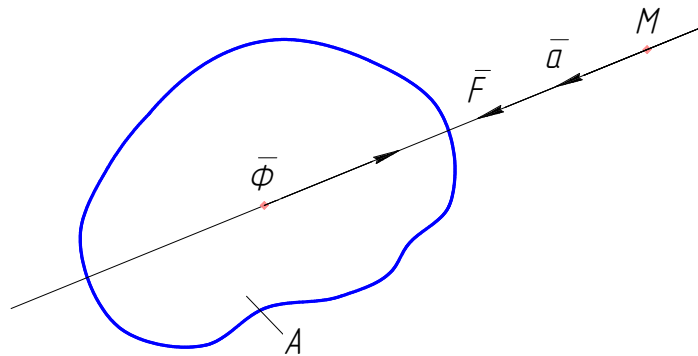


Лекция № 9

Динамика относительного движения точки. Принцип Даламбера для материальной точки.

Принцип Даламбера служит для определения динамических реакций связей при помощи уравнений равновесия статики.

Рассмотрим действие точки М на тело А с силой \vec{F} . При этом точка м получает ускорение \vec{a} .



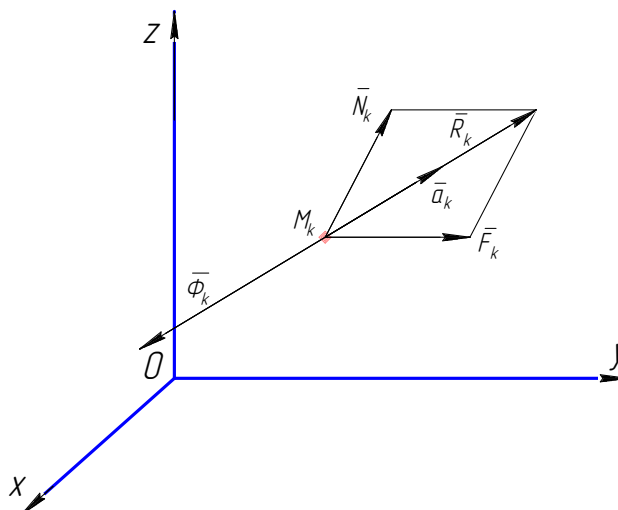
По III закону динамики т.А действует на т.М с силой равной по величине, но противоположно по направлению, то есть $\vec{O} = -\vec{F}$ (силы взаимодействия).

По II закону динамики: $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$

$$\vec{O} = -m\vec{a} \text{ - сила инерции} \quad (9.1)$$

Сила инерции \vec{O} равняется по величине произведению массы на ускорение и всегда направлена в сторону противоположную от ускорения.

Рассмотрим движение т.М в пространстве под действием сил \vec{N}_k и \vec{F}_k , где \vec{N}_k - равнодействующая реакций в связях; \vec{a}_k - ускорение; \vec{F}_k - активные силы.



$\bar{R}_k = \bar{F}_k + \bar{N}_k$ - равнодействующая сил \bar{N}_k и \bar{F}_k .

Чтобы т.М_к остановить, необходимо приложить силу, по величине \bar{R}_k , и направленную в противоположную сторону, то есть:

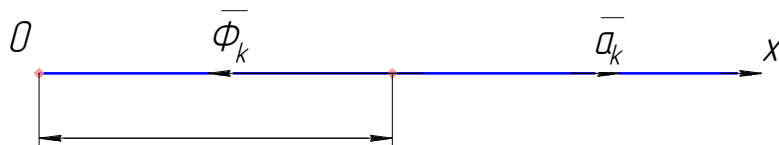
$$\begin{aligned}\bar{O} = -\bar{R}_k &\Rightarrow \bar{O} + \bar{R}_k = 0 \Rightarrow \\ \bar{O}_k + \bar{N}_k + \bar{F}_k &= 0\end{aligned}\quad (9.2)$$

Если к точке, которая движется под действием активных сил (\bar{F}_k) и реакций в связях (\bar{N}_k), приложить силу инерции \bar{O}_k , то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно применить уравнения равновесия статики.

