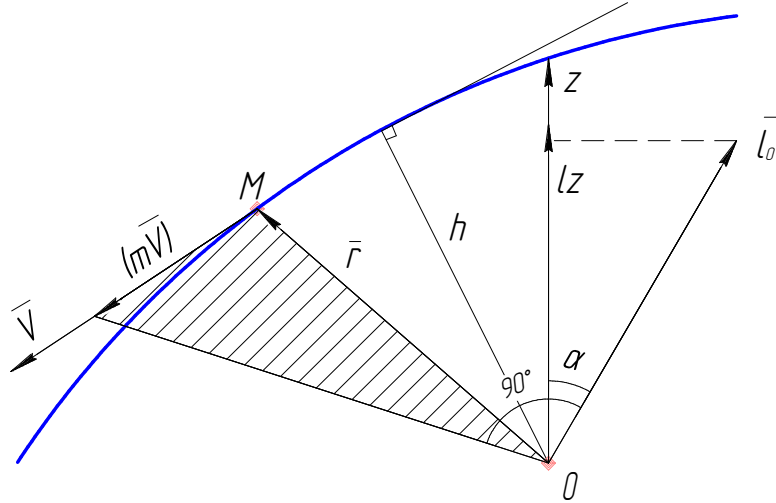


Лекция 5

Момент количества движения точки (МКД) или кинетический момент.

Пусть т. М движется по криволинейной траектории со скоростью \vec{V} .



Соединим т. О и т. М – радиус – вектором \vec{r} , тогда:

$$l_0 = r \cdot m\vec{V} \quad (5.1)$$

Опустим \perp из т. О на л.д. ($m\vec{V}$), тогда модуль

$$l_0 = (mV) \cdot h \quad (5.2)$$

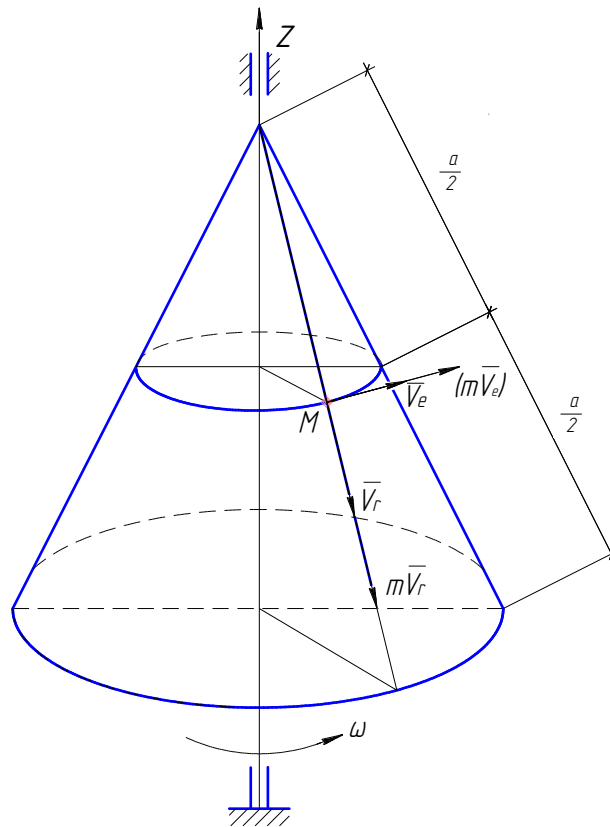
Спроецируем \vec{l}_0 на ось z.

$l_z = |\vec{l}_0| \cdot \cos \alpha$ – момент количества движения относительно оси z.

Если точка совершает сложное движение, её скорость определяется по формуле: $\vec{V}_{\text{дан}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$; тогда МКД относительно оси z определяется по теореме Вариньона:

$$l_z = m_z(m \cdot V_r) + m_z(m \cdot V_e) \quad (5.3)$$

Пример №1. Конус вращается с угловой скоростью ω . По образующей конуса со скоростью \vec{V}_r движется точка массой m . Определить МКД точки относительно оси z, когда она находится на расстоянии $a/2$ от вершины. Радиус основания R.



Точка М участвует в сложном движении: в относительном – движении по контуру со скоростью \bar{V}_r и в переносном – вращении корпуса. Переносная скорость: $\bar{V}_e = \omega \cdot \frac{R}{2}$.

