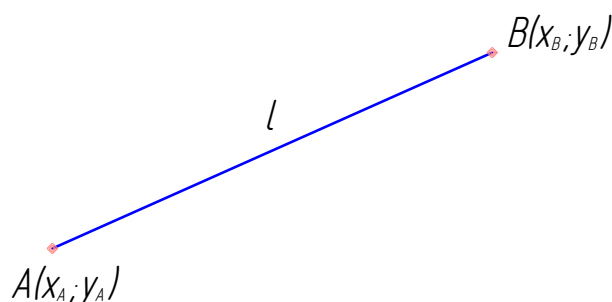


Лекция №11

Классификация связей.

Связями называются какие-либо виды ограничений, которые накладываются на положение (координаты) и скорости точек механической системы.

1. Геометрическая связь – накладывает ограничение на положение (координаты) точек системы и может быть описана уравнением:



$$l^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

2. Кинематическая связь – накладывает ограничение на скорость точек системы или ее называют *неголономной связью*.

3. Стационарная связь – если в уравнение связи не входит время, то есть она не зависит от времени.

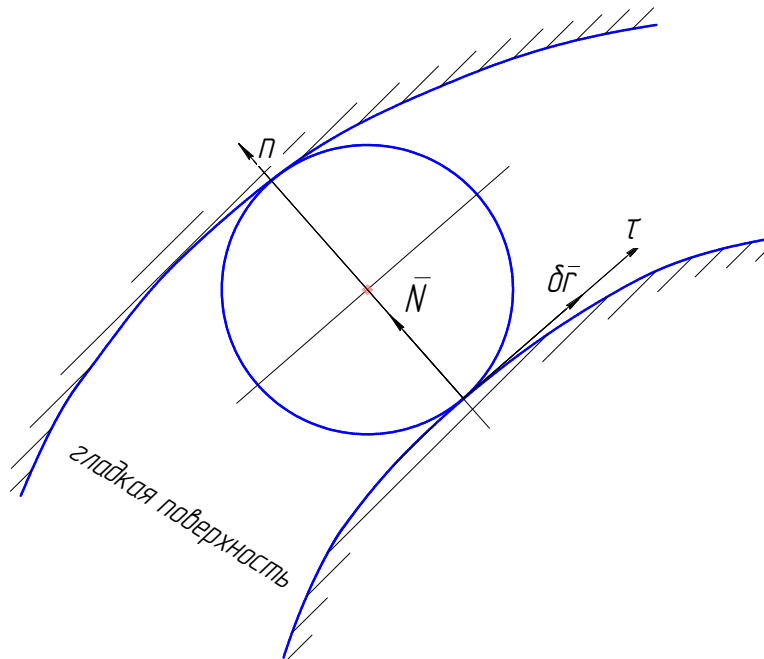
4. Двусторонняя связь, удерживающая – это связь, ограничивающая перемещение в двух противоположных направлениях.

5. Идеальная связь – если сумма элементарных работ реакций в связях на возможном перемещении равно нулю.

$$\sum \delta A_k^N = 0 \text{ - условие идеальной связи} \quad (1.11)$$

Рассмотрим пример идеальной связи.

Двусторонняя связь образована двумя гладкими поверхностями. Пусть все тела воспринимается нижней поверхностью. Возникает реакция $\bar{N} \perp$ к касательной.