Такой метод называется методом кинетостатики.

Силы инерции в простейших случаях движения материальной точки.

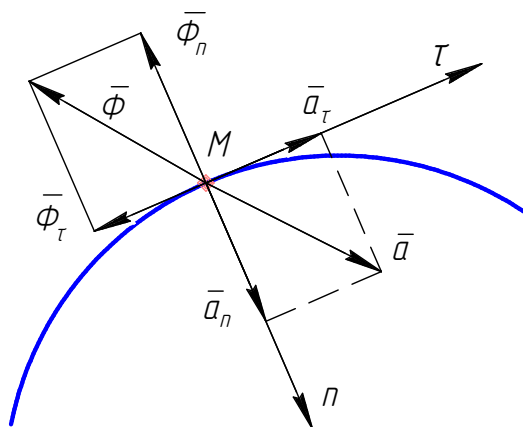
1. Прямолинейное движение.



$$\bar{O}_k = -m\bar{a}_k;$$

”-” – указывает на направление \bar{O}_k по отношению к ускорению.

2. Криволинейное ускорение.



$$\bar{O} = \bar{O}_n + \bar{O}_\tau$$

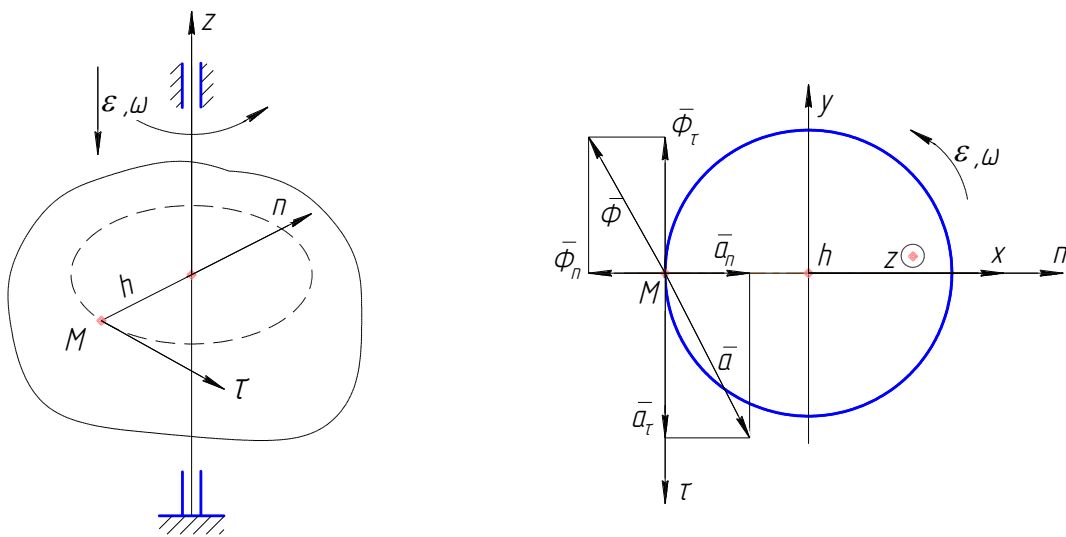
Нормальная сила инерции: $\hat{O}_n = m a_n$, так как $a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow$

$$\vec{O}_n = m \frac{V^2}{\rho} \quad (9.3)$$

Касательная сила инерции: $\hat{O}_\tau = m a_\tau$ так как $a_\tau = \frac{dV}{dt} \Rightarrow$

$$\hat{O}_\tau = m \frac{dV}{dt} \quad (9.4)$$

3. Вращательное движение твердого тела. (Вращение тела ускоренное, т.к. есть $\omega; \varepsilon$).