Кинетический момент точки (МКД) относительно оси z:

$$l_z = m_z(m \cdot \bar{V}_e) + m_z(m \cdot \bar{V}_r)$$

Вектор $(m\bar{V}_r)$ пересекает ось z, поэтому его момент равен нулю, т.е.

$$m_z(m\bar{V}_r)=0.$$

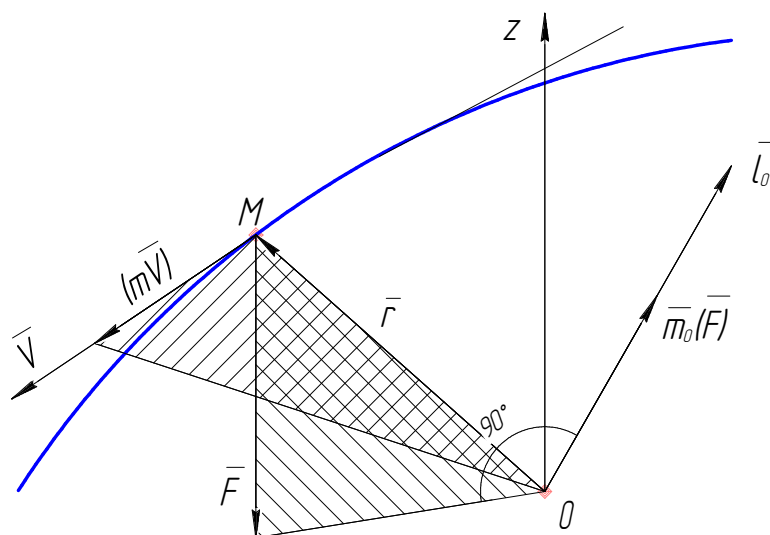
Тогда:

$$l_z = m_z(m \cdot \bar{V}_e) = (m \cdot V_e) \cdot \frac{R}{2} = m \cdot \left(\omega \cdot \frac{R}{2} \right) \cdot \frac{R}{2} = m \cdot \omega \cdot \frac{R^2}{4}.$$

Ответ: $l_z = m \cdot \omega \cdot \frac{R^2}{4}.$

Теорема об изменении МКД материальной точки. (теорема моментов)

Пусть т. М движется по криволинейной траектории со скоростью \bar{V} , под действием силы \bar{F} .



Соединим т.М и т.О радиус-вектором \vec{r} . Два треугольника находятся одной плоскости.

Запишем: $\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{r}$;

$$\vec{l}_0 = m\vec{V} \times \vec{r}.$$

Следовательно, вектора \vec{l}_0 и $\vec{m}_0(\vec{F})$ совпадают.

Возьмем производную от (5.1):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}_0}{dt} &= \frac{d}{dt} [\vec{r} \times m\vec{V}] = \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \times m\vec{V} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d(m\vec{V})}{dt} \right) = (\vec{V} \times m\vec{V}) + \left(\vec{r} \times \frac{m d\vec{V}}{dt} \right) \\ &= 0 + (\vec{r} \times m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{m}_0(\vec{F}). \end{aligned}$$

$$(\vec{V} \times m\vec{V}) = 0, \text{ т. к. } \vec{V} \parallel (m\vec{V}).$$

Итак:

$$\boxed{\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{m}_0(\vec{F})} \quad - \text{ теорема об изменении МКД материальной точки. } \quad (5.4)$$

Спроецируем (5.4) на координатные оси.

$$\begin{aligned} x: & \frac{dl_x}{dt} = m_x(\vec{F}); \\ y: & \frac{dl_y}{dt} = m_y(\vec{F}); \\ z: & \frac{dl_z}{dt} = m_z(\vec{F}). \end{aligned} \quad - \text{ та же теорема в проекции на координатные оси. } \quad (5.5)$$

Из теоремы вытекают следствия, которые представляют собой теорему о сохранении м.к.д. относительно оси и центра.

1. Если $\bar{m}_0(\bar{F}) = 0$, (формула 5.4) $\Rightarrow \frac{d\bar{l}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{l}_0 = const$.
2. Если, например $m_x(\bar{F}) = 0 \Rightarrow \frac{dl_x}{dt} = 0 \Rightarrow l_x = const$.

