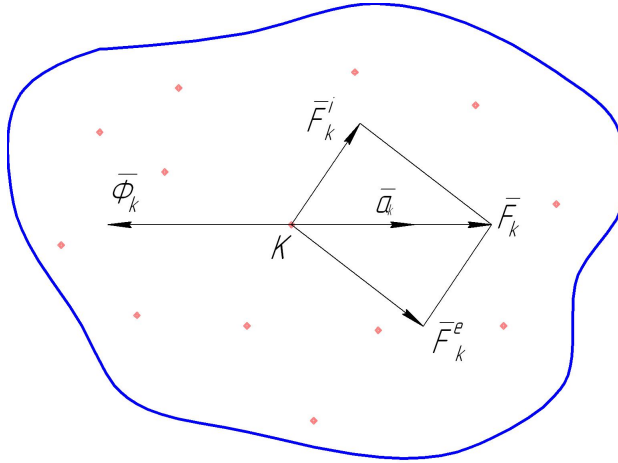


Лекция № 10

Принципы динамики.

I принцип. Принцип Даламбера для системы материальных точек.

Если к каждой точке системы, которая находится под действием внешних и внутренних сил, присоединить силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенна и к ней можно будет применять все уравнения статики.



Возьмем \underline{k} -ю точку системы. К ней приложены силы \bar{F}_k^e ; \bar{F}_k^i . Найдем равнодействующую этих сил:

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

\bar{a}_k - ускорение т. к.

$\bar{\Phi}_k$ - сила инерции.

Для каждой точки системы запишем правило Даламбера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i + \bar{\Phi}_1 = 0; \\ \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i + \bar{\Phi}_2 = 0; \\ + \dots\dots\dots \\ \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i + \bar{\Phi}_n = 0. \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i + \sum \bar{\Phi}_k = 0 \quad (10.1)$$

- уравновешенная система сил.

Из статики известно, что такая система запишется:

$$(\bar{F}_1^e \dots \bar{F}_n^e; \bar{F}_1^i \dots \bar{F}_n^i; \bar{\Phi}_1 \dots \bar{\Phi}_n) \equiv 0 \text{ - уравновешенная система сил.}$$

Из статики известно, что главный вектор сил и главный момент равняются нулю:

$$\begin{cases} \bar{R} = 0; \\ \bar{M}_0 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0; \\ \bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) = 0; \end{cases}, \text{ т.е. } \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i + \sum \bar{\Phi}_k = 0; \\ \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) + \sum \bar{m}_0(\bar{\Phi}_k) = 0. \end{cases}$$

Если $\sum \bar{F}_k^i = 0$ и $\sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) = 0$ согласно закону парности внутренних сил, тогда

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{\Phi}_k = 0; \\ \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{m}_0(\bar{\Phi}_k) = 0. \end{cases} \quad (10.2)$$

Обозначим:

$$\bar{R}^e = \sum \bar{F}_k^e; \quad \bar{R}^\Phi = \sum \bar{\Phi}_k; \quad \bar{M}_0^e = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e); \quad \bar{M}_0^\Phi = \sum \bar{m}_0(\bar{\Phi}_k) \Rightarrow$$

(10.2) принимает вид:

$$\begin{cases} \bar{R}^e + \bar{R}^\Phi = 0; \\ \bar{M}_0^e + \bar{M}_0^\Phi = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

-геометрическая запись правила Даламбера для системы материальных точек.

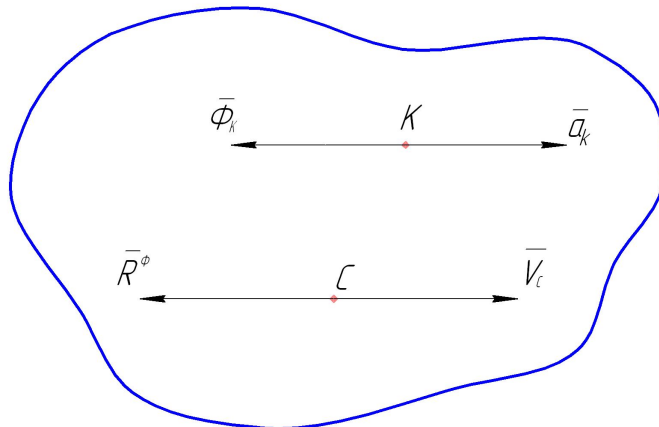
В аналитической форме (10.3) представляет собой 6 уравнений статики.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; & \sum F_{ky} = 0; & \sum F_{kz} = 0; \\ \sum M_x = 0; & \sum M_y = 0; & \sum M_z = 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

правило Даламбера в аналитической форме.

