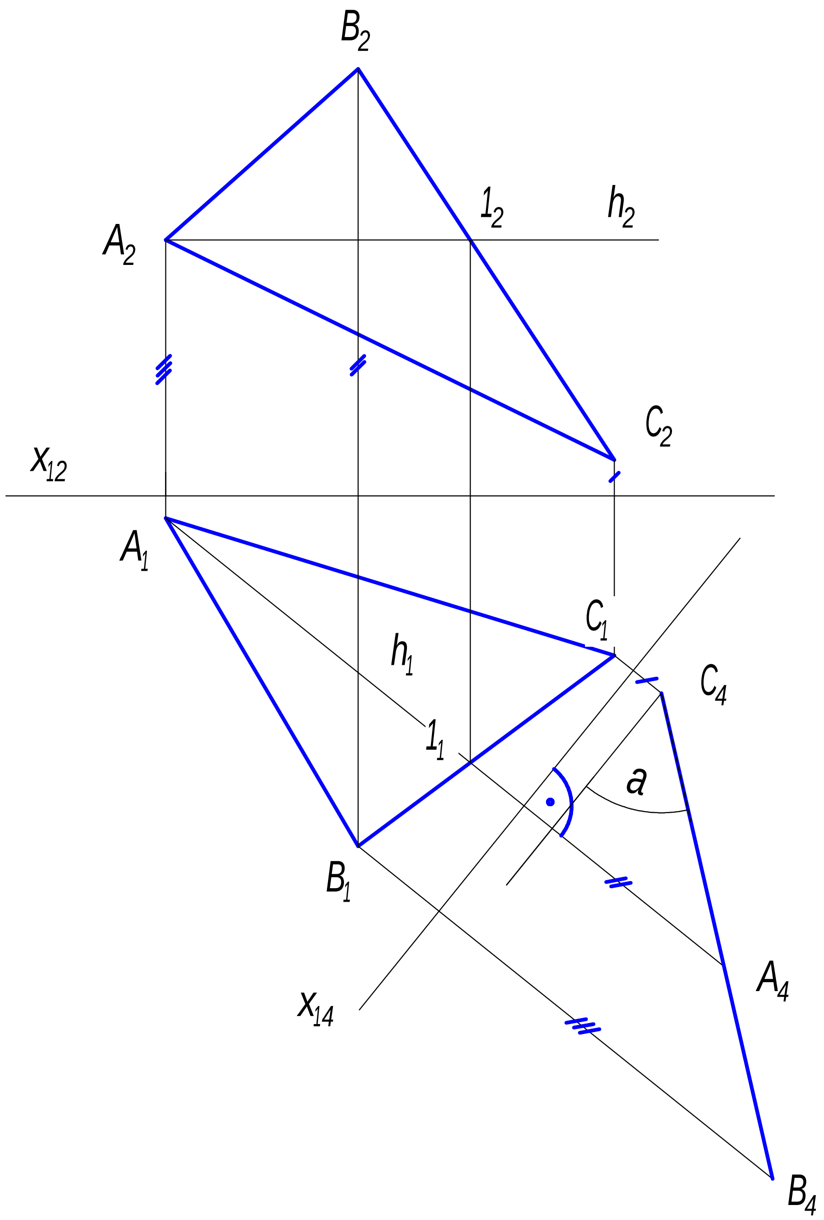


Рис. 7.4 Преобразование общего положения плоской фигуры в частное (проектирующая плоскость) заменой плоскости проекции

Задача 3. Преобразовать плоскости проекций так, чтобы прямая общего положения стала проектирующей на новую плоскость проекции (Рис. 7.5).

Решение:

В общем случае решение требует выполнения последовательно двух замен плоскостей проекции. Первая, для того, чтобы линия стала линией уровня, т.е., параллельной плоскости проекции. Вторая замена делается на плоскость Π_5 в системе Π_4/Π_5, $\perp$ полученной линии уровня.

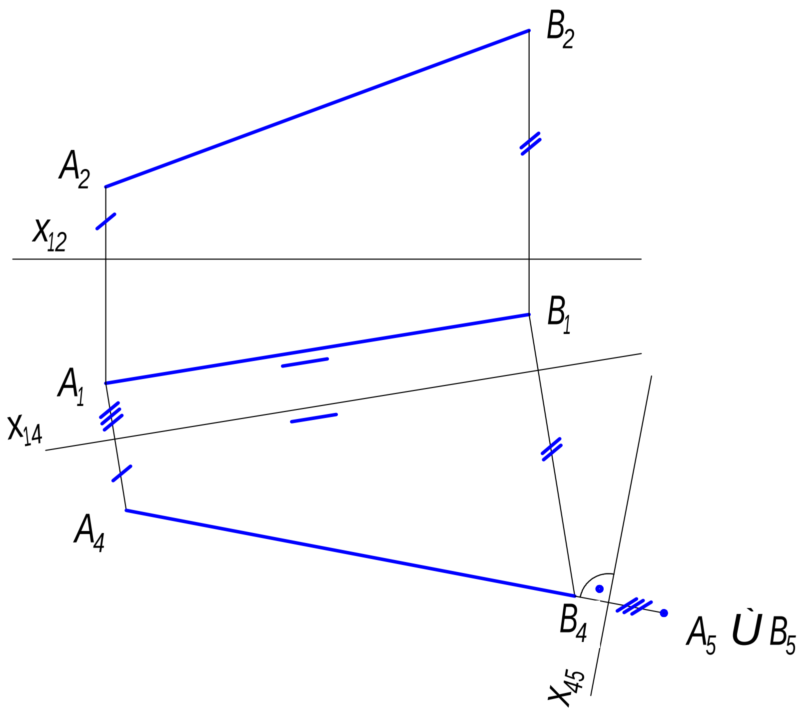


Рис. 7.5 Преобразование общего положения прямой в частное (прямая уровня) двумя заменами плоскости проекции

Такое преобразование используется для определения, например:

- расстояния между точкой и прямой;
- расстояния между двумя скрещивающимися прямыми (одна из прямых делается проектирующей и искомое расстояние будет перпендикуляром, проведенным из точки, в которую спроектировалась первая прямая, до проекции второй прямой);
- величины двугранного угла (проектирующей делается линия пересечения двух плоскостей и искомый угол будет линейным углом между следами плоскостей, которые становятся проектирующими на новую плоскость проекции).

Задача 4. Заменить плоскости проекций так, чтобы плоскость общего положения *Q(ABC)* оказалась параллельной одной из плоскостей проекции. Это даст натуральную величину фигур, расположенных в плоскости Q (Рис. 7.6).

Решение:

Для этого нужно сделать две замены плоскости проекции.

Первая так, чтобы плоскость Q стала проектирующей,

Вторая так, чтобы плоскость проекции стала параллельной плоскости Q.

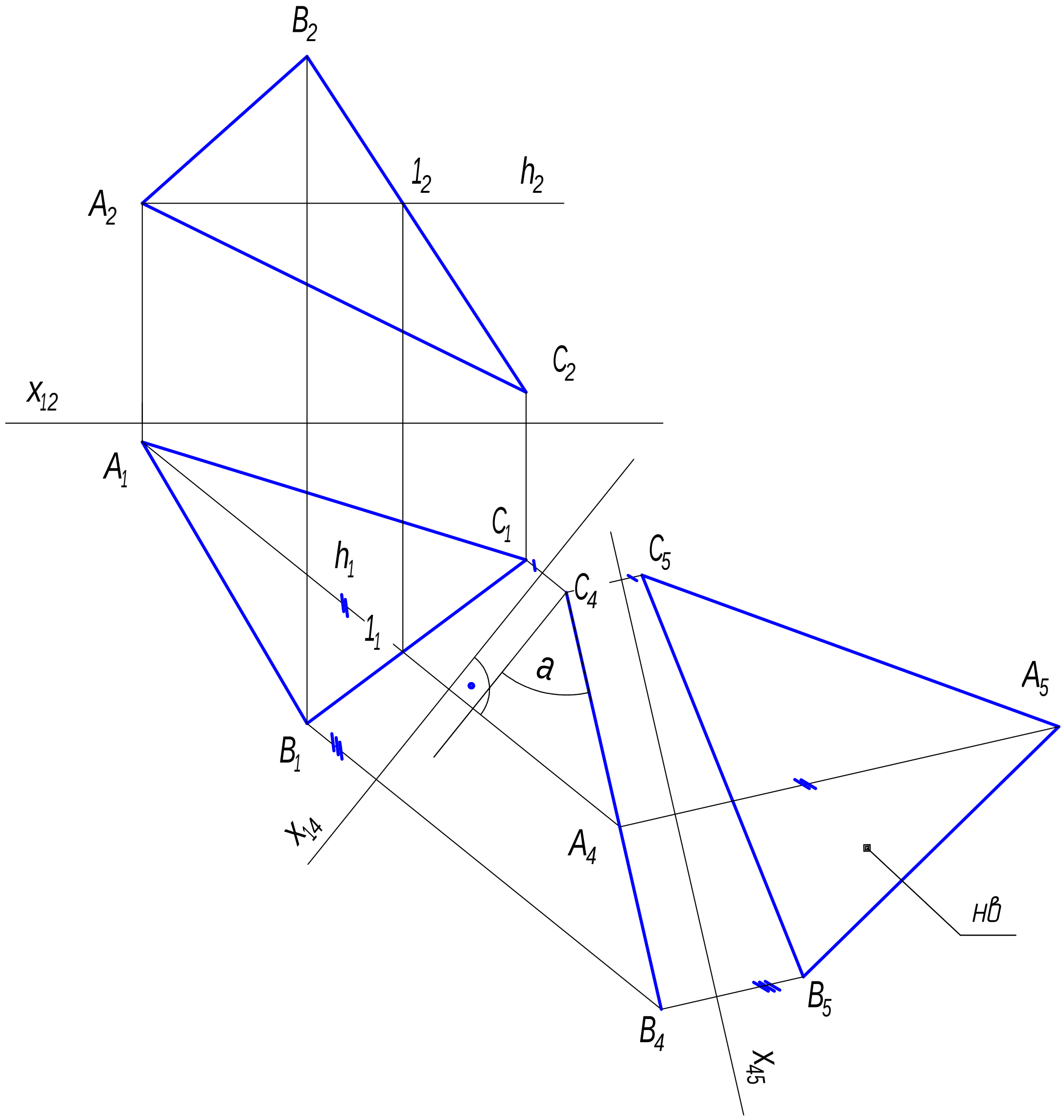


Рис. 7.6 Преобразование общего положения плоской фигуры в положение плоскости уровня двумя заменами плоскости проекции

7.3 Способ вращения

7.3.1 Вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций (проектирующие оси).

Основы вращения. **Свойства:**

1. Траектория точки при вращении вокруг оси – окружность;
2. Плоскость этой окружности ⊥ оси вращения;
3. Радиус окружности есть расстояние между точкой и осью вращения;
4. Центр окружности лежит на оси вращения;
5. Точки, лежащие на оси вращения – неподвижны;

6. При вращении прямой и плоскости вокруг оси угол их наклона к оси остается неизменным.

Следствия:

1. Если ось $\boldsymbol{i}$ вращения $\perp$ плоскости проекции, проекция траектории вращения точки на этой плоскости будет окружностью с центром в точке пересечения оси с плоскостью проекции. На другой плоскости проекции траектория точки будет отрезком прямой, параллельным оси, разделяющей плоскости проекций.
2. При вращении любой фигуры относительно оси, перпендикулярной плоскости проекции, форма и размеры проекции фигуры на эту ПП остаются неизменными. Меняется только ее положение относительно оси, разделяющей плоскости проекции.

Примеры вращения фигур.

Пример 7.1: Точку $\boldsymbol{A}$ повернуть вокруг оси $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$ на угол 90^0 по часовой стрелке (Рис. 7.7).

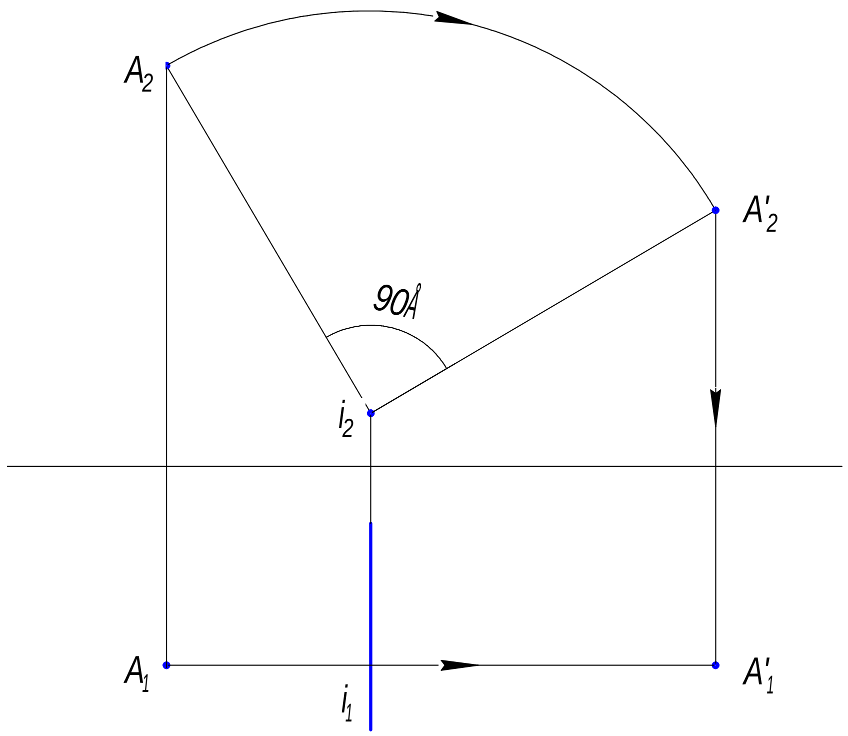


Рис. 7.7 Вращение точки вокруг фронтально-проектирующей оси

Пример 7.2: Точку $\boldsymbol{A}$ повернуть вокруг оси $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$ до совмещения с горизонтально-проектирующей плоскостью (Рис. 7.8).

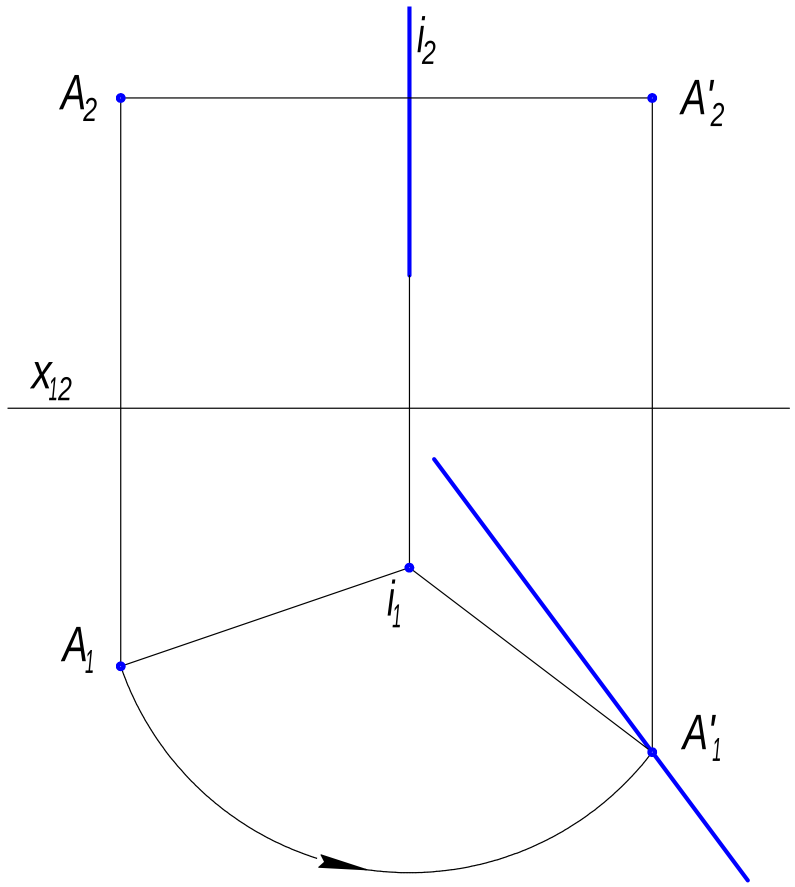


Рис. 7.8 Вращение прямой вокруг горизонтально-проектирующей оси

Пример 7.3: Повернуть (.)***A*** до совмещения с плоскостью общего положения, заданной следами (Рис. 7.9).

Решение:

При вращении точки вокруг вертикальной оси она окажется на горизонтали заданной плоскости, которая лежит в с заданной точкой в одной горизонтальной плоскости. Эта горизонталь $\boldsymbol{h'}$ должна быть заранее построена.

Далее, из горизонтальной проекции $\boldsymbol{i_1}$ оси вращения проводится дуга $\boldsymbol{A_1 i_1}$ окружности, являющаяся горизонтальной проекцией траектории (.)***A*** при вращении вокруг оси ***i***, до пересечения с горизонтальной проекцией горизонтали $\boldsymbol{h'}$. Полученная точка является горизонтальной проекцией искомого положения точки на плоскости.

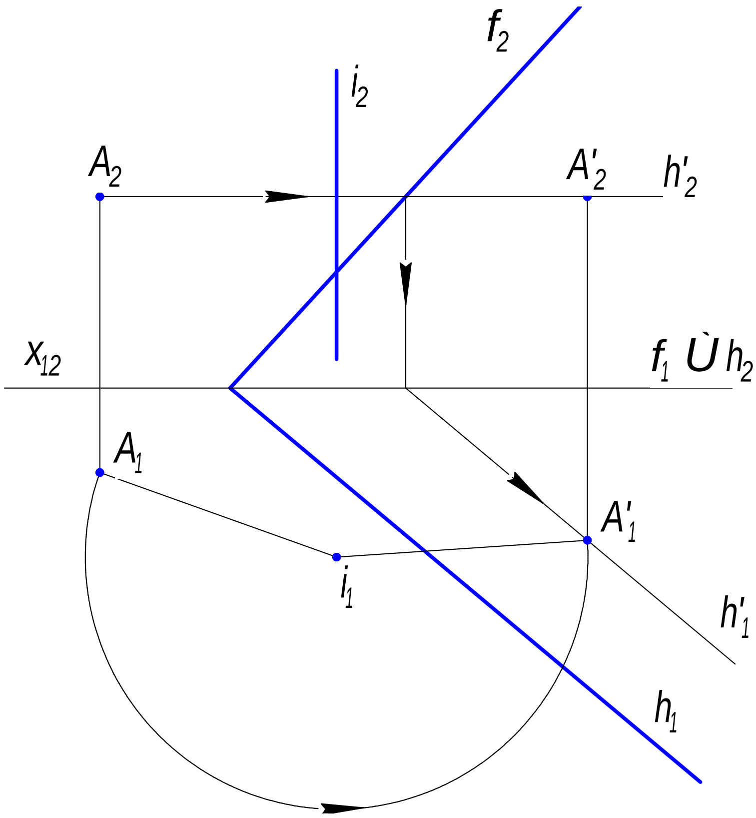


Рис. 7.9 Совмещение точки с плоскостью вращением вокруг проектирующей оси

Пример 7.4: Определить натуральную величину отрезка ***AB*** и угол его наклона к $\boldsymbol{\Pi_2}$ (Рис. 7.10).

Решение: Отрезок ***AB*** нужно вращать вокруг оси $\boldsymbol{i \perp \Pi_2}$ и проходящей через один из концов отрезка до положения, когда отрезок станет линией уровня (горизонталью).

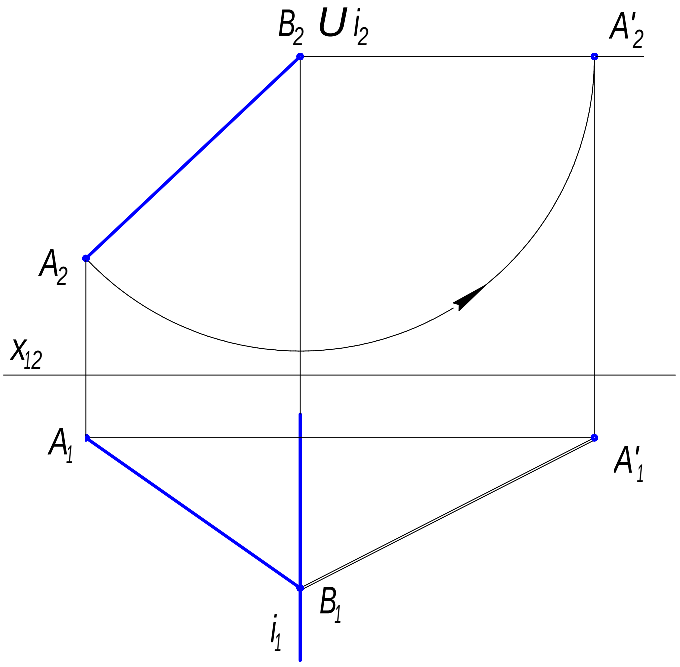


Рис. 7.10 Определение натуральной величины отрезка вращением вокруг проектирующей оси

7.3.2 Вращение плоскости.

Вращение плоскости вокруг оси ⊥ плоскости проекций происходит для каждой ее точки на один и тот же угол и в одном направлении (Рис. 7.11).

Пример 7.5: Повернуть $\Delta \boldsymbol{ABC}$ в положение проектирующей на $\boldsymbol{\Pi_2}$ плоскости.

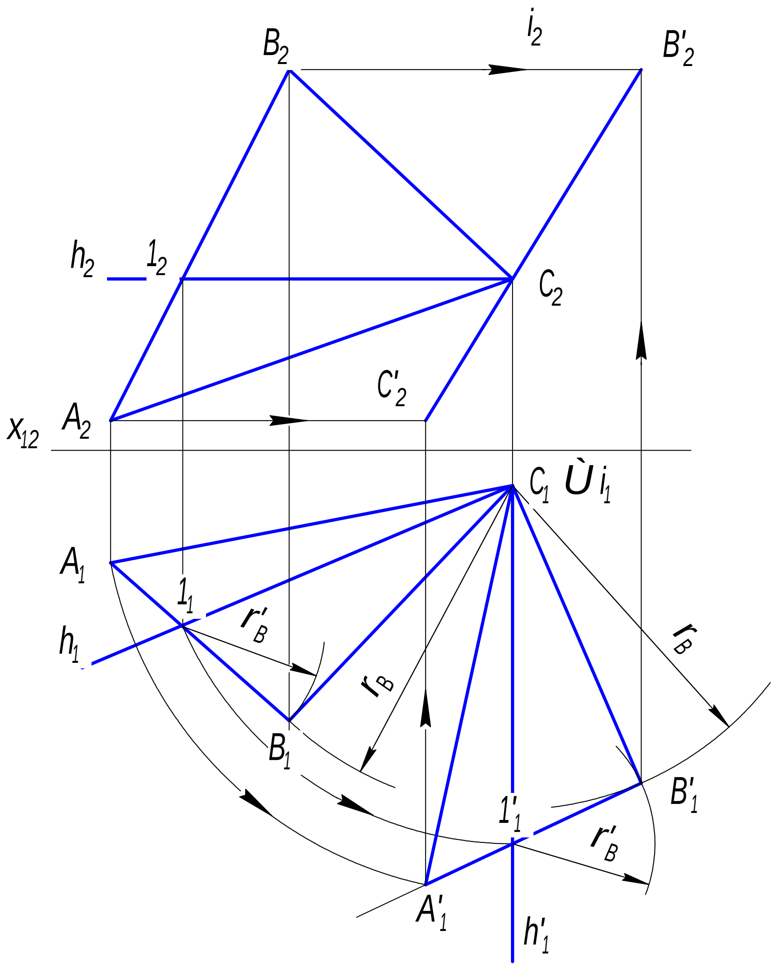


Рис. 7.11 Вращение плоскости вокруг проектирующей оси

Решение:

Все горизонтали фронтально-проектирующей плоскости являются проектирующими на $\boldsymbol{\Pi_2}$ линиями, т.е. ⊥ $\boldsymbol{\Pi_2}$. Для решения задачи построим в $\boldsymbol{ABC}$ горизонталь и повернем треугольник так, чтобы эта горизонталь стала ⊥ оси $\boldsymbol{X_{12}}$. При этом горизонталь на $\boldsymbol{\Pi_2}$ выродится в точку.

Горизонтальная проекция $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ треугольника, оставаясь неизменной, повернется вместе со своей горизонталью на тот же угол, что и горизонталь. Техника построения повернутого положения горизонтальной проекции треугольника ясна из рисунка.

Пример 7.6: Повернуть плоскость общего положения, заданную следами, вокруг вертикальной оси так, чтобы она стала фронтально-проектирующей (Рис. 7.12).

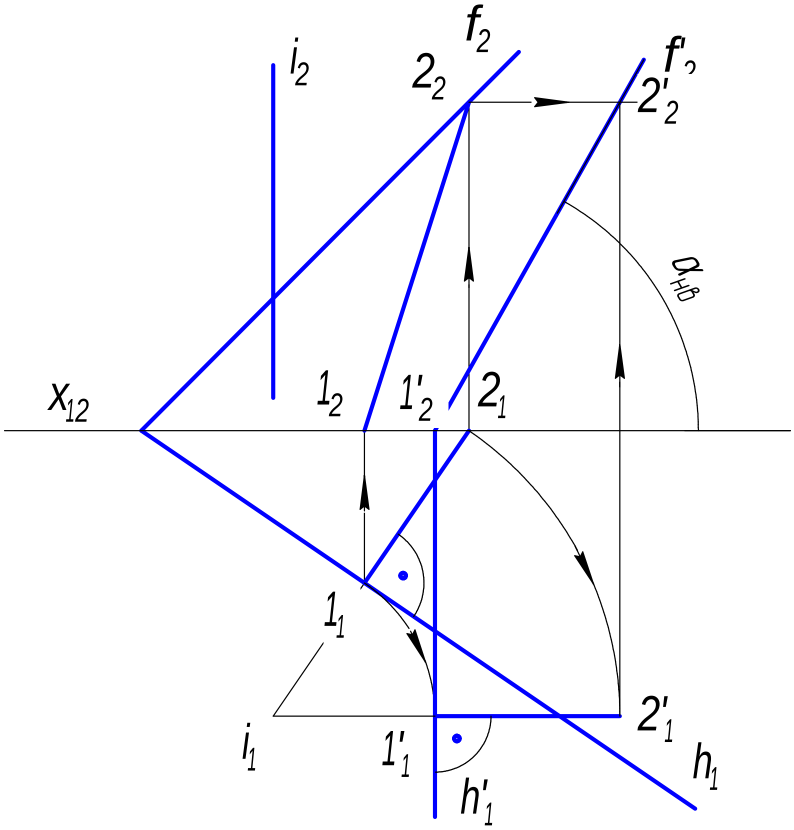


Рис. 7.12 Вращение плоскости, заданной следами, вокруг проектирующей оси

Решение:

Ранее было установлено, что у фронтально-проектирующей плоскости горизонтальный след должен быть перпендикулярным оси $\boldsymbol{x}$. При вращении вокруг вертикальной оси горизонтальный след будет оставаться касательным к окружности, проведенной из горизонтальной проекции $\boldsymbol{i_1}$ заданной оси $\boldsymbol{i}$. Линия ската ***12*** заданной плоскости, проходящая через ось вращения, на горизонтальной плоскости сохранит свою длину и перпендикулярность горизонтальному следу. На фронтальной ПП линия ската сохранит свою высоту.

7.3.3 Вращение фигур вокруг оси, параллельной плоскости проекции.

Вращая геометрическую фигуру относительно оси, параллельной плоскости проекции, можно расположить ее параллельно этой плоскости проекции, что даст натуральную величину фигуры.

При вращении фигуры относительно оси, параллельной плоскости проекции, каждая ее точка описывает траекторию, ⊥ проекции оси вращения на плоскость, которой она параллельна. Следовательно, эта траектория будет лежать в плоскости, ⊥ этой плоскости проекции.

Пусть требуется повернуть (.)***A*** относительно линии уровня ***h*** (горизонтали) так, чтобы она оказалась в одной горизонтальной плоскости с заданной осью вращения (Рис. 7.13).

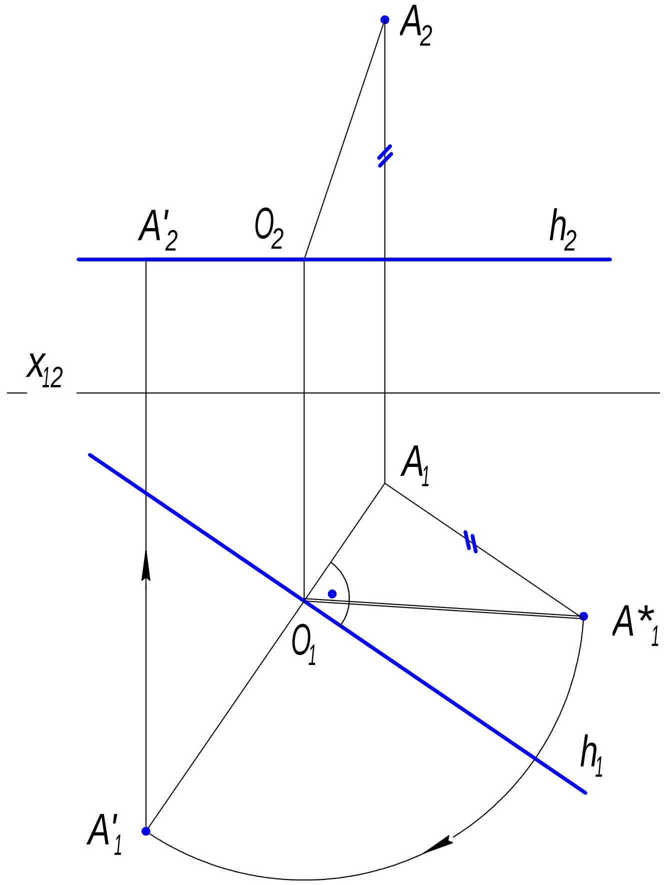


Рис. 7.13 Вращение точки вокруг линии уровня

На комплексном чертеже горизонтальная проекция траектории движения точки будет линией $A_1A'_1$, перпендикулярной горизонтальной проекции h_1 заданной оси вращения.

Так как (.)***A*** окажется в горизонтальной плоскости, ее радиальной расстояние от оси вращения отобразится на горизонтальной плоскости проекции в натуральную величину. Поэтому эта натуральная величина должна быть предварительно определена (см.

Рис. 7.13). Затем эта натуральная величина перенесена по дуге на горизонтальную проекцию траектории движения (.)$\boldsymbol{A}$ в (.)$\boldsymbol{A'_1}$. Эта точка является горизонтальной проекцией искомого положения точки.

Пример 7.7: Определить величину угла *α* между двумя пересекающимися прямыми ***l*** и ***m*** (Рис. 7.14).

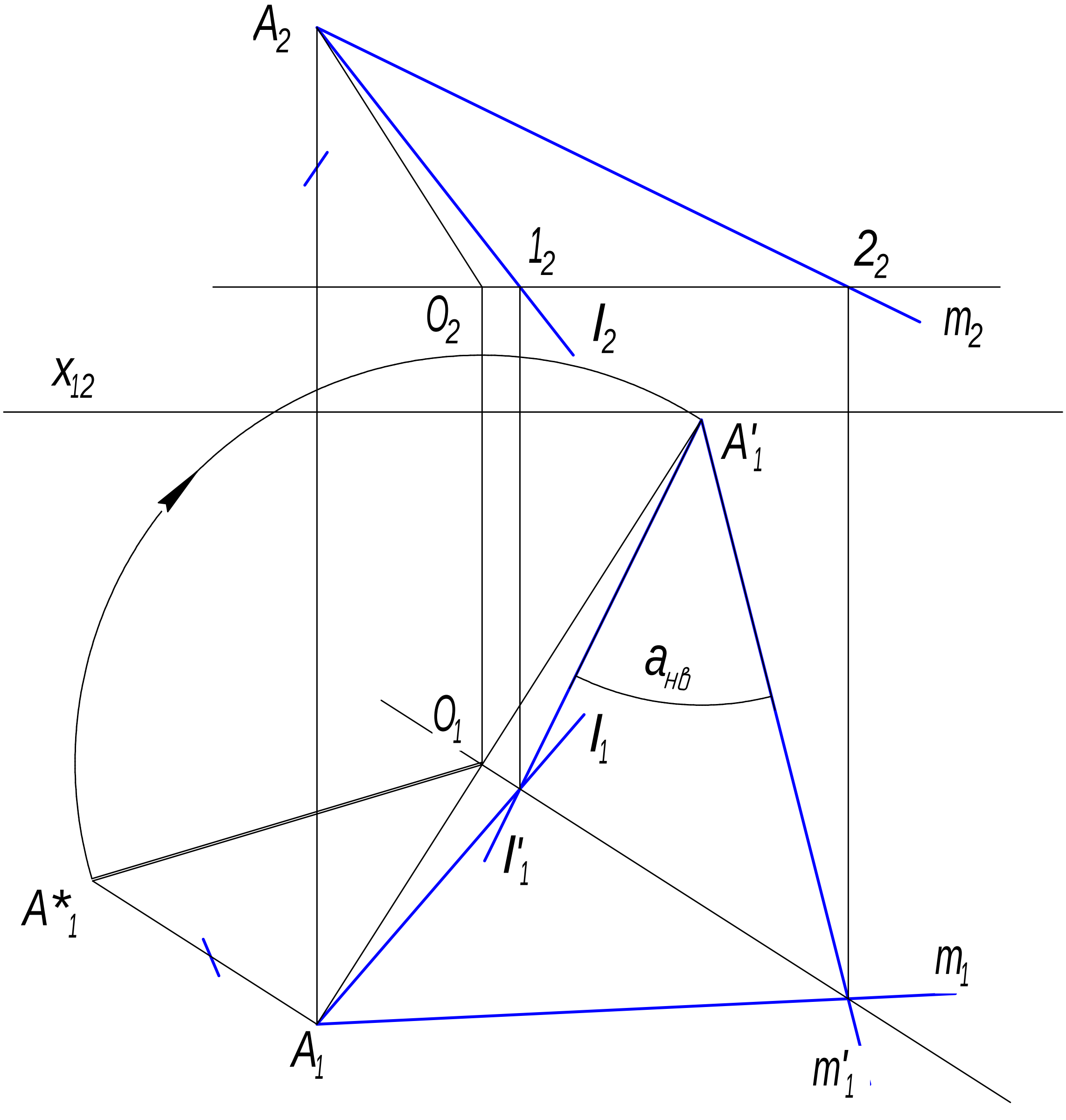


Рис. 7.14 Вращение плоскости вокруг линии уровня

Решение:

Для нахождения угла нужно сделать плоскость угла параллельной ПП. Этого можно добиться вращением фигуры относительно линии уровня, принадлежащей плоскости заданного угла.

7.3.4 Метод совмещения

Является частным случаем метода вращения относительно линии уровня. Метод используется при задании плоскости следами.

Вращается плоскость с находящимися на ней фигурами вокруг одного из своих следов до совмещения плоскости с плоскостью проекции. В результате, фигуры, принадлежащие плоскости, отобразятся после совмещения с ПП в натуральном виде.

Пример 7.8: Совместить плоскость общего положения $Q(\boldsymbol{f}\cap\boldsymbol{h})$ с $\boldsymbol{\Pi_2}$ (Рис. 7.15).

Для построения совместим произвольную (.)$\boldsymbol{A}$ на горизонтальном следе с фронтальной ПП, вращением относительно фронтального следа плоскости $\boldsymbol{f_2}$.

На рисунке (.)***O*,** расположенная на фронтальном следе плоскости, является центром вращения (.)$\boldsymbol{A}$, расположенной на горизонтальном следе плоскости. Для определения совмещенного положения $\boldsymbol{A'}$ точки $\boldsymbol{A}$ на фронтальной ПП была определена натуральная величина отстояния (.) $\boldsymbol{A}$ от центра вращения $\boldsymbol{O}$ (отрезок $\boldsymbol{O_2A}$*).

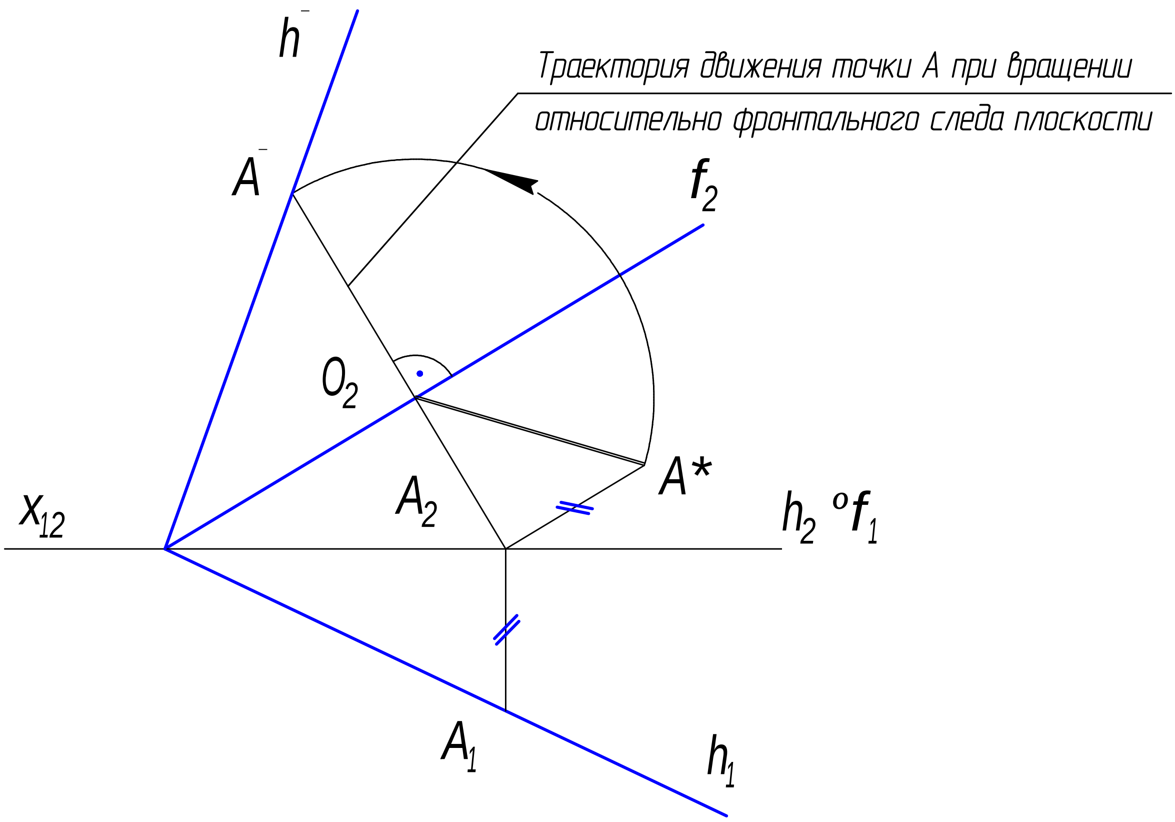


Рис. 7.15 Совмещение плоскости с фронтальной плоскостью проекции

Это же построение можно выполнить, не определяя натуральную величину радиуса вращения точки.

Т.к. отстояние (.)$\boldsymbol{A}$ от точки схода следов заданной плоскости является его натуральной величиной, это расстояние на совмещенном чертеже останется неизменным (Рис. 7.16).