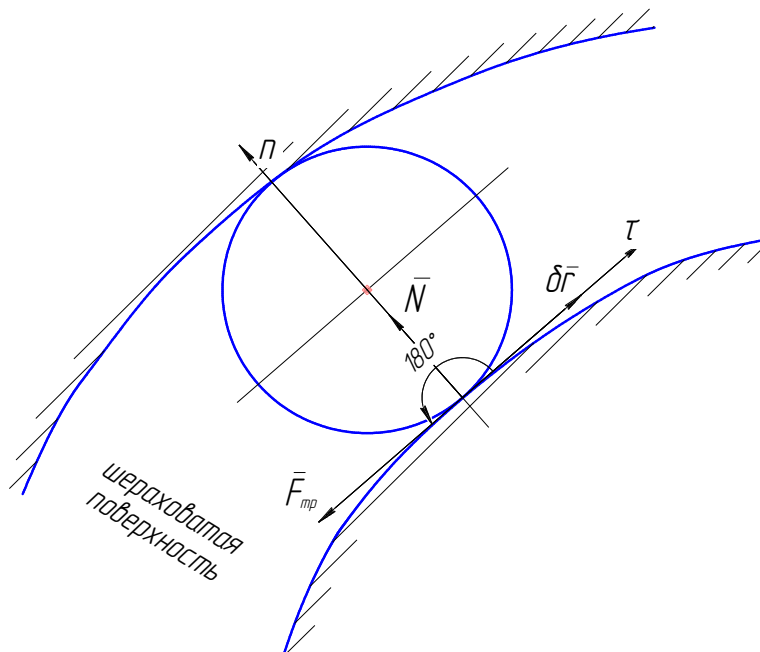
Дадим возможное перемещение, которое имеет направление по касательной - $\delta \bar{r}$ и запишем элементарную работу.

$$\delta A = \bar{N} \cdot \delta \bar{r} = N \cdot |\delta r| \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

если $\delta A = 0$ - связь идеальная.

Рассмотрим идеальную связь с учетом сил трения.

Если поверхность шероховатая, возникает сила трения. Сила трения лежит на касательной, по направлению в противоположную сторону.



$$\delta A = \bar{N} \cdot \delta \bar{r} + \bar{F}_{\delta\delta} \cdot \delta \bar{r} = N \cdot |\delta r| \cdot \cos 90^\circ + F_{\delta\delta} \cdot |\delta r| \cdot \cos 180^\circ = 0 - F_{\delta\delta} |\delta r| \neq 0;$$

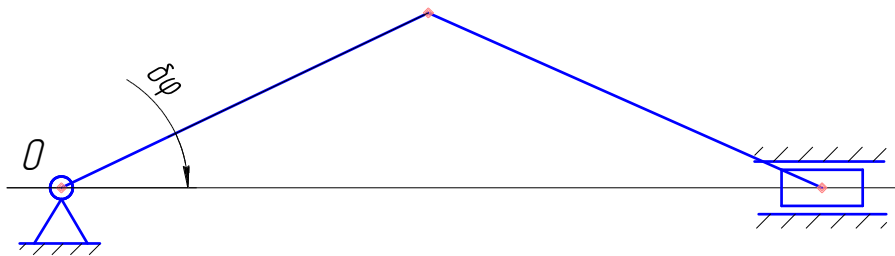
если $\delta A \neq 0$ - связь не идеальная.

Возможные (виртуальные) перемещения системы.

Возможными (виртуальными) перемещениями системы называются такие возможные, бесконечно малые ее независимые перемещения, которые возникают в связях системы в данный момент времени и не выводят систему из состояния равновесия.

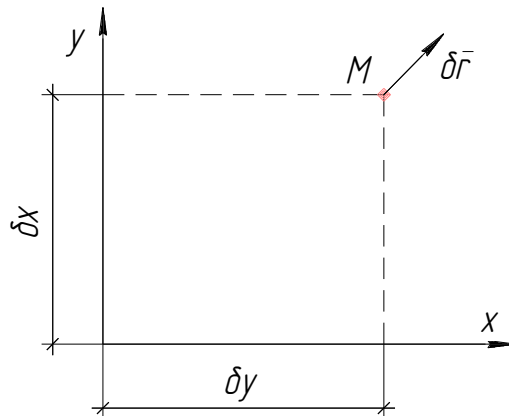
Обозначим возможные перемещения $\delta \vec{r}(\delta x; \delta y; \delta z)$. Число возможных перемещений равняется числу степеней свободы, которые в свою очередь определяются числом независимых параметров, которые характеризуют положения точки или системы.

Рассмотрим кривошипно-шатунный механизм.



1 степень свободы.

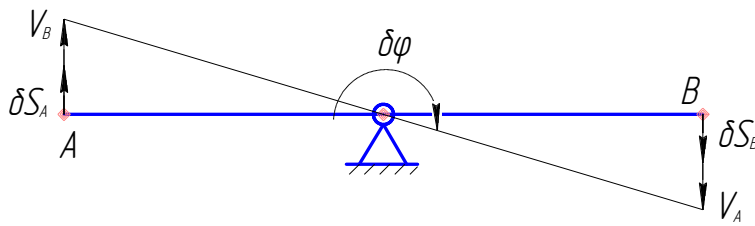
Точка на плоскости имеет 2 степени свободы.