Приведение сил инерции в поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях твердого тела.

I. Поступательное движение твердого тела.



Пусть твердое тело совершает поступательное движение. Возьмем произвольную т. К на теле с ускорением \bar{a}_k . Тогда $\bar{a}_k = \bar{a}_c$ по величине и направлению. Приложим к т. К силу инерции $\bar{\Phi}_k$.

Сила инерции равна $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \bar{a}_c$;

Главный вектор: $\bar{R}^\Phi = \sum \bar{\Phi}_k = -\sum m_k \bar{a}_c = -\bar{a}_c \cdot \sum m_k$;

$$\bar{R}^\Phi = -M \cdot \bar{a}_c \quad (10.5)$$

Главный момент $M_0^\Phi = 0$, т.к. поступательное движение.

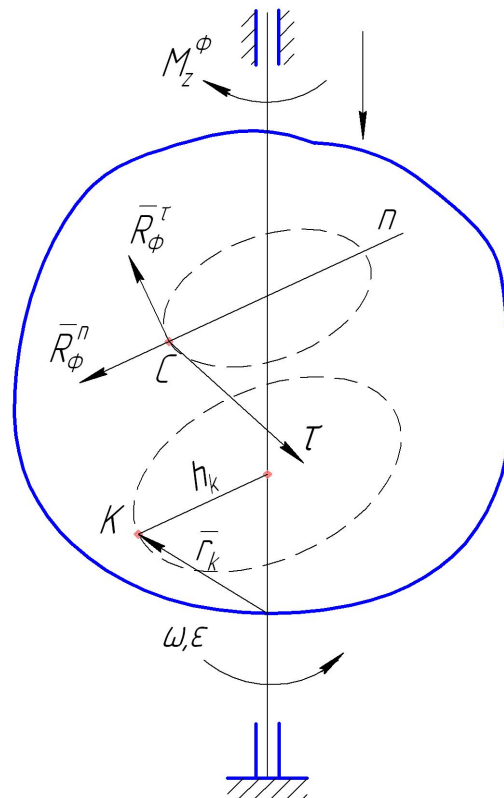
Найдем точку приложения \bar{R}^Φ .

$$\bar{r}_\Phi = \frac{\sum (\bar{\Phi}_k \cdot \bar{r}_k)}{\sum \bar{\Phi}_k} = \frac{-\sum (m_k \cdot \bar{a}_c \cdot \bar{r}_k)}{-\sum (m_k \cdot \bar{a}_c)} = \frac{-\bar{a}_c \cdot \sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{-\bar{a}_c \cdot \sum m_k} = \frac{\sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{M} = \bar{r}_c$$

В поступательном движении твердого тела силы инерции приводят к главному вектору, который по величине равен произведению массы на ускорение центра масс, приложен в центре масс и направлен в сторону противоположную ускорению центра масс.

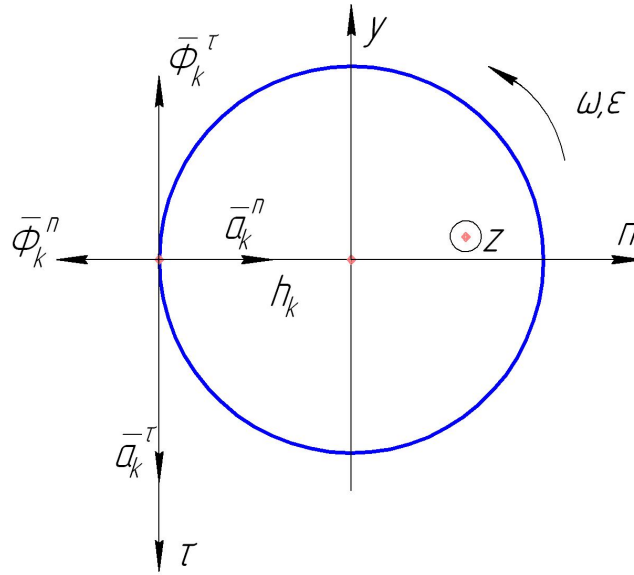
II. Вращательное движение твердого тела.

Вращение не равномерное и ось вращения не проходит через центр масс.



Возьмем т. К, ускорение которой $\bar{a}_k = \bar{a}_k^n + \bar{a}_k^\tau$.