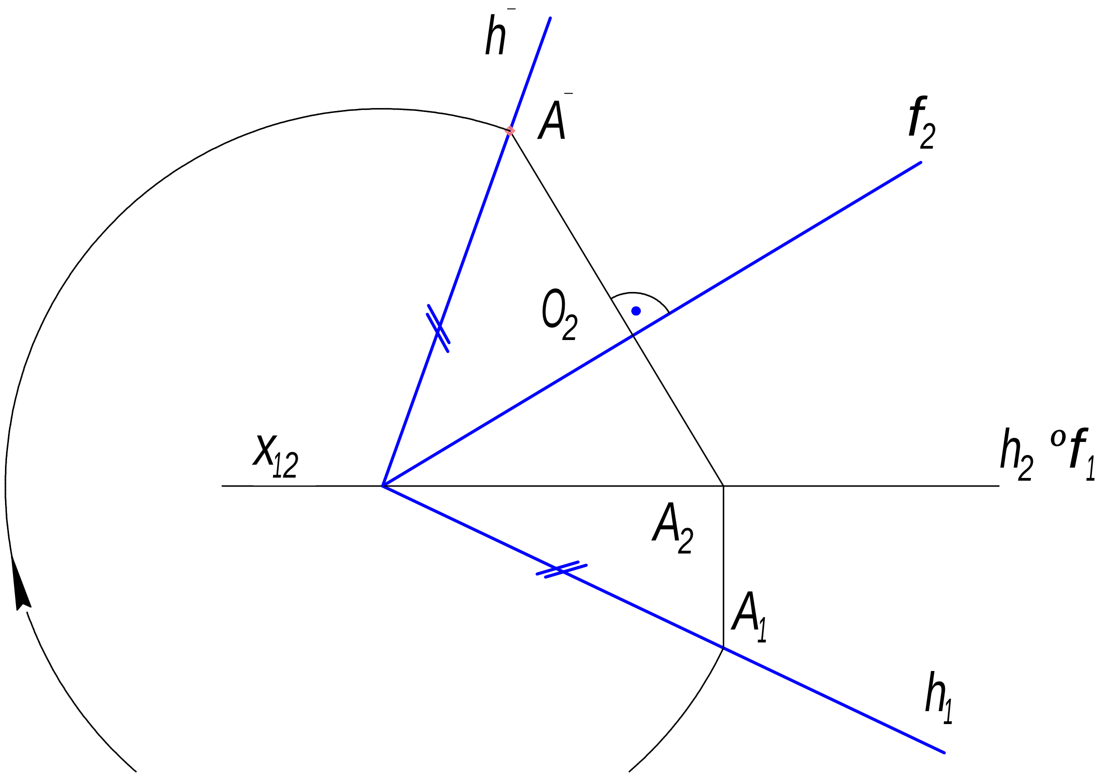


Рис. 7.16 Построение совмещенного положения плоскости с фронтальной плоскостью проекции

Как известно, для построения точек, принадлежащих плоскости, заданной следами, удобно использовать ее горизонтали и фронтали, которые легко строятся. Поэтому полезно знать типовой прием построения совмещенной линии уровня.

Например, на рисунке дано построение совмещения плоскости с лежащими на ней горизонталью и фронталью с горизонтальной ПП и построение принадлежащих линиям уровня точек $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{N}$ (Рис. 7.17).

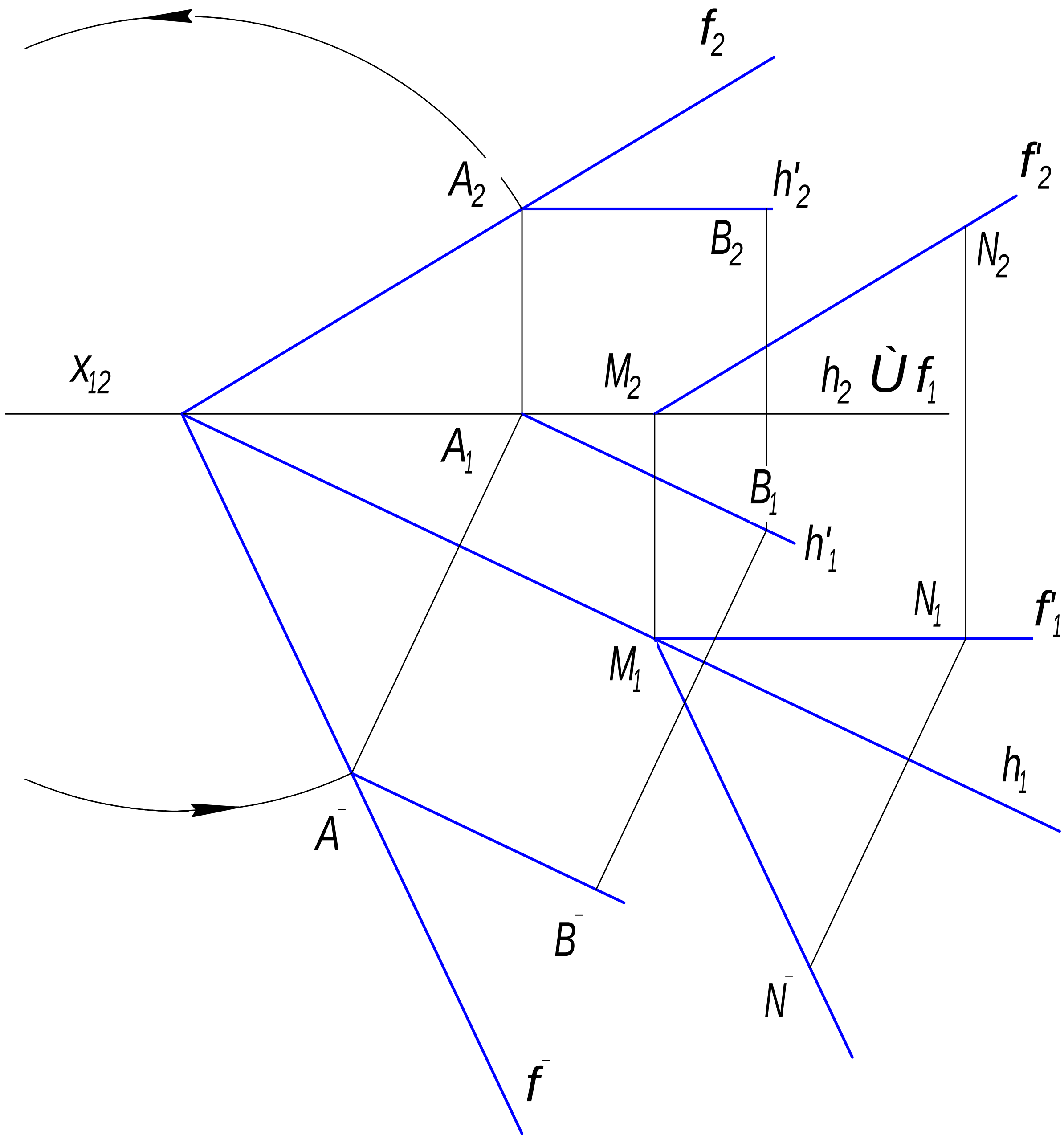


Рис. 7.17 Построение совмещенного с горизонтальной плоскостью проекции положения фигур (прямых) принадлежащих плоскости

Тема 8 Объемные фигуры. Многогранники. Построение пересечений многогранников плоскостями. Построение разверток многогранников.

8.1 Общие положения.

Многогранник – это объемная (трехмерная) фигура, поверхность которой образована конечным числом плоских многоугольников.

Образующие поверхность многогранника плоские многоугольники называются **гранями**. Линии, разделяющие грани многогранника – это его **ребра**.

Практические задачи, использующие методы начертательной геометрии, требуют построения многогранников, их разверток, линий пересечения многогранников с плоскостями, с другими многогранниками и с произвольными поверхностями.

При пересечении многогранника плоскостью в сечении образуется замкнутый многоугольник. Вершины многоугольника – точки пересечения ребер многогранника с заданной плоскостью. Стороны многоугольника – это отрезки прямых, являющиеся линиями пересечения граней многогранника заданной плоскостью (Рис. 8.1).

Для того, чтобы найти фигуру, полученную в сечении многогранника плоскостью ищут либо вершины многоугольника сечения и через них проводят его стороны, либо сразу ищут стороны многоугольника. Способ, при котором ищутся вершины многоугольника, называется **способом ребер**. Способ поиска ребер как линий пересечения граней многогранника и плоскости называется **способом граней**.

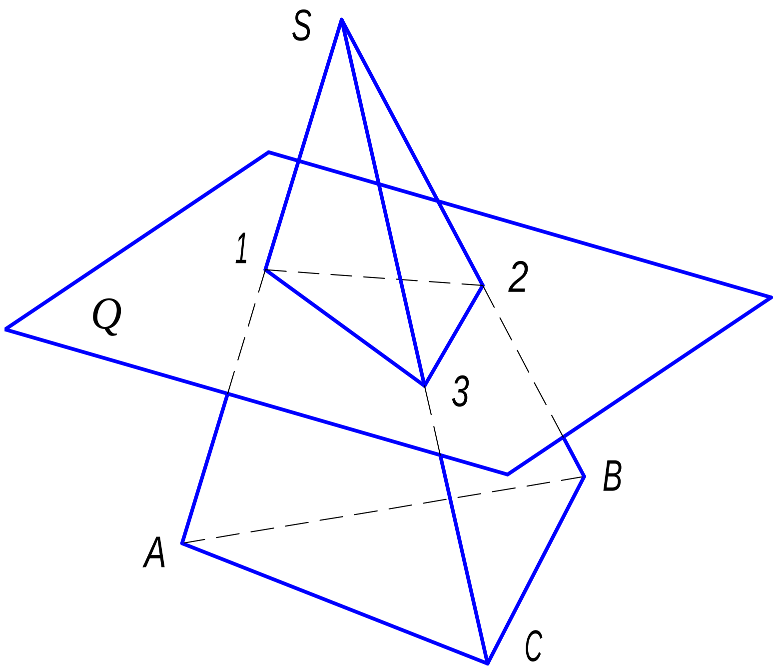


Рис. 8.1 Пересечение пирамиды плоскостью

Выбор способа построения многоугольника в пересечении многогранника плоскостью определяется тем, какой из них даст более простое и наглядное решение.

8.1.1 Метод ребер

Пример 8.1: Построить натуральный вид сечения прямой треугольной призмы фронтально-проектирующей плоскостью Σ и развертку боковой поверхности оставшейся части призмы (Рис. 8.2).

Фигура сечения – $\Delta \boldsymbol{123}$. Фронтальная проекция $\Delta \boldsymbol{123}$ совпадает с фронтальным следом секущей плоскости S. Горизонтальная проекция $\boldsymbol{1_1 2_1 3_1}$ треугольника совпадает с проекциями проектирующих на $\boldsymbol{\Pi_1}$ боковых граней призмы.

Натуральный вид сечения строится с использованием метода замены плоскостей проекции. Новая плоскость $\boldsymbol{\Pi_5}$, вводится взамен плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ и проходит так, чтобы она была $\parallel$ плоскости S.

Для построения развертки оставшейся после отсечения части призмы используется ее частное положение по отношению к плоскостям проекций. Так, размеры ребер призмы проектируются в натуральную величину на фронтальную ПП, а стороны основания на горизонтальную ПП.

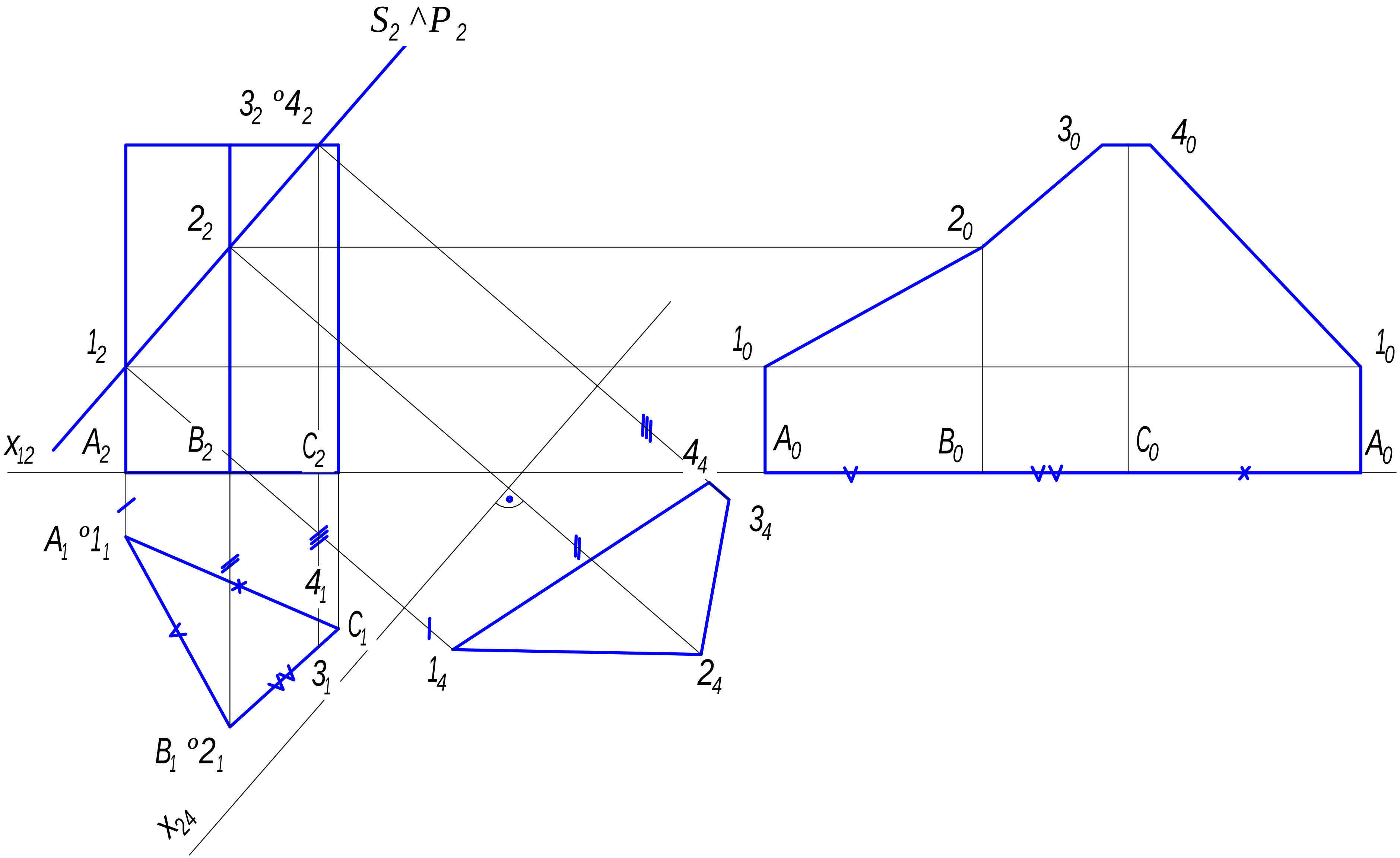


Рис. 8.2 Построение фигуры сечения призмы плоскостью и развертки отсеченной части боковой поверхности призмы

Пример 8.2: Построить проекции сечения прямой четырехугольной призмы плоскостью *Q* общего положения, заданной двумя параллельными прямыми ***l*** и ***m***.

Для построения использован способ граней (Рис. 8.3).

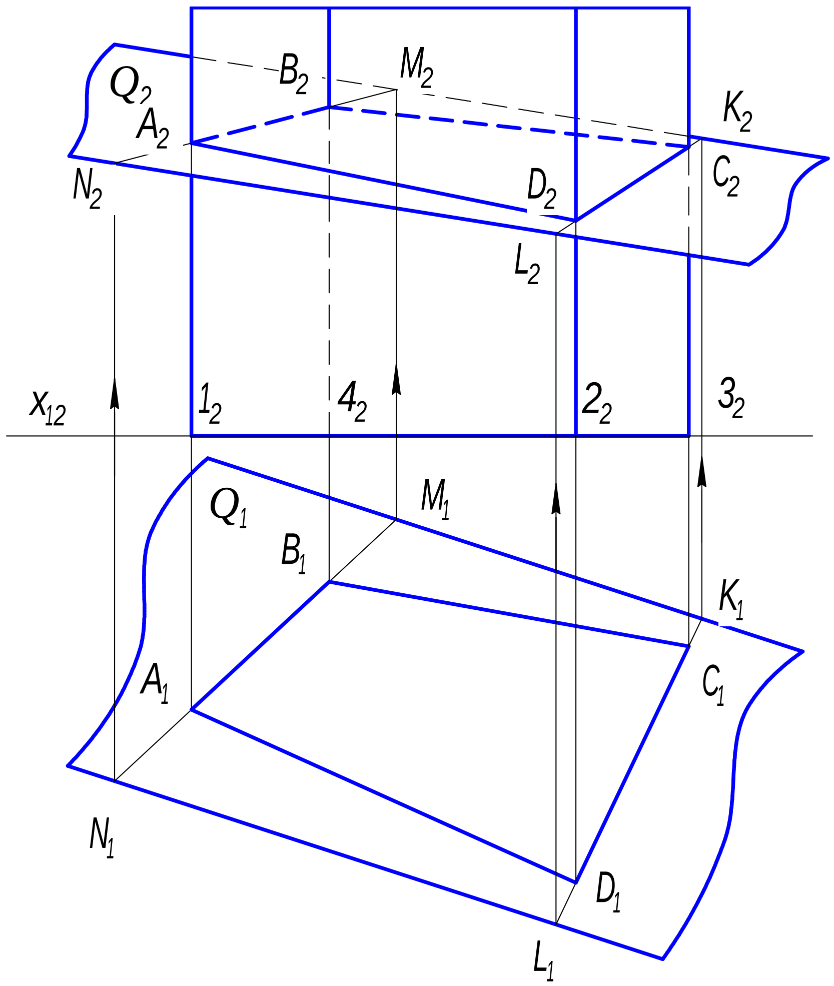


Рис. 8.3 Метод граней для построения линии сечения призмы плоскостью

Горизонтально-проектирующие плоскости граней призмы пересекают плоскость *Q* по прямым ***KL*** и ***MN***.

Проекции этих линий на $\boldsymbol{\Pi_2}$ дают фронтальную проекцию линий пересечения боковых граней призмы плоскостью *Q*. Эти линии образуют четырехугольник ***ABCD***.

Натуральную величину четырехугольника можно получить методом замены плоскостей проекций или методом вращения относительно линии уровня (выполнить самостоятельно).

Пример 8.3: Построить сечение треугольной пирамиды фронтально-проектирующей плоскостью и развертку усеченной части (Рис. 8.4).

При построении использовано собирательное свойство фронтально-проектирующей плоскости. Это сразу дало положение вершин ***K*** и ***M*** фигуры сечения. Частное положение грани ***SC*** не позволило сразу определить на ней положение точки пересечения с секущей плоскостью. Здесь использован следующий прием: на фронтальной плоскостью проекции проведена вспомогательная горизонтальная плоскость так, чтобы она прошла через искомую точку ***L***. Эта вспомогательная плоскость пересекла грань ***SBC*** пирамиды по линии $\boldsymbol{L_1}$. Эта линия параллельна стороне ***BC*** основания, т.к. основание по условию лежит па горизонтальной плоскости проекции. Следовательно, эта линия будет параллельной стороне основания ***BC*** и на горизонтальной плоскости проекции. Проведение линии $\boldsymbol{1_1L_1}$, параллельной проекции $\boldsymbol{B_1C_1}$ стороны основания дает искомую точку пересечения ребра ***SB*** с заданной плоскостью на $\boldsymbol{\Pi_1}$.

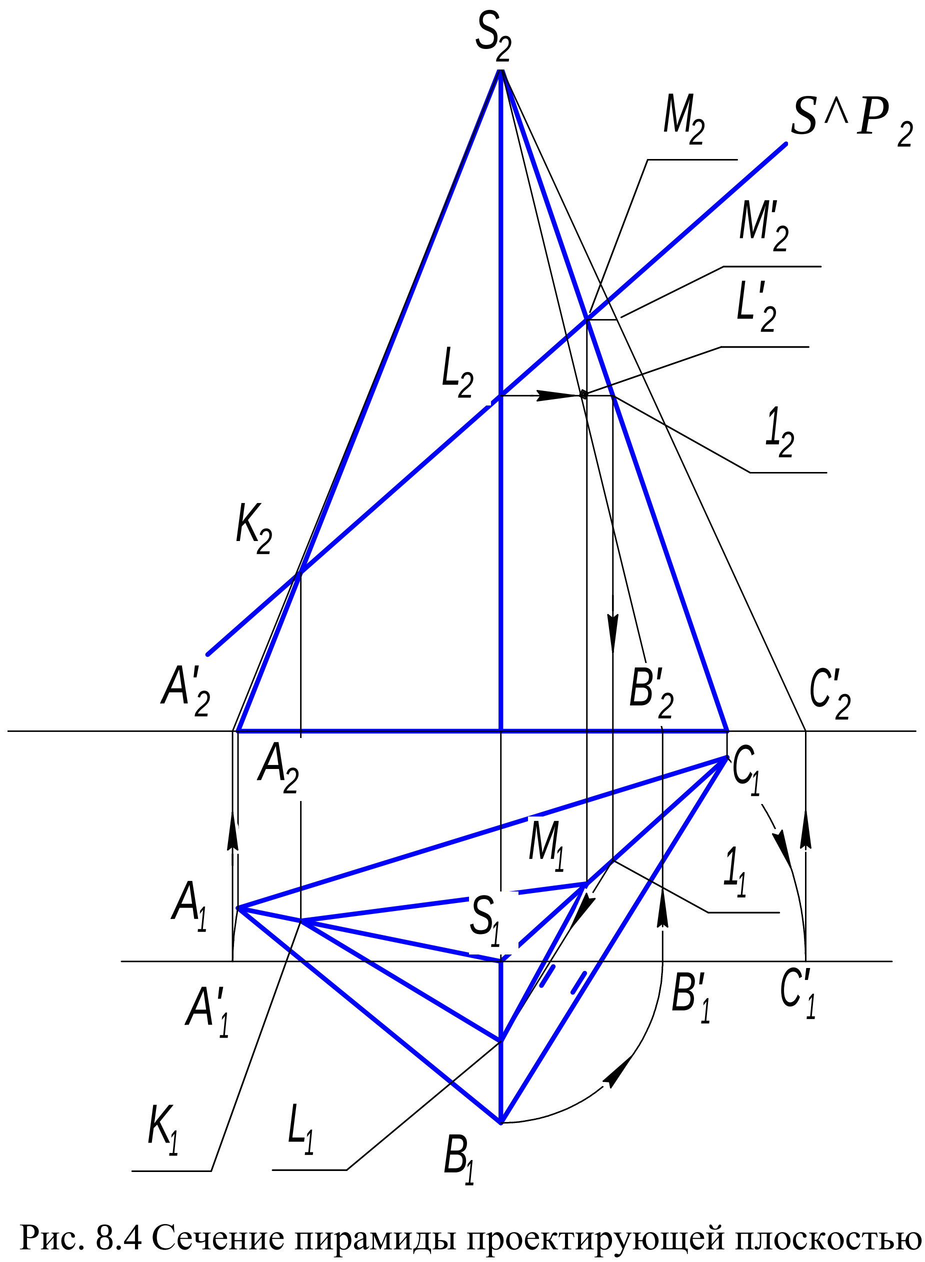


Рис. 8.4 Сечение пирамиды проектирующей плоскостью

Для построения развертки отсеченной части пирамиды необходимо знать значения натуральных величин длин боковых ребер пирамиды. Они станут известными, если повернуть боковые ребра пирамиды вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину пирамиды, до положения фронтальных линий уровня. На горизонтальной ПП показаны траектории движения точек ребер вокруг вертикальной оси. Соединение вершины пирамиды с повернутыми точками вершин основания на $\boldsymbol{\Pi_2}$ дает натуральные величины боковых ребер. На этих повернутых боковых ребрах легко найти положение соответствующих точек сечения пирамиды плоскостью. Стороны основания, лежащего на горизонтальной ПП, на ней будут отображены в натуральную величину. Имея натуральные величины отдельных сторон боковых граней – треугольников, легко построить развертку боковой поверхности пирамиды (построение треугольников по трем сторонам) (Рис. 8.5). Например, можно выбрать некоторое произвольное положение ребра $\boldsymbol{SA}$ и отталкиваясь от него строить остальные грани (см. Рис. 8.5). Натуральные значения отстояний точек сечения $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ на боковых ребрах от вершины пирамиды можно взять с повернутых до положения линии уровня $\boldsymbol{SA'}$, $\boldsymbol{SB'}$ и $\boldsymbol{SC'}$ боковых ребер. Точки $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ линия сечения переместятся при вращении ребер на фронтальной плоскости проекции по линиям, параллельным оси $\boldsymbol{x_{12}}$ (см. Рис. 8.4).

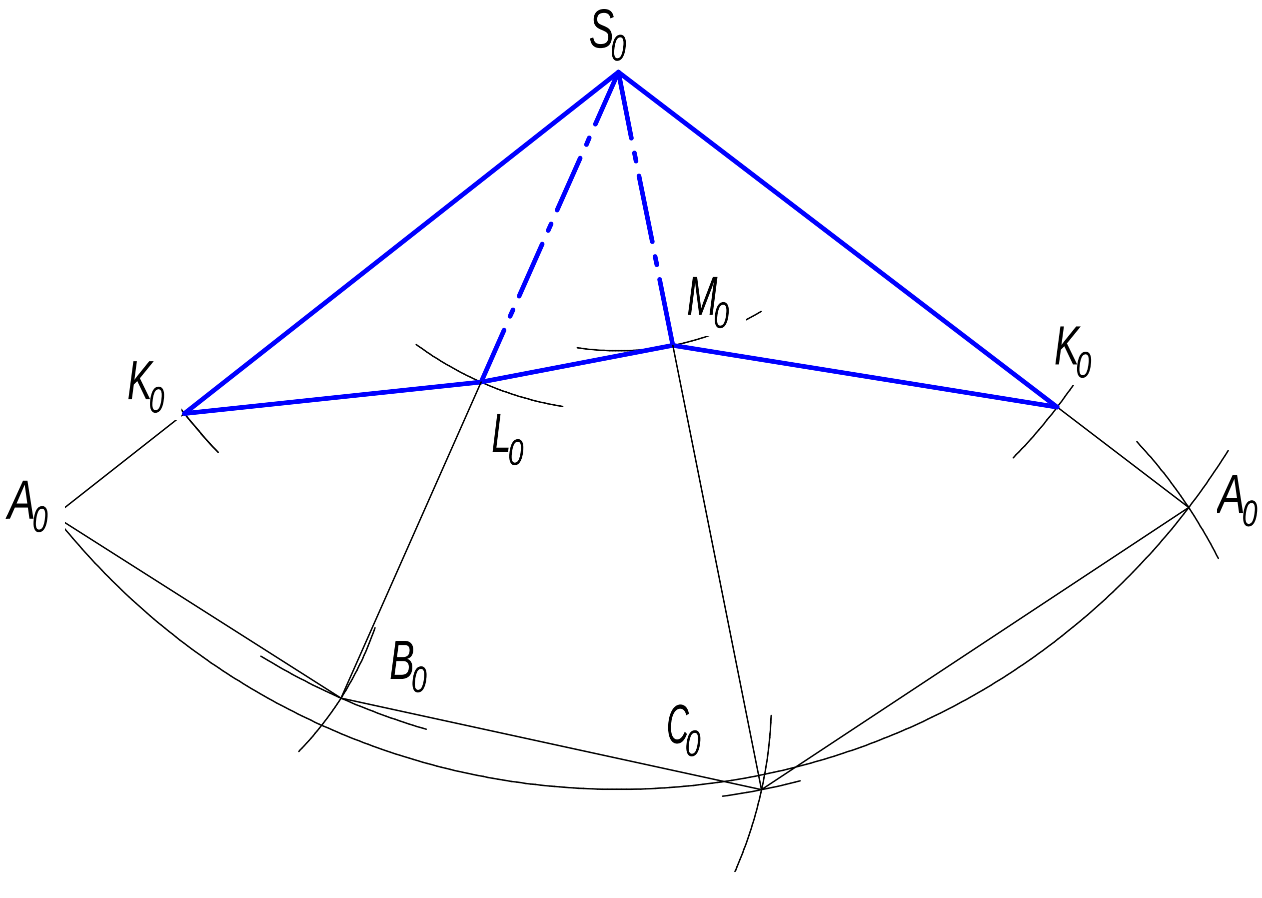


Рис. 8.5 Развертка отсеченной части пирамиды

Пример 8.4: Построить сечение пирамиды плоскостью общего положения $D(\boldsymbol{h,f})$.

Характер задачи указывает на то, что фигуру сечения пирамиды плоскостью проще искать методом ребер (Рис. 8.6).

По условию, основание пирамиды лежит на $\boldsymbol{\Pi_1}$. Следовательно, пересечение горизонтального следа плоскости со сторонами основания $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BC}$ сразу даст две точки сечения $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$. Для построения точки пересечения ребра $\boldsymbol{AS}$ с плоскость, следует использовать вспомогательную фронтально-проектирующую плоскость S, проходящую через ребро $\boldsymbol{AS}$. Эта плоскость пересечет заданную плоскость по линии, задаваемой точками $\boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{2}$.

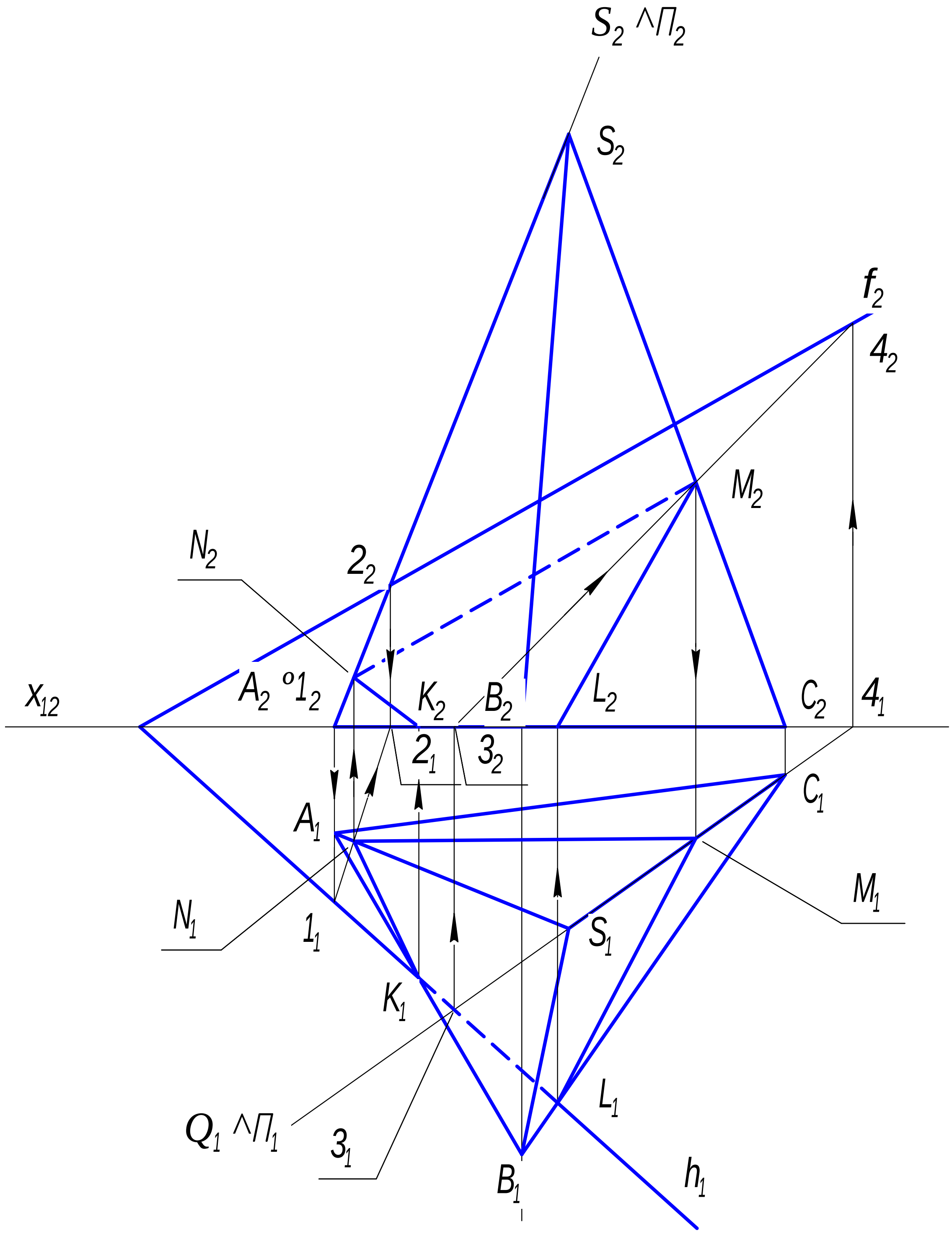


Рис. 8.6 Сечение пирамиды плоскостью общего положения

Пересечение этой линии на горизонтальной ПП с горизонтальной проекцией ребра $\boldsymbol{AS}$ даст точку $\boldsymbol{N}$ пересечения ребра $\boldsymbol{AS}$ с заданной плоскостью. Таким же образом ищется точка пересечения ребра $\boldsymbol{CS}$ с заданной плоскость. Здесь используется вспомогательная горизонтально-проектирующая плоскость Q, которая пересечет заданную плоскость по линии $\boldsymbol{34}$.

При построении следует обратить внимание на определение видимости элементов линии сечения на плоскостях проекций. Все линии на боковых гранях, обращенных к наблюдателю на горизонтальной ПП будут видимы. На фронтальной ПП Грань $\boldsymbol{ASC}$ невидима, поэтому и участок линии пересечения на ней будет невидим.

Тема 9 Поверхности вращения.

9.1 Общие положения.

Прямой круговой цилиндр: поверхность образована поступательным движением отрезка прямой – образующей вдоль окружности – направляющей, причем, плоскость направляющей, перпендикулярной образующей (Рис. 9.1). В рассматриваемых задачах основание цилиндра будет параллельным или будет лежать на плоскости проекции (горизонтальной)

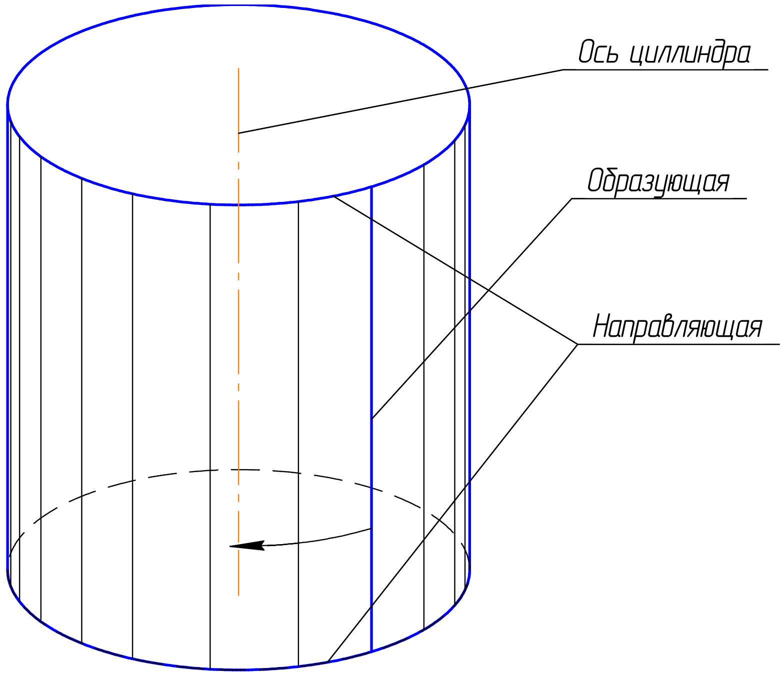


Рис. 9.1 Геометрические элементы цилиндра

Сечения цилиндра:

- Плоскостью, параллельной основанию **– окружность;**
- Плоскостью, под углом к **основанию – эллипс;**
- Плоскостью ||оси цилиндра **– две параллельные прямые.**

Прямой круговой конус: поверхность образована вращательным движением отрезка прямой – образующей вокруг оси, проходящей через один конец отрезка. Второй конец отрезка описывает круговую траекторию. Высота конуса, перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на основание, проходит через центр окружности основания (Рис. 9.2). В рассматриваемых задачах основание конуса будет параллельным или будет лежать на плоскости проекции (горизонтальной).

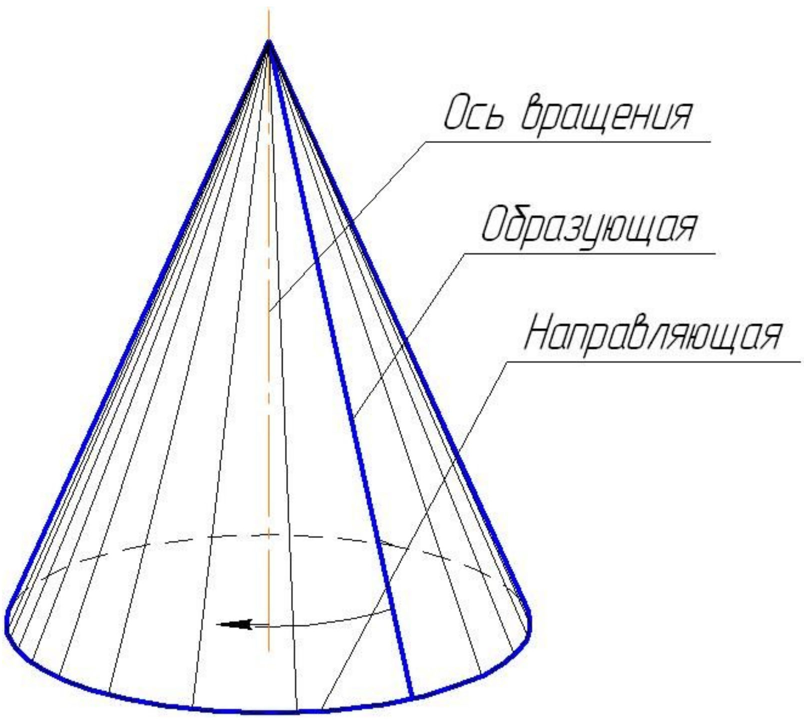


Рис. 9.2 Коническая поверхность

Сечения конуса (конические сечения) (Рис. 9.3**,** Рис. 9.4**)**:

- Плоскостью, параллельной основанию **– окружность;**
- Плоскостью, под углом к основанию не параллельной образующей и непараллельной оси **– эллипс;**
- Плоскостью || оси конуса не проходящей через его вершину– **гипербола;**

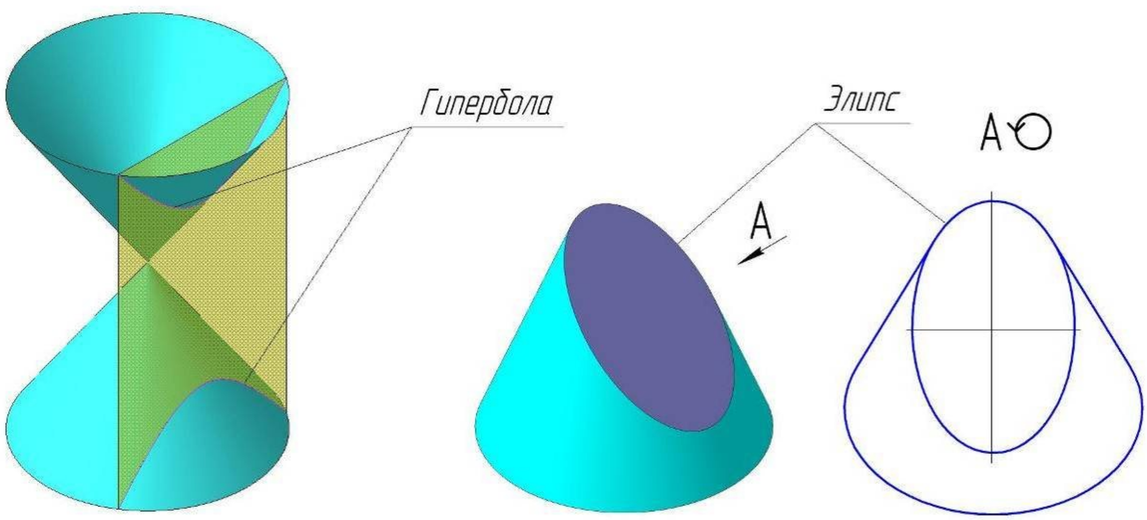


Рис. 9.3 Конические сечения - гипербола и эллипс

- Плоскостью || одной образующей и не проходящей через вершину конуса – **парабола**;

- Наклонной плоскость, проходящей через вершину и пересекающей основание – две пересекающиеся прямые.