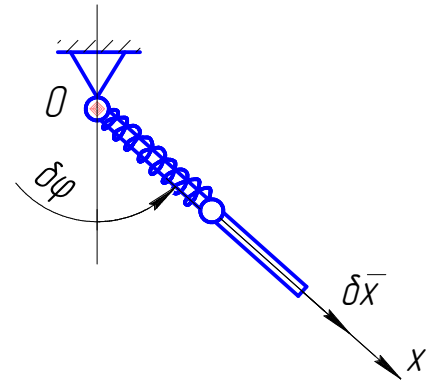
$$\delta \vec{r}(\delta x; \delta y)$$

Точка в пространстве - 3 степени свободы.

Возможные перемещения направляют по касательной к траектории движения, то есть они имеют такое же направление, как и скорость.



1 степень свободы ($\delta\varphi$)



2 степень свободы ($\delta\varphi; \delta x$)

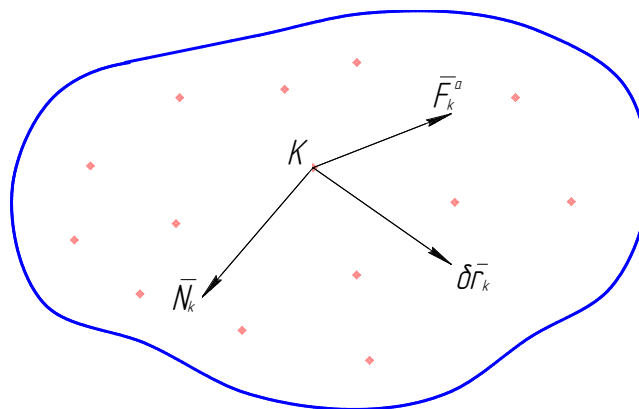
II принцип. Принцип возможного перемещений.

Для равновесия системы с идеальными двусторонними стационарными связями необходимо и достаточно, чтоб сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил на возможном перемещении равнялась нулю.

$$\sum \delta A_k^a = 0.$$

Докажем необходимость. Система имеет идеальные связи и находится в равновесии, то есть $\sum (\bar{F}_k^a + \bar{N}_k) = 0$.

Рассмотрим систему материальных точек, которая находится под действием активных сил и реакций связей.



Возьмем т.К. На нее действует активная сила \bar{F}_k^a и реакция связи \bar{N}_k . Если система находится в равновесии, то и к-ая точка будет в равновесии.

$$\bar{F}_k^a + \bar{N}_k = 0 \Rightarrow \bar{F}_k^a = -\bar{N}_k$$

Дадим системе возможное перемещение и т.К получит такое же ($\delta \bar{r}_k$).

Запишем элементарную работу.

$$\bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{N}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0;$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\delta A_k^a \qquad \delta A_k^N$$

Тогда $\delta A_k^a + \delta A_k^N = 0$. Запишем такие же самые уравнения для каждой точки системы и просуммируем:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^N = 0 \quad (11.2)$$

На систему наложены идеальные связи - $\sum \delta A_k^N = 0 \Rightarrow$ (11.2) принимает вид:

$$\sum \delta A_k^a = 0 \text{ - принцип возможных перемещений} \quad (11.3)$$

Докажем достаточность. На систему наложены идеальные связи $\sum \delta A_k^N = 0$, тогда система будет находится в равновесии.

$$\text{Дано: } \begin{cases} \sum \delta A_k^N = 0; \\ \sum \delta A_k^a = 0. \end{cases}$$

$$\text{Доказать: } \sum (\bar{F}_k^a + \bar{N}_k) = 0.$$

Доказательство.

Запишем элементарную работу в виде скалярных произведений.

$$\begin{cases} \sum \bar{N}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \\ + \\ \sum \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \end{cases} \Rightarrow \sum \bar{N}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \Rightarrow$$

$\sum (\bar{N}_k + \bar{F}_k^a) \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \Rightarrow$ уравнение будет равно нулю, если один из множителей равен нулю.