Рассмотрим вид сверху для т. К.



Векторное произведение:

$$\begin{cases} \bar{a}_k^\tau = \bar{\epsilon} \times \bar{r}_k; \\ \bar{a}_k^n = \bar{\omega} \times \bar{v}_k \end{cases}$$

Сила инерции к – ой точки:

$$\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k = -(m_k \bar{a}_k^\tau + m_k \bar{a}_k^n);$$

$$\bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}_k^\tau + \bar{\Phi}_k^n.$$

Лежат силы инерции в горизонтальной плоскости, тогда:

$$\bar{R}_\phi = \bar{R}_\phi^\tau + \bar{R}_\phi^n; \text{ где } \begin{cases} \bar{R}_\phi^\tau = \sum \bar{\Phi}_k^\tau; \\ \bar{R}_\phi^n = \sum \bar{\Phi}_k^n. \end{cases}$$

Найдем \bar{R}_ϕ^τ и \bar{R}_ϕ^n .

$$\bar{R}_\phi^n = \sum \bar{\Phi}_k^n = -\sum m_k \cdot \bar{a}_k^n = -\sum m_k \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}_k = -\bar{\omega} \times \sum m_k \cdot \bar{v}_k; \text{ т.к.}$$

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = M \cdot \bar{v}_c \Rightarrow \bar{R}_\phi^n = -\bar{\omega} \times M \cdot \bar{v}_c = -M \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}_c = -M \cdot \bar{a}_c^n,$$

где $\bar{\omega} \times \bar{v}_c = \bar{a}_c^n$

$$\text{Итак, } \bar{R}_\phi^n = -M \cdot \bar{a}_c^n$$

Найдем главный вектор касательных сил инерции.

$$\bar{R}_\phi^\tau = \sum \bar{\Phi}_k^\tau = -\sum m_k \cdot \bar{a}_k^\tau = -\sum m_k \cdot \bar{\epsilon} \times \bar{r}_k = -\bar{\epsilon} \times \sum m_k \cdot \bar{r}_k; \text{ т.к.}$$

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \Rightarrow \sum m_k \bar{r}_k = M \cdot \bar{r}_c, \text{ тогда } \bar{R}_\phi^\tau = -\bar{\epsilon} \times \bar{r}_c \cdot M = -M \cdot \bar{\epsilon} \times \bar{r}_c = -M \cdot \bar{a}_c^\tau,$$

где $\bar{\epsilon} \times \bar{r}_c = \bar{a}_c^\tau$.

$$\text{Итак, } \overline{R}_\phi^\tau = -M \cdot \overline{a}_c^\tau.$$

Найдем главные моменты относительно оси вращения.

$$M_z^{\overline{\Phi}_n} = 0, \text{ т.к. вектор } \overline{\Phi}_n \text{ пересекает ось вращения.}$$

$$M_z^{\Phi^\tau} = -\sum \Phi_k^\tau \cdot h_k = -\sum m_k \cdot a_k^\tau \cdot h_k = -\sum m_k (\varepsilon \cdot h_k) \cdot h_k = -\varepsilon \cdot \sum m_k \cdot h_k^2 = -I_z \cdot \varepsilon.$$

$$\text{Итак, } M_z^{\Phi^\tau} = -I_z \cdot \varepsilon$$

« - » указывает на направление M_z^{Φ} по отношению к ε .

Во вращательном движении силы инерции приводят к главному вектору, равному по величине $M \cdot \overline{a}_c$, приложенному в центре масс и направленному в сторону, противоположную ускорению центра масс и к моменту сил инерции, равному по величине произведению момента инерции I_z на ε , и направленному в сторону, противоположную ε .

$$\begin{cases} \overline{R}_\phi = \overline{R}_\phi^\tau + \overline{R}_\phi^n = -M(\overline{a}_c^\tau + \overline{a}_c^n) = -M\overline{a}_c; \\ M_z^\Phi = -I_z \cdot \varepsilon \end{cases} \quad (10.1)$$

Частные случаи.

1. Ось вращения z проходит через центр масс.