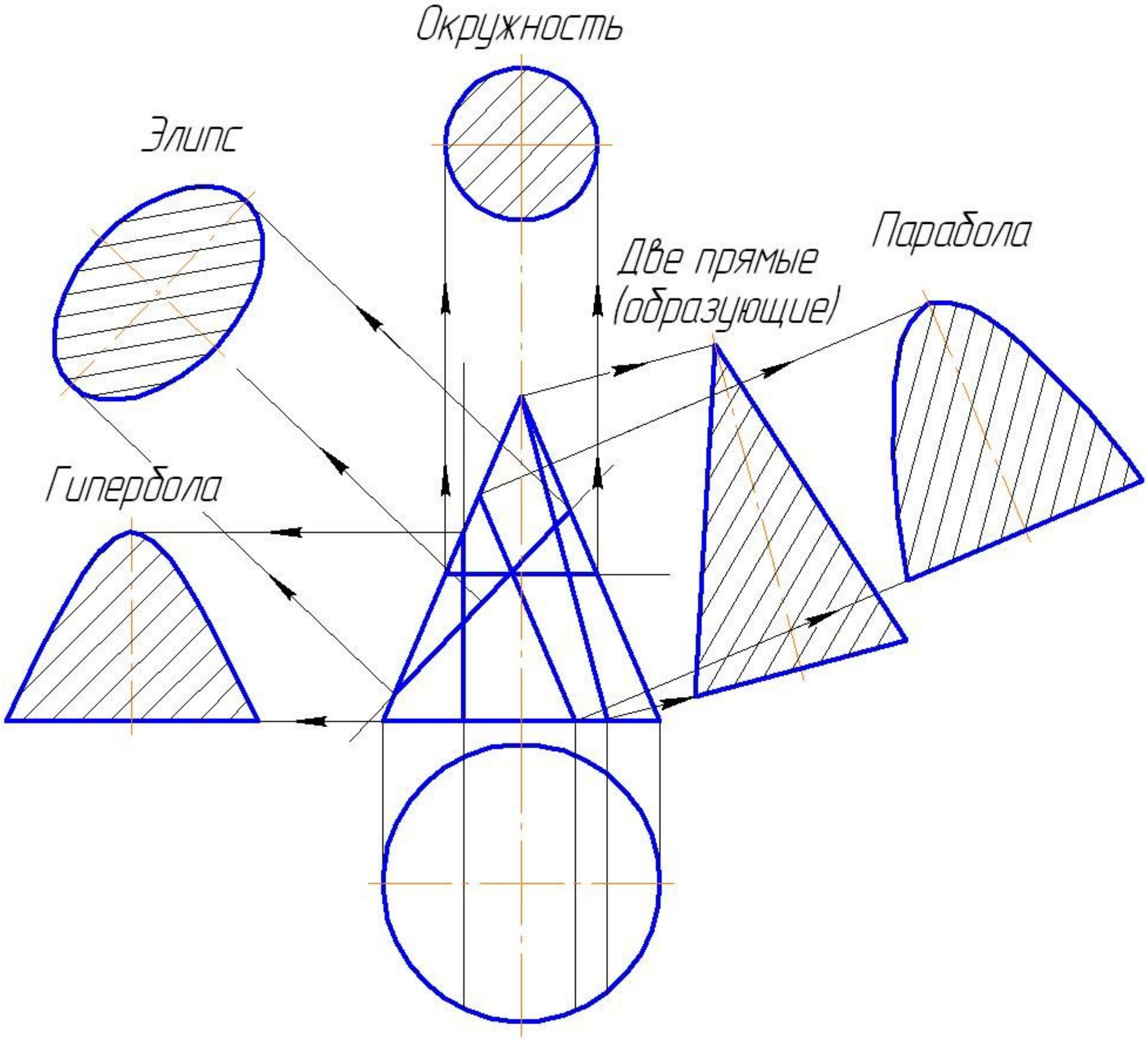


Рис. 9.4 Конические сечения

Сфера: поверхность, каждая точка которой равноудалена от центра. Сфера может рассматриваться как поверхность, образованная вращением полуокружности вокруг оси, проходящей через ее концы (Рис. 9.5).

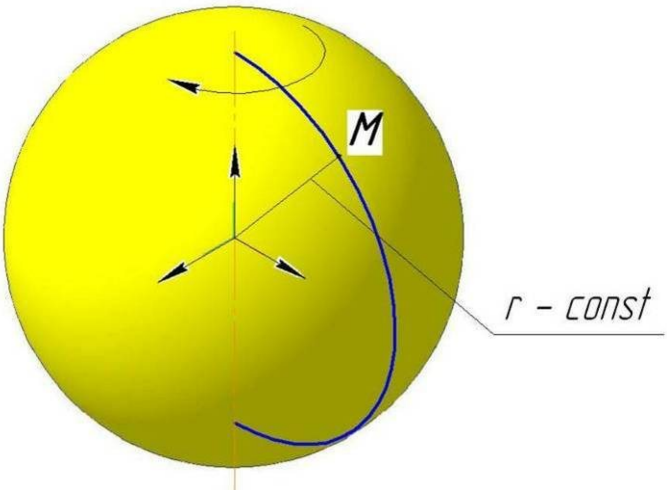


Рис. 9.5 Сфера

Любое сечение сферы плоскостью - **окружность**.

9.2 Точка и линия на поверхности тела вращения

9.2.1 Прямой круговой цилиндр с основанием на горизонтальной ПП

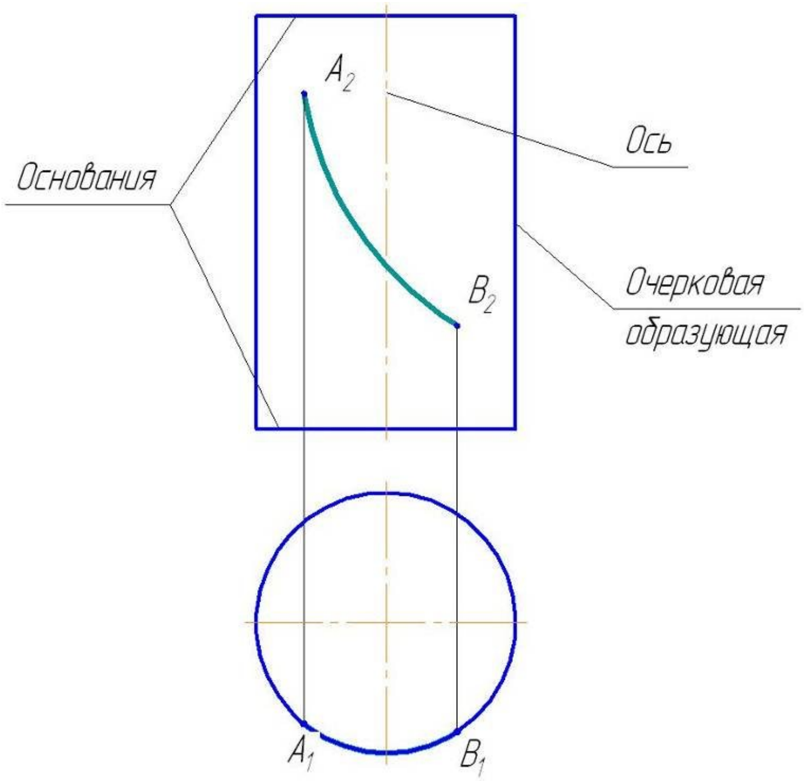


Рис. 9.6 Линия на поверхности цилиндра

Боковая поверхность с любыми фигурами на ней на ГПП проектируется в окружность. Т.е. – боковая поверхность прямого кругового цилиндра обладает собирательным свойством.

9.2.2 Прямой круговой конус с основанием на горизонтальной плоскости

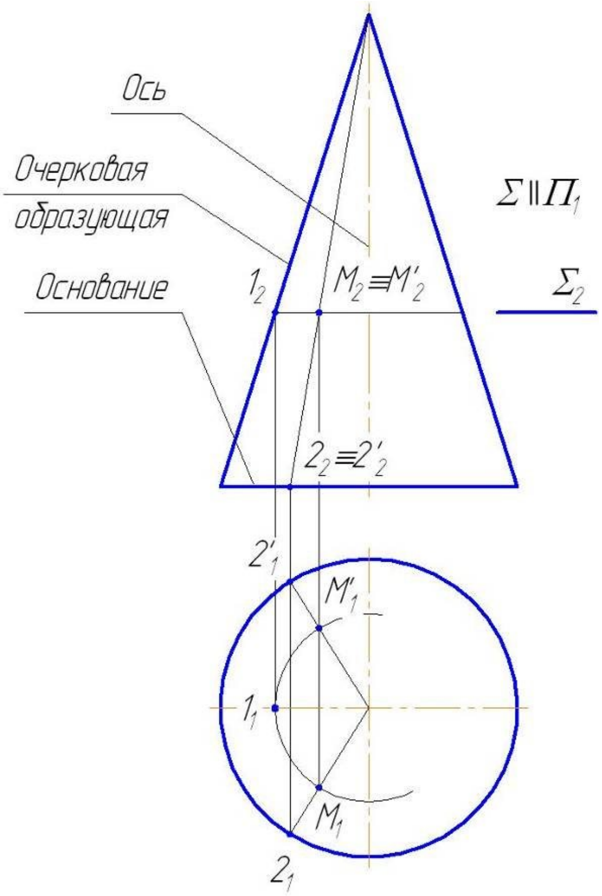


Рис. 9.7 Точка на поверхности конуса

Для построения точки, принадлежащей поверхности конуса можно использовать два способа:

1. точка привязывается к вспомогательной образующей;
2. через точку проводится вспомогательная плоскость, параллельная основанию, дающая круговое сечение конуса, на котором находится точка (Рис. 9.7).

9.2.3 Сфера

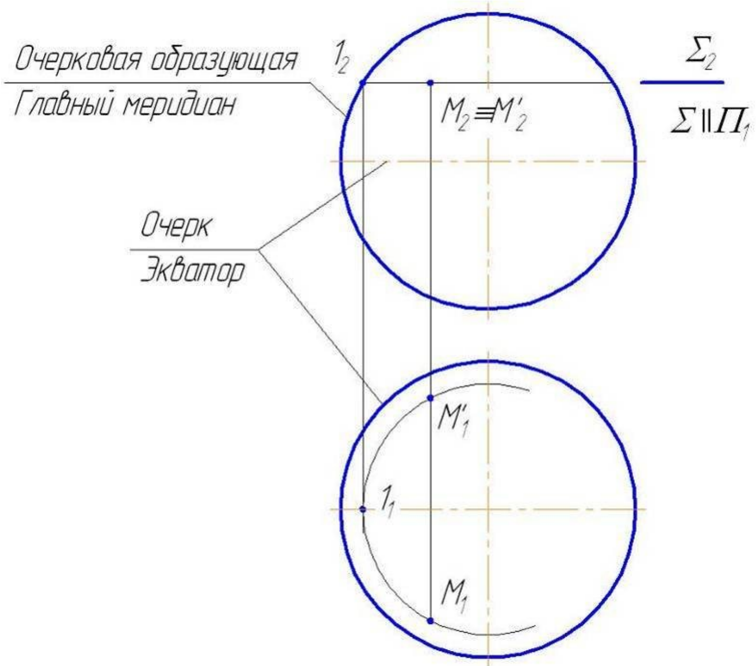


Рис. 9.8 Точка на поверхности сферы

Для построения точки на поверхности сферы может быть использована вспомогательная плоскость ***Σ***, параллельная, например, горизонтальной плоскости проекции (Рис. 9.8).

Окружность, полученная от сечения сферы плоскостью на $\boldsymbol{\Pi_1}$ будет местом расположения точки ***M*** (пары точек ***M*** и ***M'***) на поверхности сферы.

9.3 Сечения тел вращения плоскостями

Если секущая плоскость занимает частное положение, построение фигуры сечения тела вращения этой плоскостью, как правило, не составляет труда. Если же плоскость занимает общее положение, заменой плоскостей проекций можно добиться частного положения этой секущей плоскости.

Для построения натурального вида фигуры сечения используется один из способов перемены системы проектирования (перемена ПП, вращение фигуры вокруг проектирующей оси или вокруг линии уровня, совмещение плоскости сечения с ПП), либо комбинация этих способов. Для построения разверток тел вращения, если необходимые геометрические элементы не отображаются на ПП в натуральную величину, используются методы перемены системы проектирования для получения нужной натуральной величины геометрических элементов, например, метод вращения относительно проектирующей оси или линии уровня.

Пример 9.1: Построить проекции и натуральный вид сечения прямого кругового цилиндра фронтально-проектирующей плоскостью и развертку усеченной части цилиндра (Рис. 9.9).

Фронтальная проекция линии сечения совпадает со следом секущей плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ и является отрезком прямой $\boldsymbol{A_2E_2}$.

Горизонтальная проекция линии сечения совпадает с окружностью основания цилиндра. Секущая плоскость проходит через основание. Отрезок $\boldsymbol{KL}$ линии сечения основания плоскостью хорда основания, на горизонтальной плоскости проекции перпендикулярен оси x.

Действительный вид сечения – эллипс, большая ось которого равна отрезку между прямой в секущей плоскости между крайними (очерковыми) образующими цилиндра. Построение действительного вида сечения способом замены плоскости проекции плоскостью, параллельной секущей (совпадающей с секущей).

Для построения развертки окружность основания разбивается на равные части (8, 12). Через точки разбиения на фронтальную проекцию цилиндра наносятся линии связи, дающие образующие цилиндра. Вычисляется длина окружности в основании цилиндра.

$$\boldsymbol{L=2pR}$$

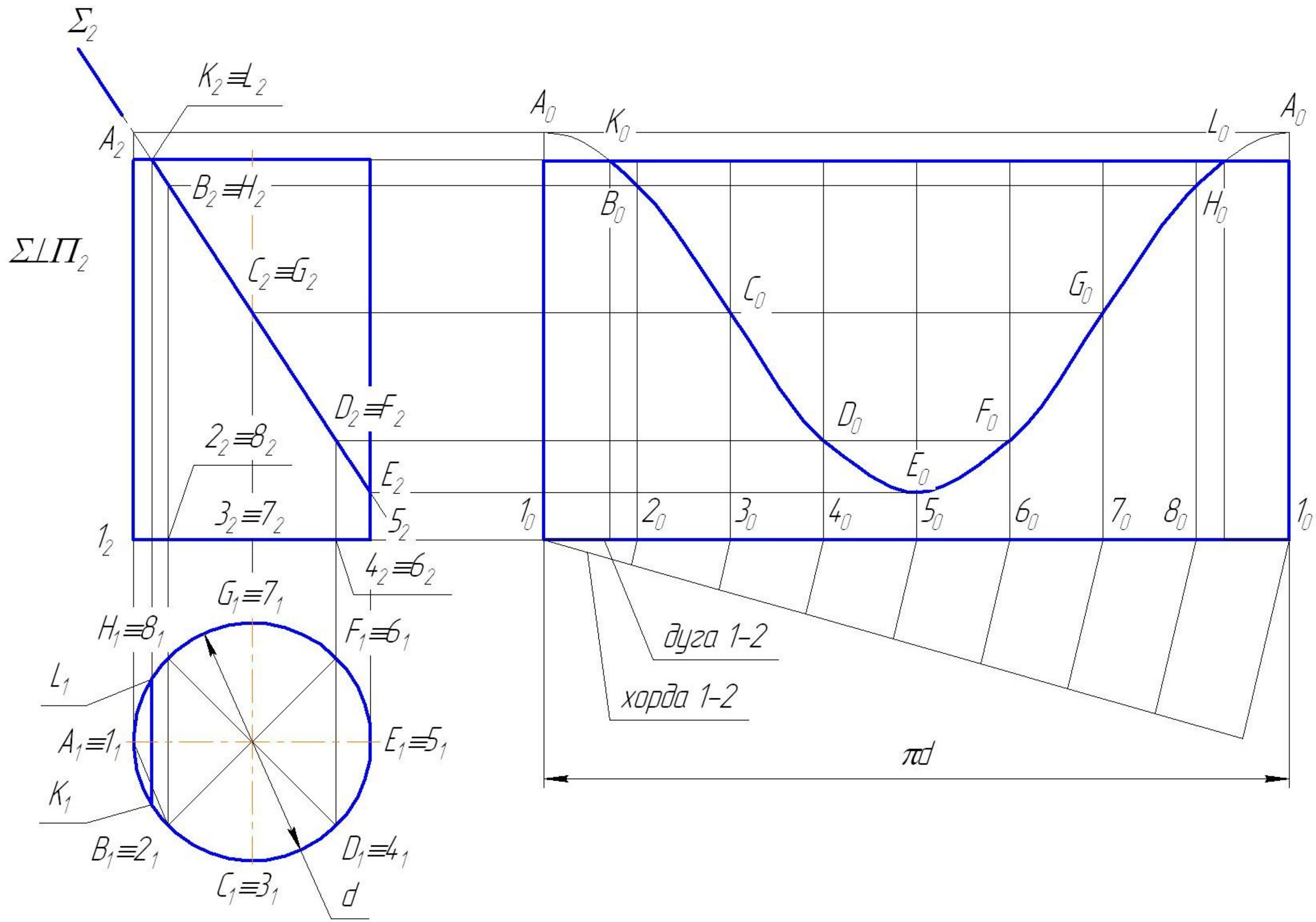


Рис. 9.9 Построение линии сечения цилиндра

Длина окружности откладывается на прямой. Полученный отрезок является разверткой основания. Он делится на части, число которых равно числу разбиений основания цилиндра. Из полученных на прямой точек восстанавливаются перпендикуляры. На перпендикулярах откладываются отрезки, равные отстоянию точек сечения цилиндра плоскостью на соответствующих образующих. Полученные точки соединяются плавной кривой, которая будет участком синусоиды.

Пример 9.2: Построить проекции и натуральный вид сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения. Плоскость задана следами (Рис. 9.10; Рис. 9.11).

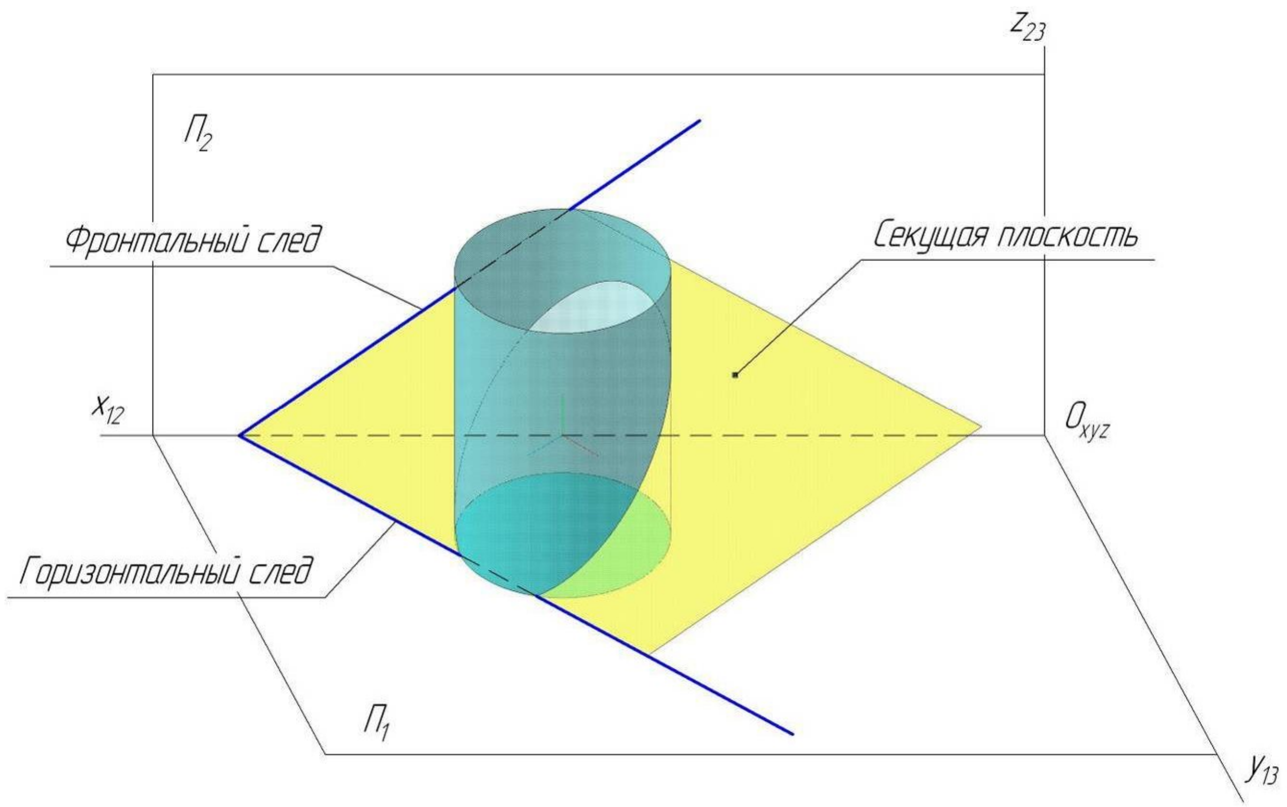


Рис. 9.10 Сечение цилиндра плоскостью общего положения

Для построения линии сечения используются:

- Для двух точек линии сечения, расположенных на концах большой диагонали эллипса-сечения – вспомогательная горизонтально-проектирующая плоскость, проходящая через центр цилиндра по линии ската секущей плоскости. Линия ската секущей плоскости, пересекающая ось цилиндра совпадает с большой осью эллипса сечения цилиндра. Горизонтально-проектирующая вспомогательная плоскость пересекает цилиндр по образующим.

- Для двух точек линии сечения, расположенных на концах малой диагонали эллипса-сечения используется вспомогательная горизонтально-проектирующая плоскость, проходящая через центр цилиндра;
- Для других точек вспомогательные горизонтально-проектирующие плоскости, перпендикулярные линии ската (см. Рис. 9.11).

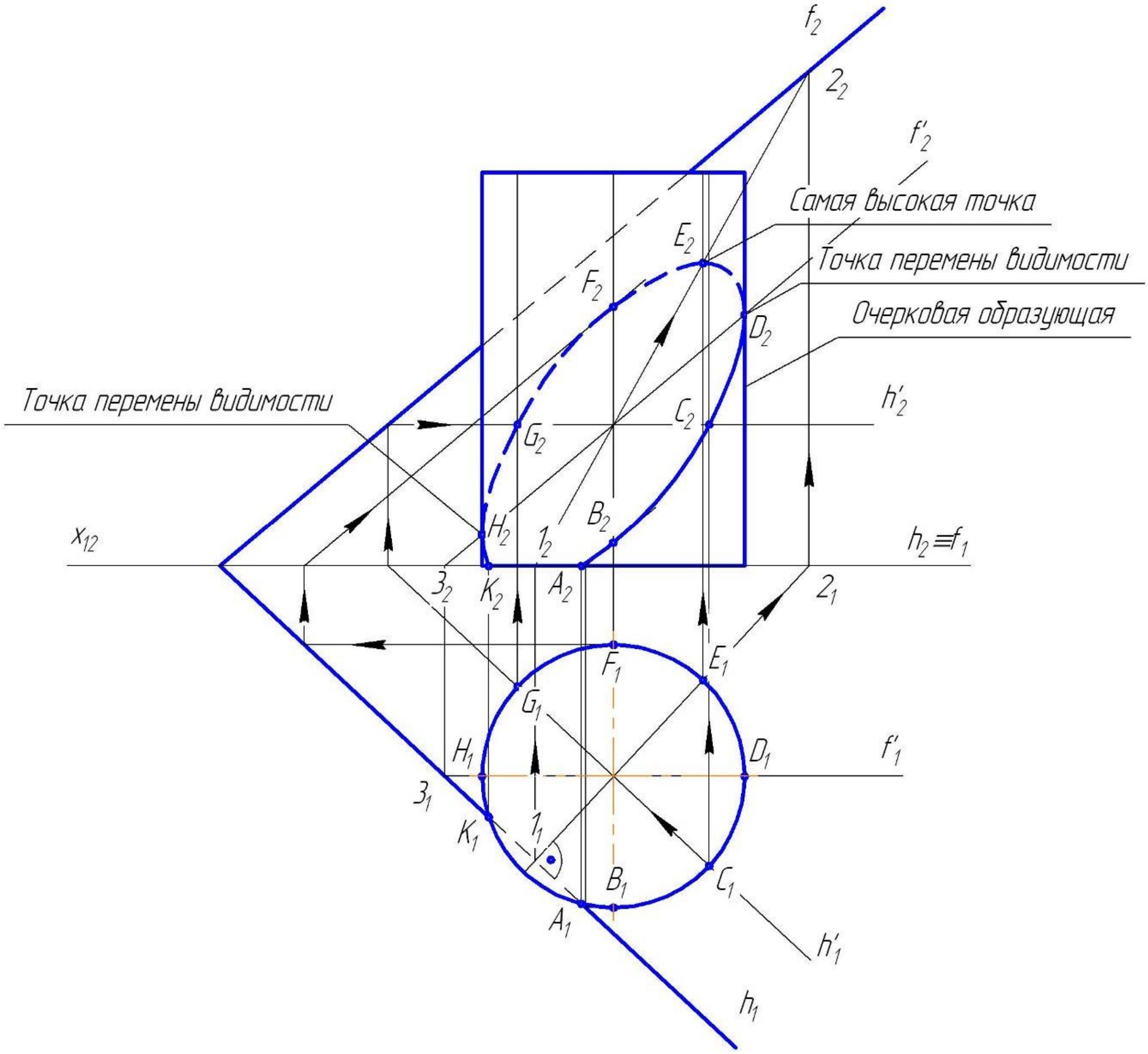


Рис. 9.11 Построение фигуры сечения цилиндра плоскостью общего положения. Обозначены только некоторые, наиболее важные характерные точки.

Для построения натурального вида фигуры сечения можно использовать, например, способ совмещения секущей плоскости с горизонтальной плоскостью проекции (Рис. 9.12).

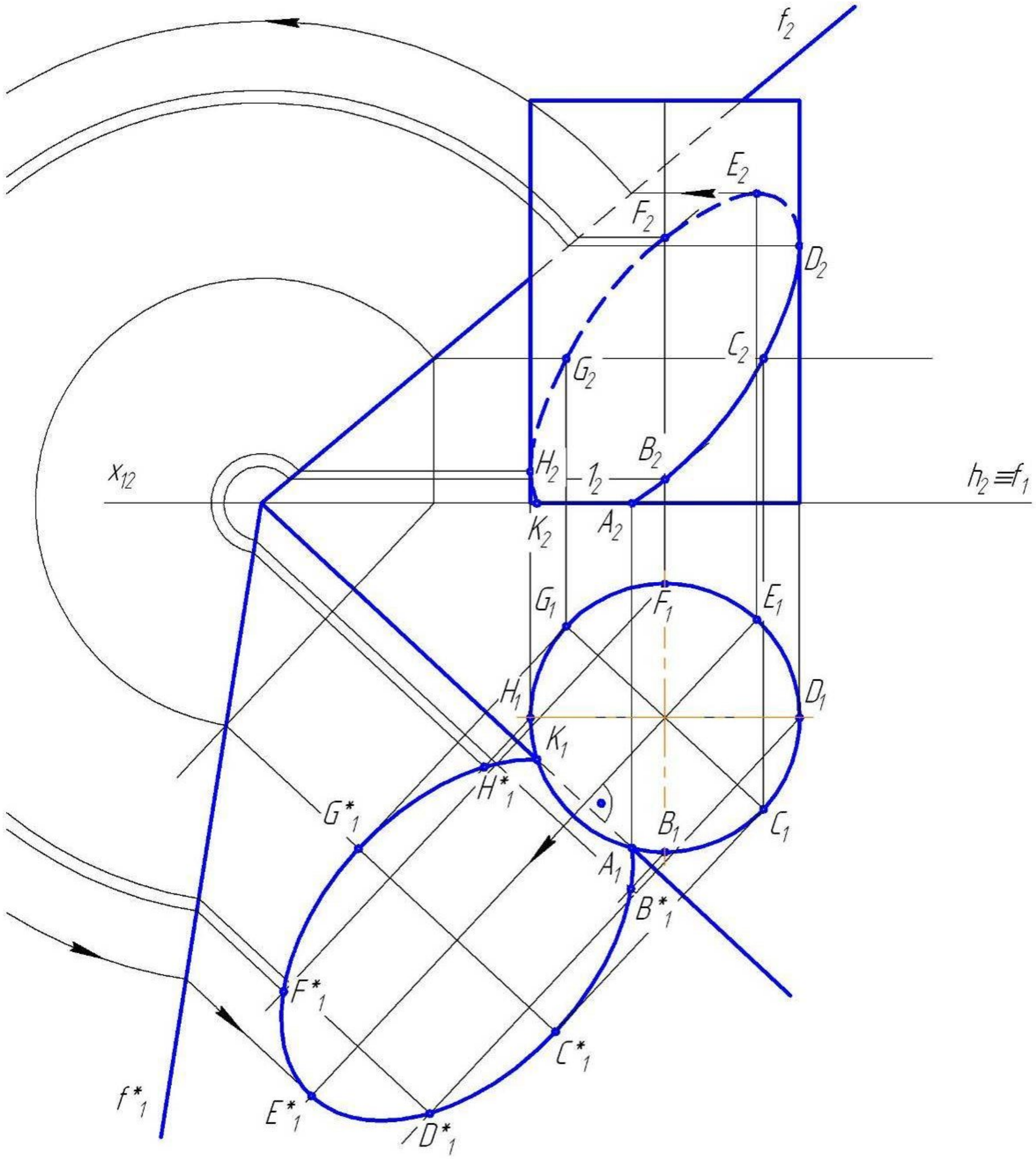


Рис. 9.12 Построение натурального изображения фигуры сечения цилиндра плоскостью общего положения (***hÇf***) способом совмещения секущей плоскости с плоскостью проекций ($П_1$).

Пример 9.3: Построить проекции и натуральный вид сечения прямого кругового конуса фронтально-проектирующей плоскостью S и развертку боковой поверхности с нанесением линии сечения (Рис. 9.13).

Для построения используются вспомогательные образующие конической поверхности, пересекающие секущую плоскость.

Отрезок, полученный на следе секущей плоскости между крайними (очерковыми) образующими конуса является большой осью эллипса в сечении конуса плоскостью.

Малая ось сечения является фронтально-проектирующей прямой и находится на середине большой диагонали на $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Натуральный вид сечения можно получить вращением фигуры относительно фронтально-проектирующей оси, проходящей через крайнюю точку сечения на $\boldsymbol{\Pi_2}$.

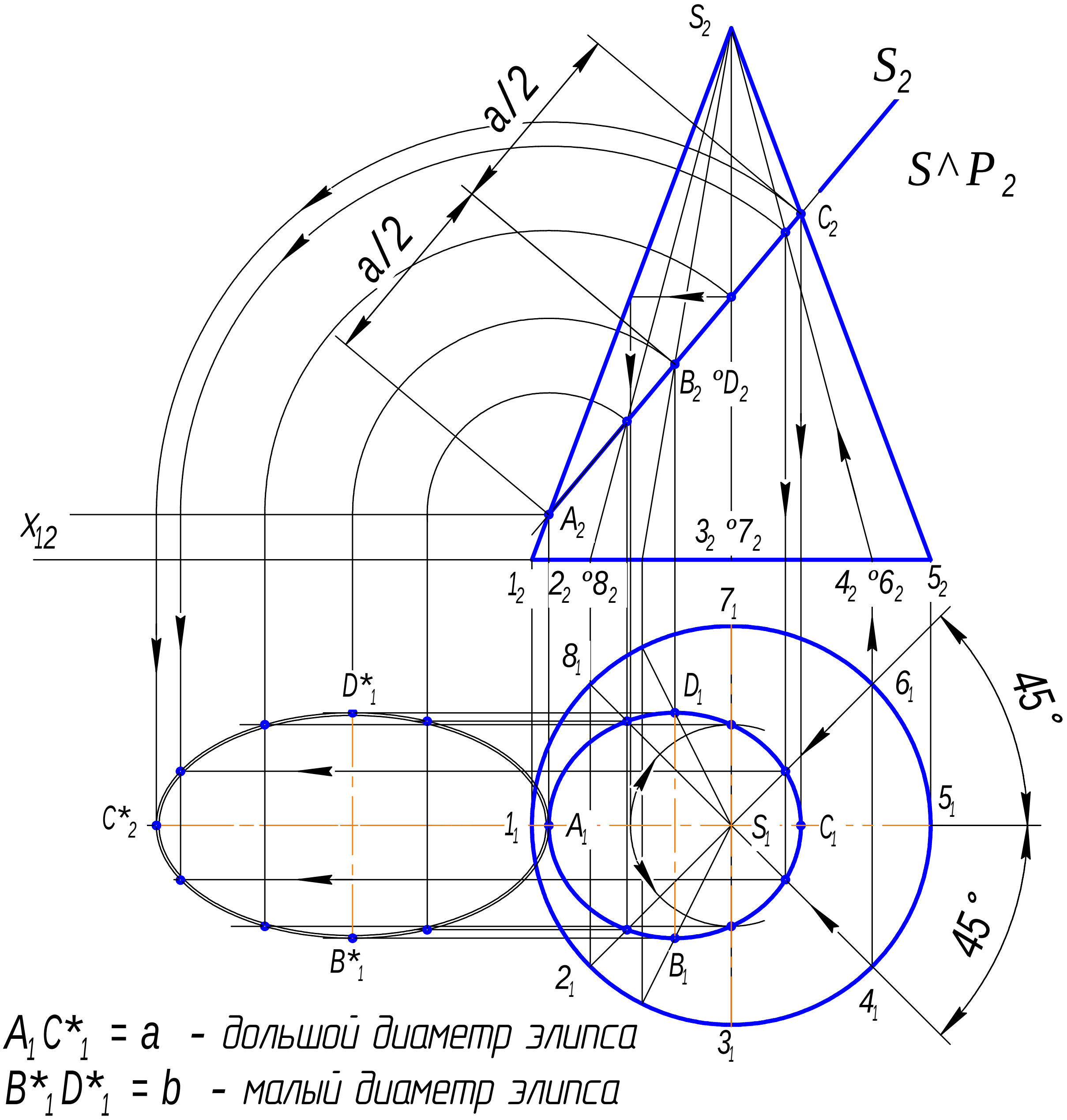


Рис. 9.13 Построение фигуры сечения конуса фронтально-проектирующей плоскостью. Обозначены только некоторые, наиболее характерные вспомогательные точки и точки фигуры сечения.

Для построения развертки окружность основания делится на 8…12 равных частей (Рис. 9.14).

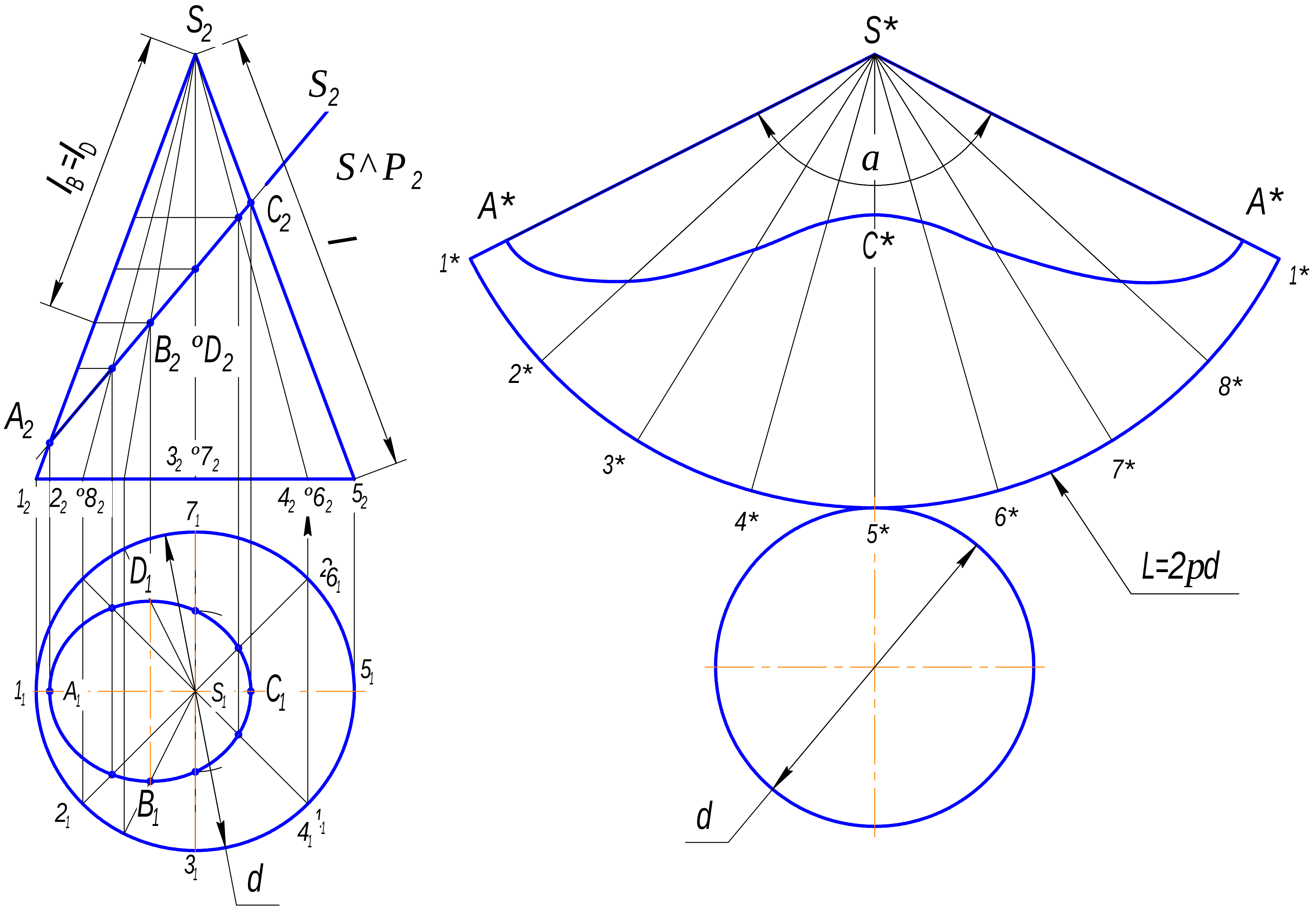


Рис. 9.14 Построение развертки конуса

Строится круговой сектор окружности с радиусом, равным длине образующей. Угол a сектора вычисляется о формуле

$$a = 2p\,\frac{d}{2l} = 360^\circ \frac{d}{2l}$$

Где: $\boldsymbol{d}$ – диаметр основания конуса;

$\boldsymbol{l}$ – длина образующей конуса.

Более просто с достаточно малой для выполняемых построений погрешностью, угол сектора определяется разметкой на дуге сектора радиуса $\boldsymbol{l}$ от одного из его лучей 8…12 отрезков, равных длине в разбиении основания конуса. Точки разбиения на секторе дадут образующие на развертке конуса. Для построения линии сечения на развертке необходимо натуральное значение отстояния точек сечения от вершины конуса. Для его нахождения соответствующие образующие с нанесенной на них точками сечения поворачиваются вокруг горизонтально-проектирующей оси конуса до совмещения с фронтальной плоскостью уровня, проходящей через ось конуса. Фронтальная проекция траектории движения, например, точки $\boldsymbol{D}$ будет $\boldsymbol{D_2D_2'}$. Натуральная величина отстояния точки $\boldsymbol{D}$ от вершины конуса $\boldsymbol{S}$ будет $\boldsymbol{l_D}$.

Пример 9.4: Построить проекции и натуральный вид сечения сферы фронтально-проектирующей плоскостью Q и развертку ее поверхности с нанесением линии сечения (Рис. 9.15).

Линия сечения – окружность.

Фронтальная проекция линии сечения совпадает со следом плоскости Q на $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Горизонтальная проекция линии сечения – эллипс, построение которого выполняется с использованием горизонтальных секущих плоскостей.

При этом используется набор опорных точек:

- Верхняя $\boldsymbol{1}$ и нижняя $\boldsymbol{2}$ вершины малой оси эллипса;
- Вершины большой оси эллипса строятся с помощью горизонтальной вспомогательной плоскости, проводимой через середину отрезка, соединяющего вершины фронтальной проекции оси эллипса.

Для построения натурального вида сечения использован метод перемены плоскостей проекции. Плоскость $\boldsymbol{\Pi_1}$ заменена на $\boldsymbol{\Pi_4}$ ($\boldsymbol{\Pi_4 \perp \Pi_2}$). Если для построения натурального вида сечения использован метод перемены ПП, тогда горизонтальная проекция сечения легко строится обратным перенесением точек сечения с $\boldsymbol{\Pi_4}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$.

