

Лекция №4

Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы.

I общая теорема динамики. Теорема о движении и сохранении движения центра масс.

Центр масс системы движется, как одна материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на нее действуют все внешние силы, которые приложены к системе.

Для доказательства запишем:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum (m_k \bar{r}_k)}{M} \quad \Bigg| \quad \times \quad M \Rightarrow M \cdot \bar{r}_c = \sum (m_k \bar{r}_k) \Rightarrow \text{продифференцируем по}$$

времени левую и правую части

$$\frac{M \cdot d\bar{r}_c}{dt} = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} \Rightarrow M \bar{V}_c = \sum m_k \bar{V}_k \Rightarrow \frac{M \cdot d\bar{V}_c}{dt} = \sum m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \Rightarrow M \cdot \bar{a}_c = \sum m_k \bar{a}_k ,$$

$$\text{т.к.} \quad \sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e \Rightarrow$$

$$M \cdot \bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e ; \quad (4.1)$$

$$\text{или} \quad M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \sum \bar{F}_k^e ; \quad (4.2)$$

$$\text{или} \quad M \cdot \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e \quad (4.3)$$

Спроецируем уравнение (4.1) на координатные оси:

$$\begin{aligned} x : & \left\{ \begin{aligned} M \cdot \ddot{x}_c &= \sum F_{kx}^e ; \\ y : & \left\{ \begin{aligned} M \cdot \ddot{y}_c &= \sum F_{ky}^e ; \\ z : & \left\{ \begin{aligned} M \cdot \ddot{z}_c &= \sum F_{kz}^e . \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (4.4)$$

- дифференциальные уравнения движения центра масс системы.

Из теоремы вытекают три следствия, которые представляют собой **теорему о сохранении движения центра масс системы.**

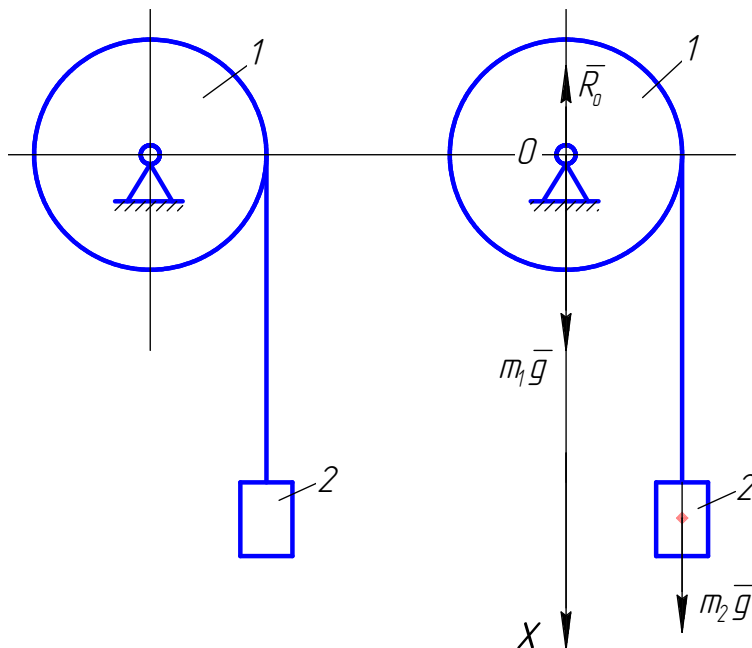
$$1. \text{ Если } \sum \bar{F}_k^e = 0, \Rightarrow M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = 0; M \neq 0; \frac{d\bar{V}_c}{dt} = 0 \rightarrow \bar{V}_c = \text{const} .$$

$$2. \text{ Если , например, } \sum F_{kx}^e = 0 \rightarrow M \ddot{x}_c = 0; M \neq 0; \ddot{x}_c = 0 \rightarrow \text{тогда}$$

$$\dot{x}_c = \text{const} \quad \text{или} \quad \dot{x}_c = V_{cx} = \text{const}$$

3. Если $\sum F_{kx}^e = 0 \rightarrow M\ddot{x}_c = 0$; $M \neq 0$; $\ddot{x}_c = 0 \rightarrow$, если в начальный момент система находилась в покое, тогда центр масс системы не будет двигаться, т.е. $\dot{x}_c = V_{cx} = 0 \rightarrow x_c = 0$.