Так как центр масс т. С лежит на оси вращения

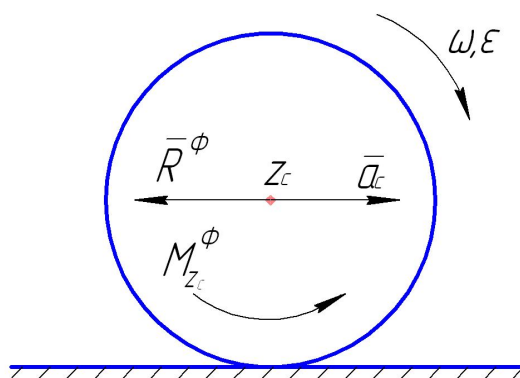
$$a_c = 0 \Rightarrow \overline{R}^\Phi = -M \cdot \overline{a}_c = 0; \quad M_z^\Phi = -I_z \cdot \varepsilon$$

2. Ось вращения z проходит через центр масс и $w = \text{const}$.

$$a_c = 0 \Rightarrow \overline{R}^\Phi = -M \cdot \overline{a}_c = 0; \quad M_z^\Phi = -I_z \cdot \varepsilon = 0, \quad \text{т.к.} \quad \varepsilon = \frac{dw}{dt} = 0$$

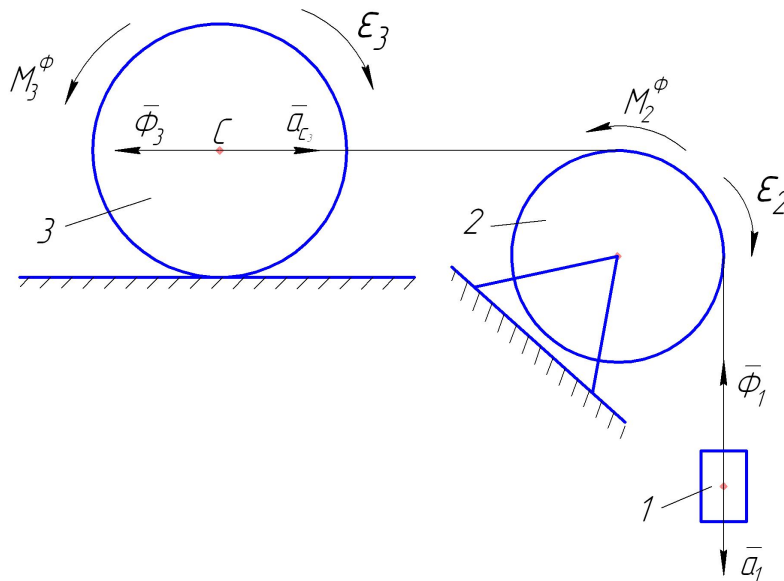
III. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Плоскопараллельное движение твердого тела – движение сложное, состоящее из поступательного, со скоростью центра масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс.



В этом случае силы инерции приводят к
$$\begin{cases} \bar{\mathbf{R}}_\Phi = -M\bar{\mathbf{a}}_c; \\ \mathbf{M}_{zc}^\Phi = -I_{zc} \cdot \varepsilon \end{cases}$$

Пример № 1. Приложить силы инерции к движущимся телам системы.



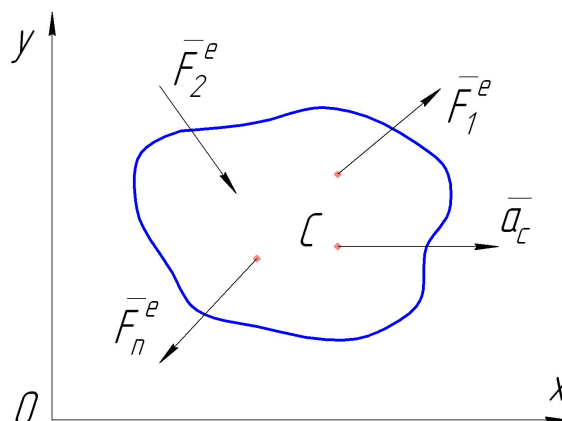
Тело 1 – поступательное движение: $\bar{\mathbf{a}}_1; \bar{\Phi}_1$.

Тело 2 – вращательное движение: ε_2, M_2^Φ .

Тело 3 – плоскопараллельное движение: $\varepsilon_3, M_3^\Phi; \bar{\mathbf{a}}_{c3}; \bar{\Phi}_3$.

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

Пусть твердое тело совершает плоское движение под действием системы внешних сил.