МКД системы материальных точек

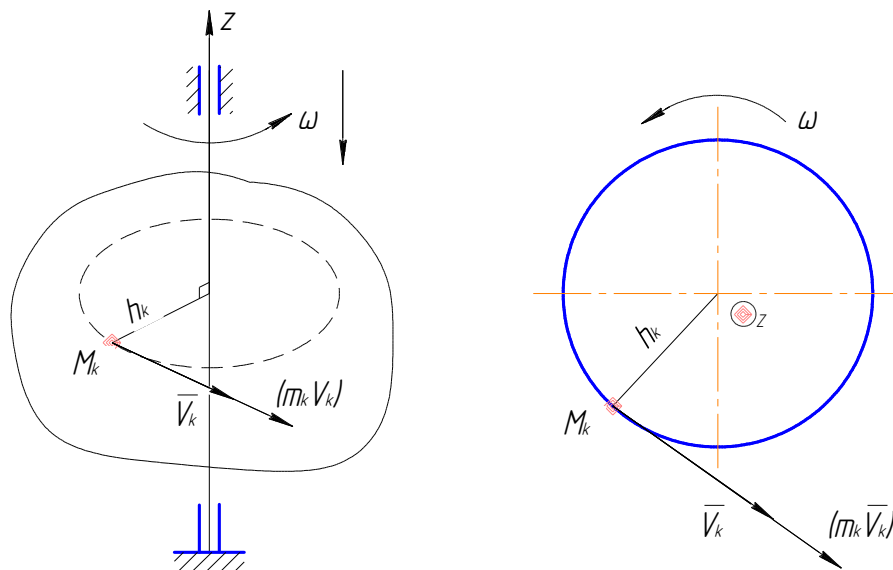
М.К.Д системы материальных точек обозначается \bar{L}_0 , и равен:

$$\boxed{\bar{L}_0 = \sum \bar{m}_0(m_k \cdot \bar{V}_k) = \sum \bar{l}_{ok}} \quad - \text{М.К.Д или кинетический момент системы материальных точек.} \quad (5.6)$$

Спроецируем (5.6) на координатные оси:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} L_x = \sum m_x(m_k \cdot \bar{V}_k) = \sum l_{ox}; \\ L_y = \sum m_y(m_k \cdot \bar{V}_k) = \sum l_{oy}; \\ L_z = \sum m_z(m_k \cdot \bar{V}_k) = \sum l_{oz}. \end{cases} \quad - \text{кинетический момент относительно осей.} \quad (5.7)$$

Кинетический момент тела, которое вращается вокруг оси вращения



Пусть твердое тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω . Рассмотрим т. M_k на расстоянии h_k от оси z .

$$L_z = \sum m_z(m_k \cdot \bar{V}_k); \quad (5.8)$$

$$m_z(m_k \cdot \bar{V}_k) = (m_k \cdot \bar{V}_k) \cdot h_k;$$

Т. к. линейная скорость при вращательном движении равна:

$$V_k = \omega \cdot h_k \Rightarrow m_z(m_k \cdot \bar{V}_k) = m_k(\omega \cdot h_k) \cdot h_k = m_k \cdot \omega \cdot h_k^2 = \omega(m_k \cdot h_k^2).$$

Подставляя в (5.8) будем иметь:

$$L_z = \sum m_z(m_k \cdot \bar{V}_k) = \sum (m_k \cdot h_k^2) \cdot \omega = \omega \cdot \sum (m_k \cdot h_k^2) = I_z \cdot \omega$$

$$\text{Итак: } L_z = I_z \cdot \omega. \quad (5.9)$$

Для системы материальных точек:

$$L_z = L_{z1} + L_{z2} + \dots + L_{zn} = \sum L_{zk};$$

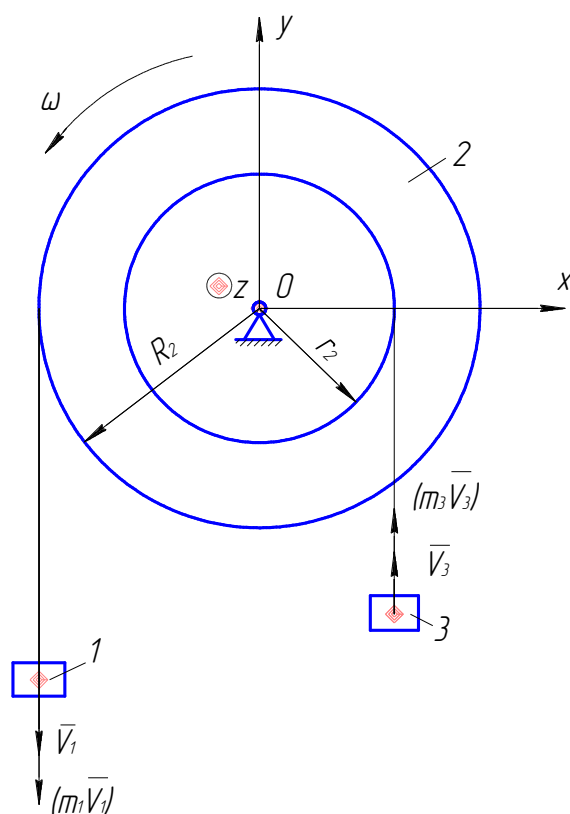
$$\text{или } L_z = I_{z1} \cdot \omega_1 + I_{z2} \cdot \omega_2 + \dots + I_{zn} \cdot \omega_n = \sum I_{zk} \cdot \omega_k.$$

Пример №2.

Дано: $I_{z2} = 0,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $m_1 = 2 \text{ кг}$; $m_3 = 1 \text{ кг}$; $\omega = 8 \text{ рад/с}$; $R_2 = 0,2 \text{ м}$; $r_2 = 0,1 \text{ м}$.

Определить: L_z – ?

Решение.



Механизм состоит из трёх тел, следовательно: $L_z = L_{z1} + L_{z2} + L_{z3}$.

Тело 1 совершает поступательное движение:

$$L_{z1} = (m_1 \cdot V_1) \cdot R_2 = m_1(\omega \cdot R_2) \cdot R_2 = m_1 \cdot \omega \cdot R_2^2 = 2 \cdot 8 \cdot 0,2^2 = 0,64 \frac{\text{кгм}^2}{\text{с}}.$$

Тело 2 совершает вращательное движение:

$$L_{z2} = I_{z2} \cdot \omega = 0,05 \cdot 8 = 0,4 \frac{\text{кгм}^2}{\text{с}}.$$

Тело 3 совершает поступательное движение:

$$L_{z3} = (m_3 \cdot V_3) \cdot r_2 = m_3(\omega \cdot r_2) \cdot r_2 = m_3 \cdot \omega \cdot r_2^2 = 1 \cdot 8 \cdot 0,1^2 = 0,08 \frac{\text{кгм}^2}{\text{с}};$$

$$L_z = 0,64 + 0,4 + 0,08 = 1,12 \left(\frac{\text{кгм}^2}{\text{с}} \right).$$

Ответ: $L_z = 1,12 \text{ кгм}^2/\text{с}$.

III общая теорема динамики. Теорема об изменении (МКД) кинетического момента системы материальных точек относительно оси и центра.

Рассмотрим систему материальных точек и для каждой запишем теорему об изменении кинетического момента относительно одного и того же центра (оси).

$$\begin{cases} \frac{d\bar{l}_{01}}{dt} = \bar{m}_0 (\bar{F}_1^e); \\ + \frac{d\bar{l}_{02}}{dt} = \bar{m}_0 (\bar{F}_2^e); \\ \frac{d\bar{l}_{0n}}{dt} = m_0 (\bar{F}_n^e). \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{l}_{01}}{dt} + \frac{d\bar{l}_{02}}{dt} + \dots + \frac{d\bar{l}_{0n}}{dt} = \bar{m}_0 (\bar{F}_1^e) + \bar{m}_0 (\bar{F}_2^e) + \dots + \bar{m}_0 (\bar{F}_n^e);$$

↓

$$\sum \frac{d\bar{l}_{0k}}{dt}$$

↓

$$\sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e)$$

Итак:

$$\sum \frac{d\bar{l}_{0k}}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e); \text{ т.к. } \sum d\bar{l}_{0k} = d \sum \bar{l}_{0k} = d\bar{L}_0 \rightarrow$$

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) \quad (5.10) - \text{теорема в дифференциальной форме.}$$