Пример № 1. К концу троса подвешен груз массой $m_2 = 20$ кг. Барабан массы $m_1 = 10$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси. Определить реакцию оси, если груз начнет двигаться с постоянным ускорением $a_2 = 2$ м/с².



Покажем внешние силы: $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$, \bar{R}_0 . Запишем теорему о движении центра масс механической системы:

$$M\bar{a}_c = m_1\bar{g} + m_2\bar{g} + \bar{R}_0; \quad (*)$$

Выберем начало оси x в т. O и направим ее вниз. Спроецируем векторное равенство (*) на эту ось:

$$M \cdot \ddot{x}_c = m_1g + m_2g - R_0 = (m_1 + m_2)g - R_0;$$

Отсюда

$$R_0 = (m_1 + m_2)g - M \cdot \ddot{x}_c;$$

Запишем координату центра масс:

$$x_c = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}; \text{ т.к. } x_1 = 0, \text{ а } (m_1 + m_2) = M \Rightarrow$$

$$x_c = \frac{m_2 \cdot x_2}{M} \Rightarrow \text{продифференцируем дважды, определим ускорение центра масс.}$$

$$\ddot{x}_c = \frac{m_2 \cdot \ddot{x}_2}{M} ; \text{ или } \ddot{x}_c = \frac{m_2 \cdot a_2}{M} , \text{ тогда}$$

$$R_0 = (m_1 + m_2)g - M \cdot \frac{m_2 \cdot a_2}{M} = (m_1 + m_2)g - m_2 a_2 = m_1 g + m_2 (g - a_2) = \\ = 10 \cdot 9,8 + 20(9,8 - 2) = 254(\text{н})$$

Ответ: $R = 254 \text{ н.}$

Импульс силы. Количество движения материальной точки.

Введем понятие элементарного импульса.

Произведение силы на элементарный промежуток времени действия называется элементарным импульсом.

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt \quad (4.5)$$

Направление элементарного импульса совпадает с направлением линии действия силы.

Полный импульс за промежуток времени t представляет собой определенный интеграл от элементарного импульса, взятый в пределах от 0 до t , т.е.

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} \cdot dt \quad (4.6)$$

Если $F = \text{const}$, тогда импульс силы определяют по формуле:

$$\bar{S} = \bar{F} \cdot t \quad (4.7)$$

Спроецируем (4.6) на координатные оси:

$$\begin{cases} x: S_x = \int_0^t F_x dt; \\ y: S_y = \int_0^t F_y dt; \\ z: S_z = \int_0^t F_z dt \end{cases} \quad (4.8)$$

- проекция импульса на координатные оси.

Полный импульс определяем через проекции на координатные оси:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \quad (4.9)$$

- полный импульс.

Направление вектора \vec{S} определяем по направляющим косинусов:

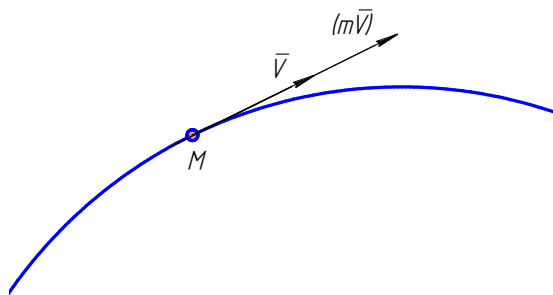
$$\begin{cases} \cos(\vec{S} \wedge x) = \frac{S_x}{S}; \\ \cos(\vec{S} \wedge y) = \frac{S_y}{S}; \\ \cos(\vec{S} \wedge z) = \frac{S_z}{S}. \end{cases} \quad (4.10)$$

- направляющие косинусов.

Единицы измерения $[S] = [\text{н} \cdot \text{с}]$.

Количество движения материальной точки.

Вектор \vec{q} , равный произведению массы точки на вектор ее скорости $[m\vec{V}]$ называется количеством движения материальной точки.



$$\vec{q} = m\vec{V} \quad (4.11)$$

Направление вектора количества движения \vec{q} совпадает с направлением вектора скорости. Единицы измерения $\vec{q} = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right]$.

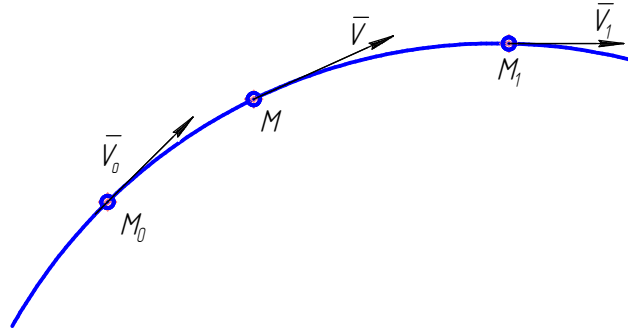
Теорема об изменении количества движения материальной точки.