Из кинематики известно:

$$\begin{cases} x_c = f_1(t); \rightarrow & \text{уравнения характеризуют} \\ y_c = f_2(t); \rightarrow & \text{поступательное движение.} \\ \varphi = f_3(t) \rightarrow & \text{характеризует вращательное движение.} \end{cases}$$

За полюс возьмем центр масс тела.

$$\text{Правило Даламбера} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\mathbf{R}}^e + \bar{\mathbf{R}}^\Phi = 0; \\ \bar{\mathbf{M}}_0^e + \bar{\mathbf{M}}_0^\Phi = 0. \end{cases} \text{ где } \begin{cases} \bar{\mathbf{R}}^e = \sum \bar{\mathbf{F}}_k^e; \\ \bar{\mathbf{R}}^\Phi = -M \cdot \bar{\mathbf{a}}_c; \\ \bar{\mathbf{M}}_0^e = \sum \bar{\mathbf{m}}_0 (\bar{\mathbf{F}}_k^e) = M_{\text{вр}}^e \end{cases} \Rightarrow$$

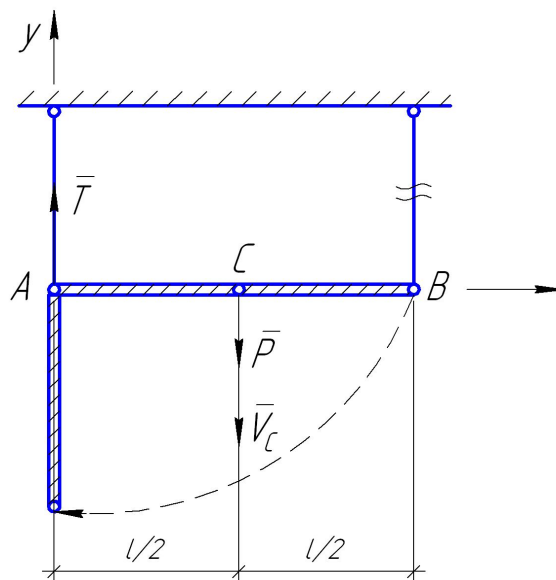
$$\begin{cases} \sum \bar{\mathbf{F}}_k^e + (-M \cdot \bar{\mathbf{a}}_c) = 0; \\ M_{\text{вр}}^e + (-I_c \varepsilon) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \cdot \bar{\mathbf{a}}_c = \sum \bar{\mathbf{F}}_k^e; \\ I_c \varepsilon = M_{\text{вр}}^e. \end{cases} \Rightarrow \text{или}$$

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x}_c = \sum \bar{F}_{kx}^e; \\ M \cdot \ddot{y}_c = \sum \bar{F}_{ky}^e; \\ I_c \cdot \ddot{\phi} = M_{\text{вр}}^e. \end{cases} \quad (10.7)$$

- дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения, если ось проходит через центр масс.

Пример № 2 (Мещерский И.В. «Сборник задач по теоретической механике» зад. № 39.16)

Однородный стержень $AB = l$ массы m горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикрепленных к концам нитей. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.



Решение.

Запишем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения.

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_c = \sum \bar{F}_{kx}^e; \\ m \cdot \ddot{y}_c = \sum \bar{F}_{ky}^e; \\ I_c \cdot \ddot{\phi} = M_{\text{вр}}^e. \end{cases}$$

Т.к. движение вдоль оси x отсутствует, следовательно $\ddot{x}_c = 0$.

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{y}_c = \sum \bar{F}_{ky}^e; \\ I_c \cdot \ddot{\phi} = M_{vp}^e. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot \ddot{y}_c = T - P; \\ I_c \cdot \ddot{\phi} = -T \cdot \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \text{где } I_c = \frac{ml^2}{12}; P = mg.$$

Выразим $\ddot{\phi}$ через \ddot{y} .

$$\text{Т. к. } w = \dot{\phi} = \frac{v_c}{R} = \frac{v_c \cdot 2}{l} = \frac{2\dot{y}_c}{l}; \quad \ddot{\phi} = \varepsilon = \dot{w} = \frac{2\ddot{y}_c}{l} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{y}_c = T - mg; \\ \frac{ml^2}{12} \cdot \frac{2\ddot{y}_c}{l} = -T \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot \ddot{y}_c = T - mg; \\ \frac{m\ddot{y}_c}{3} = -T \end{cases} \Rightarrow$$

$$m\ddot{y}_c = -3T \Rightarrow -3T = T - mg; \Rightarrow -4T = -mg; \quad T = \frac{mg}{4}(\text{Н})$$

$$\text{Ответ: } T = \frac{mg}{4}(\text{Н}).$$