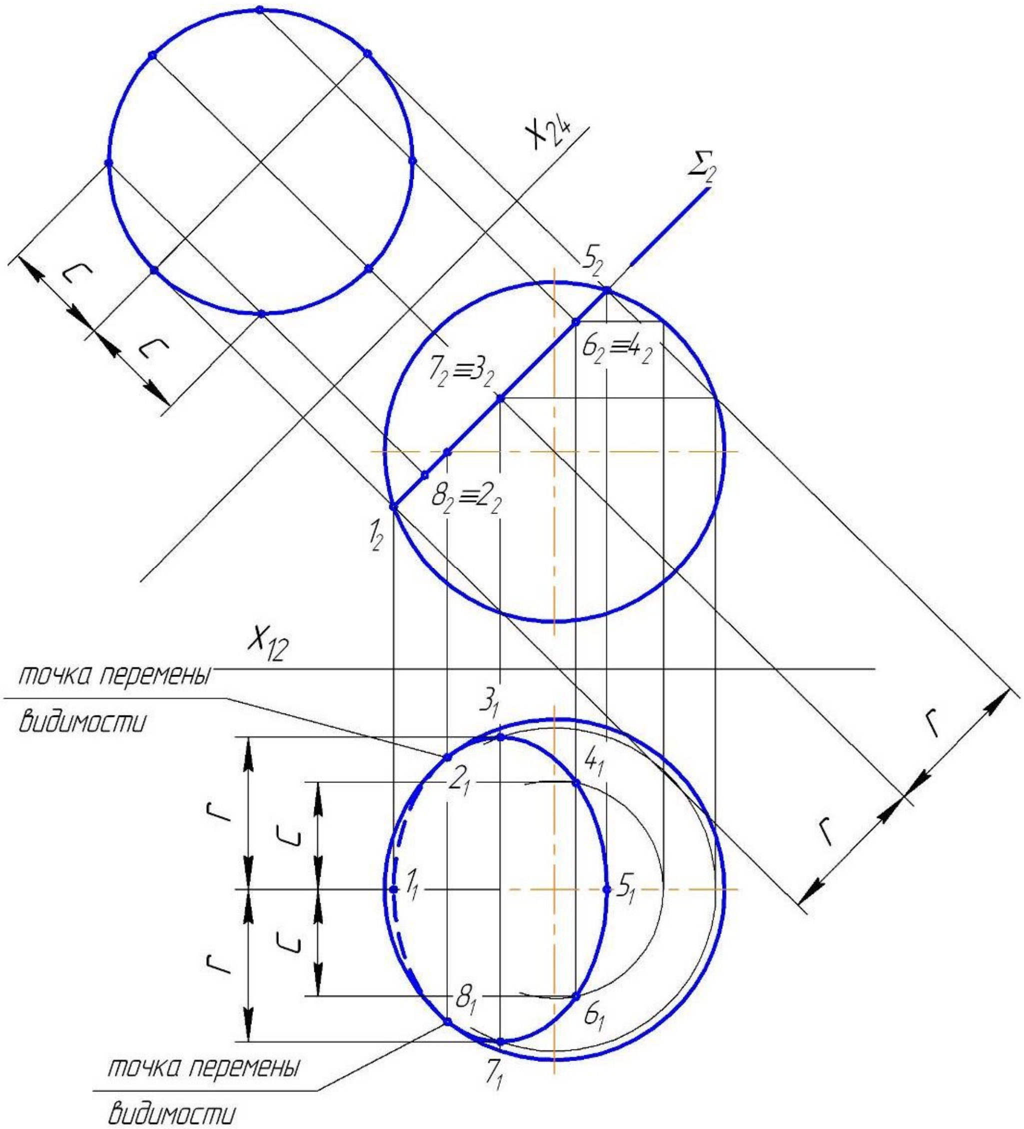


Рис. 9.15 Сечение сферы проектирующей плоскостью

Построение развертки. Сфера неразворачиваемая поверхность.

Для построения развертки сферы использован метод замены шаровых секторов цилиндрическими поверхностями. При этом развертка представляет собой набор лепестков, каждый из которых – развертка цилиндрической поверхности, заменяющей сферический сектор.

Пример 9.5. Построить линию пересечения прямого кругового конуса с плоскостью общего положения, заданной следами.

Техника построения принципиально не отличается от построения линии пересечения цилиндра с плоскостью общего положения (см. Пример 9.2). Общий вид сечения показан на Рис. 9.16.

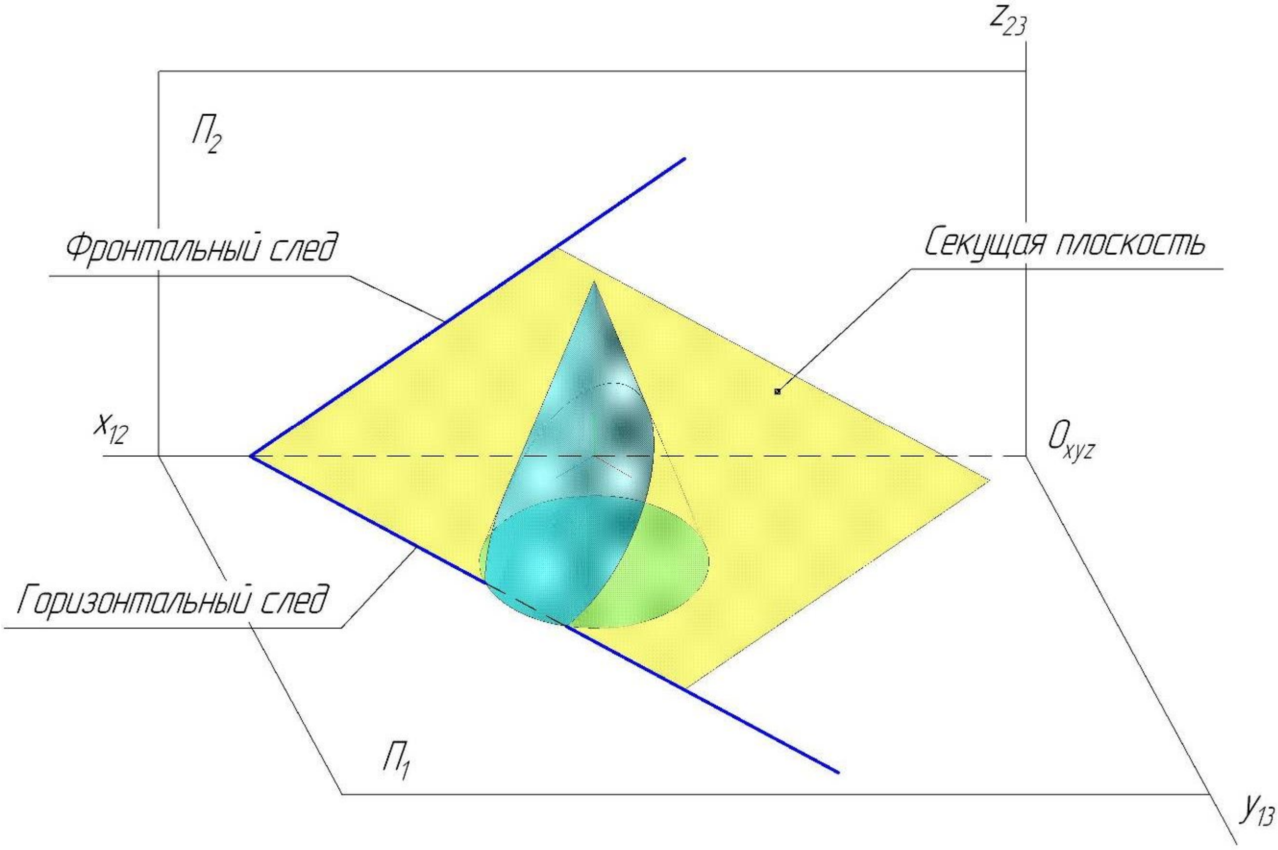


Рис. 9.16 Общий вид сечения конуса плоскостью общего положения

Проекционный чертеж с построением проекций линии пересечения см. на Рис. 9.17. На этом построении следует обратить внимание на использование вспомогательной горизонтально-проектирующей плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$, совмещенной с линией ската плоскости, проходящей через горизонтальную проекцию вершины конуса. Эта плоскость пересекает поверхность конуса по двум образующим ***S1*** и ***S2***, на которых расположены две характерные точки: самая высокая и самая низкая по отношению к горизонтальной плоскости проекции. Другие важные характерные точки – точки перемены видимости, которые расположены на очерковых образующих ***S3*** и ***S4***. Для правильного построения фигуры сечения необходимо определить положение осей эллипса, являющегося фигурой сечения конуса плоскостью в рассматриваемой задаче. Одна ось (большая ось) на $\boldsymbol{\Pi_1}$ совпадает с упоминавшейся выше линией ската, другая (малая ось) перпендикулярна первой и располагается посередине между точками линии сечения на большой оси.

Построение дано без обозначения точек. Для освоения метода решения полезно проставить обозначения использованных вспомогательных и построенных точек самостоятельно, повторив на отдельном листе бумаги все построения.

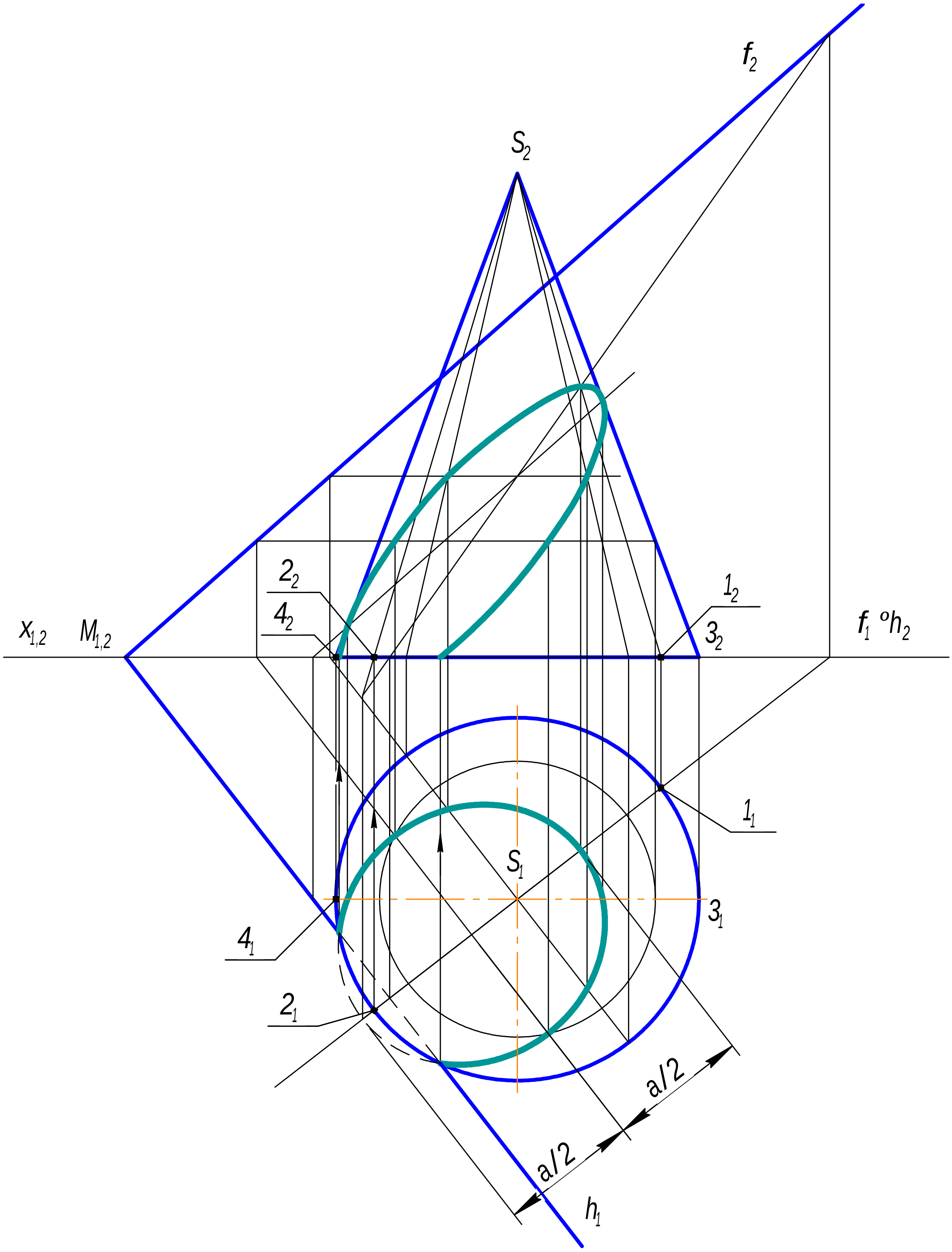


Рис. 9.17 Сечение конуса плоскостью общего положения

Построение натурального вида фигуры сечения в этой задаче ничем не отличается от такого же построения для сечения цилиндра и здесь не приводится, так как было бы простым повторением уже изложенного.

Тема 10 Пересечение прямой линии с поверхностью многоугольника, с поверхностью тела вращения. Взаимное пересечение поверхностей многоугольников.

10.1 Пересечение поверхностей с прямой линией

Прямая, пересекающая поверхность выпуклого тела имеет с ним две общие точки (точки проницания): точку входа и точку выхода.

Общий алгоритм поиска точек входа и выхода прямой и поверхности следующий:

1. Через прямую проводят вспомогательную плоскость;
2. Строят линию пересечения (многоугольник) вспомогательной плоскости и поверхности;
3. Находят точки проницания как точки пересечения прямой с многоугольником сечения.

Если заданным телом является многогранник, в качестве вспомогательной используют проектирующую плоскость.

Пример 10.1: Построить точки пересечения прямой ***l*** с поверхностью треугольной пирамиды ***SABC*** (Рис. 11.1).

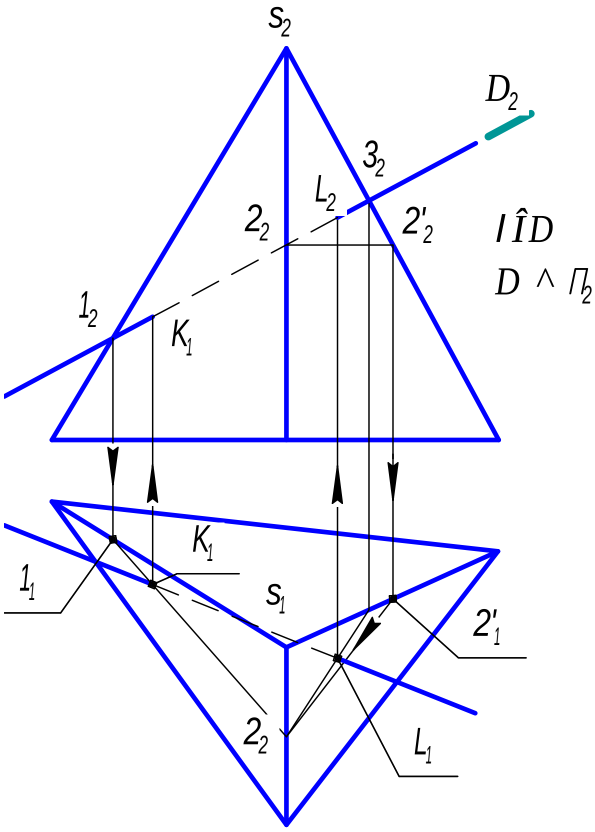


Рис. 10.1 Пересечение прямой и пирамиды

Пример 10.2: Построить точки пересечения прямой с поверхностью сферы (Рис. 10.2).

Для построения используется вспомогательная горизонтально-проектирующая плоскость. Для получения натурального вида сечения шара вспомогательной плоскостью фронтальную плоскость проекции $\boldsymbol{\Pi_2}$ заменяем на плоскость $\boldsymbol{\Pi_4}$ такую, чтобы вспомогательная плоскость оказалась плоскостью уровня.

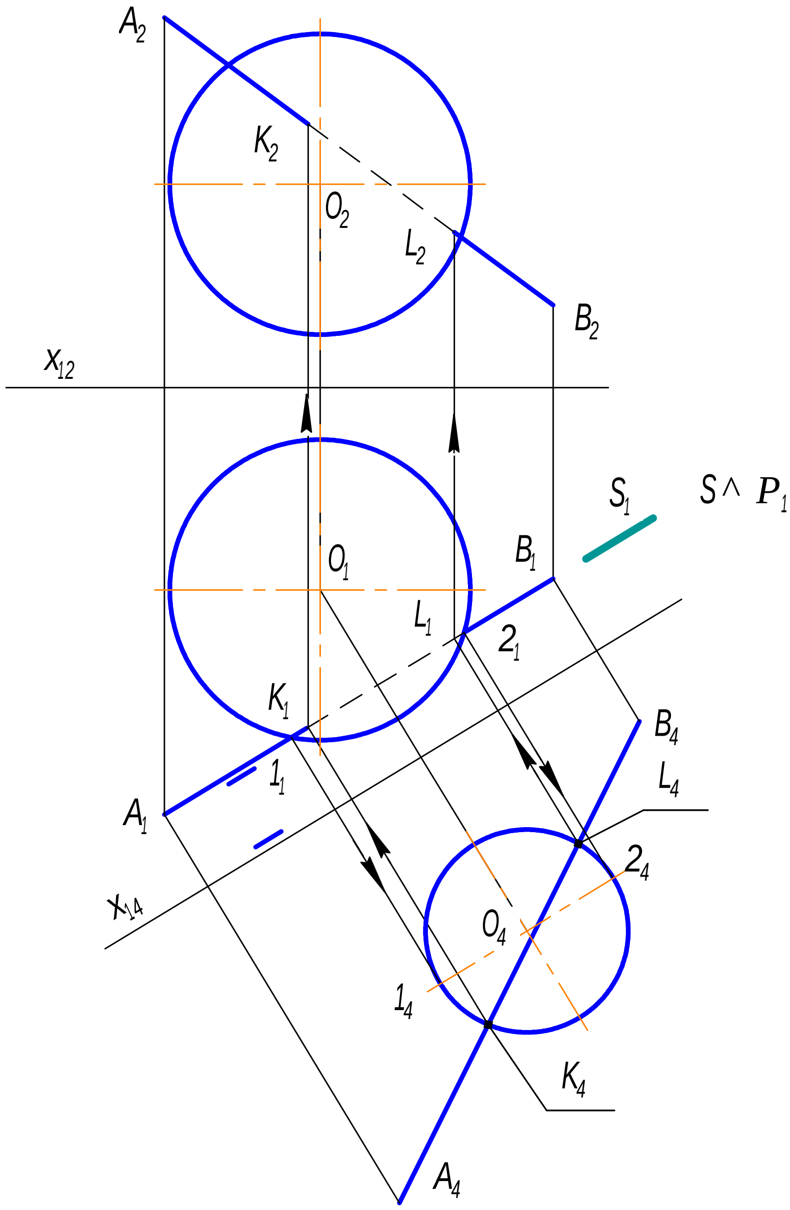


Рис. 10.2 Пересечение прямой и сферы

Пример 10.3: Построить точки пересечения прямой $\boldsymbol{l}$ с поверхностью прямого кругового конуса (Рис. 11.2).

Можно построить линию пересечения конуса с фронтально-проектирующей плоскостью, совпадающей с заданной линией, однако построение эллипса потребует построения лекальной линии, что снижает точность результата.

Лучше использовать вспомогательную плоскость, проходящую через заданную прямую, которая даст в пересечении с конусом прямые линии. Такое сечение дает плоскость, проходящая через вершину ***S*** конуса. Сечением будет при этом пара образующих конуса, на которых будут находиться точки проницания прямой.

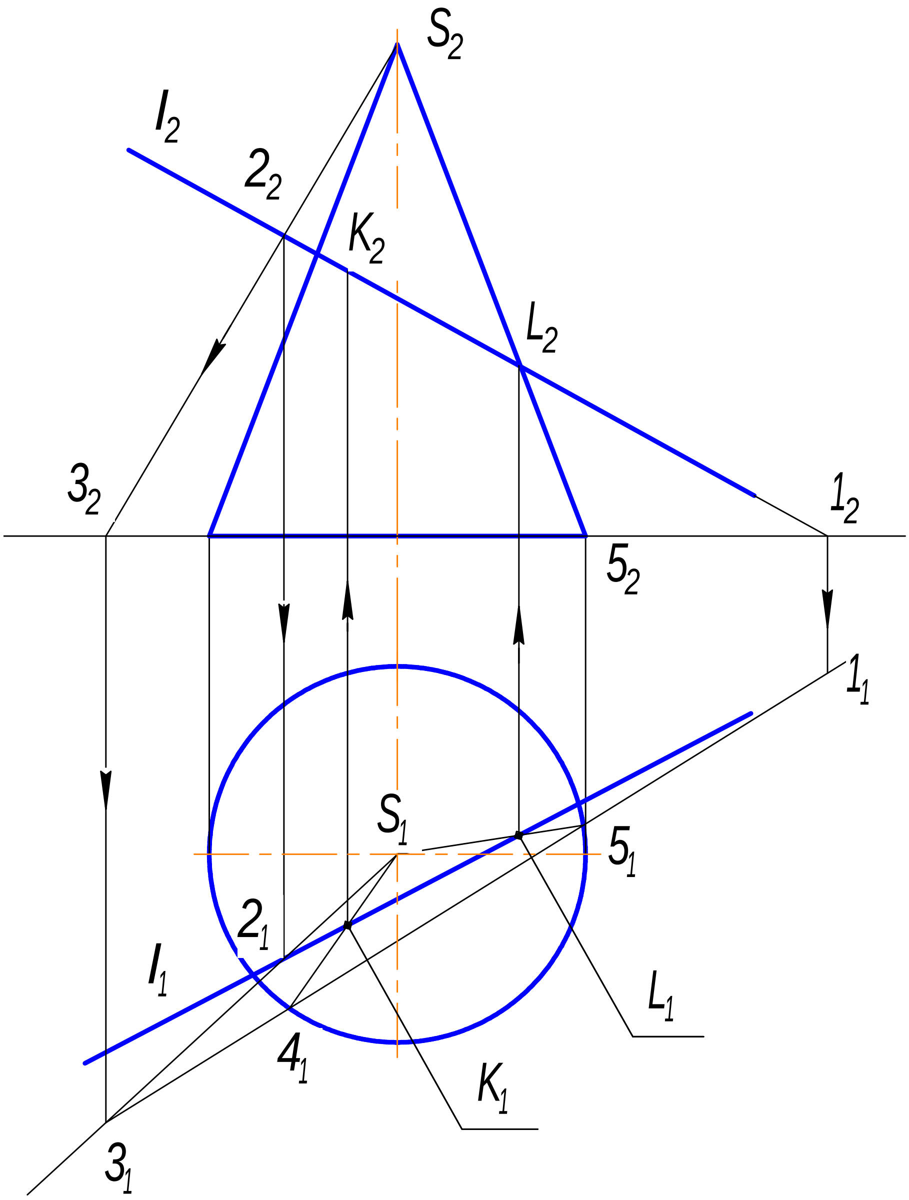


Рис. 10.3 Пересечение прямой с поверхностью конуса

Вспомогательная плоскость зададим прямой ***l*** и прямой ***S3,*** проходящей через вершину конуса и произвольную точку на прямой ***l*** (точка ***2***). Построенная вспомогательная плоскость пересекает основание конуса, лежащего на плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ по линии ***13***, являющейся следом плоскости на $\boldsymbol{\Pi_1}$. Этот след пересекает основание конуса в точках ***4*** и ***5***. Образующие конуса ***S4*** и ***S5***, лежащие в одной плоскости с заданной линией ***l*** пересекают ее в искомых точках ***K*** и ***L***.

10.2 Пересечение поверхностей многогранников

Линия пересечения двух многогранников называется линией перехода. Эта линия представляет собой пространственную ломаную линию, которая может распадаться на две и более отдельные части.

Задача построения линии перехода может быть решена двумя способами:

1. Способ ребер. Строятся точки встречи ребер одного многогранника с гранями другого многогранника. Полученные точки соединяют отрезками прямых.
2. Способ граней. Строятся линии пересечения граней одного многогранника с гранями другого.

По сути, построение линии перехода двух тел состоит в последовательном построении линий взаимного пересечения пар граней, одна из которых принадлежит одному многограннику, вторая другому. В процессе такого построения нужно следить за тем, чтобы каждая отдельная линия пересечения двух выбранных граней ограничивалась отрезком, проходящим в пределах контуров обеих этих граней. Построение упрощает использование конца отрезка линии пересечения выбранной пары граней в качестве точки начала следующего отрезка линии пересечения следующей пары граней. В этой следующей паре граней одна грань должна остаться из предыдущей пары. Построение продолжается до тех пор, пока линия перехода (линии перехода) не замкнется - *линия перехода замкнутых тел не может быть разомкнутой*.

Выбор способа зависит от того, какой из них даст более простое, наглядное и точное решение.

Чаще более простым оказывается способ ребер, однако он требует высокой концентрации внимая для того, чтобы не потерять последовательность следования точек в линии перехода.

Пример 10.4: Построить линию пересечения прямой трехгранной призмы с горизонтально-проектирующими боковыми гранями и трехгранной пирамиды общего положения (Рис. 10.4).

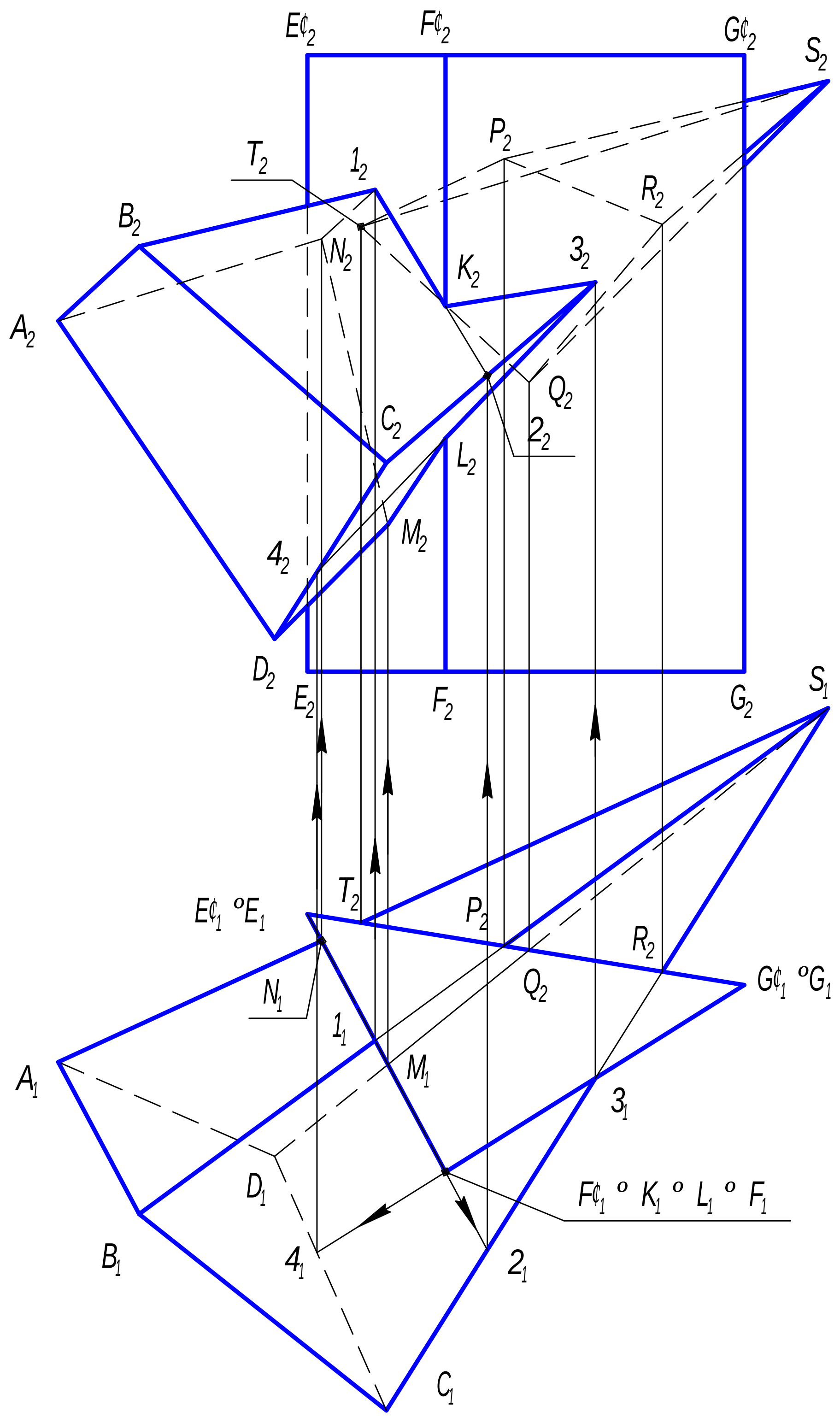


Рис. 10.4 Пересечение призмы и пирамиды

Частное положение боковых граней призмы существенно облегчает решение задачи. Так как призма имеет горизонтально-проектирующие доковые грани, точки пересечения ребер пирамиды с гранями призмы легко определятся на следах этих граней благодаря их собирательному свойству.

Построим линию пересечения грани ***EE'F'F*** призмы с гранью ***SBC*** пирамиды. На горизонтальной плоскости проекции видно, что ребро

SB призмы пересекает грань ***EE'F'F*** пирамиды в (.)***1*** (горизонтальная проекция $\boldsymbol{1_1}$). По линии связи находим эту точку на фронтальной проекции ребра ***SB***. Вторая точка линии пересечения найдена на горизонтальной плоскости проекции как пересечение проекции $\boldsymbol{S_1C_1}$ ребра пирамиды с продолжением проекции грани ***EE'F'F*** призмы – (.)***2***. Ее фронтальная проекция найдена на фронтальной проекции $\boldsymbol{S_2C_2}$ ребра пирамиды. Соединение точек $\boldsymbol{1_2}$ и $\boldsymbol{2_2}$ на фронтальной плоскости проекции дает отрезок линии пересечения граней ***EE'F'F*** и ***SBC*** в пределах контуров этих граней. Этот отрезок ограничен точкой ***1*** на ребре ***SB*** пирамиды и точкой ***К*** на ребре ***F'F*** призмы.

Для продолжения построения линии перехода выберем пару граней ***SBC*** и ***GG'F'F***. Одна точка – (.)***К***, на линии пересечения уже есть. Вторая точка – (.)***3***, найдена на горизонтальной плоскости проекции в пересечении горизонтально-проектирующей грани ***GG'F'F*** и горизонтальной проекции $\boldsymbol{S_1C_1}$ ребра пирамиды.

Полученные точки линии перехода соединяют так, чтобы каждая пара точек лежала на одной грани призмы или на одной грани пирамиды.

Из построения видно, что линия перехода распадается на две замкнутые линии. В рассмотренном примере линия ***PRQT*** образует плоский четырехугольник, т.к. грани пирамиды пересекают на выходе одну грань призмы. Другая ломаная линия перехода ***1K3LMN*** на входе пирамиды в призму является пространственной, т.к. боковые грани пирамиды пересекают две смежные грани призмы.

При определении порядка соединения вершин линии перехода необходимо выяснить видимость ребер обоих многогранников. Причем, для каждого ребра, на котором имеются точки проницания, определяется видимость до и после вхождения ребра в тело другого многогранника. Видимыми будут линии пересечения видимых ребер.

Построение пересечения многогранников общего положения упрощается, если одно из тел является призмой. Заменой плоскостей проекций боковая поверхность призмы делается проектирующей и задача решается, например, так, как показано в примере (Рис. 10.4).

Тема 11 Взаимное пересечение поверхностей тел вращения

11.1 Общие положения

Линия пересечения поверхностей тел вращения в общем случае есть пространственная кривая. Для ее построения необходимо определить ряд ее точек, являющихся общими для каждой из пересекающихся поверхностей. Среди таких точек есть особые, характерные точки:

1. Опорные точки, в которых пересекаются очерки поверхностей – очерковые образующие. Эти точки являются точками перемены видимости.
2. Самые высокие (близкие) и низкие (дальние) в зависимости от плоскости проекции точки.
3. Промежуточные точки, для определения которых используется набор способов построения.

В инженерной практике используются следующие способы построения точек линии пересечения поверхностей тел вращения:

1. Способ вспомогательных секущих плоскостей
2. Способ вспомогательных секущих концентрических сфер
3. Способ вспомогательных секущих эксцентрических сфер

Суть названных способов в том, чтобы получить в пересечении заданных поверхностей вспомогательными плоскостями или сферами простые в построении линии: прямые или окружности. Взаимное пересечение этих линий даст искомые общие точки для пересекающихся поверхностей.

Теорема Монжа.

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую пересечение линий касания пересекающихся поверхностей с общей вписанной поверхностью (Рис. 11.1).

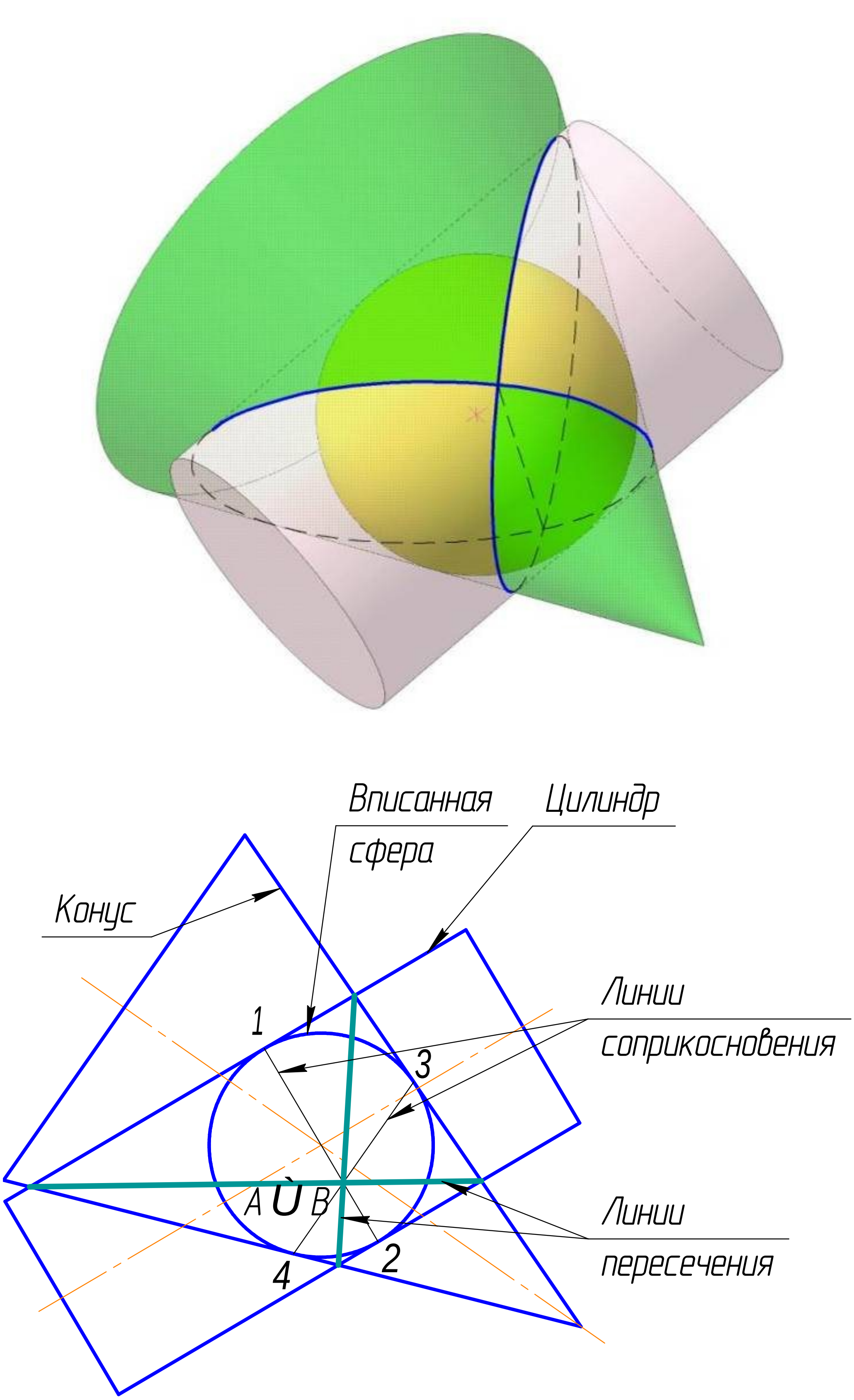


Рис. 11.1 К теореме Г.Монжа

Цилиндрическая и коническая поверхность описаны около сферы. Линии их соприкосновения ***12*** и ***34*** – это окружности. Эти окружности пересекаются в точках ***A*** и ***B***. Линии пересечения конуса и цилиндра являются плоскими и проходят через точки ***A*** и ***B***.

11.2 Способ вспомогательных секущих плоскостей

Применяется для построения линий пересечения поверхностей вращения, у которых

1. оси пересекаются и являются линиями частного положения.
2. оси параллельны и являются линиями частного положения.
3. оси скрещиваются, но параллельны одной плоскости проекции.

Пример 11.1. Построить линию пересечения прямого кругового конуса с основанием на $\boldsymbol{\Pi_1}$ и поверхности сферы.

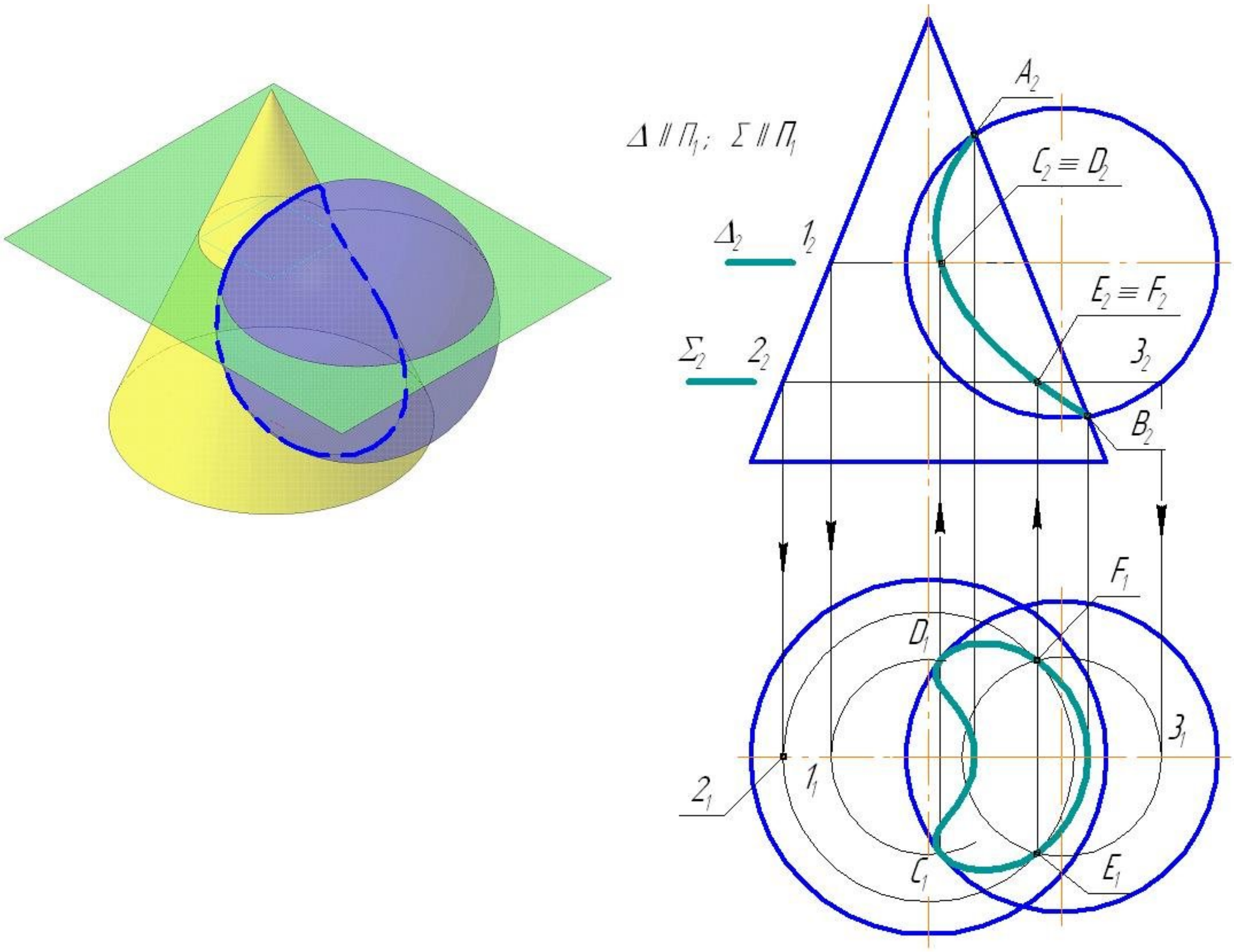


Рис. 11.2 Взаимное пересечение поверхностей сферы и конуса

11.3 Способ концентрических сфер

Если тело, полученное при вращении произвольной образующей вокруг оси, пересечено сферой, ось которой совпадает с осью тела, линией перехода будет, по крайней мере, одна окружность (Рис. 11.3).

