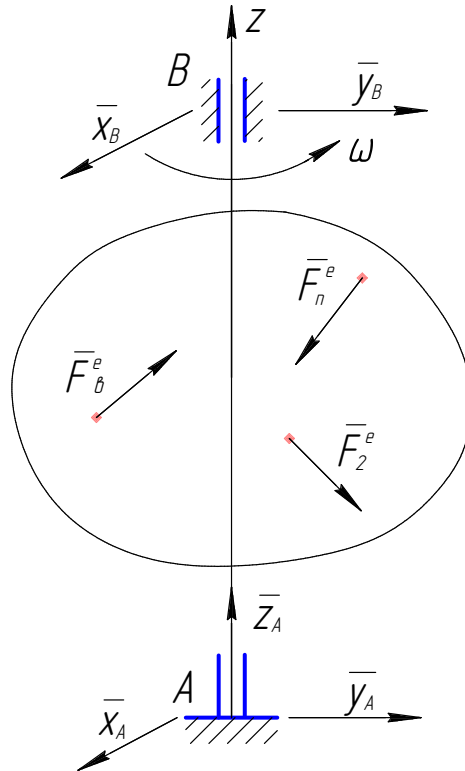


Лекция № 6

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела.

Твердое тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω под действием внешних сил $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_{n1}^e$. В т. А и т. В возникают реакции $\bar{x}_A; \bar{y}_A; \bar{z}_A; \bar{x}_B; \bar{y}_B; \bar{z}_B$.



Чтобы исключить из уравнений эти реакции, используем теорему моментов относительно оси z .

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e); \text{ если } \sum m_z(\bar{F}_k^e) = M_z^e, \text{ тогда}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e \quad (6.1)$$

- вращательный момент.

$$\text{Т.к. } L_z = I_z \cdot \omega; \Rightarrow (6.1) \Rightarrow \frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z^e;$$

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad \text{если } I_z = \text{const} \quad (6.2)$$

- дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.

$$\text{Т.к. } \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon; \Rightarrow (6.2) \Rightarrow I_z \cdot \varepsilon = M_z^e \quad (6.3)$$

$$\text{Т.к. } \varepsilon = \ddot{\varphi}; \Rightarrow (6.2) \Rightarrow I_z \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e \quad (6.4)$$

Пример № 1.

Диск вращается вокруг оси под действием $M_z^e = 6$ нм, масса диска $m = 12$ кг, радиус инерции $i_z = 1,73$ м. Определить угловую скорость w через $t = 3$ сек от начала вращения, если $w_0 = 0$.

Решение.

Для решения задачи используем формулу(6.2) $I_z \frac{dw}{dt} = M_z^e$. По условию задачи $M_z^e = 6$ нм и $I_z = m \cdot i_z^2 = 12 \cdot 1,73^2 = 36$ кгм², тогда

$$36 \frac{dw}{dt} = 6; \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{6}{36}; \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{1}{6};$$

разделим переменные: $dw = \frac{1}{6} dt \Rightarrow$ интегрируем:

$$\int_{w_0}^w dw = \frac{1}{6} \int_0^t dt; \Rightarrow w \Big|_{w_0}^w = \frac{1}{6} t \Big|_0^t \Rightarrow w - w_0 = \frac{1}{6} t; \Rightarrow w = w_0 + \frac{1}{6} t; \text{ т.к.}$$

$$w_0 = 0; \Rightarrow w = \frac{1}{6} t; \Rightarrow \text{при } t = 3 \text{ сек; } w = \frac{1}{6} \cdot 3 = 0,5 \text{ рад/с.}$$

Ответ: $w = 0,5$ рад/с.

Пример № 2

Однородный цилиндр вращается вокруг оси z по закону $\varphi = t^3 - 5t^2$, радиус цилиндра $R = 1,41$ м, масса $m = 60$ кг. Определить вращающий момент M_z^e через $t = 2$ сек от начала вращения.

Решение.