При вращательном движении вектор силы инерции раскладывается на две составляющие, то есть:

$$\vec{O} = \vec{O}_n + \vec{O}_\tau$$

Касательная сила инерции \vec{O}_τ :

$$\hat{O}_\tau = m a_\tau, \text{ так как } a_\tau = \varepsilon \cdot h \Rightarrow$$

$$\hat{O}_\tau = m \cdot \varepsilon \cdot h \quad (9.5)$$

Нормальная сила инерции \vec{O}_n :

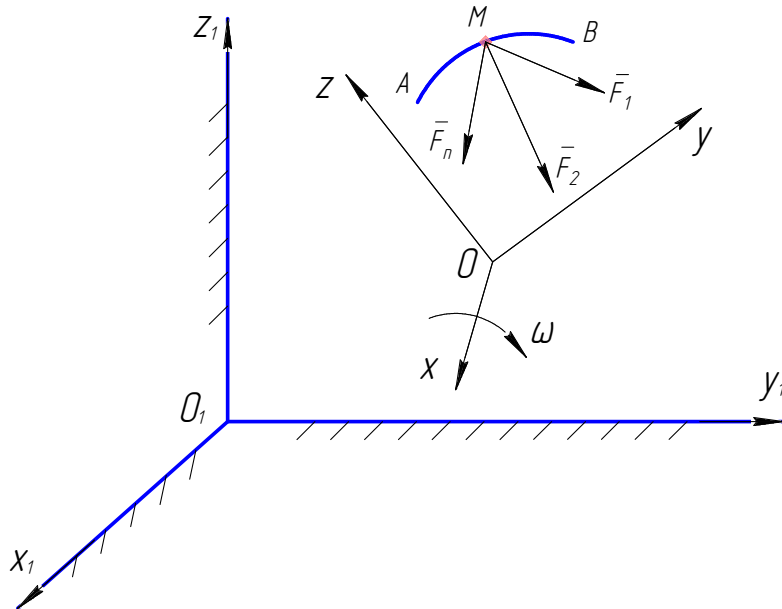
$$\hat{O}_n = m a_n, \text{ так как } a_n = \omega^2 \cdot h \Rightarrow$$

$$\hat{O}_n = m \cdot \omega^2 \cdot h \quad (9.6)$$

Уравнения относительного движения.

Все законы динамики и полученные из них уравнения и теоремы справедливы только для абсолютного движения, то есть движения относительно инерционной (неподвижной) системы отсчета.

Рассмотрим движение т.М в пространстве под действием сил: $\vec{F}_1; \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$.



Пусть $x_1 \ O_1 \ y_1 \ z_1$ – неподвижная (инерционная) система отсчета. По отношению к ней движется подвижная система координат $x \ O \ y \ z$. Она вращается с угловой скоростью $\underline{\omega}$.

В подвижной системе координат по кривой АВ движется точка М. Заданы уравнения относительного движения:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t).$$

Для этой точки запишем II закон динамики.

$$m \cdot \vec{a}_{\dot{a}\dot{a}\dot{n}} = \sum \vec{F}_k, \quad (*)$$

где $\sum \vec{F}_k$ - геометрическая сумма сил.

Из кинематики известно, что ускорение $\vec{a}_{\dot{a}\dot{a}\dot{n}}$ материальной точки относительно неподвижной системы координат - $x_1 \ O_1 \ y_1 \ z_1$ равняется геометрической сумме ее переносного ускорения $\vec{a}_{\dot{a}}$, относительного - \vec{a}_r и кориолисового ускорения $\vec{a}_{\dot{e}\dot{i}\dot{o}}$, то есть:

$$\vec{a}_{\dot{a}\dot{a}\dot{n}} = \vec{a}_{\dot{a}} + \vec{a}_r + \vec{a}_{\dot{e}\dot{i}\dot{o}}; \quad (**)$$