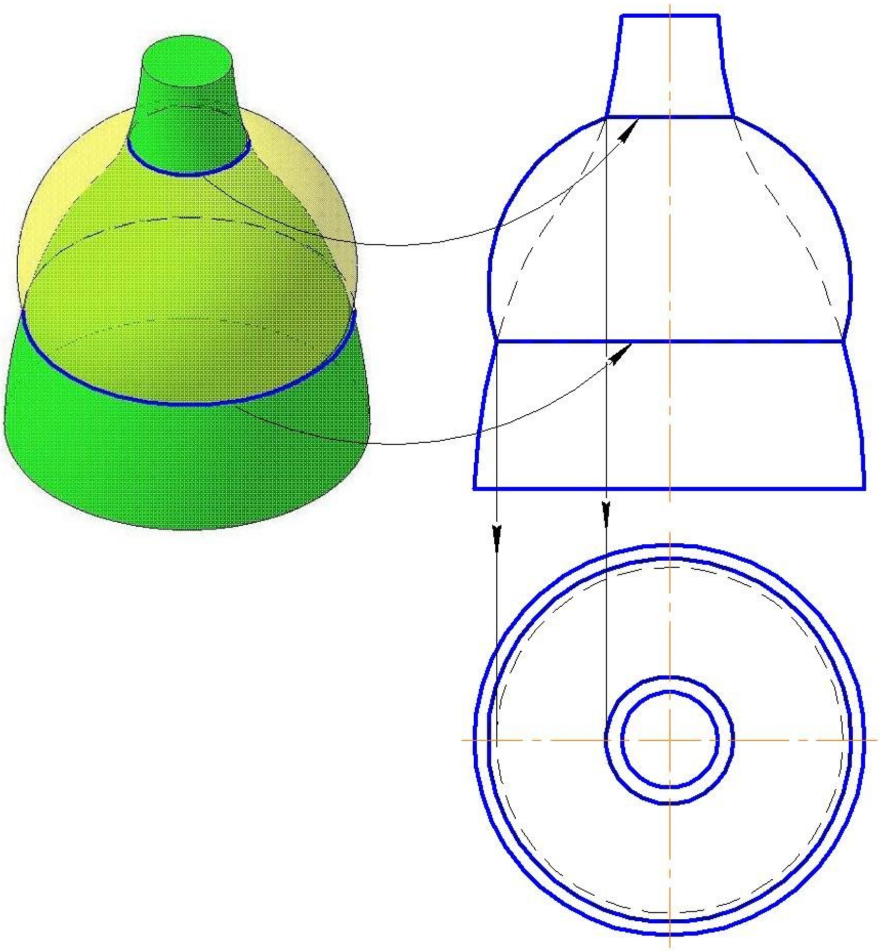


Рис. 11.3 Сечение тел вращения вспомогательными сферами

Если тело вращения расположено так, что его ось является проектирующей линией (на Рис. 11.3 ось тела – горизонтально-проектирующая линия), тогда на одной плоскости проекции (на рисунке – горизонтальной) окружности, полученные от пересечения тела вспомогательной сферой будут проектироваться в натуральную величину, на другой (фронтальной) в прямую, параллельную оси ***x***.

Если ось тела вращения – линия уровня, тогда на плоскости, к которой ось параллельна, окружности сечения также будут вырождаться в прямые линии.

Эти особенности проекций линий сечения тел вращения частного положения сферами дали основу способа вспомогательных секущих сфер. Способ заключается в поиске точек взаимного пересечения тел вращения как общих точек двух линий пересечения этих тел третьей вспомогательной поверхностью – сферой. Этот способ применим, когда оси вращения взаимно пересекающихся тел вращения занимают положение линий уровня к одной из плоскостей проекции и одна из осей является проектирующей линией. Вспомогательные сферы при этом дадут нужные сечения в виде окружностей, только если оси тел вращения пересекаются. Таким образом, условием эффективного использования способа вспомогательных секущих сфер является взаимное пересечение осей тел пересекающихся тел ращения. Если по условию тела рассоложены так, что их пересекающиеся оси не занимают частного положения, эго легко добиться, например, переменой плоскостей проекции. Одна из осей должна быть проектирующей для того, чтобы линии сечения – окружности, отображались на плоскости проекции в натуральном виде и, таким образом, их построение было простым.

Пример 11.3 Построить линию пересечения прямого кругового конуса с круговым цилиндром, ось которого пересекает ось конуса. Оси обеих поверхностей параллельны $\boldsymbol{\Pi_2}$. Ось конуса – горизонтально проектирующая (Рис. 11.4).

При использовании способа вспомогательных секущих концентрических сфер особое значение имеют две вспомогательные сферы: сфера минимального радиуса и сфера максимального радиуса.

Использование вспомогательной сферы имеет смысл, если линии ее пересечения с заданными телами вращения между собой пересекаются и дают искомые общие точки заданных тел вращения. Эти общие точки как раз и есть точки линии перехода поверхностей.

Максимальная вспомогательная сфера, это такая сфера, линии пересечения которой с заданными телами вращения будут хотя бы касаться друг друга – одна общая точка $\boldsymbol{D}$. Если вспомогательная сфера будет большего радиуса, тогда линии ее пересечения с заданными телами не будут иметь общих точек. Они будут бесполезны для решения задачи, и создавшая их вспомогательная сфера будет бесполезна.

Минимальная вспомогательная сфера, это такая сфера, которая касается поверхности одного из заданных тел вращения, а другое пересекает. Сферы меньшего радиуса, не давая линий пересечения (касания) с одним из заданных тел, в решении задачи не могут быть использованы.

Все вспомогательные сферы, которые можно использовать в решении, должны иметь значение радиуса между минимальным и максимальным значениями.

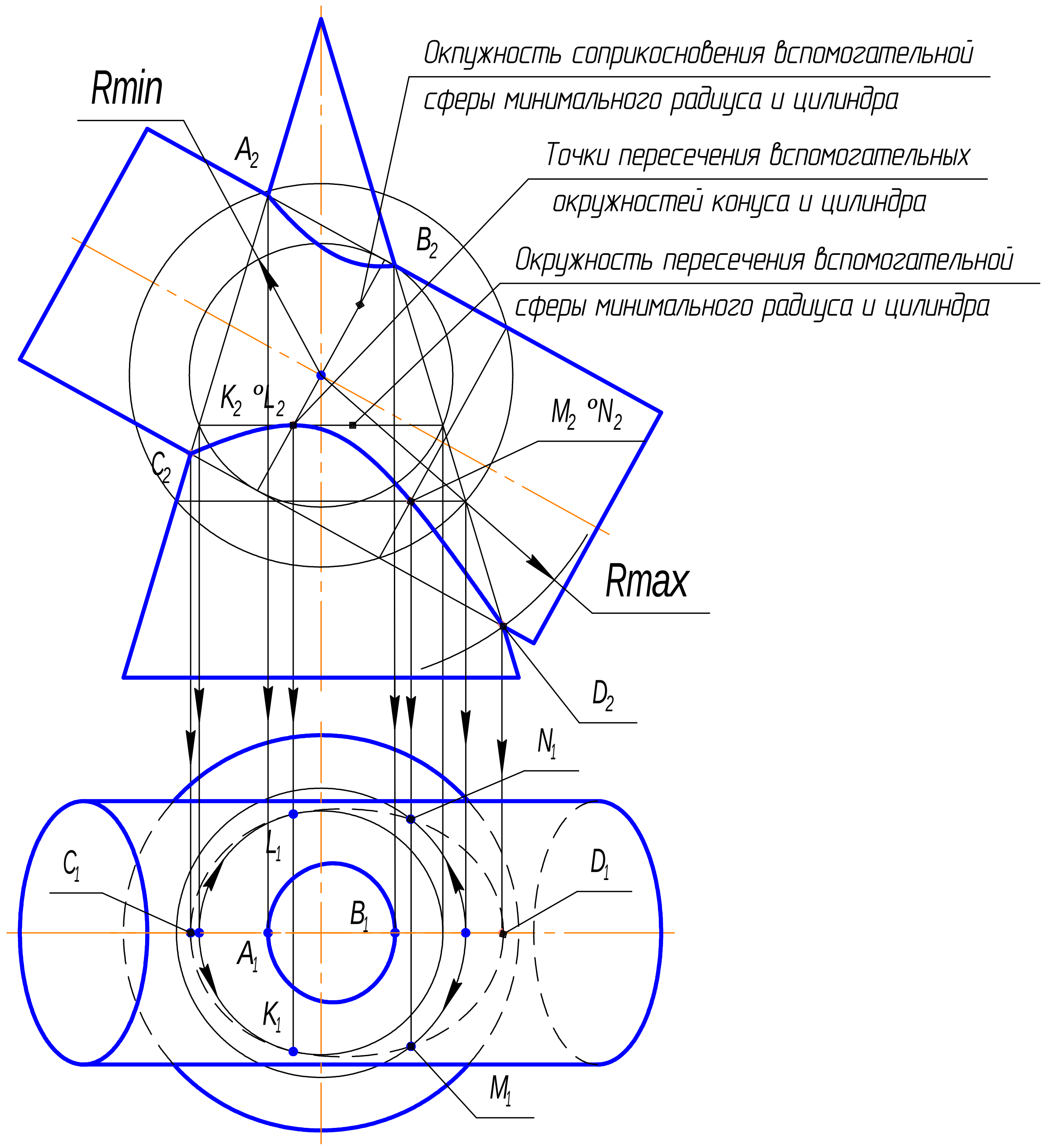


Рис. 11.4 Использование метода концентрических сфер для построения линии пересечения тел вращения

Тема 12 Кривые линии

12.1 Общие положения

Кривая линия – траектория непрерывно движущейся в пространстве точки.

Иначе: - ***кривая***, это геометрические место точек, удовлетворяющее некоторым условиям, выражениям, например, алгебраическим зависимостям (алгебраические кривые), трансцендентным зависимостям (трансцендентные кривые), или иным способам задания.

Кривая линия может быть определена как геометрическое место пересечения двух поверхностей, поверхности и плоскости (плоские кривые).

Примеры плоских кривых: окружность, эллипс, парабола, гипербола, спираль,.. Пространственные кривые – винтовая линия.

12.2 Плоские кривые. Касательная, нормаль, кривизна.

Касательная ***t*** к линии ***l*** в (.)***M***, это прямая линия. Полученная из секущей кривую прямой, проведенной через (.)***M***, в ее предельном положении, когда вторая точка (***A***, ***B***) пересечения прямой и кривой бесконечно приближена к (.) ***M*** (Рис. 12.1).

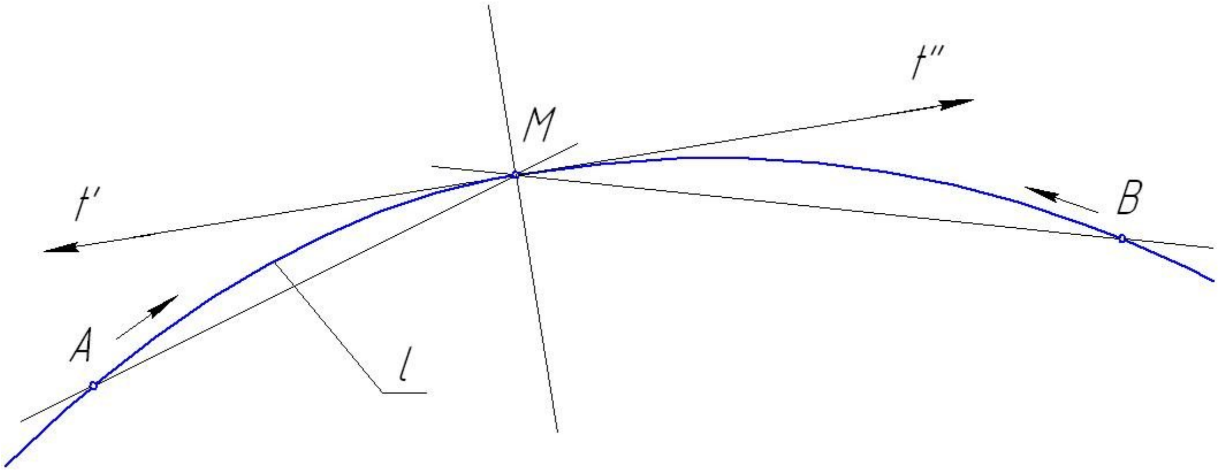


Рис. 12.1 Образование касательной к плоской кривой

В общем случае, в зависимости от того, в какую сторону от исходной точки проведена секущая, направление касательной может быть разным.

Касательная, выродившаяся из секущей, проведенной через (.)***M*** и (.)***A*** на кривой слева от (.)***M***, дает направление одной касательной ***t'***. Вторая секущая, проведенная через (.)***M*** и (.)***B*** на кривой справа от

(.)***M*** дает вторую касательную ***t''***. Касательные, полученные при вырождении разных секущих, принято называть полукасательными. В общем случае эти полукасательные могут не совпасть.

Если кривая в (.)***M*** плавная, полукасательные совпадают.

Перпендикуляр к касательной в (.)***M*** называют нормалью к кривой. Если полукасательные к кривой в (.)***M*** не совпадают, то и нормали к кривой в этой точке не будут совпадать. В этом случае кривая может иметь две нормали, справа от (.)***M*** и слева от (.)***M***.

Если кривая непрерывна на некотором ее участке, может быть определено отношение угла *Da* между двумя соседними касательными к длине дуги *D**s*** между точками касания. Предел этого отношения

$$\lim_{\Delta s \to \infty} \frac{\Delta a}{\Delta s} = k(s)$$ называется кривизной линии в (.)***M***.

Величина, обратная кривизне ***r(s)=k(s)/1*** называется радиусом кривизны линии в (.)***M***.

Радиус кривизны может быть определен как радиус окружности, проведенной через три бесконечно близкие точки на линии, средняя из которых (.)***M***.

12.3 Эволюта и эвольвента

Эволютой называется кривая, являющаяся геометрическим местом центров кривизны заданной линии (Рис. 12.2).

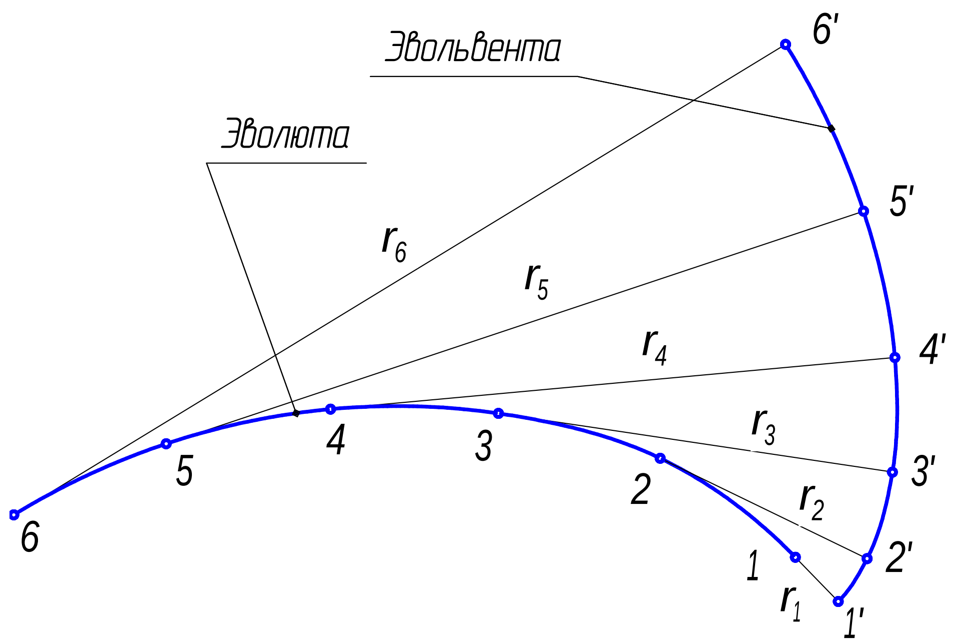


Рис. 12.2 Эволюта и эвольвента

Исходная линия по отношению к своей эволюте называется эвольвентой. Геометрически эвольвента является траекторией движения некоторой точки на касательной к кривой, когда касательная перекатывается по кривой без скольжения.

Т.к. на касательной можно выбрать любую точку, для данной кривой можно построить бесконечной множество эвольвент.

Касательная к эволюте является нормалью к эвольвенте.

12.4 Точки плоских кривых

Линии, кривизна которых монотонно изменяется, называются монотонными Лиями.

У монотонных линий в каждой точке полукасательные направлены в противоположные стороны и центры кривизны, определенные на участках справа и слева от точки совпадают.

Линии, которые состоят из отрезков различных монотонных линий называют составными или обводами.

Точки соединения отдельных участков обводов называют вершинами линии. Если такие точки имеют свойства. Отличные от точек на монотонных участках, их называют особыми точками.

Различают следующие особые точки:

- Двойная точки,
- Точка перегиба,
- Точка излома,
- Узловая точка.

Двойная точка. Особая точка, в которой полукасательные противоположно направлены и нормали совпадают по направлению, однако радиусы кривизны разные по величине. Это, например, точка сопряжения двух окружностей разных радиусов (Рис. 12.3).

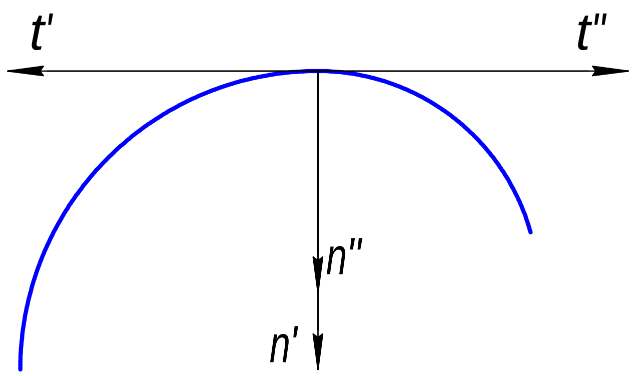


Рис. 12.3 Дойная точка

Точка перегиба. Имеет противоположно направленные и нормали и касательные (Рис. 12.4).

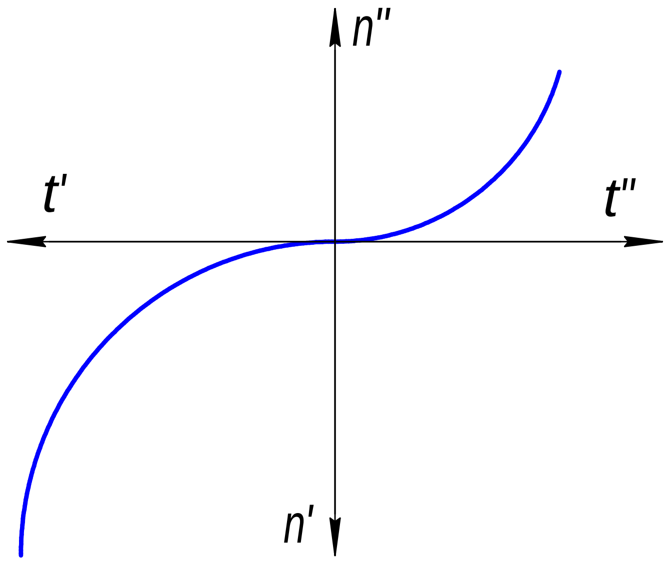


Рис. 12.4 точка перегиба

Точка излома (угловая точка). И полукасательные и нормали не совпадают по направлению (Рис. 12.5).

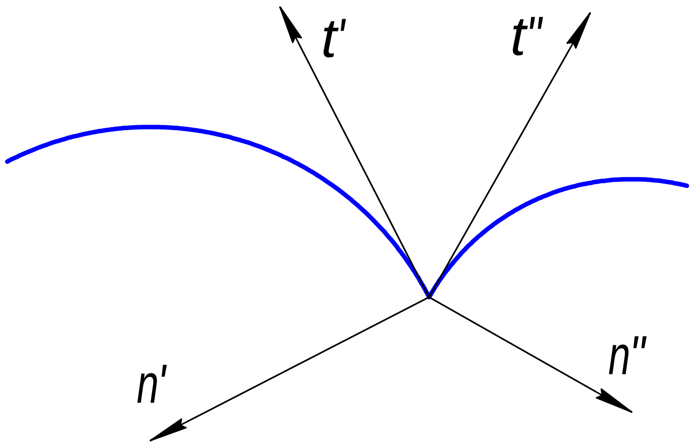


Рис. 12.5 точка излома

Точки возврата первого рода. Полукасательные совпадают, нормали противоположно направлены (Рис. 12.6).

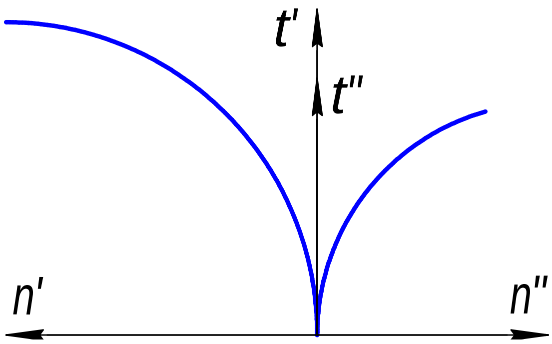


Рис. 12.6 Точка возврата

Узловая (многоразовая) точка. Кривая пересекает саму себя. Здесь возможны двойные (Рис. 12.7), тройные,… точки

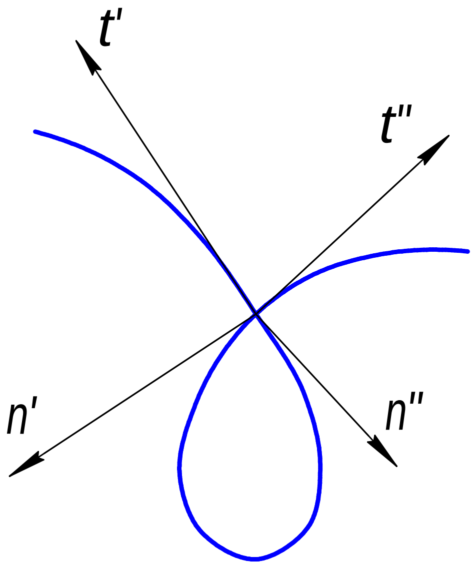


Рис. 12.7 Узловая точка

12.5 Кривые линии второго порядка

Это линии, описываемые алгебраическими уравнениями второго порядка (второй степени). Эти линии могут быть получены при пересечении конуса плоскостью определенного положения относительно оси и образующих конуса (конусные сечения).

В общем виде уравнение кривой второго порядка записывается

$$Ax^2 + 2Dxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

В зависимости от того, чему равны константы ***A, B, C, D, E, F*** – может быть получено, например, уравнение окружности при ***B***=0 и ***A***=***C***; эллипса (***B***=0 ***и A*** ^{1}***C***, параболы, гиперболы, прямой и точки. Линии второго порядка являются гладкими (монотонными). Эти линии можно строить с помощью лекал.

12.6 Пространственные кривые

Не принадлежат одной плоскости.

12.6.1 Винтовая линия

Винтовая линия получается при одновременном совершении точкой двух движений: поступательного вдоль оси и вращательного вокруг той же оси. Скорость поступательного движения может быть переменной. Радиус вращательного движения может изменяться.

В технике получили распространение винтовые линии как направляющие резьб, пружин.

<u>Цилиндрическая винтовая линия.</u>

Это траектория точки, совершающей два независимых равномерных движения: одно поступательное с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ вдоль прямолинейной оси; второе – равномерное вращение с постоянными радиусом и угловой скоростью w вокруг той же оси. Перемещение точки вдоль оси за один оборот ее вокруг той же оси называется шагом $\boldsymbol{h}$ винтовой линии (Рис. 12.8).

Построение проекций винтовой линии.

$\boldsymbol{d}$ – диаметр цилиндрической поверхности, на которой располагается винтовая линия.

$\boldsymbol{h}$ – шаг винтовой линии.

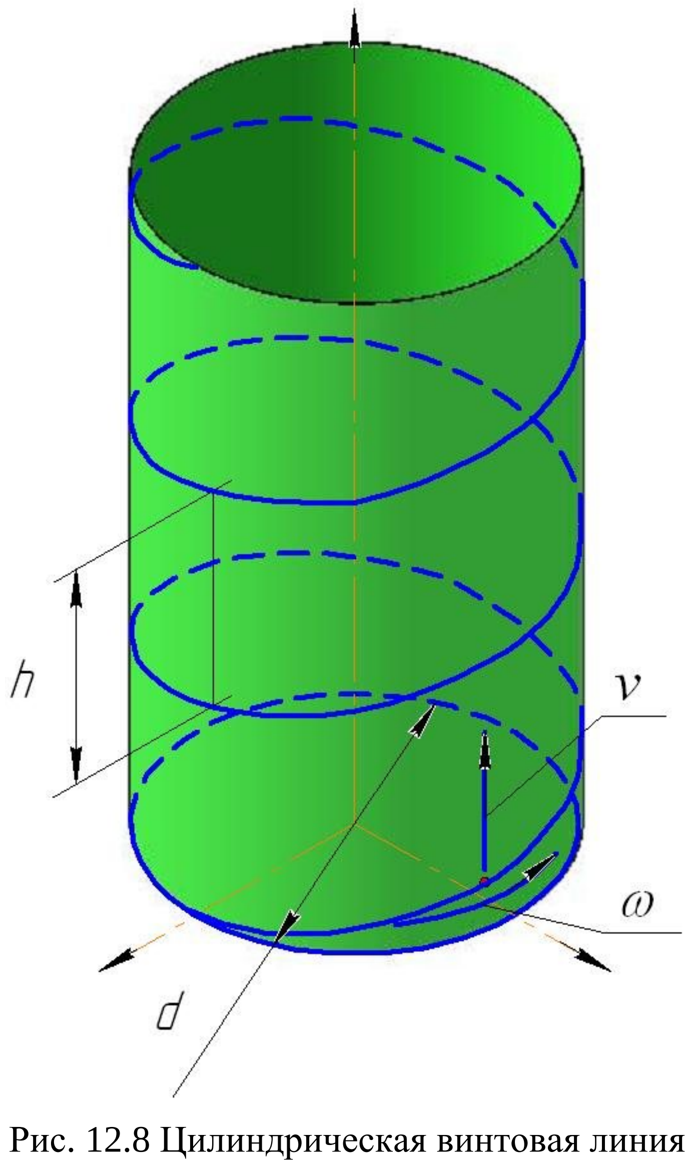


Рис. 12.8 Цилиндрическая винтовая линия

12.7 Плоскости, касательные к кривым поверхностям

Если через некоторую точку на монотонной в некоторой области поверхности провести серию линий, то касательные t_1 и t_2 к этим линиям будут лежать в одной плоскости Q. Такая плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в этой точке. Достаточно провести через точку на поверхности две плоские линии, построить к этим линиям в их общей точке M касательные линии. Эти две касательные прямые зададут касательную плоскость (Рис. 12.9).

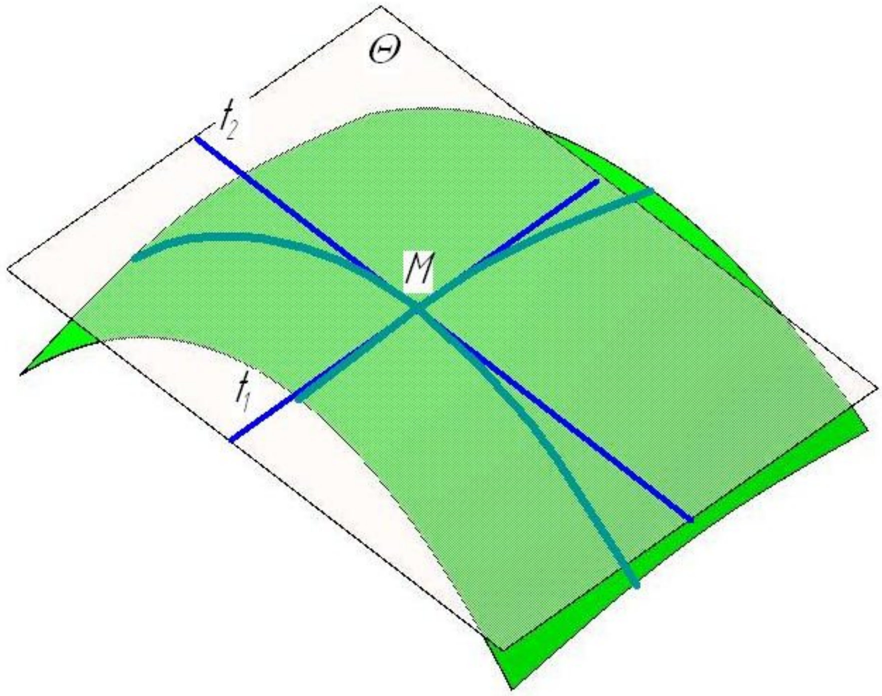


Рис. 12.9 Плоскость, касательная к поверхности

<u>Построение касательной плоскости</u>

Построение касательной плоскости к конкретной поверхности на проекционном чертеже основано на том же построении пары касательных к поверхности в заданной точке. Эти касательные зададут касательную плоскость. Очевидно, что, так как касательные могут быть любые, искать нужно те, построение которых наиболее просто. Если поверхность содержит прямолинейные образующие (конус, цилиндр), эти образующие также могут быть использованы для построения касательной плоскости.

Пример 12.1. Построить касательную плоскость к торовой поверхности (Рис. 12.10).

Простейшим образом могут быть построены две касательные к торовой поверхности в (.)***M***. Одна – касательная ***h*** к окружности параллели ***p*** (горизонтальная окружность) на поверхности тора, проведенной через точку ***M***. Она легко может быть построена на горизонтальной плоскости проекции. На фронтальной плоскости проекции касательная ***h*** к параллели ***m*** совпадает с ее проекцией. Другая касательная, это прямая ***t***, касательная к меридиональному сечению ***m*** тора. Эта касательная пересекает ось торовой поверхности. Все множество касательных, проходящих через точки на параллели *p* тора образуют коническую поверхность с вершиной в точке ***S***, построенной как точка пересечения касательной к очерковому меридиану ***m***, проведенной через параллель ***p***, с осью тора. Касательная к тору в точке ***M*** пройдет через ту же точку ***S***.

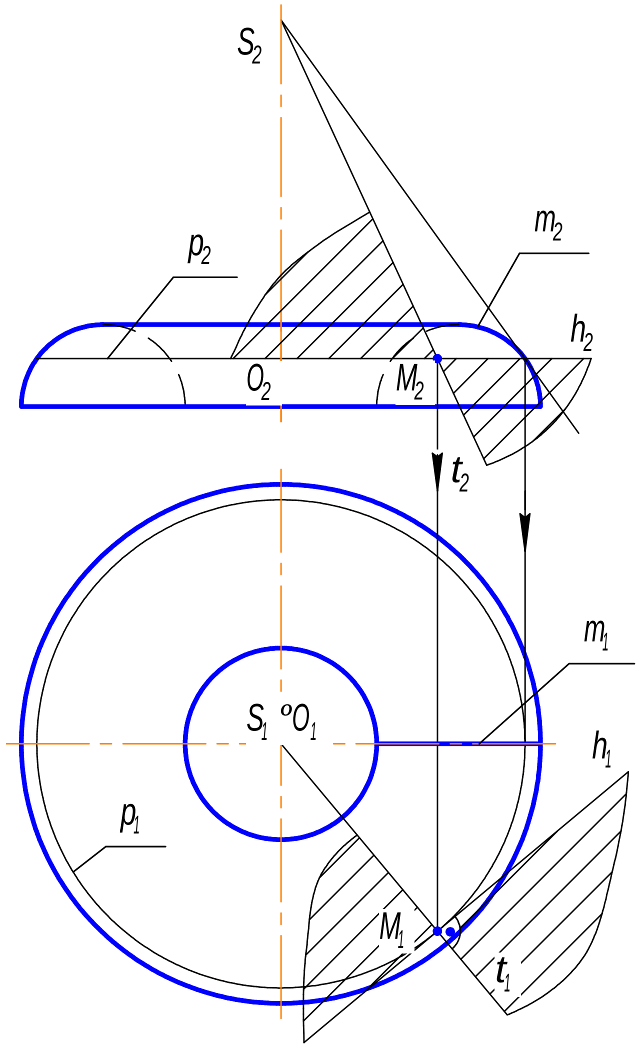


Рис. 12.10 Касательная к поверхности полутора

Две пересекающиеся в точке ***M*** прямые ***h*** и ***t*** задают искомую касательную плоскость.

Пример 12.2. Построить касательную плоскость к сферической поверхности

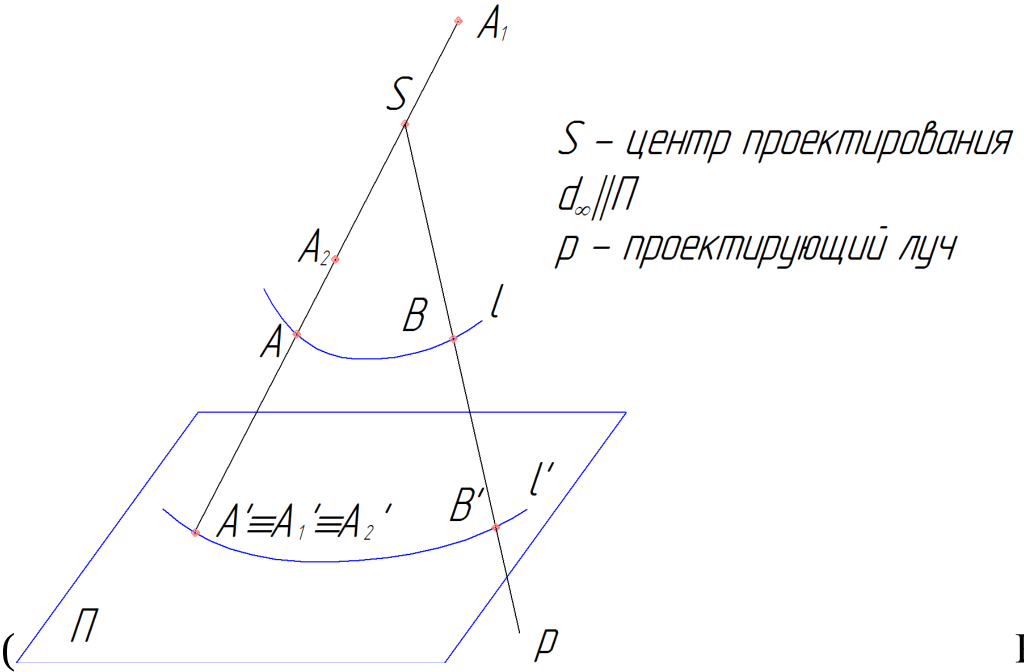
(

Рис. 1.1).

Это построение ничем не отличается от построения касательной плоскости к поверхности тора (см. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**Пример 12.1).

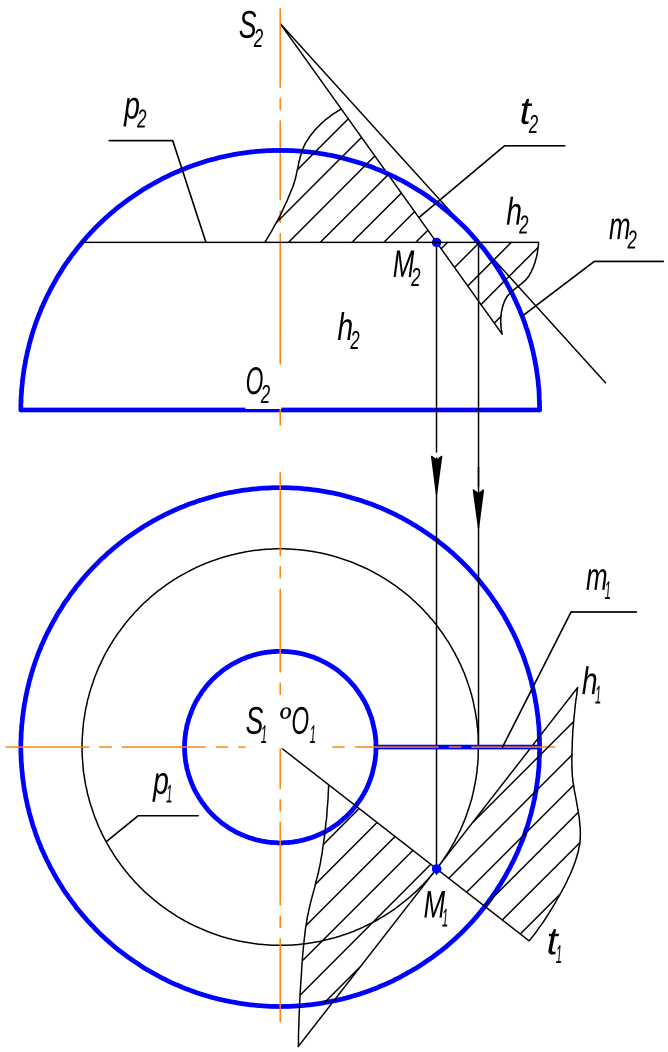


Рис. 12.11 Касательная плоскость к поверхности сферы

Пример 12.3. Построение касательной плоскости к конической поверхности

Касательная плоскость к конической поверхности задается образующей, которой принадлежит точка, и касательной к направляющей, которой принадлежит заданная точка (Рис. 12.12).

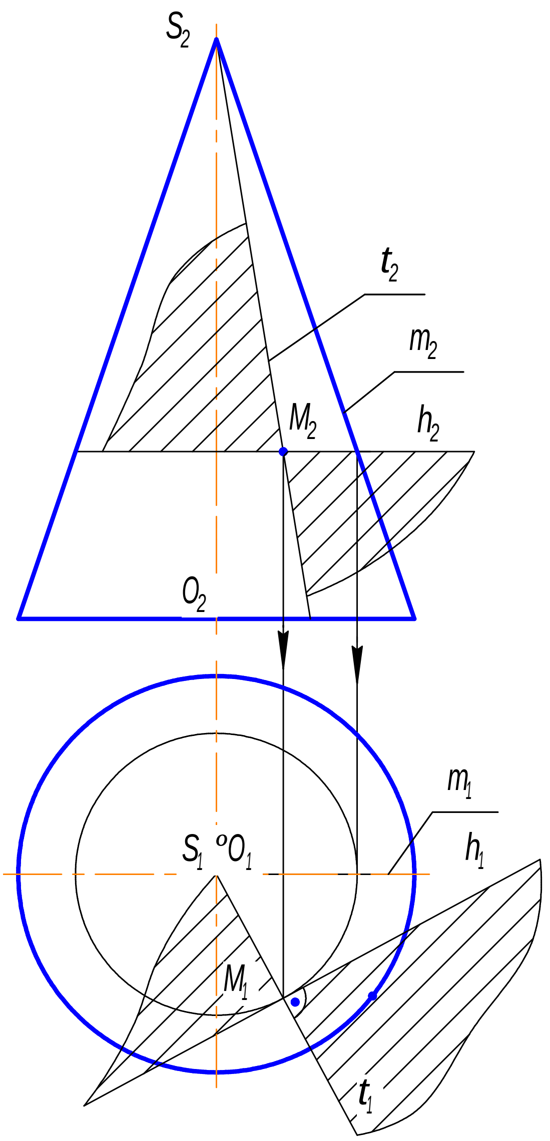


Рис. 12.12 Касательная плоскость к поверхности конуса

Тема 13 Поверхности

13.1 Понятия и определения

Поверхность, это непрерывное множество точек, между координатами которых установлена зависимость, определяемая теми или иными уравнениями. Например, в декартовой системе координат общий вид таких уравнений следующий

$$F(x, y, z) = 0$$

где $F(x, y, z)$ - многочлен степени $\boldsymbol{n}$ (алгебраическая поверхность) или трансцендентная функция.

Порядок алгебраической функции определяется степенью многочлена в уравнении поверхности. При пересечении поверхности порядка $\boldsymbol{n}$ плоскостью линия пересечения будет также многочленом степени $\boldsymbol{n}$.

В теории построения изображений поверхность рассматривается также как непрерывная совокупность последовательных положений монотонно перемещающейся в пространстве линии.

13.2 Способы задания поверхности в пространстве и на чертеже

Для задания поверхности в общем виде необходимо задать описание (уравнение) $\tilde{g}_j$ линии (образующей) и закон ее движения в пространстве. Образующая может быть как неизменной в процессе движения, так и изменяющей свою форму.

В инженерной практике используют два способа задания поверхности, которые являются реализацией общего подхода к описанию поверхности. Это

- кинематический способ и
- каркасный способ.

Кинематический способ. В общем случае (см. выше) поверхность может быть задана некоторой линией $\tilde{g}_j$, для которой задан закон движения (cinema) в пространстве. На практике кинематический способ может быть реализован, например, заданием плоской кривой $\tilde{g}_j$ (образующей); двух непрерывных направляющих линий $\tilde{d}_1 \, u \, \tilde{d}_2$ и направляющей плоскости *G*. Линия $\tilde{g}_j$ непрерывно движется так, что она все время имеет общую точку с каждой из образующих $\tilde{d}_1$ *и* $\tilde{d}_2$, при этом линия $\tilde{g}_j$ остается в плоскости, параллельной плоскости параллелизма *G* (Рис. 13.1).