$\delta \bar{r}_k \neq 0$, так как задается возможное перемещение, следовательно,

$$\sum (\bar{N}_k + \bar{F}_k^a) = 0 \quad (*)$$

Из (*) видно, что система будет находится в равновесии.

Формулу (11.3) используют для определения активных сил и реакций в связях.

Запишем (11.3) в аналитической форме.

$$\sum \delta A_k^a = \sum \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Обозначим: $\bar{F}_k^a(x_k; y_k; z_k);$

$$\delta \bar{r}_k(\delta x_k; \delta y_k; \delta z_k).$$

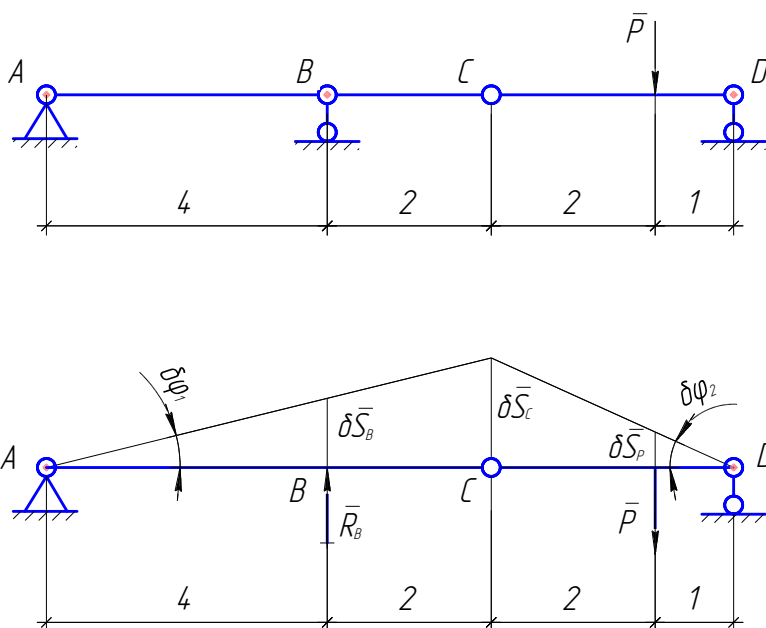
$$\sum (x_k \cdot \delta x_k + y_k \cdot \delta y_k + z_k \cdot \delta z_k) = 0 \quad (11.4)$$

- принцип возможных перемещений в аналитической форме.

Пример №1. Для заданной балки определить реакцию в опоре В.

Решение.

Дадим системе возможное перемещение.



Запишем принцип возможных перемещений:

$$\sum \delta A_k^a = 0;$$

$$(1) R_B \cdot \delta S_B - P \cdot \delta S_P = 0; \quad \begin{cases} \delta \varphi_1 = \frac{\delta S_B}{4}; \\ \delta \varphi_1 = \frac{\delta S_{\tilde{N}}}{6}; \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta S_B}{4} = \frac{\delta S_{\tilde{N}}}{6} \Rightarrow$$

$$\delta S_{\tilde{N}} = \frac{6}{4} \delta S_B = 1,5 \delta S_B \Rightarrow \delta S_{\tilde{N}} = 1,5 \delta S_B \quad (2)$$

$$\begin{cases} \delta \varphi_2 = \frac{\delta S_C}{3}; \\ \delta \varphi_2 = \frac{\delta S_P}{1}; \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta S_C}{3} = \frac{\delta S_P}{1} \Rightarrow \delta S_{\tilde{N}} = 3 \delta S_P \quad (3)$$

Приравниваем (2) и (3): $1,5 \delta S_B = 3 \delta S_P \Rightarrow \delta S_B = \frac{3 \delta S_P}{1,5} = 2 \delta S_P$.

Итак: $\delta S_B = 2 \delta S_P$ (4)

Подставляем (4) в (1):

$$R_B \cdot 2 \delta S_P - P \cdot \delta S_P = 0, \text{ если } \delta S_P \neq 0 \Rightarrow 2R_B - P = 0; \quad R_B = \frac{P}{2}.$$

Ответ: $R_B = \frac{P}{2}$.