Подставим (**) в (*):

$$m(\bar{a}_{\dot{a}} + \bar{a}_r + \bar{a}_{\dot{e}i\dot{o}}) = \sum \bar{F}_k \Rightarrow m\bar{a}_{\dot{a}} + m\bar{a}_r + m\bar{a}_{\dot{e}i\dot{o}} = \sum \bar{F}_k \Rightarrow$$

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + (-m\bar{a}_{\dot{a}}) + (-m\bar{a}_{\dot{e}i\dot{o}});$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\bar{O}_{\dot{a}} \qquad \qquad \bar{O}_{\dot{e}i\dot{o}}$$

$$\text{Итак: } m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{O}_{\dot{a}} + \bar{O}_{\dot{e}i\dot{o}} \quad (9.7)$$

- уравнение относительного движения точки в векторной форме;

где $\bar{O}_{\dot{a}} = -m\bar{a}_{\dot{a}}$ - переносная сила инерции;

$\bar{O}_{\dot{e}i\dot{o}} = -m\bar{a}_{\dot{e}i\dot{o}}$ - кориолисова сила инерции.

Спроецируем (9.7) на координатные оси:

$$\begin{aligned} x : & \begin{cases} m\ddot{x} = \sum \bar{F}_{kx} + \bar{O}_{\dot{a}x} + \bar{O}_{\dot{e}i\dot{o} \cdot x}; \\ y : & \begin{cases} m\ddot{y} = \sum \bar{F}_{ky} + \bar{O}_{\dot{a}y} + \bar{O}_{\dot{e}i\dot{o} \cdot y}; \\ z : & \begin{cases} m\ddot{z} = \sum \bar{F}_{kz} + \bar{O}_{\dot{a}z} + \bar{O}_{\dot{e}i\dot{o} \cdot z}; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (9.8)$$

- дифференциальные уравнения относительного движения точки.

Т.к. ускорение Кориолиса определяется по формуле:

$$\bar{a}_{\dot{e}i\dot{o}} = 2|\omega_{\dot{a}}| \cdot |V_r| \cdot \sin\left(\overline{\omega_{\dot{a}}} \wedge \overline{V_r}\right) \Rightarrow$$

модуль кориолисовой силы инерции будет:

$$\hat{O}_{\dot{e}i\dot{o}} = m \cdot a_{\dot{e}i\dot{o}} = 2m \cdot |\omega_{\dot{a}}| \cdot |V_r| \cdot \sin\left(\overline{\omega_{\dot{a}}} \wedge \overline{V_r}\right).$$

Частные случаи.

1. Переносное движение – прямолинейное, т.е. $\omega_{\dot{a}} = 0$.

$$\hat{O}_{\dot{e}i\dot{o}} = m \cdot a_{\dot{e}i\dot{o}} = 0, \text{ так как } a_{\dot{e}i\dot{o}} = 2 \cdot |\omega_{\dot{a}}| \cdot |V_r| \cdot \sin\left(\overline{\omega_{\dot{a}}} \wedge \overline{V_r}\right) = 0; \Rightarrow$$

(9.7) будет иметь вид:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{O}_{\dot{a}} \quad (9.9)$$

2. Переносное движение – криволинейное, равномерное, т.е. $\omega_{\dot{a}} = 0$;

$$V_{\dot{a}} = const.$$

$$\text{Тогда } \vec{O}_{\dot{a}} = \vec{O}_{\dot{a}}^n + \vec{O}_{\dot{a}}^\tau \Rightarrow \hat{O}_{\dot{a}}^\tau = m \cdot a_{\dot{a}}^\tau = m \cdot \frac{dV_e}{dt} = 0;$$

$$\hat{O}_{\dot{a}}^{\tau} = m \cdot a_{\dot{a}}^{\tau} = 0, \text{ так как } a_{\dot{a}}^{\tau} = 0.$$

$$\text{Остается } \hat{O}_{\dot{a}}^n = m \cdot a_{\dot{a}}^n = m \cdot \frac{V_e^2}{\rho}; \Rightarrow$$