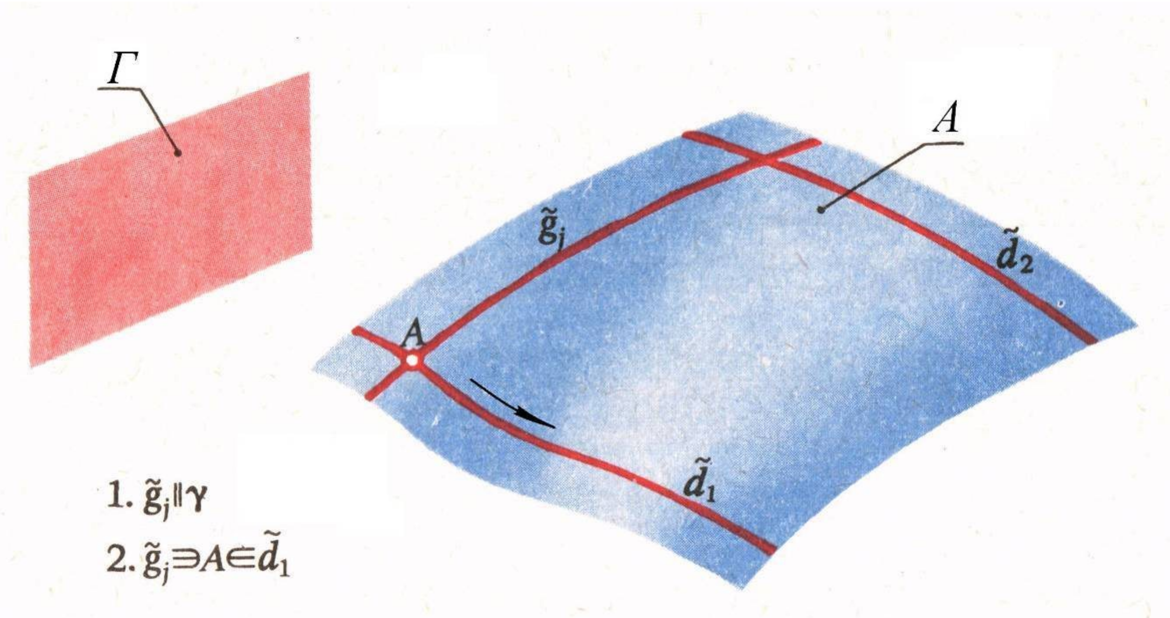


Рис. 13.1 Кинематический способ задания поверхности

Плоскость параллелизма может быть заменена третьей направляющей линией. В простейшем случае можно рассмотреть на проекционном чертеже образование поверхности прямой образующей, которая движется по трем прямолинейным направляющим (Рис. 13.2).

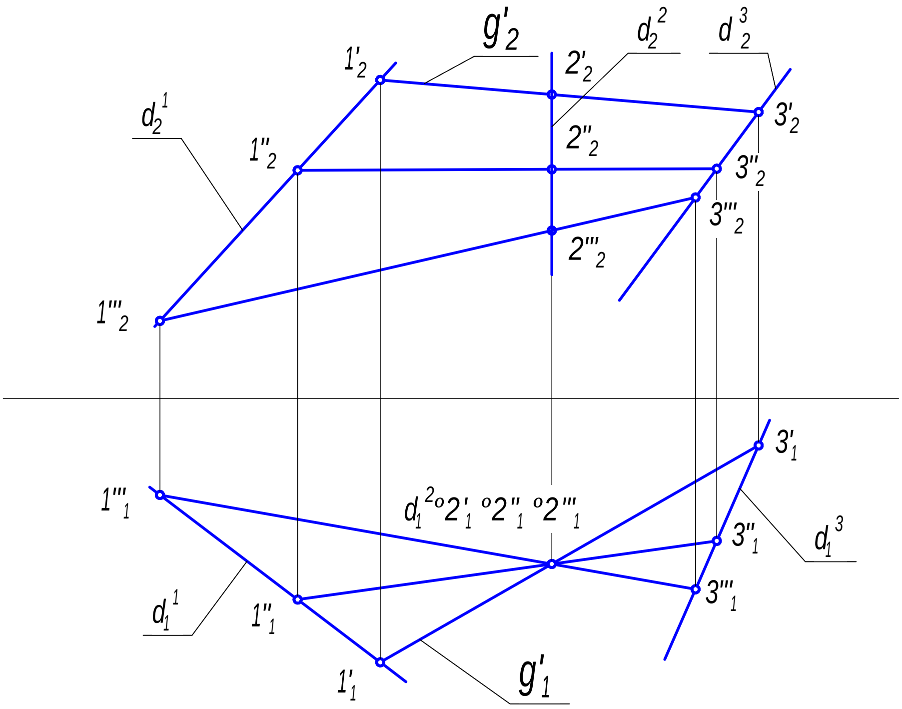


Рис. 13.2 Линейчатая поверхность с тремя направляющими на проекционном чертеже

Каркасный способ. Поверхность представляется в виде серии принадлежащих ей линий (линейчатый каркас – Рис. 13.3) или точек (точечный каркас).

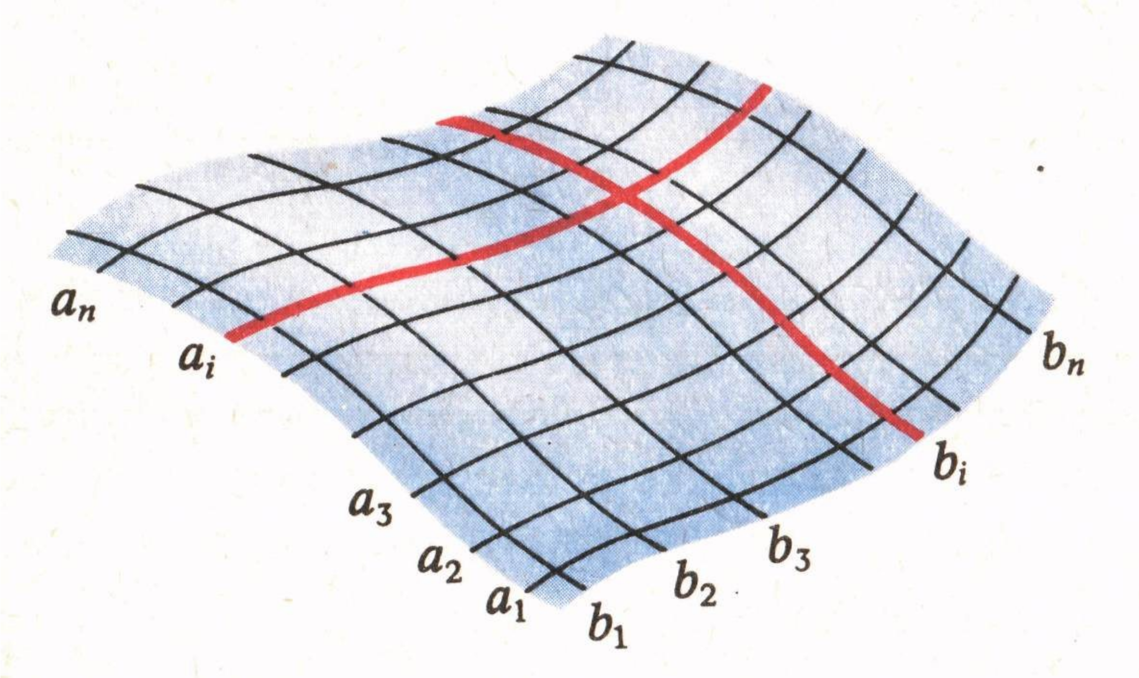


Рис. 13.3 Линейчатый каркас поверхности

Для отдельных линий каркаса – образующих, должен быть задан или закон построения, или линии заданы в графическом виде, или другим способом. Должна быть также определена зависимость, связывающая эти кривые. Например, задано расстояние между плоскостями расположения отдельных кривых – так называемый шаг каркаса. Шаг каркаса может быть как переменным, тык и постоянным.

Примером каркасного задания поверхности может быть теоретический чертеж корпуса корабля. Эта каркасная поверхность представляет собой набор линий теоретических шпангоутов. Закон, связывающий линии каркаса (шпангоуты), это параллельность их плоскостей и расположение плоскостей шпангоутов на заданном расстоянии друг от друга.

13.3 Определитель поверхности

При кинематическом способе задания поверхности должна быть известна образующая g_j и должен быть описан закон ее движения.

В теории построения изображений используется описание поверхностей в форме так называемого **определителя**.

Определитель поверхности, это лаконичная запись, содержащая сведения об образующей и о законе ее движения. Определитель содержит две части:

1. **Геометрическую часть**, обозначаемую ***Ф(Г)***. Эта часть содержит описание геометрических фигур, участвующих в образовании поверхности.
2. **Алгоритмическая часть**, обозначаемая ***[А]***. Эта часть содержит описание того, как двигаются фигуры, заданные в геометрической части.

Например, цилиндрическая поверхность имеет определитель: геометрическая часть - $\Phi(\bar{g}_j, i)$, где:

$\bar{g}_j$ - прямая – образующая;

i – прямая – ось.

Алгоритмическая часть $[\bar{g}_j = R_i(\bar{g})]$. Запись в алгоритмической части означает, что прямая $\bar{g}_j$ совершает круговое движение (преобразование $\boldsymbol{R_i}$) вокруг оси ***i***.

По данному определителю, цилиндрическая поверхность, это след от вращения $\boldsymbol{R_i}$ прямой $\bar{g}_j$ вокруг оси ***i.***

Иначе цилиндрическая поверхность может быть задана как вращение кривой образующей $\tilde{g}_j$ вокруг оси ***i***, при условии, что кривая имеет такую форму, что она принадлежит цилиндрической поверхности, например, это фрагмент винтовой линии на цилиндрической поверхности.

Тогда определитель поверхности будет $\Phi(\tilde{g}_j, i)$; $[\tilde{g}_j = R_i(\tilde{g})]$.

13.4 Классификация поверхностей

Поверхности, изучаемые в теории построения изображений, принято разделять на два **класса**:

- **Класс I** – нелинейчатые поверхности, образующие у которых кривые линии $\tilde{g}_j$
- **Класс II** – линейчатые поверхности с прямолинейными образующими $\bar{g}_j$ (Рис. 13.4)

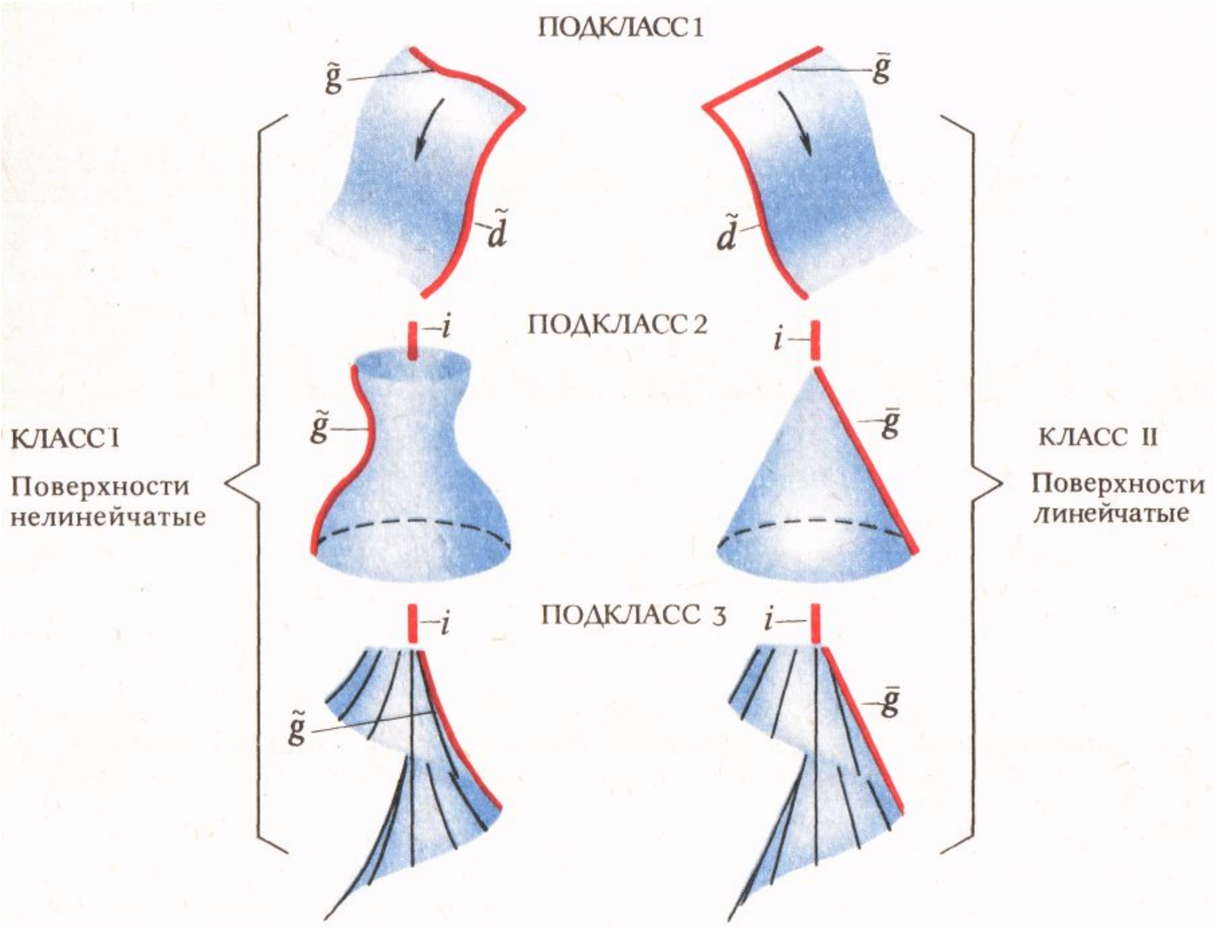


Рис. 13.4 Классификация поверхностей

Характер движения образующей позволяет разделить поверхности на три подкласса:

Подкласс 1 – поверхности образованы поступательным перемещением образующей. Это *поверхности параллельного переноса*;

Определитель поверхностей первого подкласса:

$$\Phi(g_j, d);\ [g_j = T_d(g)].$$

Здесь **d** – направляющая;

$\boldsymbol{T_d}$ – преобразование как параллельное перемещение вдоль направляющей **d**.

Подкласс 2 – поверхности образованы вращательным движением образующей. Это *поверхности вращения*;

Определитель поверхностей второго подкласса:

$$\Phi(g_j, i);\ [g_j = R_i(g)].$$

Здесь **i** – прямая ось;

$\boldsymbol{R_i}$ – преобразование как вращение вокруг i.

Подкласс 3 - поверхности образованы одновременным поступательным вдоль оси и вращательным вокруг той же оси движением образующей. Это *винтовые поверхности*.

Определитель поверхностей третьего подкласса:

$$\Phi(g_j, i)\,;\,[g_j = R_i(g) \circ T_i(g)]$$

Каждый из классов поверхностей делится на группы ***А, Б, В***,… и на подгруппы ***а, б, в***,…

13.5

13.6 Поверхности Класса I

13.6.1 Поверхности с образующей переменного вида (Группа A_1)

Подгруппа а. Поверхность образована движением изменяющейся образующей $\tilde{g}$ по трем направляющим d_1, d_2, d_3 (Рис. 13.5).

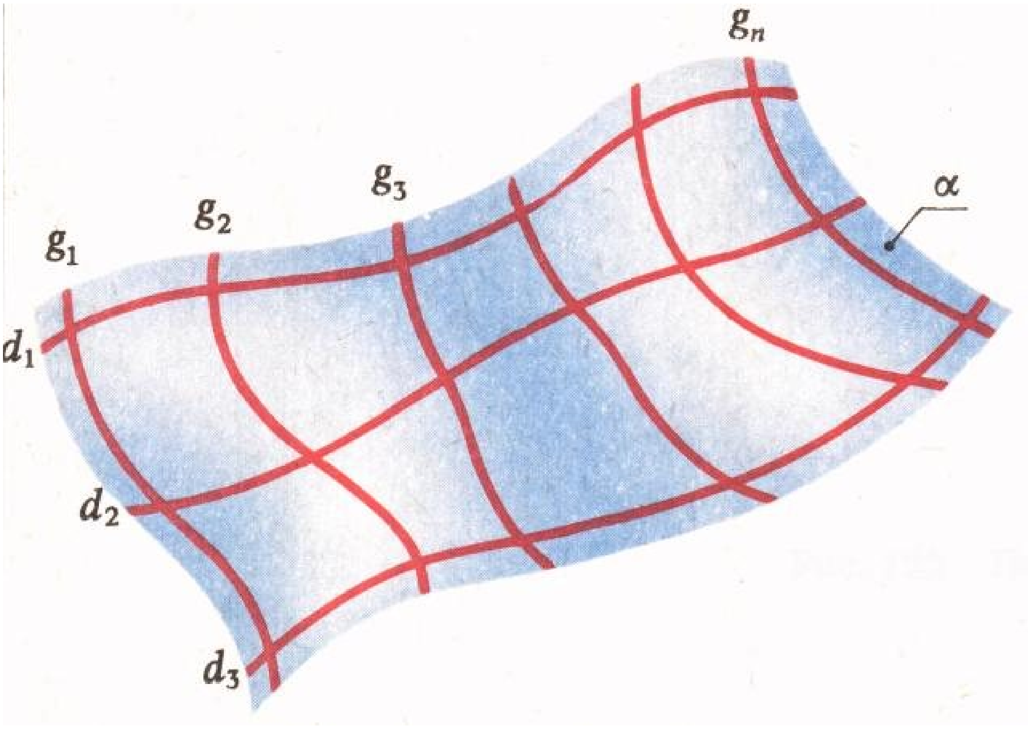


Рис. 13.5 Поверхность Класса I, Подгруппы 1

Подгруппа б. Поверхность образуется непрерывным каркасам замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве - ***каналовая поверхность*** (Рис. 13.6).

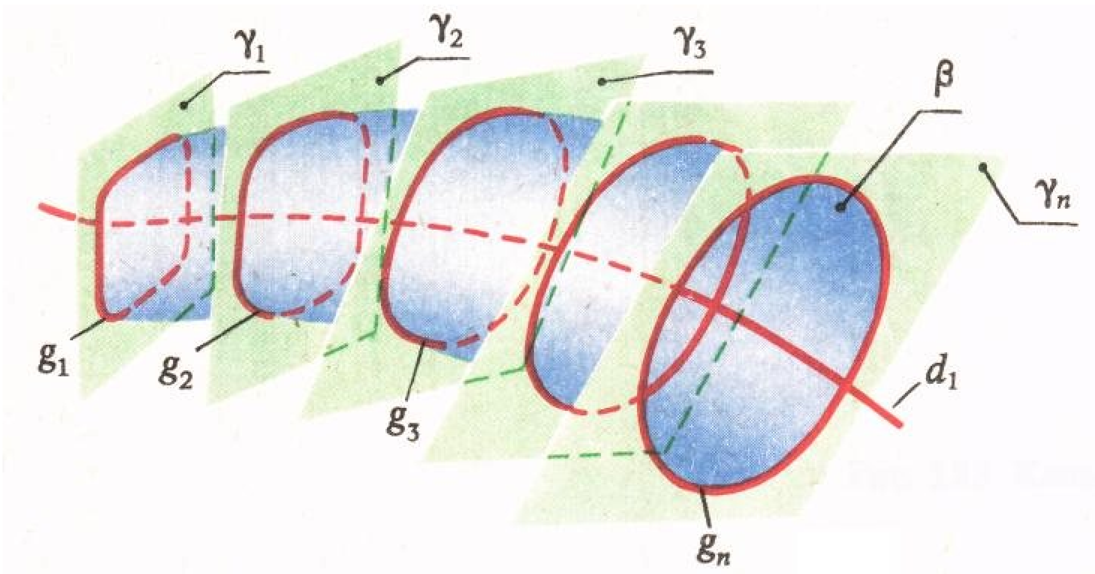


Рис. 13.6 Каналовая поверхность

На практике распространение получили два вида каналовых поверхностей:

1. С сечениями, параллельными плоскости, называемой плоскостью параллелизма (Рис. 13.7);

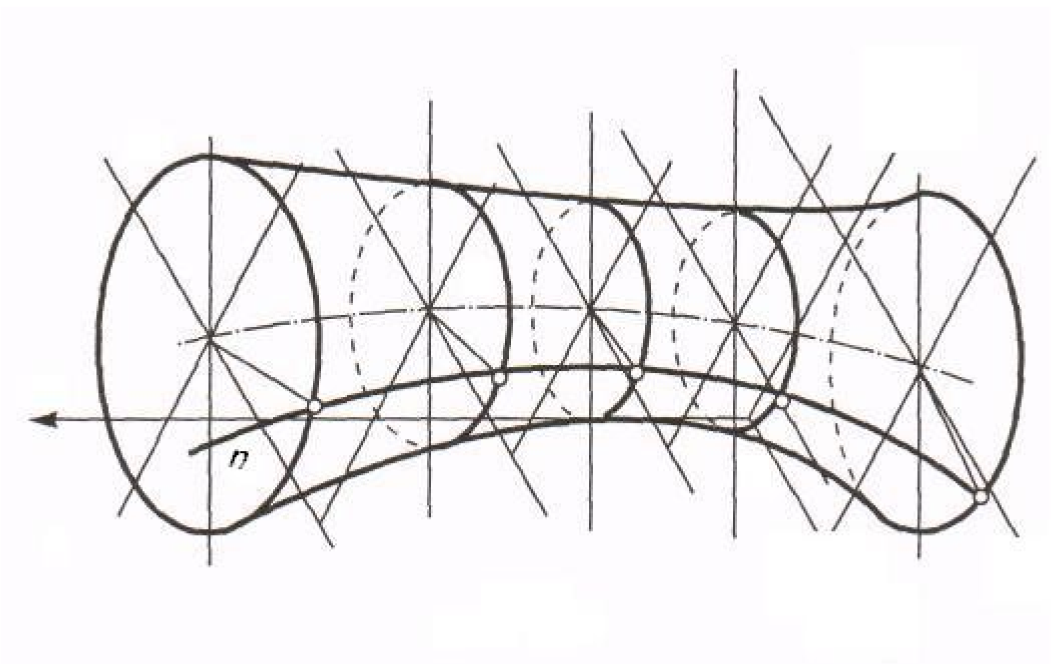


Рис. 13.7 Каналовая поверхность с плоскостью параллелизма

С сечениями, перпендикулярными направляющей – прямые каналовые поверхности (

2. Рис. 13.8).

Рис. 13.8 Прямая каналовая поверхность

Подгруппа 3. Поверхность, получаемая от движения образующей окружности переменного радиуса вдоль криволинейной направляющей – ***циклическая поверхность*** (Рис. 13.9). Каналовая поверхность – частный случай циклической поверхности.

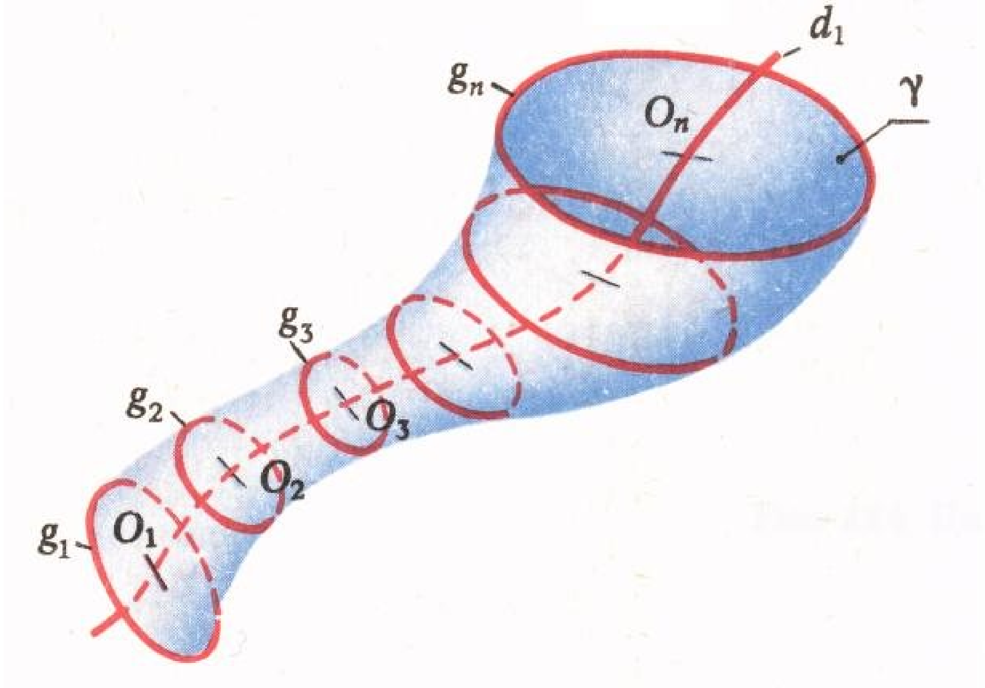


Рис. 13.9 Циклическая поверхность

13.6.2 Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида (Группа Б)

Подгруппа *г*1. Поверхности общего вида, образованные движением произвольной образующей ***g*** вдоль криволинейной направляющей ***d*** (Рис. 13.10).

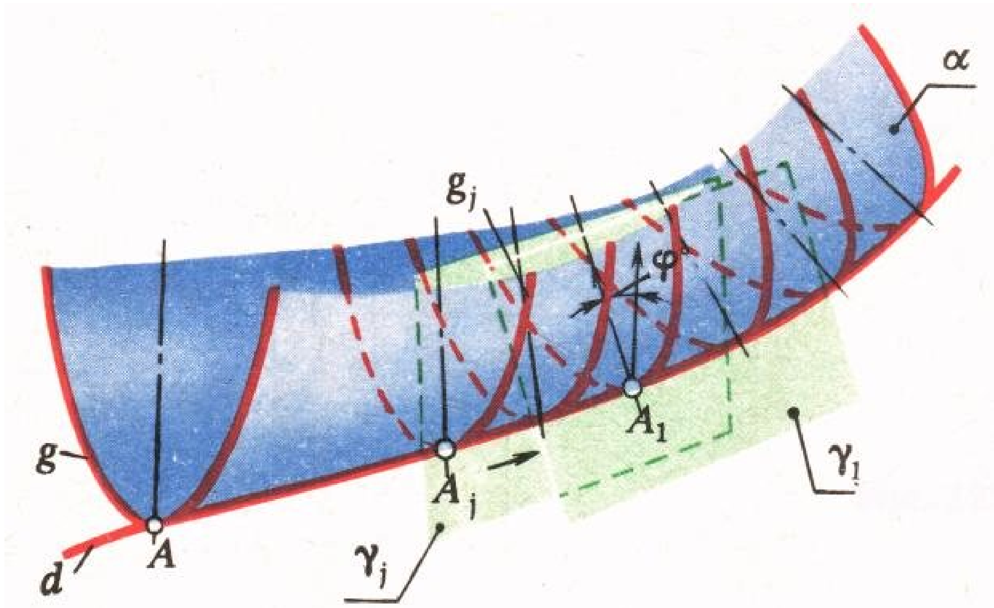


Рис. 13.10 Поверхность общего вида. Группа Б, Подгруппа *г*1

Подгруппа ∂1. Трубчатые поверхности, получаемые при движении образующей окружности постоянного радиуса вдоль криволинейной направляющей. Образующая в каждый момент перпендикулярна направляющей (Рис. 13.11).

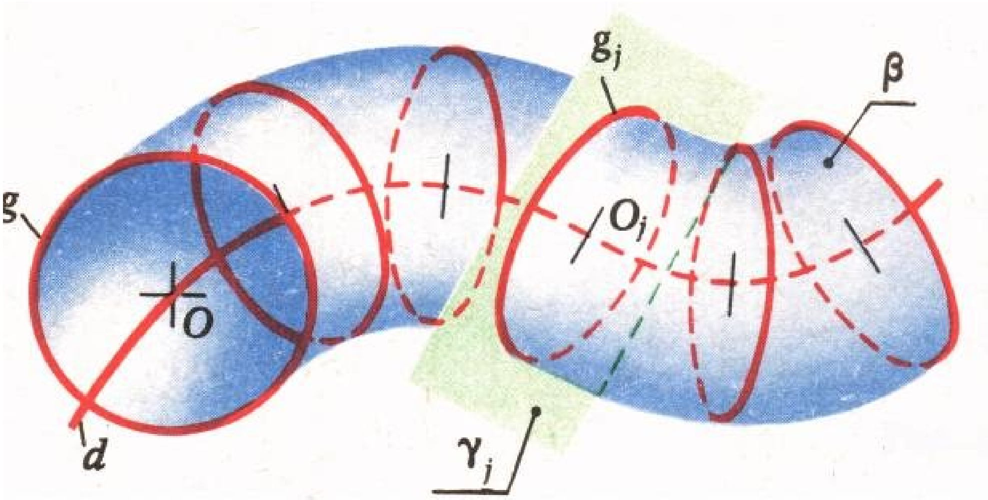


Рис. 13.11 Трубчатая поверхность. Группа Б, Подгруппа **∂**1

13.7 Класс II. Линейчатые поверхности

В общем случае линейчатые поверхности могут быть представлены движением линейной образующей по трем произвольным направляющим (Рис. 13.12).

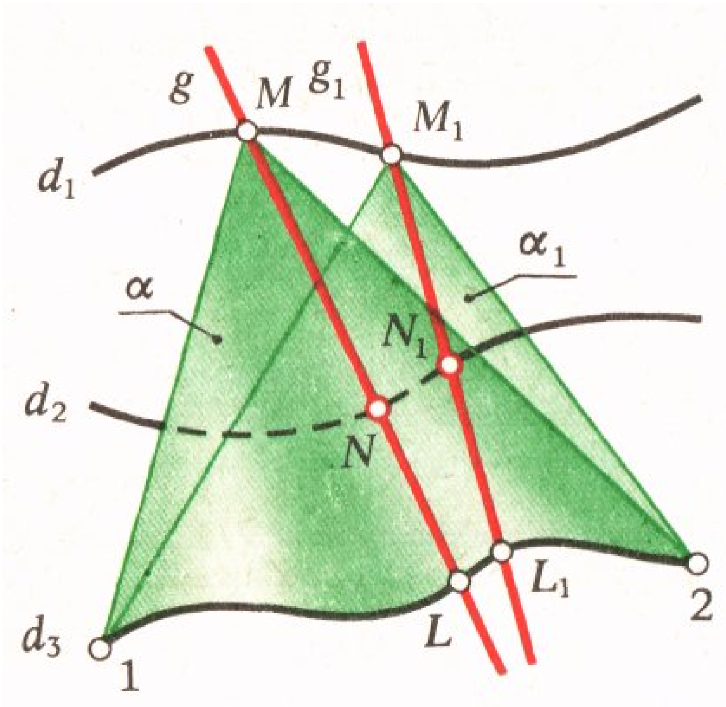


Рис. 13.12 Общий случай линейчатой поверхности. Косой цилиндроид.

Группа A_2. Линейчатые поверхности с тремя направляющими.

- Косой цилиндроид с тремя направляющими (см. Рис. 13.12);
- Дважды косой цилиндроид (две криволинейные направляющие и одна прямолинейная) (Рис. 13.13);

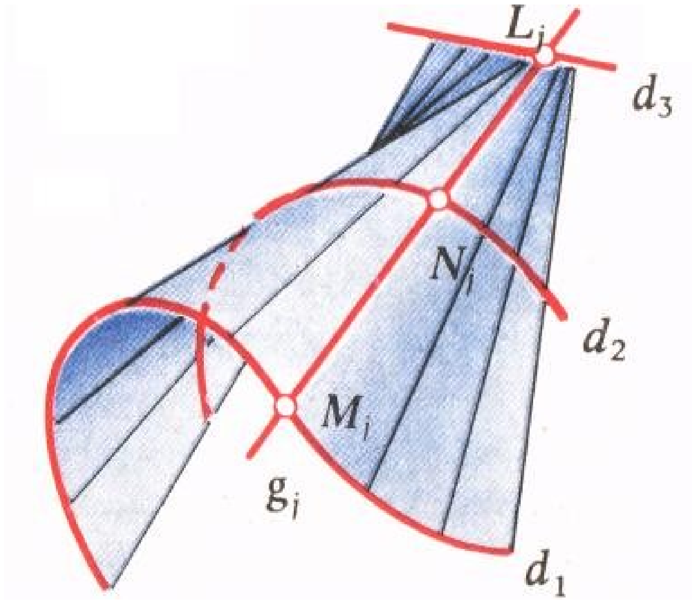


Рис. 13.13 Дважды косой цилиндроид

- Дважды косой коноид (две прямолинейные направляющие и одна криволинейная) (Рис. 13.14);

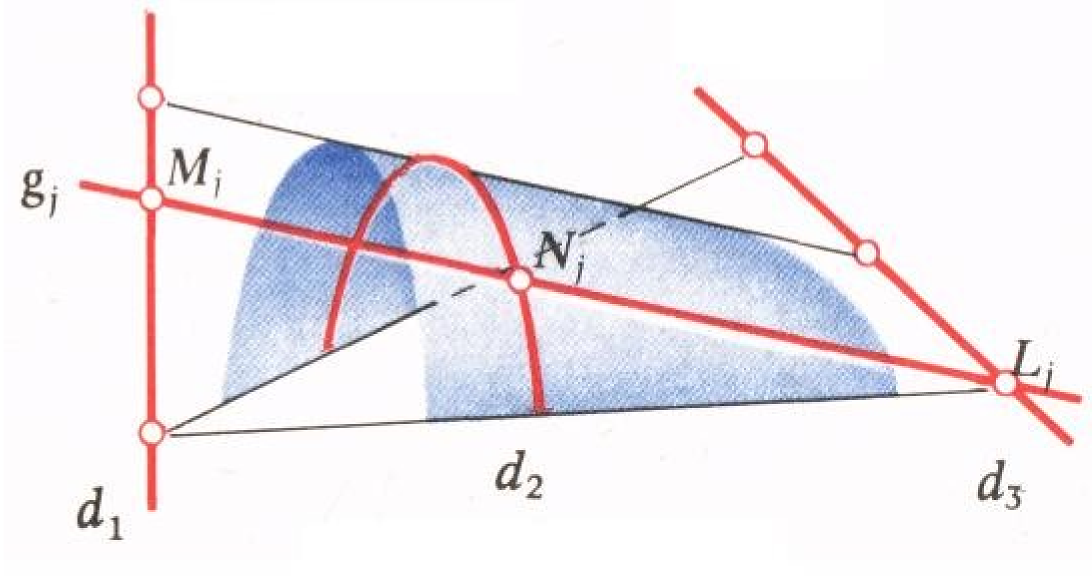


Рис. 13.14 Дважды косой коноид

- Однополостный гиперболоид (три скрещивающиеся прямолинейные образующие) (Рис. 13.15).

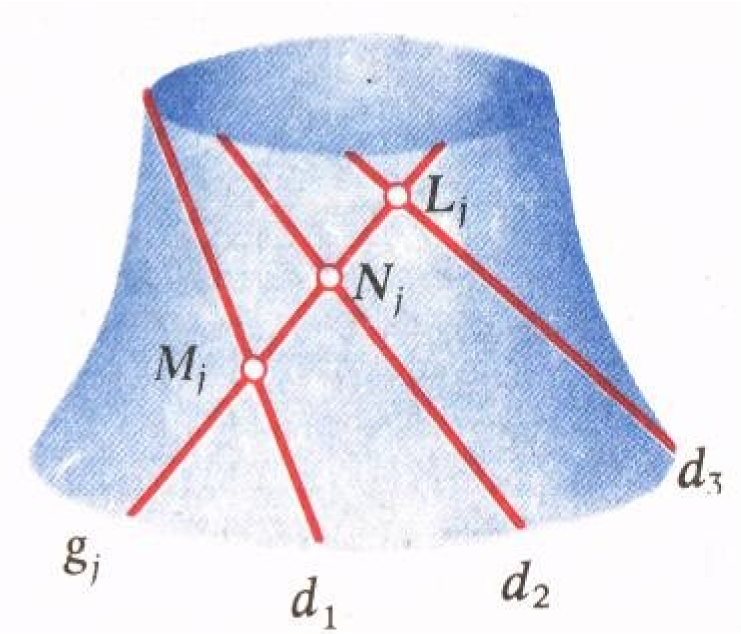


Рис. 13.15 Однополостный гиперболоид

Может быть также описана как вращение прямой вокруг скрещивающейся с ней осью.

Группа *Б*₂. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и направляющей плоскостью. Рассматривают три подгруппы

- Цилиндроиды;
- Коноиды;
- Косые плоскости.

В группу $Б_2$ входят линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (частный случай поверхностей с двумя направляющими). Эти поверхности называют - Поверхности Каталана.

- **Прямой цилиндроид**. Две гладкие кривые образующие, одна из которых лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости параллелизма (Рис. 13.16).

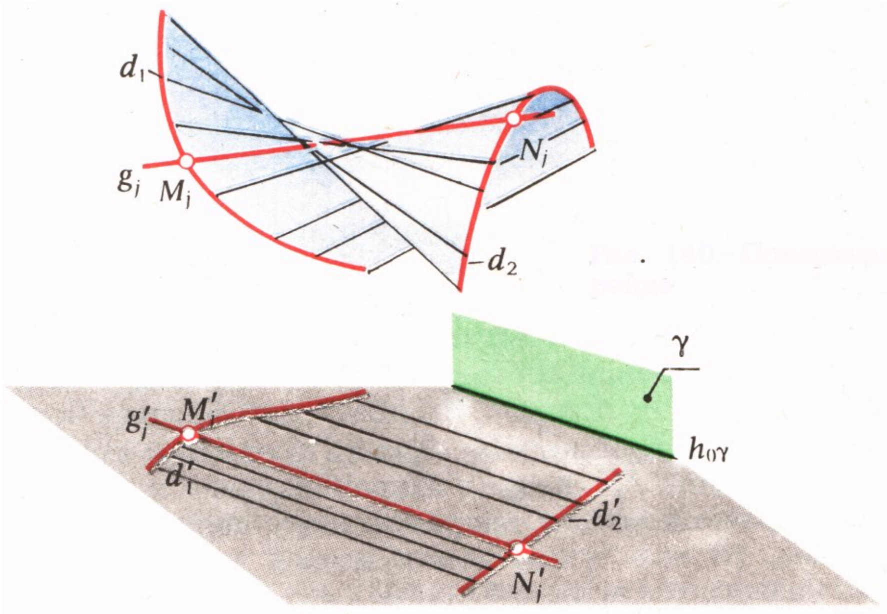


Рис. 13.16 Прямой цилиндроид

- **Прямой коноид**. Одна из направляющих – прямая (Рис. 13.17).

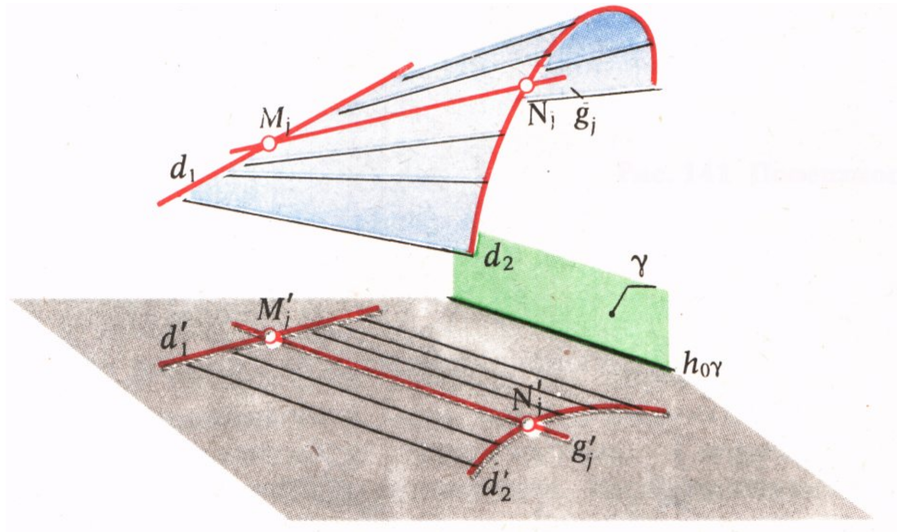


Рис. 13.17 Прямой коноид

- **Косая плоскость**. Обе направляющие скрещивающиеся прямые (Рис. 13.18).