Спроецируем (5.10) на координатные оси:

$$\begin{cases} x: \frac{dL_x}{dt} = \sum m_x (\bar{F}_k^e); \\ y: \frac{dL_y}{dt} = \sum m_y (\bar{F}_k^e); \\ z: \frac{dL_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e). \end{cases} \quad (5.11) \quad \text{— та же теорема в проекции на координатные оси.}$$

Из теоремы вытекают следствия, которые представляют собой закон сохранения МКД системы:

1. Если $\sum m_0 (\bar{F}_k^e) = 0$; (формула 5.10) $\Rightarrow \frac{d\bar{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L}_0 = const.$
2. Если, например, $\sum m_y (\bar{F}_k^e) = 0$; (формула 5.11) $\Rightarrow \frac{dL_y}{dt} = 0 \Rightarrow L_y = const.$

Эта теорема используется для решения задач, в которых определяют угловую скорость и угловое ускорение.

По этой теме выдаётся задача №2 ДКР.

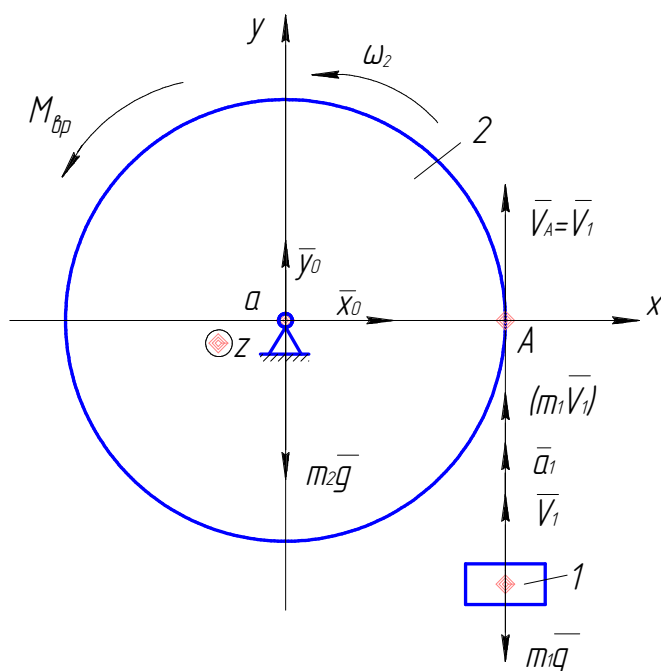
Смотри м/у № 10/3

Пример №1.

Рассмотрим пример решения задачи №2.

Дано: $m_1 = 2$ т; $m_2 = 4$ т; R_2 ; $M_{\text{вп}}$. Определить: a_1 — ?

Решение.



Для решения используем теорему об изменении момента количества движения.

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{\text{вп}}; \quad (1)$$

где: $M_z^{\text{вп}} = M_{\text{вп}} - m_1 g \cdot R_2;$

$$L_z = L_{z1} + L_{z2}.$$

Тело 1– совершает поступательное движение:

$$L_{z1} = (m_1 V_1) \cdot R_2 = 2m V_1 \cdot R_2;$$

Тело 2– совершает вращательное движение:

$$L_{z2} = I_{z2} \cdot \omega_2;$$

$$I_{z2} = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{4m R_2^2}{2} = 2m R_2^2;$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{V_1}{R_2};$$

$$L_{z2} = 2m R_2^2 \cdot \frac{V_1}{R_2} = 2m R_2 V_1.$$

Итак: $L_z = L_{z1} + L_{z2} = 2m V_1 R_2 + 2m R_2 V_1 = 4m R_2 V_1;$

Из (1) $\rightarrow \frac{d}{dt} [4m R_2 V_1] = M_{\text{вп}} - m_1 g R_2;$

$$4m R_2 \frac{dV_1}{dt} = M_{\text{вп}} - m_1 g R_2;$$

$$4m R_2 a_1 = M_{\text{вп}} - m_1 g R_2;$$

$$a_1 = \frac{M_{\text{вп}} - m_1 g R_2}{4m R_2} = \frac{M_{\text{вп}} - 2mg R_2}{4m R_2} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right].$$

Ответ: $a_1 = \frac{M_{\text{вп}} - 2mg R_2}{4m R_2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$