Используем формулу 6.4:

$$I_z \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e,$$

где момент инерции I_z цилиндра относительно оси z будет равен

$$I_z = \frac{mR^2}{2} = \frac{60 \cdot 1,41^2}{2} = 60 \text{ кгм}^2.$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot [t^3 - 5t^2] = 3t^2 - 10t;$$

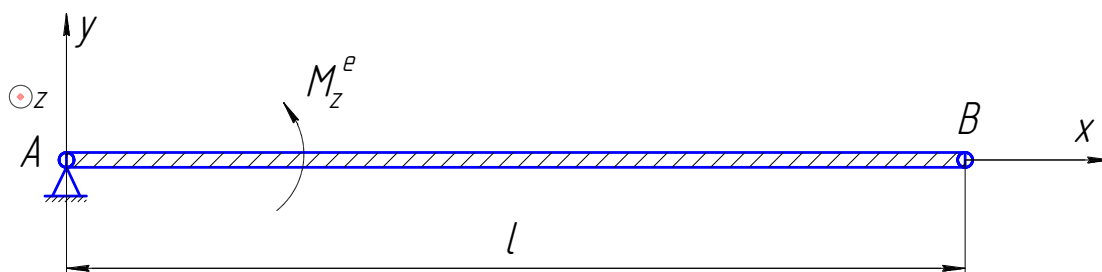
$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot [3t^2 - 10t] = 6t - 10;$$

при $t = 2$ сек; $\ddot{\varphi} = 6t - 10 = 6 \cdot 2 - 10 = 2$ рад/с²;

тогда $M_z^e = I_z \cdot \ddot{\varphi} = 60 \cdot 2 = 120$ (нм).

Ответ: $M_z^e = 120$ нм.

Пример № 3



Стержень $AB = l = 1$ м вращается вокруг оси z под действием вращающего момента $M_z^e = 4t$ (нм), масса $m = 3$ кг. Записать закон вращения $\varphi = f(t)$ через $t = 2$ сек от начала вращения, если $\varphi_0 = 0$; $w_0 = 0$.

Решение.

Чтобы записать закон вращения $\varphi = f(t)$, используем формулу (6.2):

$$I_z \frac{dw}{dt} = M_z^e; \Rightarrow \text{разделим переменные}$$

$$dw = \frac{M_z^e}{I_z} \cdot dt; \text{ где } I_z - \text{ момент инерции стержня.}$$

$$I_z = \frac{ml^2}{3} = \frac{3 \cdot 1^2}{3} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$dw = 4t \cdot dt; \Rightarrow \text{интегрируем } \int dw = 4 \int t dt; \Rightarrow w = 4 \frac{t^2}{2} + C_1; \text{ или } w = 2t + C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 определяем из начальных условий. При $t = 0$; $w = w_0 = 0$; \Rightarrow

$$0 = 2 \cdot 0 + C_1; \Rightarrow C_1 = 0.$$

Итак, закон изменения угловой скорости принимает вид:

$$w = 2t^2 \text{ (рад/с);}$$

$$\text{Т.к. } w = \frac{d\varphi}{dt}; \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = 2t^2; \text{ разделим переменные:}$$

$$d\varphi = 2t^2 \cdot dt; \Rightarrow \text{интегрируем}$$

$$\int d\varphi = 2 \int t^2 dt; \Rightarrow \varphi = \frac{2}{3} t^3 + C_2;$$

Постоянную интегрирования C_2 определяем из начальных условий. При $t = 0$; $\varphi = \varphi_0 = 0$; \Rightarrow

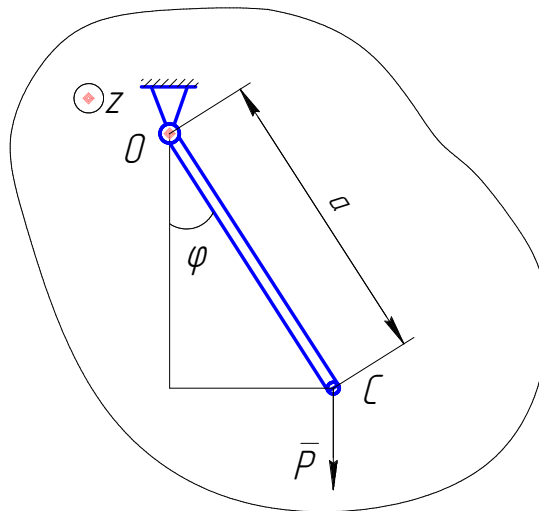
$$0 = \frac{2}{3} \cdot 0 + C_2; \Rightarrow C_2 = 0; \text{ тогда } \varphi = \frac{2}{3} t^3 \text{ (рад) – закон вращения.}$$

$$\text{При } t = 2 \text{ сек; } \varphi = \frac{2}{3} \cdot 2^3 = \frac{16}{3} = 5,3 \text{ (рад).}$$

Ответ: $\varphi = 5,3$ рад.

Физический маятник и его колебания.

Физическим маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела, и движущееся под действием силы тяжести.