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{O}_{\dot{a}}^n \quad (9.10)$$

3. Переносное движение – прямолинейное, равномерное, т.е. $\omega_{\dot{a}} = 0$;
 $V_{\dot{a}} = \text{const}$; $\dot{a}_{\dot{a}} = 0$.

$$\text{Так как } \hat{O}_{\dot{a}} = m \cdot a_{\dot{a}} = 0; \quad \hat{O}_{\dot{a}}^{\tau} = m \cdot a_{\dot{a}}^{\tau} = 2m \cdot |\omega_{\dot{a}}| \cdot |V_r| \cdot \sin(\vec{\omega}_{\dot{a}} \wedge \vec{V}_r) = 0 \Rightarrow$$

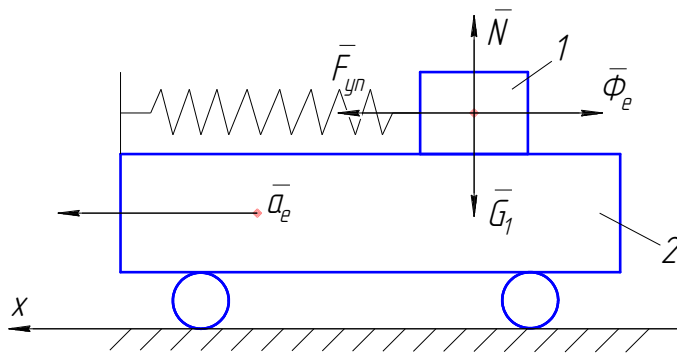
(9.7) будет иметь вид:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k - \text{II закон динамики.} \quad (9.11)$$

4. Относительный покой, если $\dot{a}_r = 0 \Rightarrow$ (9.7) \Rightarrow

$$0 = \sum \vec{F}_k + \vec{O}_{\dot{a}} + \vec{O}_{\dot{a}}^{\tau} \quad (9.12)$$

Пример №1. Определить деформацию Δ пружины ($C = 2$ н/м), при относительном равновесии тела 1 весом $G = 2$ н. Тележка 2 движется по закону $x = 0,5 t^2$.



Переносное движение – прямолинейное, следовательно:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{O}_{\dot{a}}, \quad \dot{a}_r = 0 \Rightarrow 0 = \sum \vec{F}_k + \vec{O}_{\dot{a}} \quad (*)$$

Покажем действующие силы (\vec{G} ; \vec{N} ; $\vec{F}_{\text{пр}}$; $\vec{O}_{\dot{a}}$).

$$\text{Так как } \vec{O}_{\dot{a}} = -m\vec{a}_{\dot{a}}, \text{ а модуль } \hat{O}_{\dot{a}} = m a_{\dot{a}} \Rightarrow$$

Определяем $ma_{\dot{a}} = \ddot{x}$; $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[0,5t^2] = t$;

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}[t] = 1 \text{ м/с}^2.$$

Так как $a_{\dot{a}} = \ddot{x} = 1 \text{ м/с}^2 > 0$, направление вектора $a_{\dot{a}}$ совпадает с положительным направлением оси x , тогда вектор $\vec{O}_{\dot{a}}$ направлен в противоположную сторону.

Спроецируем (*) на ось x :

$$x: F_{\dot{O}\dot{r}} - \hat{O}_{\dot{a}} = 0, \text{ так как } F_{\dot{O}\dot{r}} = \Delta \cdot \tilde{N} \Rightarrow \Delta \cdot \tilde{N} - \hat{O}_{\dot{a}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = \frac{\hat{O}_{\dot{a}}}{\tilde{N}} = \frac{ma_e}{C} = \frac{G}{g} \cdot \frac{a_e}{C} = \frac{2}{9,81} \cdot \frac{1}{2} = 0,102 (\text{м/с}^2).$$

$$\text{Ответ: } \Delta = 0,102 \text{ м/с}^2 = 10,2 \text{ м/с}^2.$$