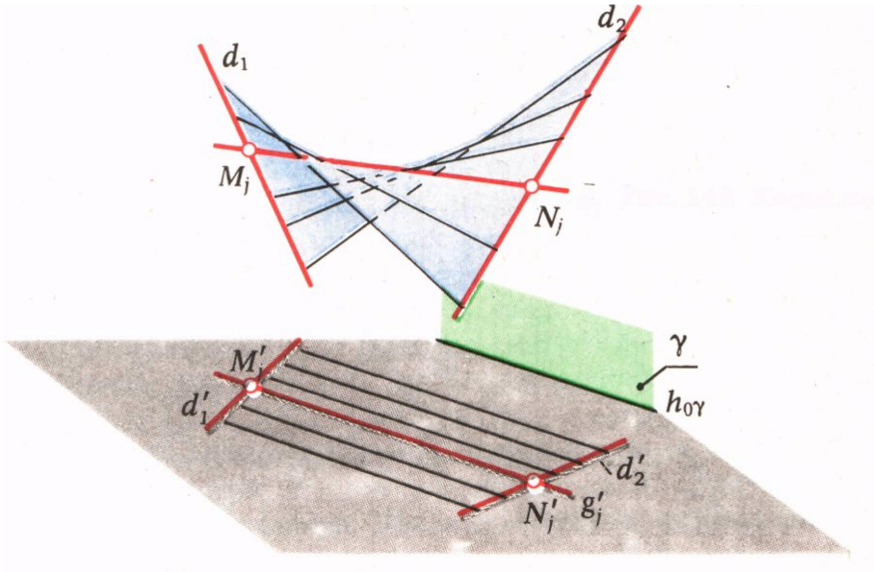


Рис. 13.18 Косая плоскость

- **Плоскость**. Направляющие параллельны или пересекаются.

Группа B_2. Линейчатые поверхности с одной направляющей **Торсы**. Направляющая таких поверхностей называется **ребром возврата** (все три направляющие совпадают с ребром возврата) (Рис. 13.19).

Поверхность образована движением прямой направляющей, в каждой точке касательной кривой направляющей.

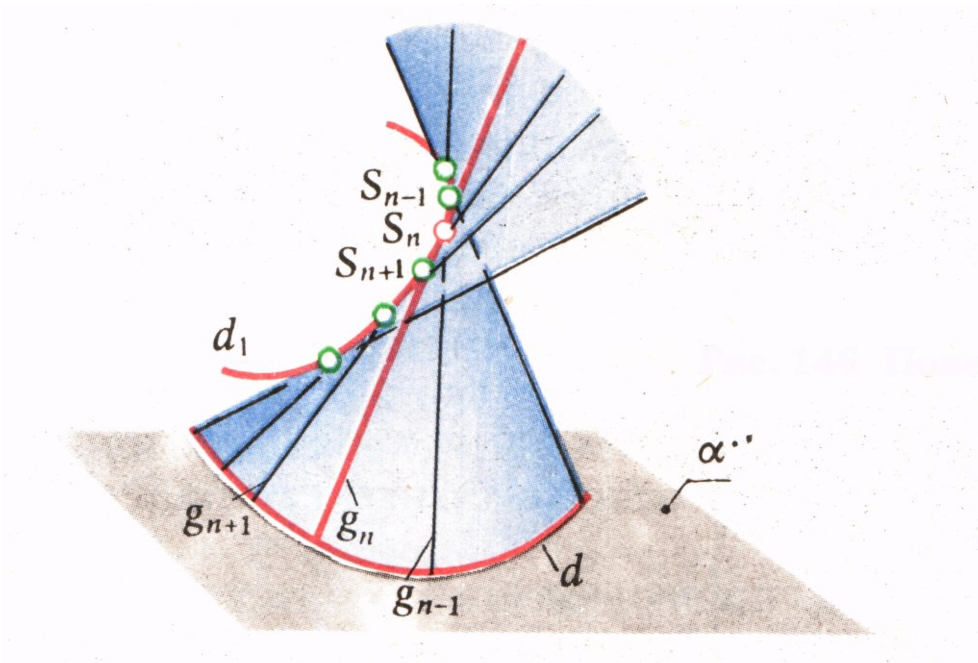


Рис. 13.19 Торс

Особое свойство торсов – разворачиваемость на плоскость без складок и разрывов.

Если в частном случае ребро возврата выродилось в точку – получается **коническая поверхность (**Рис. 13.20**)**.

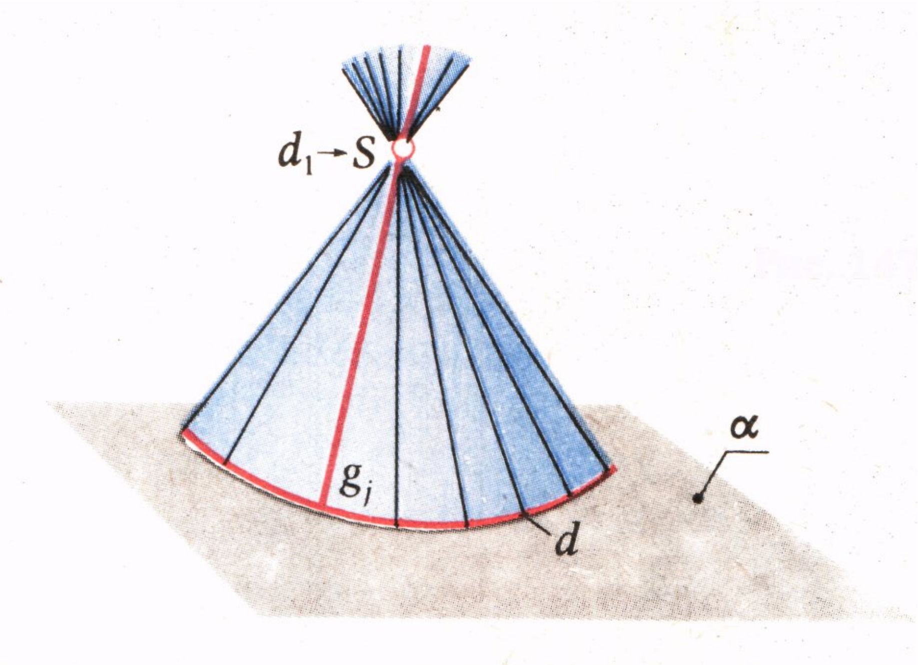


Рис. 13.20 Торс с вырожденной в точку направляющей - конус

Если точка вырождения ребра возврата является несобственной точкой – получается **цилиндрическая поверхность (**Рис. 13.21**)**.

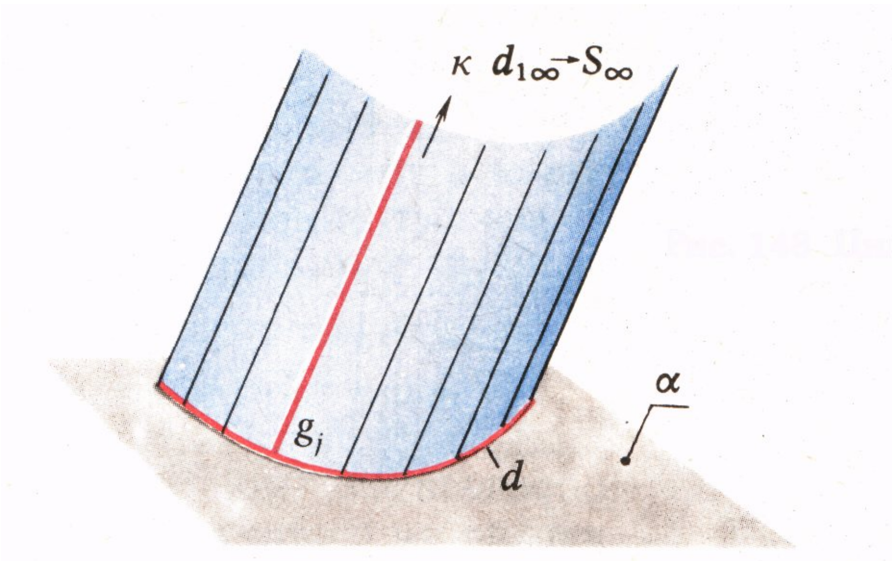


Рис. 13.21 Торс с несобственной вырожденной точкой - цилиндр

Если ребро возврата – плоская кривая, получается **плоскость**.

13.8 Поверхности параллельного переноса (подкласс1)

Образованы поступательным перемещение плоской линии, остающейся все время параллельными между собой, т.е. имеют плоскость параллелизма, или, иначе, лежат в параллельных плоскостях (Рис. 13.22).

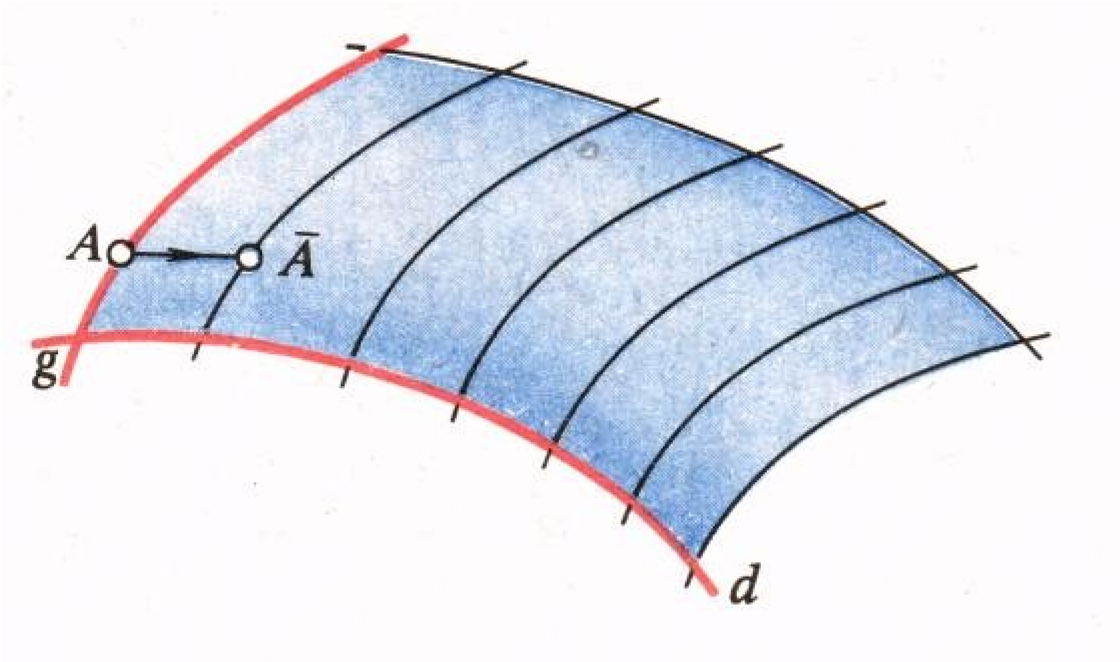


Рис. 13.22 Поверхность параллельного пеноса образующей

13.9 Поверхности вращения (подкласс 2)

Образованы вращением кривой образующей вокруг неподвижной оси (Рис. 13.23).

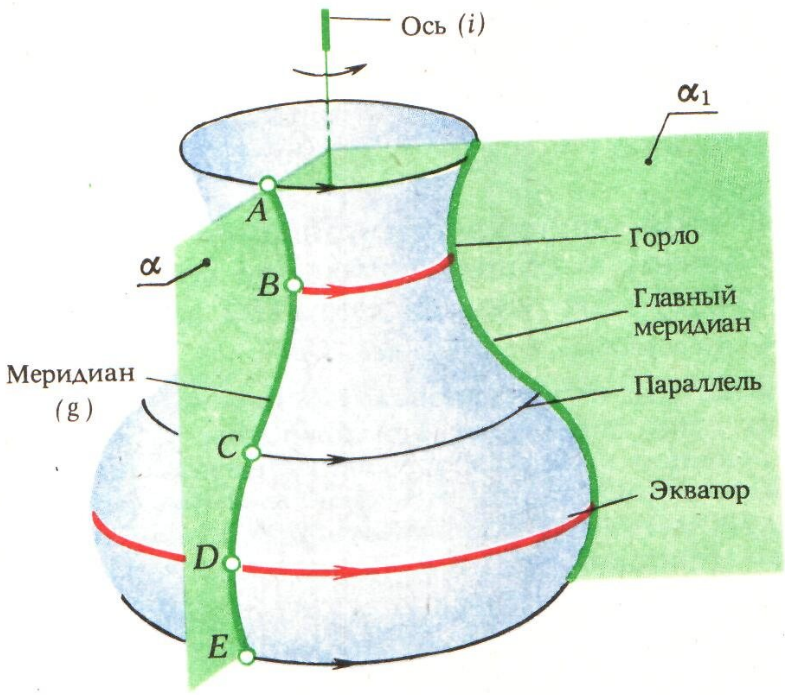


Рис. 13.23 Элемент тела вращения

Меридиан – кривая, полученная при рассечении поверхности плоскостью, проходящей через ось поверхности вращения.

Параллель – траектория движения точки на образующей.

При вращении окружности вокруг оси в ее плоскости можно получить **сферу**, если ось вращения проходит через центр окружности, и **тор**, когда ось смещена от центра окружности.

При вращении эллипса вокруг его осей может быть получен **сжатый** (вокруг малого диаметра) и **растянутый** (вокруг большого диаметра) **эллипсоид**.

При вращении гиперболы

- вокруг ее действительной оси получается **двуполостный гиперболоид вращения**.
- вокруг ее мнимой оси получается **однополостный гиперболоид вращения**. Иначе однополостный гиперболоид получается при вращении прямой образующей вокруг скрещивающейся с ней оси.

При вращении параболы вокруг ее оси получается **параболоид вращения**.

13.10 Винтовые поверхности (подкласс 3)

Образуются при одновременном вращении образующей вокруг оси и поступательном перемещении точки на образующей вдоль оси. Направляющая – винтовая линия (Рис. 13.24).

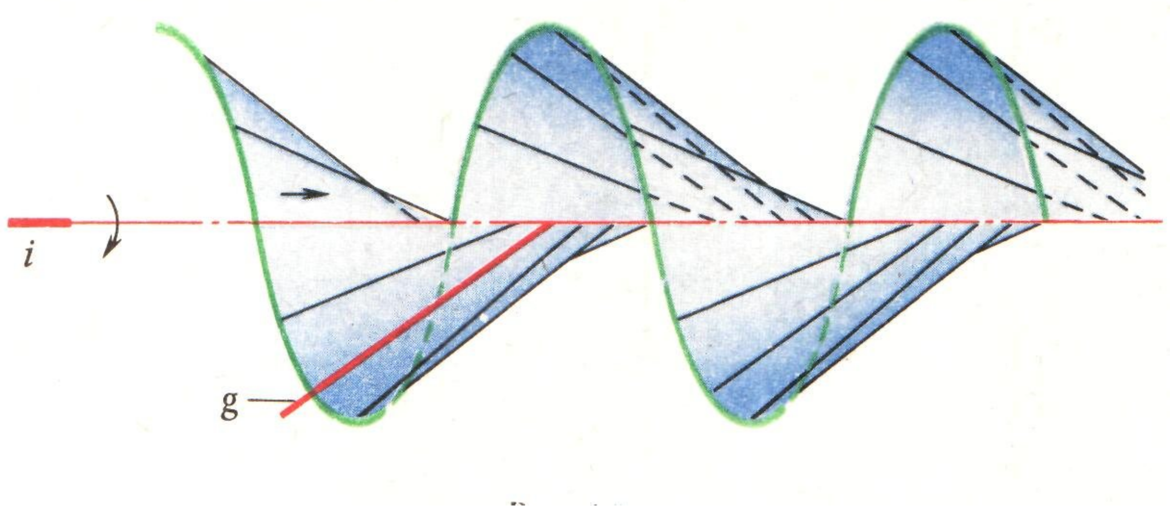


Рис. 13.24 Винтовая поверхность

Направляющая винтовая линия постоянного шага на поверхности прямого кругового цилиндра называется **гелисой**.

Поверхности с направляющей **гелисой** называются **геликоидами**.

Прямой геликоид – образующая $\perp$ оси гелисы.

Косой геликоид – образующая под косым углом к оси гелисы.

Важное свойство винтовой линии – способность скользить вдоль самой себя. Это свойство обусловило их применение в технике в резьбовых соединениях. Винтовыми являются шнеки подающих механизмов, винты судов, сверла, пружины и т.д.

Тема 14 Аксонометрические проекции

14.1 Основные понятия и определения

Аксонометрия – измерение по осям.

Комплексные ортогональные проекции (эпюры Монжа) имеют то свойство, что на каждую из плоскостей проекций проектируются только два измерения пространственной фигуры. Имея проекции на две любые плоскости, мы получаем всю необходимую информацию о каждой точке фигуры. Т.е., по двум проекциям можно восстановить (изготовить) изображенную на комплексном чертеже фигуру. Для того, чтобы фигура наилучшим, т.е. наиболее полным образом отображалась на комплексном чертеже, ее располагают по отношению к плоскостям проекций так, чтобы образующие фигуру грани, ребра, контуры отображались без искажения. Для этого наиболее характерные грани, ребра и контуры, оси отдельных частей фигуры должны быть параллельными плоскостям проекций. При этом ребра и грани фигуры, если они перпендикулярны друг другу, воспроизводятся только в двух измерениях. При таком расположении фигуры по отношению к плоскостям проекций комплексный чертеж не дает наглядности, которая позволила не только задать геометрию фигуры, но и представить, как эта фигура выглядит в целом, в объеме.

Для наглядного объемного представления фигуры необходимо, чтобы каким-то образом на плоском изображении фигуры отображались все три ее измерения. Такая задача решается, если развернуть фигуру вместе со связанной с ней системой координат по отношению к плоскости проектирования, иначе говоря, к бумаге, так, чтобы отображались все три измерения по осям проекций. При этом главные направления, т.е. ребра и грани, не будут проектирующими. Такое проектирование фигуры называется аксонометрией.

Если лучи проектирования в аксонометрии остались перпендикулярными плоскости чертежа, аксонометрия называется прямоугольной (ортогональной). Если лучи проектирования направлены не под прямым углом к плоскости чертежа – косоугольной.

Рассмотрим ортогональное проектирование единичного куба (куб с ребром длиной, равной единице) на плоскость, когда ребра куба не параллельны или перпендикулярны плоскости проектирования (Рис. 14.1).

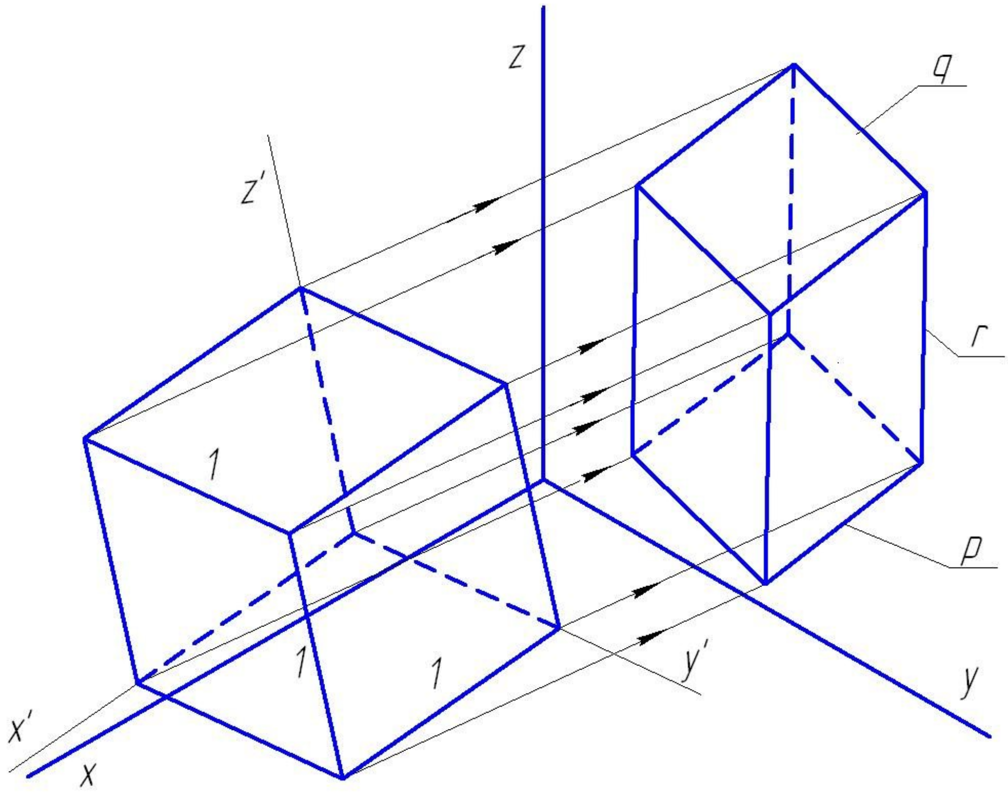


Рис. 14.1 Проецирование единичного куба

Мы видим, что ребра куба, так как они стали отрезками общего положения, воспроизведены на чертеже не в натуральную величину, с искажениями. Эти искажения численно равны проекциям единичных ребер куба на плоскость проектирования. Если их обозначить:

- вдоль оси $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$
- вдоль оси $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}$
- вдоль оси $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{r}$

тогда координаты любой точки в системе координат, оси которой наклонны к плоскости проектирования будут воспроизведены на плоскости проектирования со значениями

- $x_A' = p*x_A$
- $y_A' = q*y_A$
- $z_A' = r*z_A$

В зависимости от того, как сориентирована система координат, связанная с фигурой, по отношению к плоскости проектирования, коэффициенты искажения могут изменяться от 0 до 1.

Если все три коэффициента искажения равны между собой, такая аксонометрическая проекция называется изометрией. Если два коэффициента искажения равны между собой и третий отличается от первых двух, тогда имеем диметрию. Если все коэффициенты искажения разные – триметрия.

При прямоугольном проектировании для коэффициентов искажения справедливо соотношение

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2, \qquad \textit{причем}$$

$$0 \le p \le 1; \quad 0 \le q \le 1; \quad 0 \le r \le 1.$$

$$1 \le p^2 + q^2 \le 2;$$

$$1 \le p^2 + r^2 \le 2;$$

$$1 \le q^2 + r^2 \le 2.$$

Исходя из этих соотношений, можно определить коэффициенты искажений по осям при их различном положении по отношению к плоскости проектирования.

14.2 Прямоугольные аксонометрические проекции

14.2.1 Прямоугольная изометрия

Все три оси связанной с фигурой системы координат ***Oxyz*** наклонены к аксонометрической плоскости проектирования под одним углом. На плоскости эти оси изображаются под углом 120^0 друг к другу. По отношению к плоскости проектирования угол наклона осей координат связанной с телом системы составит $35^0 16'$. Т.к. ***p=q=r***, коэффициенты искажения по осям будут

$$3p^2 = 2; \qquad p^2 = \frac{2}{3}; \qquad p \approx 0.86$$

На практике, так как аксонометрические проекции не используются для восстановления геометрии фигуры, а решают только задачу ее визуализации, используют гораздо более простые для выполнения построений коэффициенты искажения по осям ***p=q=r=1***.

При этом изометрическое изображение фигуры оказывается увеличенным по отношению к ее реальному отображению в ***1/0,86=1,22*** раза.

Построение плоской фигуры в изометрии:

Если плоская фигура расположена в плоскости, параллельной плоскости проекции, плоскую фигуру, состоящую из отрезков прямой построить довольно просто. Для этого вдоль осей нужно откладывать без искажения координаты начала и конца каждого отрезка. При этом часто удобным оказывается использование локальной системы координат грани, в которой строится плоская фигура, начало которой связывают с характерной точкой на грани (Рис. 14.2).

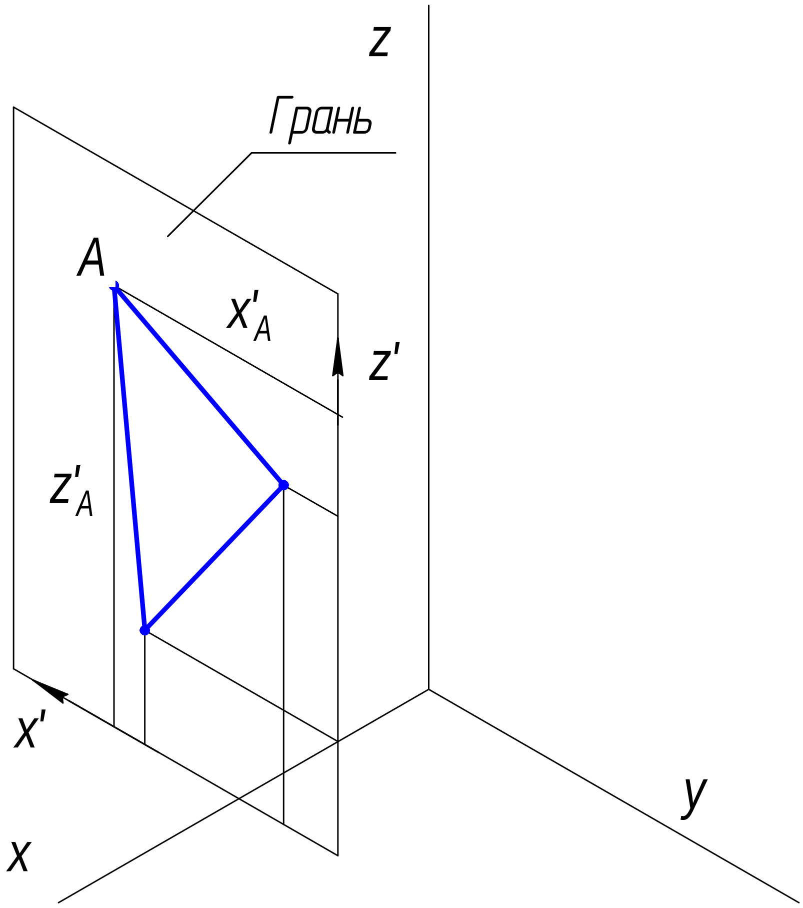


Рис. 14.2 Плоская фигура на грани, параллельной плоскости проекции

При построении кривой линии она разбивается на участки, длина которых даст достаточную для построения точность и концы каждого участка размечаются на грани. Далее полученные вершины кусочной кривой соединяются лекальной линией, которая и будет аксонометрий исходной кривой. Окружность в аксонометрии и, в частотности, в изометрии становится эллипсом. Так как коэффициенты искажения по осям изометрии равны, вид эллипсов одной и той же окружности на гранях, параллельных разным плоскостям проекций, будет один и тот же. Диаметры эллипса будут располагаться следующим образом - большой диаметр перпендикулярен отсутствующей на данной грани оси координат (Рис. 14.3). Здесь на грани отсутствует ось ***Ox***.

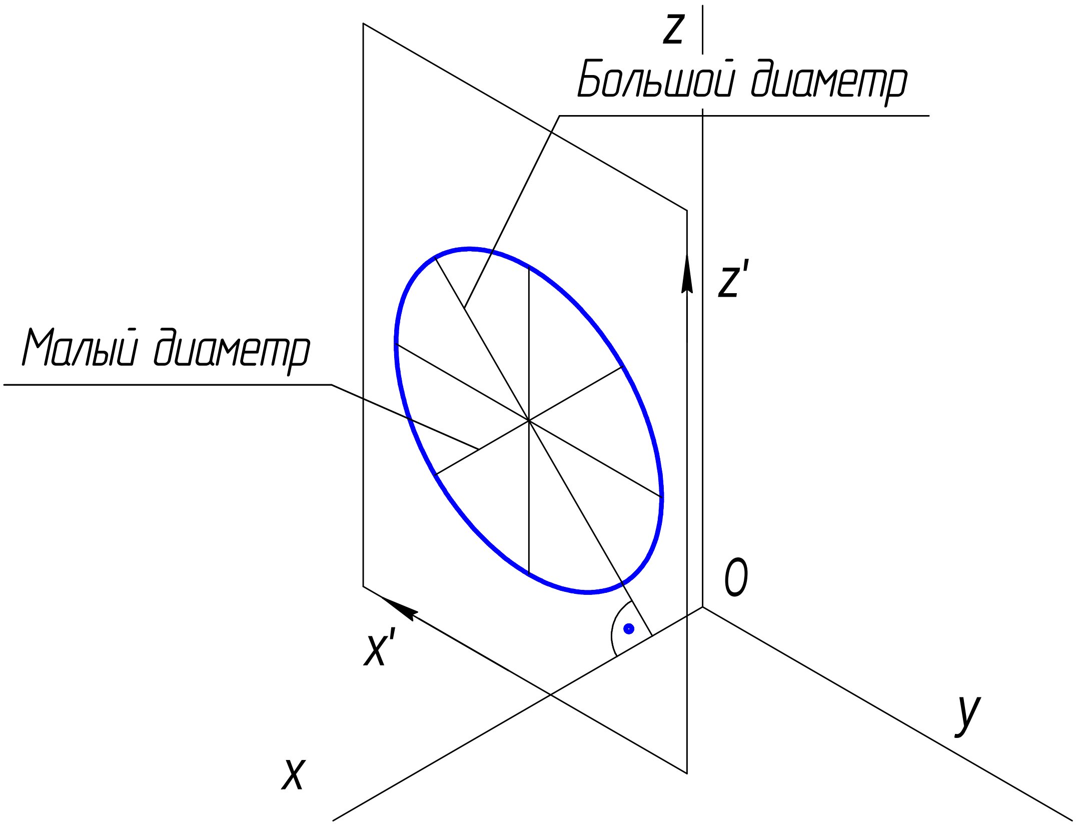


Рис. 14.3 Эллипс на грани 2 плоскости ***zOy***

Малый диаметр перпендикулярен большому диаметру. Так как вдоль осей коэффициенты приняты равными единице, большой диаметр будет больше действительного диаметра окружности в 1/0,86=1,22 раза. То есть, большой диаметр эллипса будет ***Dб = 1,22D***, малый диаметр ***Dм=0,7D***, где ***D*** – диаметр проектируемой окружности.

На практике при построении окружностей в изометрии эллипс заменяют овалом. Правило построения овала для изометрической проекции понятно из рисунка (Рис. 14.4).

Если фигура располагается в плоскости, не параллельной плоскости проекции, тогда положение каждой точки фигуры размечается по трем координатам, откладываемым вдоль соответствующих осей координат изометрической проекции (Рис. 14.5). Это правило, с учетом принятых в данной аксонометрии коэффициентов искажения, действует при построении точек в любых других аксонометриях.

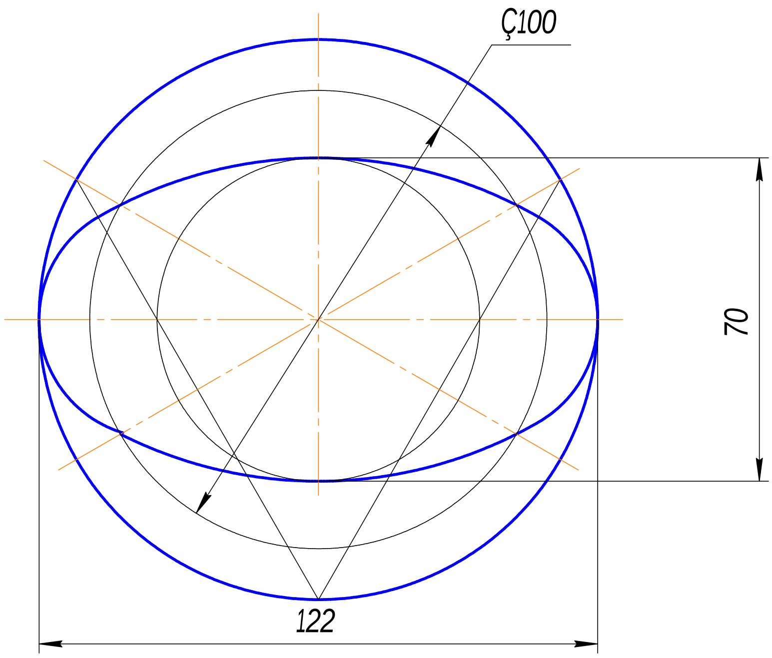


Рис. 14.4 Построение овала для изометрической проекции окружности

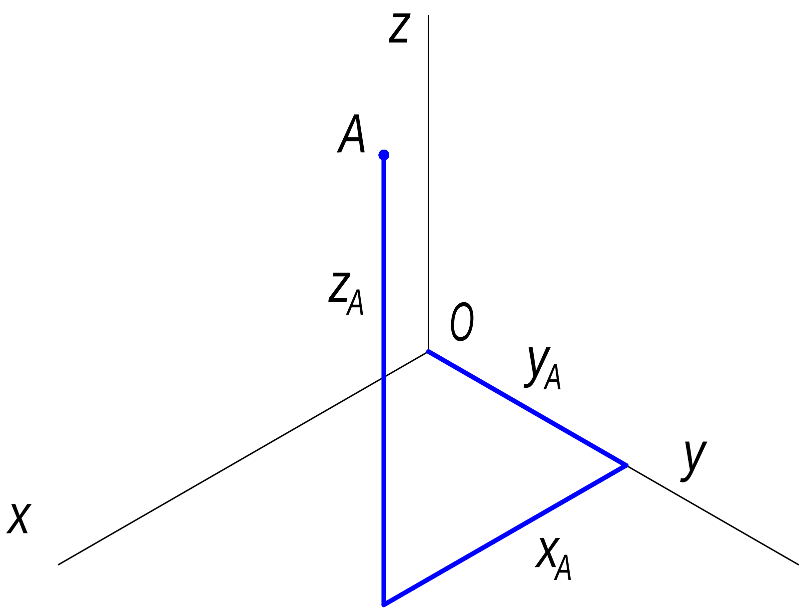


Рис. 14.5 Разметка положения точки в аксонометрии (изометрии)

14.2.2 Прямоугольная диметрия

Расположение осей координат на аксонометрической плоскости в прямоугольной диметрии следующее:

Oz – вертикальна;

Ox – под углом к горизонтали $7^0 10'$;

Oy – под углом $41^0 25'$

Коэффициенты искажения при этом будут ***p=q=0.94; r=0.47***. На практике используют коэффициенты ***p=q=1; r=0.5***. Коэффициенты увеличения изображения при этом будут по осям ***1/0,94=1,064***.

Необходимое направление оси ***Ox*** дает построение уклона 1:8, оси ***Oy*** – уклона 7:8.

<u>Построение окружности в прямоугольной диметрии</u>

В плоскости ***x'Oz'*** окружность становится эллипсом с диаметрами

Dб = 1,06d; Dм = 0.95d

В плоскостях ***x'Oy'*** и ***y'Oz'*** эллипсы будут иметь диаметры ***Dб = 1,06d; Dм = 0.35d.*** Правило ориентации осей эллипсов такое же, как и при построении изометрии – большой диаметр перпендикулярен отсутствующей оси координат (Рис. 14.6).

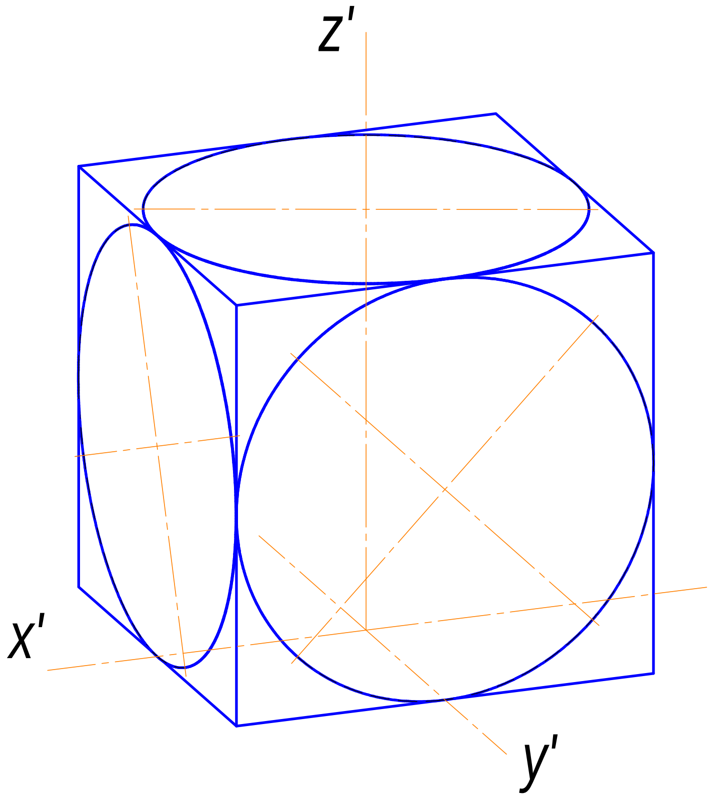


Рис. 14.6 Окружности в прямоугольной диметрии

Тема 15 Параметризация геометрических фигур

Решение многих задач графического отображения технических объектов, особенно, если это относится к компьютерному заданию формы, размеров и положения этих объектов, сопряжено с корректным выбором задающих их геометрических параметров. Эти параметры должны однозначно определить объект как геометрическое тело или его отображение на чертеже. При этом недопустим как недостаток информации о форме, размерах и положении тела, так и ее избыток. Избыток информации означает повторное задание того или иного параметра и, если один из этих повторов некорректен по любым причинам, задача восстановления тела по такой некорректной информации становится нерешаемой.

Любое геометрическое тело может быть представлено как множество элементарных геометрических элементов, таких как точка, прямая, плоскость и т.д. Вся совокупность геометрических величин, дающих возможность однозначно определить форму и положение в пространстве геометрического тела, называется его параметрами. Такая совокупность может рассматриваться как некое множество. Каждый отдельный параметр, это величина, значение которой служит для того, чтобы выделить отдельный элемент из множества. Геометрическими параметрами являются расстояния и углы.

При рассмотрении взаимного размещения в пространстве нескольких тел (фигур), в том числе если вводятся дополнительные условия, например, касания или пересечения (непересечения) поверхностей тел, параметры разных тел могут связываться между собой определенными условиями.

Параметризация тел и связывание параметров, это задачи, решаемые, например, при построении цифровых образов геометрических тел в системах автоматизированного проектирования (САПР – CAD).

15.1 Точечные множества

В геометрии используются три исходные фигуры: точки, линии (прямые и кривые), поверхности (в том числе плоскости).

Задание точки $\boldsymbol{A}$ в разных системах отсчета.

Однокоординатная система – ось координат. Система с одним измерением. Система предусматривает задание точки единственным параметром – отстоянием $\boldsymbol{x_A}$ точки от начала координат (Рис. 15.1). Считается, что система отсчета задана.

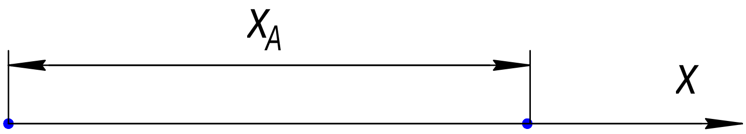


Рис. 15.1 Координирование точки на оси

Двухкоординатная система – координатная плоскость. Система с двумя измерениями. Для задания точки на плоскости необходимы два параметра, т.е. две координаты $\boldsymbol{x_A}$ и $\boldsymbol{y_A}$ (Рис. 15.2).

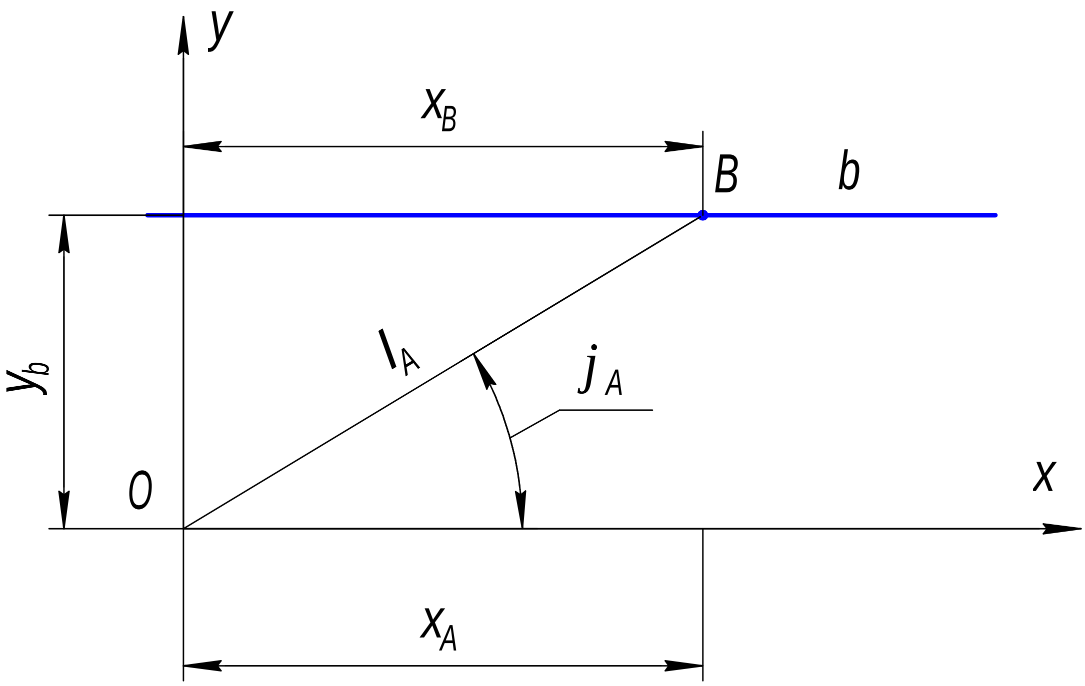


Рис. 15.2 Точка на координатной плоскости

При этом, точка может рассматриваться на прямой $\boldsymbol{b}2\boldsymbol{Ox}$ как на оси однокоординатной системы, что требует задания одного параметра – $\boldsymbol{x_B}$. Положение прямой $\boldsymbol{b}$ в двухкоординатной системе $\boldsymbol{xOy}$ задается одним параметром – отстоянием $\boldsymbol{y_b}$ прямой от оси $\boldsymbol{Ox}$. Всего, таким образом, при использовании такого задания точки также как в предыдущем случае необходимы два параметра: $\boldsymbol{x_B}$ и $\boldsymbol{y_b}$.