Ось Z проходит через т. О перпендикулярно к плоскости чертежа.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения:

$$I_0 \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e;$$

$$M_z^e = -P \cdot OC \cdot \sin \varphi; \text{ т.к. отклонения малы, } \sin \varphi \approx \varphi.$$

$$\text{Тогда } M_z^e = -P \cdot a \cdot \varphi; \Rightarrow$$

$$I_0 \cdot \ddot{\varphi} = -P \cdot a \cdot \varphi; \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{P}{I_0} \cdot a \cdot \varphi;$$

$$\text{Обозначим через } k^2 = -\frac{P \cdot a}{I_0}; \Rightarrow \ddot{\varphi} = -k^2 \cdot \varphi; \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0 \quad (6.5)$$

- дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника.

Характеристическое уравнение

$$z^2 + k^2 = 0; \quad z_{1,2} = \pm i k - \text{корни мнимые.}$$

Решением уравнения (6.5) будет уравнение вида:

$$\begin{cases} \varphi = C_1 \cdot \sin(kt) + C_2 \cdot \cos(kt); \Rightarrow \text{продифференцируем} \\ \dot{\varphi} = C_1 k \cdot \cos(kt) - C_2 k \cdot \sin(kt) \end{cases}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из начальных условий. При $t=0$; $\varphi = \varphi_0$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$:

$$\begin{cases} \varphi_0 = C_1 \cdot \sin(k \cdot 0) + C_2 \cdot \cos(k \cdot 0); \Rightarrow C_2 = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_0 = C_1 \cdot k \cos(k \cdot 0) - C_2 \cdot k \sin(k \cdot 0) \Rightarrow C_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \end{cases};$$

Тогда

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \cdot \sin(kt) + \varphi_0 \cdot \cos(kt); \text{ или}$$

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(kt) + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \cdot \sin(kt) \quad (6.6)$$

- закон вращения,

$$\text{где } k = \sqrt{\frac{P \cdot a}{I_0}}$$

$$\text{Период колебаний: } T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{P \cdot a}} \quad (6.7)$$

Формула (6.7) служит для определения I_0 опытным путем.

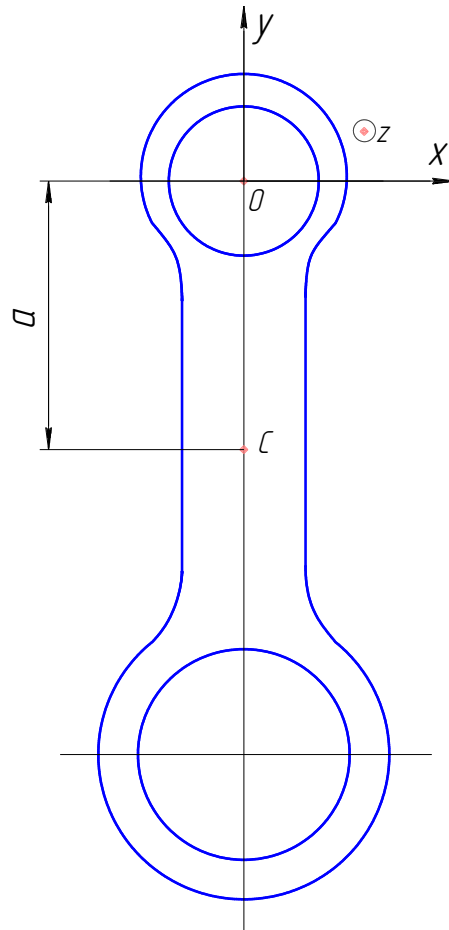
Способ подвеса.

Определить момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через точку С.

Пусть тело сделало n - качаний за t сек.

$$\text{Период колебаний - } T = \frac{t}{n}.$$

Тело является физическим маятником (ось z проходит через т. О).



Используем формулу (6.7):

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{P \cdot a}};$$

где P - вес тела (взвешивают); a - расстояние, определяется опытным путем.

Возведем в квадрат левую и правую части (6.7):

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \sqrt{\frac{I_0}{P \cdot a}}; \Rightarrow I_0 = \frac{T^2 \cdot P \cdot a}{4\pi^2};$$

$$\text{или } I_0 = \frac{P \cdot a}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^2; \Rightarrow$$

$$I_0 = \frac{P \cdot a \cdot t^2}{4\pi^2 \cdot n^2}; \quad - \text{ момент инерции относительно подвеса, т.е. т. О.}$$

Используя теорему Штейнера - Гюйгенса будем иметь:

$$I_0 = I_{zc} + m \cdot (OC)^2; \Rightarrow$$

$$I_{zc} = I_0 - m \cdot (OC)^2 = I_0 - ma^2 = \frac{Pat^2}{4\pi^2 n^2} - \frac{P}{g} \cdot a^2; \text{ где } m = \frac{P}{g}.$$