Еще один способ задания точки на плоскости – использование полярной системы координирования. При это также должны быть заданы два параметра – длина $\boldsymbol{l_A}$ радиуса-вектора точки и угол $j_{\boldsymbol{A}}$ наклона радиуса вектора к координатной оси (см. Рис. 15.2).

Трехкоординатная прямоугольная (ортогональная) система трехмерного пространства. Система с тремя измерениями. Для задания точки на плоскости необходимы три параметра, т.е. три координаты $\boldsymbol{x_A}$, $\boldsymbol{y_A}$ и $\boldsymbol{z_A}$ (Рис. 15.3).

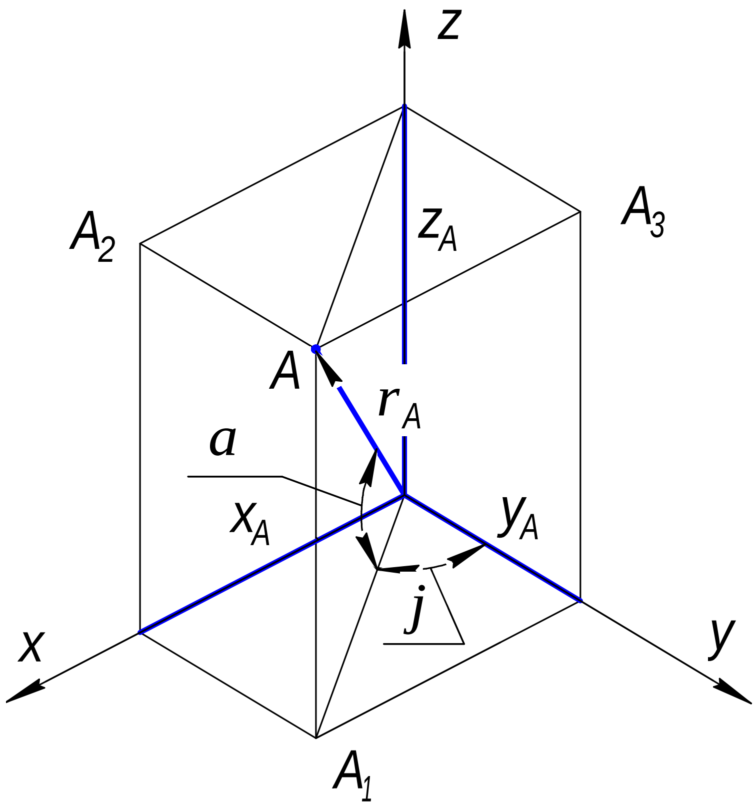


Рис. 15.3 Точка в трехмерном пространстве

Так же как и для двухпараметрического задания точки на плоскости, в пространстве точка может быть задана двумя параметрами на плоскости, параллельной плоскости проекции, и одним параметром смещения плоскости расположения точки от плоскости проекции. Могут быть использованы три параметра полярной системы координирования: длина радиуса-вектора r_A, угол *a* наклона радиуса-вектора к плоскости ***xOy*** и угол *j* наклона проекции радиуса-вектора точки ***A*** на плоскость ***xOy*** к плоскости ***zOy***.

Множество называется ***n***-параметрическим, если для выделения из него единственного элемента необходимо ***n*** параметров. Такое множество принято обозначать $¥^n$. Таким образом, множество точек на прямой будет множеством $¥^1$, на плоскости – $¥^2$, в трехмерном пространстве – $¥^3$.

Число параметров, дающих единственный элемент из множества, называется размерностью или мощностью множества. Например, размерность множества точек на прямой равна ***1*** и прямую называют одномерным объектом E^1. Размерность множества точек на плоскости равна ***2*** и, таким образом, плоскость является двухмерным объектом E^2.

Множество может быть получено из менее мощных множеств. Размерность такого множества получается умножением мощностей составляющих множеств. Например, множество точек в пространстве может рассматриваться как однопараметрическое множество $\boldsymbol{E^1}$ плоскостей, параллельных горизонтальной плоскости проекции ***xOy,*** являющихся двухпараметрическим $\boldsymbol{E^2}$ множеством точек.

$$\infty^3 = \infty^1 \cdot \infty^2$$

Множества прямых на плоскости является двухпараметрическим множеством $\boldsymbol{E^2}$. Известно, что прямая на плоскости может быть задана, например, длинами отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях – всего два параметра.

15.2 Виды геометрических параметров

Точечные множества образуют те или иные фигуры. При этом, множества одинаковой размерности могут образовывать разные геометрические фигуры. Так, прямая и окружность на плоскости образуют однопараметрические множества ¥$^{\mathbf{1}}$ точек. Однако, эти фигуры в описании имеют существенные отличия. Прямая – фигура, не имеющая формы. Для ее задания на плоскости необходимы только два параметра положения. Для задания окружности необходим один параметр – радиус окружности и два параметра – координаты центра окружности на плоскости. Всего – три параметра. Первый параметр определяет форму окружности, в частности, ее кривизну. Два других определяют положение окружности на плоскости. Число параметров формы фигуры может быть обозначено $\boldsymbol{P_ф}$, а число параметров положения – $\boldsymbol{P_п}$. Общее число параметров, задающих фигуру определится:

$$P = P_ф + P_п$$

Задание параметров форм фигуры выделяет из всего множества фигур подмножество конгруэнтных фигур. Например, задание трех сторон треугольника задает подмножество конгруэнтных треугольников (Рис. 15.4).

Для того, чтобы треугольник был задан на плоскости однозначно, к трем параметрам формы добавить три параметра положения, например, координаты одной из вершин треугольника и угол наклона одной из сторон треугольника к оси проекции (Рис. 15.5).

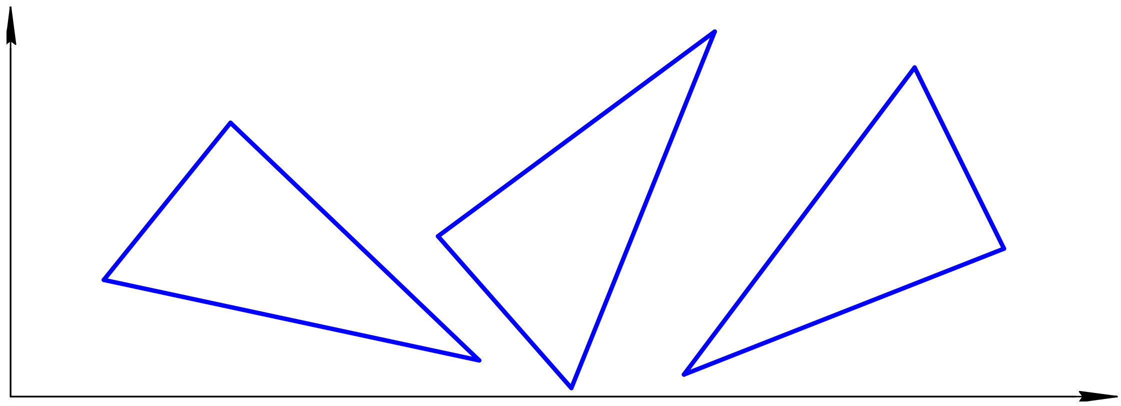


Рис. 15.4 Конгруэнтные треугольники

В рассмотренном примере ***AB, BC, CA*** – параметры формы треугольника, x_A, y_A, j - параметры положения.

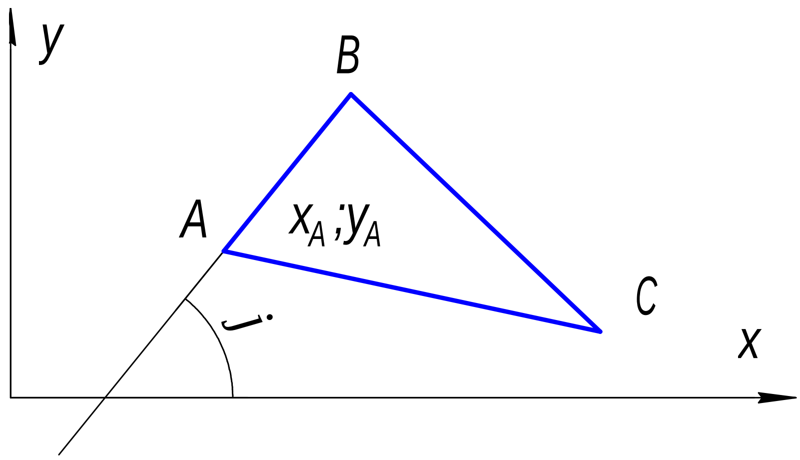


Рис. 15.5 Треугольник на плоскости

Положение любой плоской фигуры на плоскости может быть так же как для треугольника задано тремя параметрами: два параметра – координаты точки, принадлежащей фигуре, один параметр – связанное с фигурой направление, задаваемое углом наклона прямой, связанной с фигурой, к оси координат. Параметры положения фигуры на плоскости связны с элементарными движениями в механике. Плоская фигура на плоскости может совершать три элементарных движения: два поступательных вдоль координатных осей и одно вращательное.

В пространстве положение тела определяется шестью параметрами: тремя линейными (координаты точки тела) и тремя угловыми (два угла наклона прямой, связанной с телом, к плоскостям проекции и один угол поворота тела вокруг этой прямой). В механике эти параметры соответствуют трем элементарным движениям: трем поступательным вдоль осей координат иври вращательных: прецессия, нутация и собственное вращение. Иначе угловые параметры тела в пространстве могут быть заданы как углы наклона трех прямых, расположенных в плоскостях проекции и связанных с телом, к трем осям координат. В механике эти угловые параметры связаны с элементарными ращениями тела относительно осей координат (Рис. 15.6).

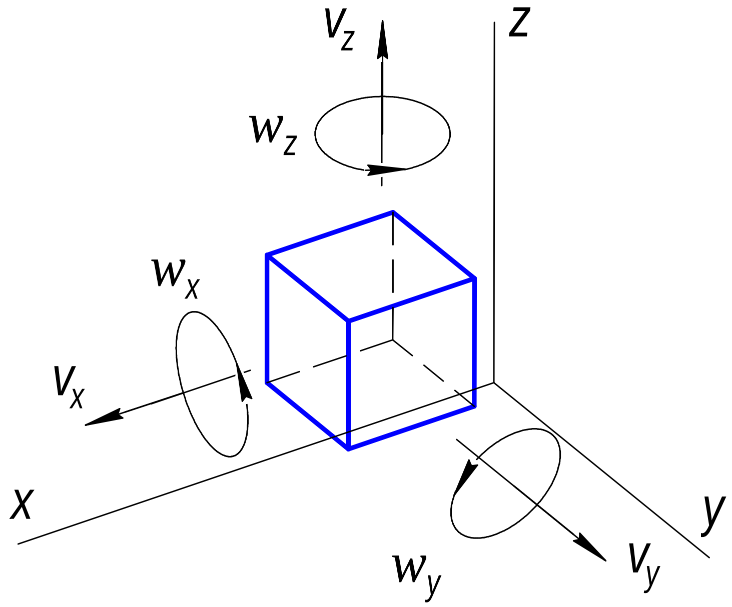


Рис. 15.6 Элементарные движения тела в пространстве

15.3 Задание геометрических фигур на проекционном чертеже

Задание геометрической фигуры на проекционном чертеже рационально, если число параметров, определяющих фигуру в пространстве равно числу параметров, необходимых для ее задания на чертеже.

Точка в пространстве задается тремя координатами. Для задания точки на проекционном чертеже также необходимы три параметра (Рис. 15.7).

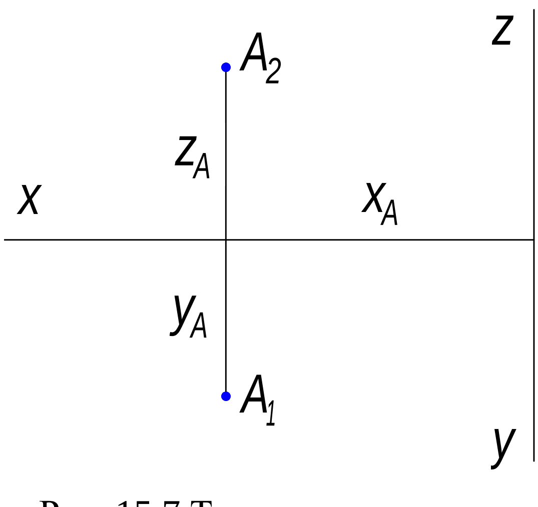


Рис. 15.7 Точка на плоскости

Для задания прямой в пространстве необходимы четыре параметра – координаты точек пересечения прямой с двумя из координатных плоскостей (Рис. 15.8).

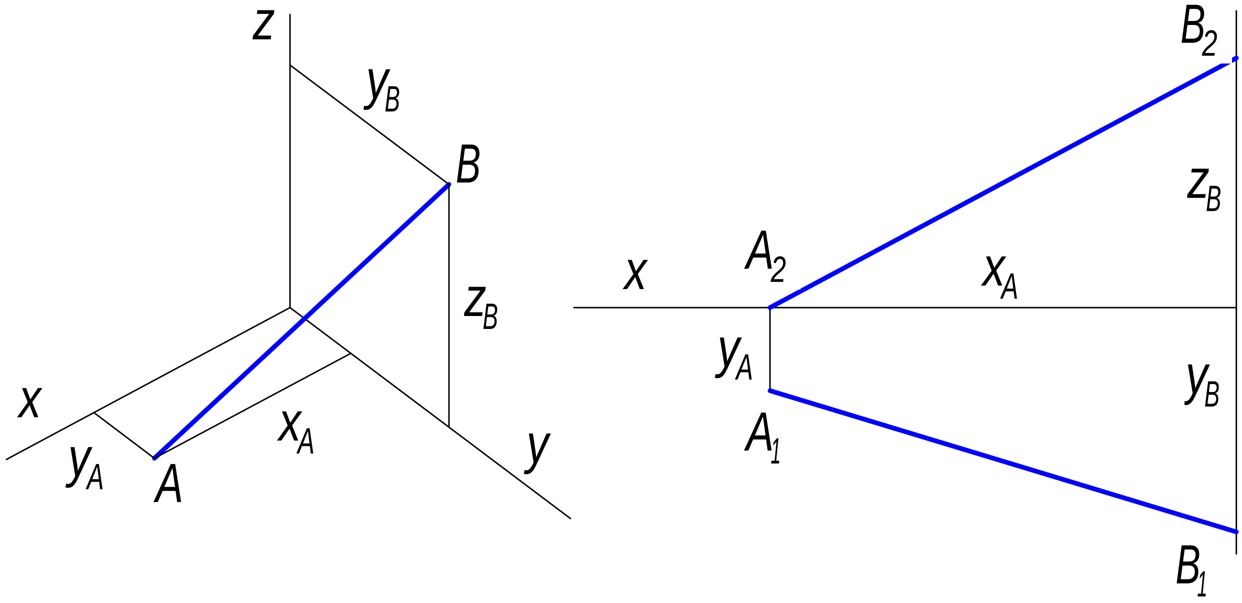


Рис. 15.8 Прямая в геометрическом пространстве и на проекционном чертеже

На плоскости прямая задается двумя параметрами – длинами отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Эти параметры присутствуют в аналитическом задании прямой

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где ***a*** и ***b*** как раз и есть упомянутые параметры.

Если один из этих параметров, например ***a***, связать, т.е. придать ему какое-то фиксированное значение, все множество прямых на плоскости ограничится подмножеством прямых, проходящих через точку на оси (в примере, на оси ***x***). Такое множество покрывает всю координатную плоскость и называется пучком прямых (Рис. 15.9).

Связать параметры фигуры можно и другим способом, например, установить функциональную зависимость между одним из параметров и с другим. Например, если принять зависимость

$$a=2b,$$

получим подмножество параллельных прямых на плоскости (Рис. 15.10). Это подмножество может рассматриваться как пучок прямых с несобственным (располагающимся в бесконечности) центром пучка.

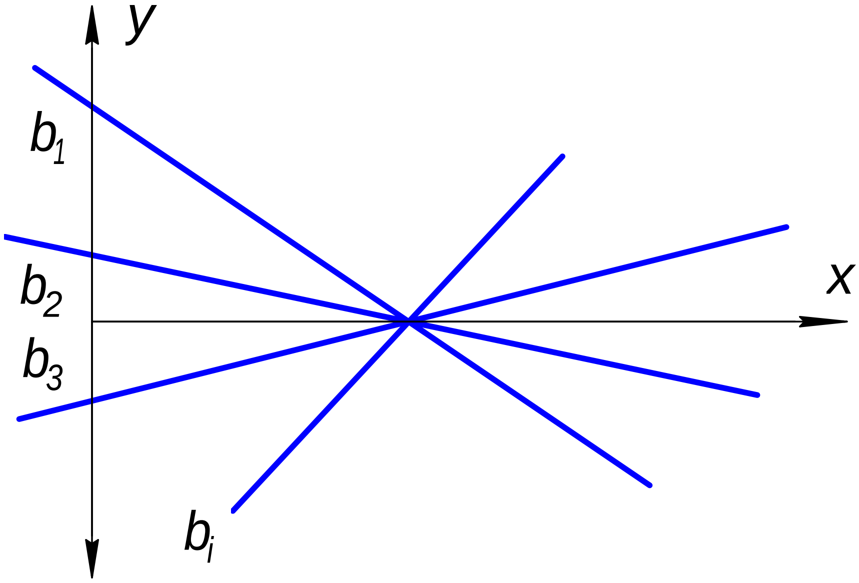


Рис. 15.9 Пучок прямых на плоскости

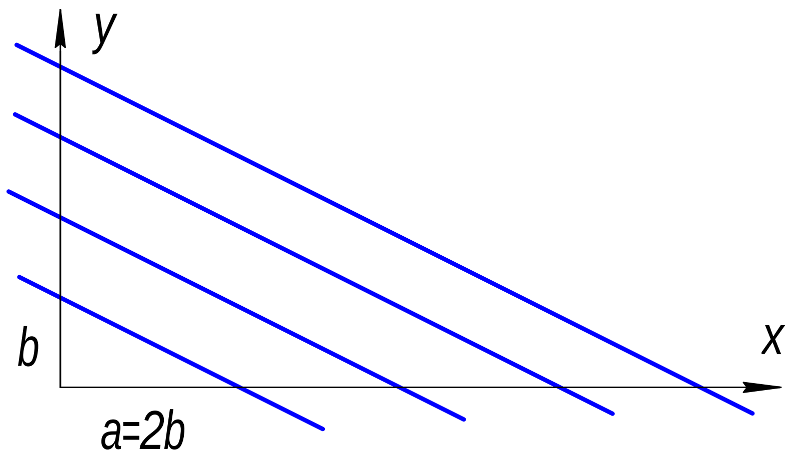


Рис. 15.10 Пучок параллельных прямых на плоскости

Если связать один из параметров, определяющих прямую в пространстве, будет получено трехпараметрическое подмножество прямых, называемое **комплекс** прямых. Это может быть, например комплекс прямых, проходящих через прямую $z = 0;\ x = a$ (Рис. 15.11).

Если связать два параметра, например, заставить прямые проходить через две скрещивающиеся прямые $x = a; y = 0$ *и* $z = b; x = 0$, будет получено подмножество ¥^{2} прямых, называемое **конгруэнция** прямых (Рис. 15.12).

При связывании трех параметров в множестве прямых в пространстве, будет получено однопараметрическое подмножество прямых, пересекающих три скрещивающиеся прямые. Это подмножество прямых образует линейчатую поверхность (Рис. 15.13).

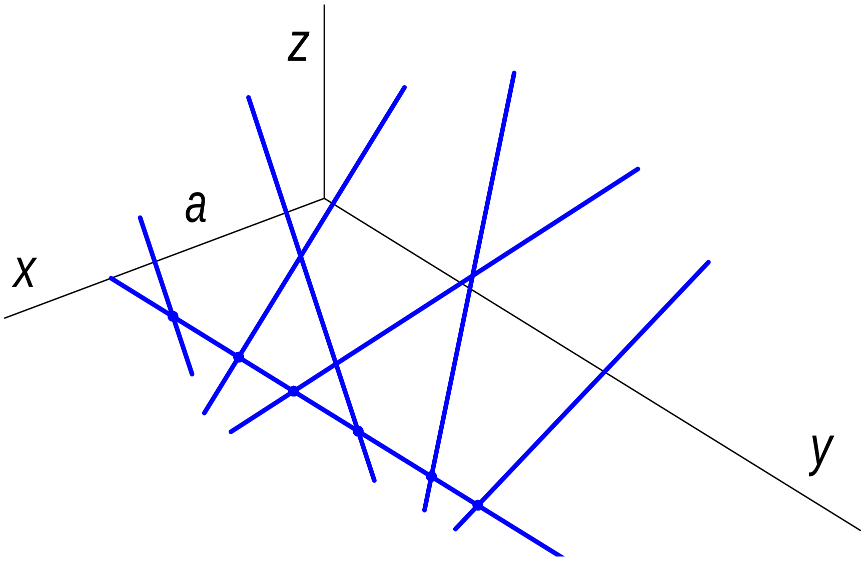


Рис. 15.11 Комплекс прямых в пространстве

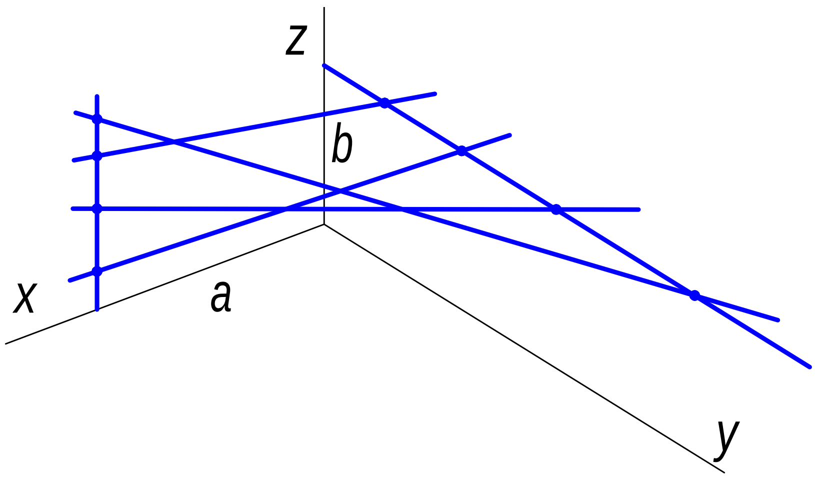


Рис. 15.12 Конгруэнция прямых

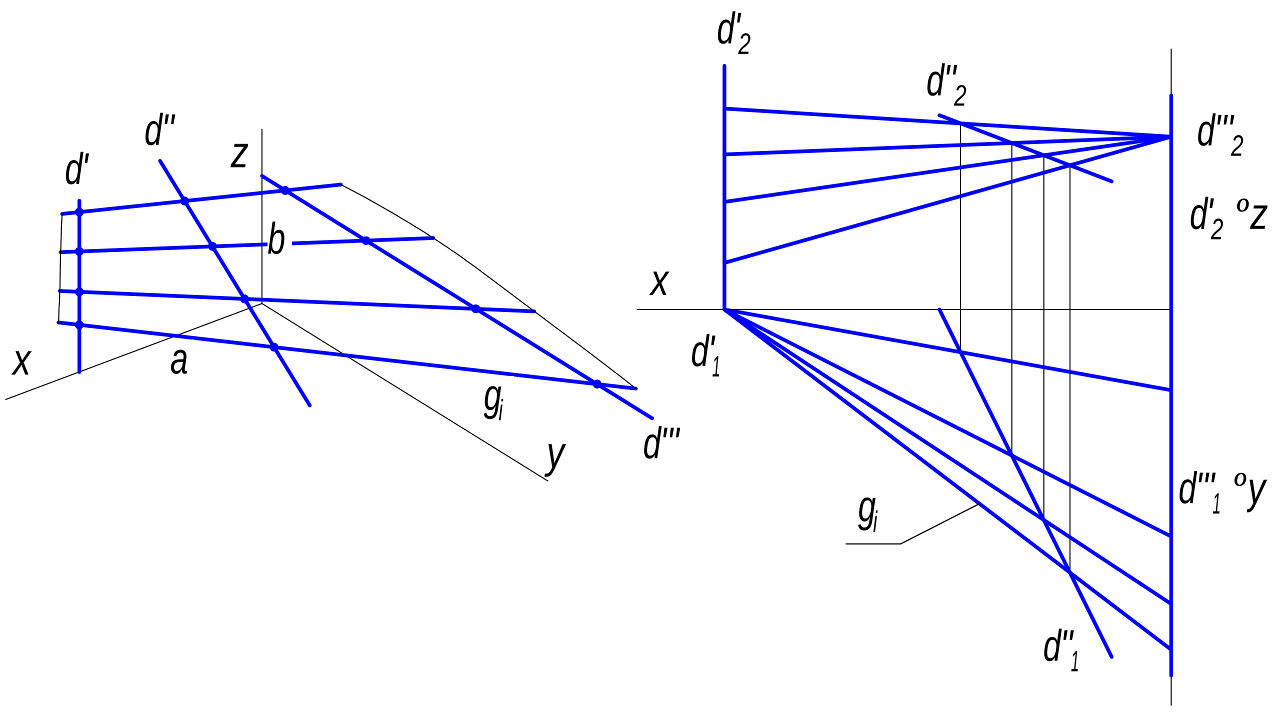


Рис. 15.13 Линейчатая поверхность

Плоскость в пространстве определяется тремя параметрами, например, отрезками ***a***, ***b*** и ***c***, отсекаемыми плоскостью на осях координат (Рис. 15.14).

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

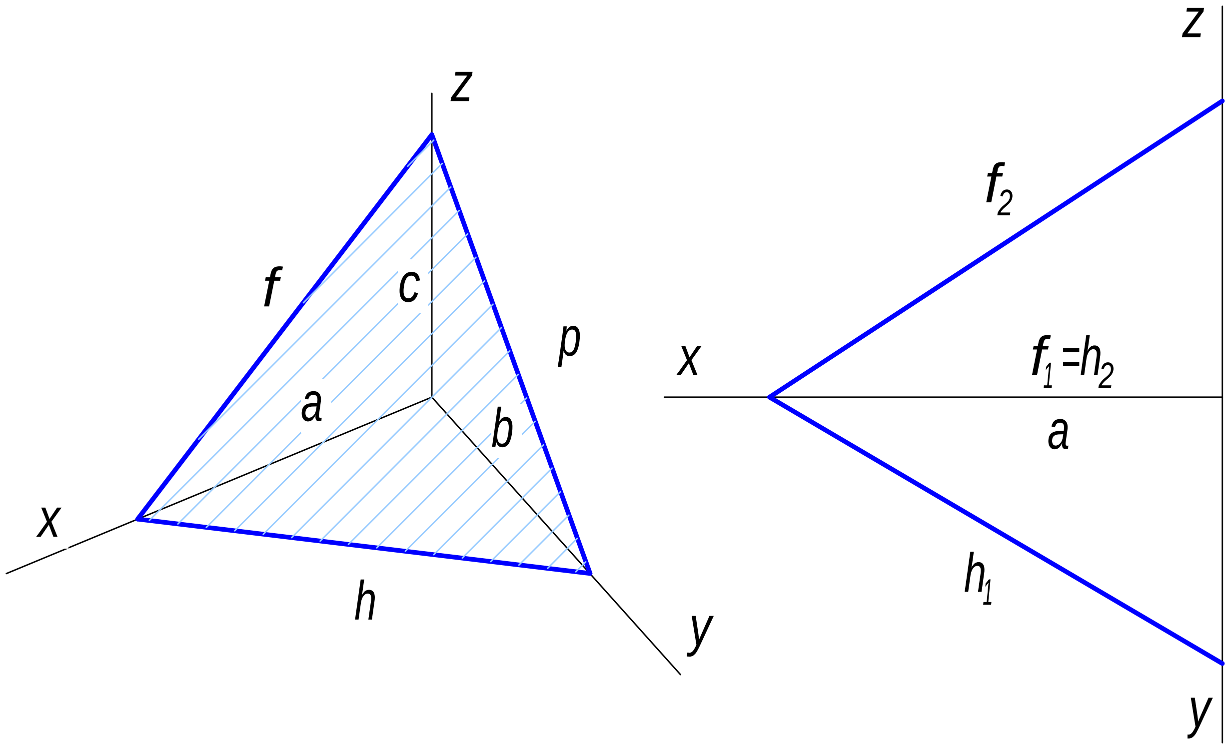


Рис. 15.14 Плоскость и ее параметры

Связывание одного параметра дает подмножество плоскостей, проходящих через одну точку и называемое **связкой** плоскостей. Связывание двух параметров дает подмножество плоскостей, проходящих через одну прямую и называемое **пучком** плоскостей.

15.4 Геометрические условия принадлежности, параллельности и перпендикулярности

Условия принадлежности, параллельности и перпендикулярности геометрических фигур задаются параметрам, количество которых определяется в каждом конкретном случае. Эти параметры определяются ограничениями, которые накладываются на положение фигур.

15.4.1 Принадлежность

Принадлежность точки прямой.

Размерность множества точек в пространстве $¥^3$. Размерность множества точек на прямой $¥^1$. Тогда условием принадлежности точки прямой связано два параметра $P_E^y = 3-1=2$. Это условие получено как разность размерностей множества точек в пространстве и подмножества точек на прямой. Отсюда, для задания точки, принадлежащей прямой необходимо иметь $P^y = 3-2=1$ параметр. Это следует и из построения точки, принадлежащей прямой на проекционном чертеже (Рис. 15.15).

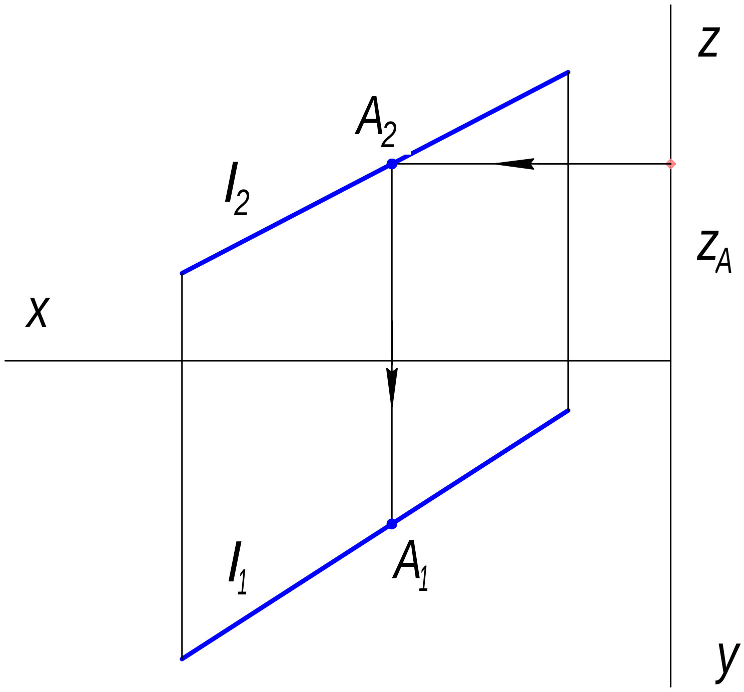


Рис. 15.15 Принадлежность точки прямой

<u>Принадлежность точки плоскости.</u>

Точка на плоскости может быть получена как место пересечения трех плоскостей: одна – заданная, две другие – плоскости, параллельные плоскостям проекции, для задания которых нужны два параметра, отстояния плоскостей от плоскостей проекций (Рис. 15.16).

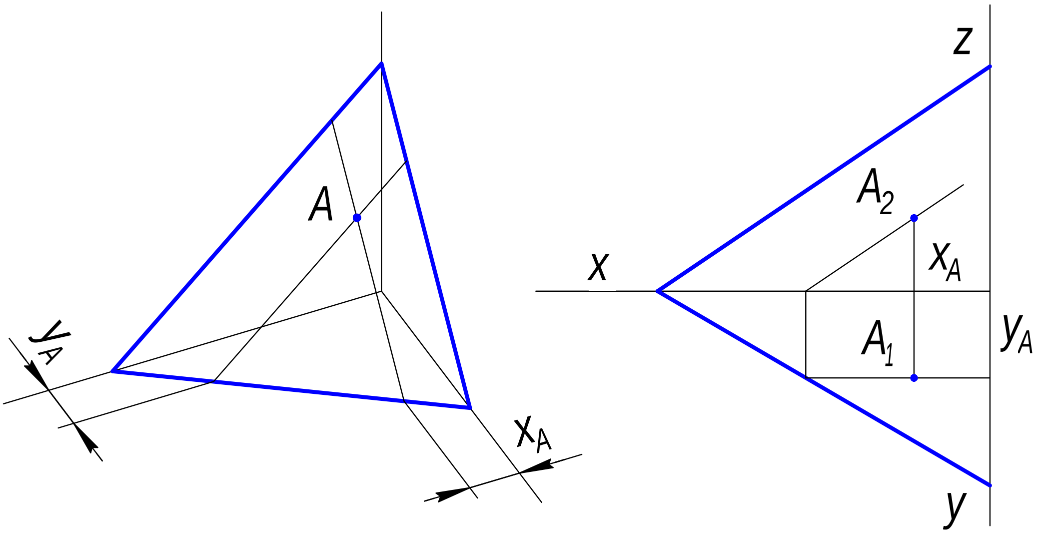


Рис. 15.16 Принадлежность точки плоскости

Таким образом, условием принадлежности токи плоскости связывается один параметр $P_E^y = 3 - 2 = 1$. Число параметров, необходимых для задания точки на плоскости $P_e = 3 - 1 = 2$.

15.4.2 Параллельность

Параллельность прямых.

Размерность множества прямых в пространстве - ¥⁴. Прямая с параллельной ей прямой задают плоскость. Размерность множества прямых на плоскости ¥². Таки образом, связанными для параллельных прямых в пространстве E^3 оказываются 2 параметра. В результате, для задания прямой, параллельной заданной, необходимо $P^y = 4 - 2 = 2$ параметра. Такими параметрами могут быть, например, координаты следа прямой на одной из координатных плоскостей (Рис. 15.17).

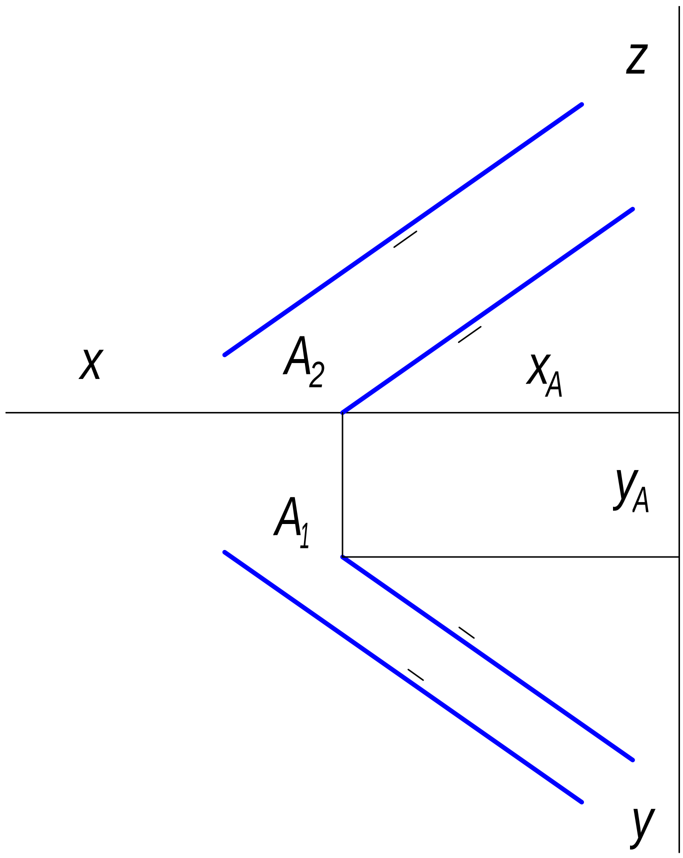


Рис. 15.17 Параметры параллельной прямой

15.4.3 Перпендикулярность

Перпендикулярность прямых.

Условием перпендикулярности двух прямых, пересекающихся или скрещивающихся, является принадлежность одной прямой плоскости, перпендикулярной другой прямой. Плоскость является ¥²

множеством прямых. Множество плоскостей, перпендикулярных в пространстве заданной прямой, имеет размерность - ¥^{1}. Таким образом, размерность всех прямых, перпендикулярных заданной будет ¥^{2}¥^{1}=¥^{3}. Размерность множества прямых в пространстве - ¥^{4}. В результате, число параметров, определяющих прямую, перпендикулярную заданной, будет - $P^{y}=4-3=1$. Таким параметром может быть, например, длина отрезка на оси координат, отсекаемая плоскостью, параллельной заданной прямой. Любая прямая на этой плоскости будет перпендикулярна заданной прямой (Рис. 15.18).

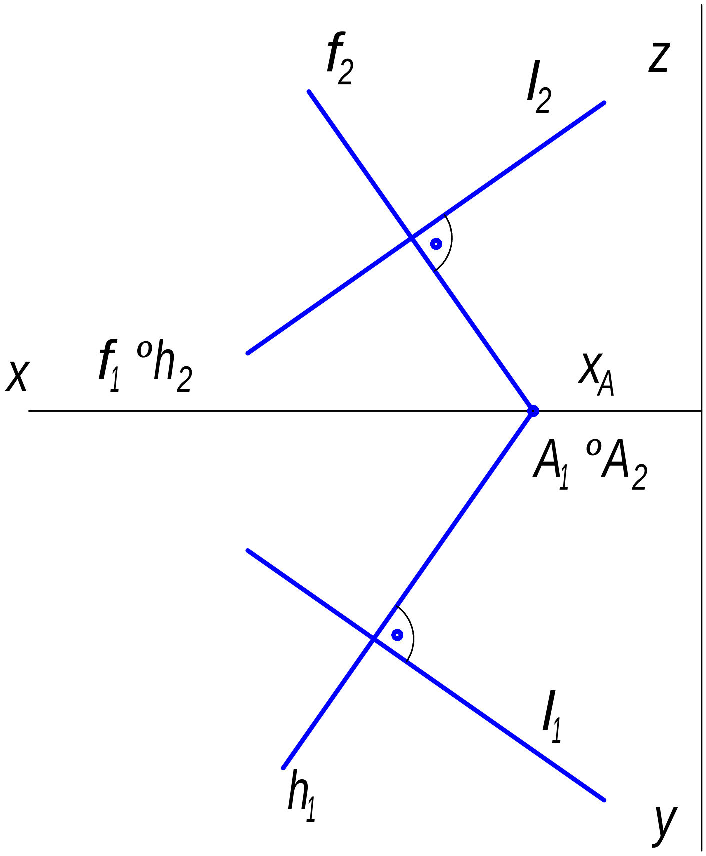


Рис. 15.18 Параметр перпендикулярной плоскости, несущей прямую, перпендикулярную заданной

Параметром, задающим плоскость, перпендикулярную заданной прямой и содержащей множество прямых, перпендикулярных заданной прямой, может быть также параметр, выделяющий точку на прямой (см. 15.4.1).

Рассмотрение других вариантов принадлежности, параллельности и взаимной перпендикулярности фигур в пространстве и на плоскости выходит за рамки настоящего конспекта лекций и может быть изучено, например, по книге "Инженерная геометрия с элементами

теории параметризации: Учебн. пособие/ В.Е.Михайленко и др. – К.: УМК ВО, 1989, - 84 с.