Пусть т. М движется по криволинейной траектории.

При $t_0 \rightarrow$ положение т. $M_0 \rightarrow \vec{V}_0$;

$t_1 \rightarrow$ положение т. $M_1 \rightarrow \vec{V}_1$;

рассмотрим промежуточное положение при $t \rightarrow$ т. $M \rightarrow \vec{V}$.



Запишем II закон динамики:

$$m\bar{a} = \bar{F};$$

где \bar{F} - одна сила или равнодействующая нескольких сил.

Т.к. $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}$; $\Rightarrow m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}$; \Rightarrow внесем m под дифференциал

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F} \quad (4.12)$$

- теорема в дифференциальной форме.

Спроецируем (4.12) на координатные оси:

$$\begin{cases} x: \frac{d(mv_x)}{dt} = F_x; \\ y: \frac{d(mv_y)}{dt} = F_y; \\ z: \frac{d(mv_z)}{dt} = F_z. \end{cases} \quad (4.13)$$

Разделим переменные в (4.12) и проинтегрируем:

$$d(m\bar{V}) = \bar{F}dt; \Rightarrow \int_{\bar{V}_0}^{\bar{V}_1} d(m\bar{V}) = \int_0^t \bar{F}dt; \quad \int_0^t \bar{F}dt = \bar{S} \Rightarrow$$

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \bar{S} \quad (4.14)$$

- теорема в интегральной форме.

Спроецируем (4.14) на координатные оси:

$$\begin{cases} x: mv_{1x} - mv_{0x} = S_x; \\ y: mv_{1y} - mv_{0y} = S_y; \\ z: mv_{1z} - mv_{0z} = S_z. \end{cases} \quad (4.15)$$

- та же теорема, только в проекциях на координатные оси.

Из теоремы вытекают два следствия, которые представляют собой **теорему о сохранении количества движения материальной точки**.

1. Если $\bar{F} = 0$; (формула 4.12) $\Rightarrow \frac{d(m\bar{V})}{dt} = 0; \Rightarrow m\bar{V} = \text{const}$.

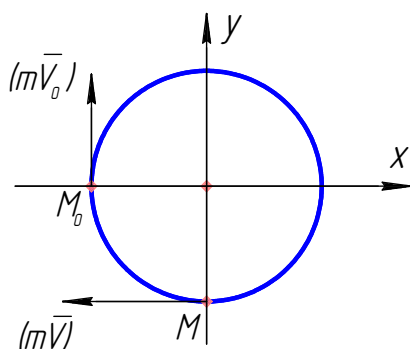
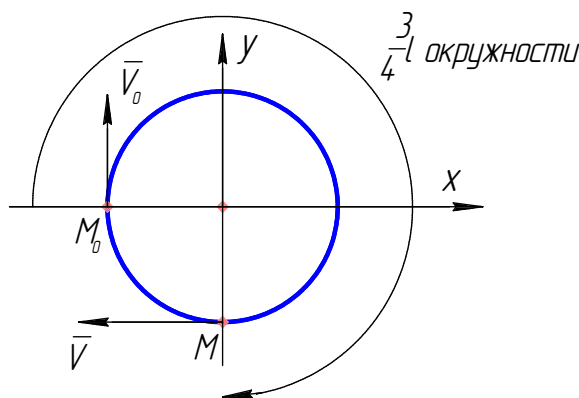
2. Если, например, $\bar{F}_y = 0$; (формула 4.13) $\Rightarrow \frac{d(mV_y)}{dt} = 0; \Rightarrow mV_y = \text{const}$.

Пример № 2

Материальная точка массы $m = 1$ кг движется по окружности с постоянной скоростью $V = 10$ м/с из т. M_0 .

Определить импульс сил, действующих на точку, за время, в течение которого точка пройдет $\frac{3}{4}$ длины окружности.

Решение.



Применим теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме, только в проекции на координатные оси.

Зная направления скоростей, покажем направления векторов количества движения.

$$x: S_x = mV_x - mV_{0x} = -mV - 0 = -mV;$$

$$y: S_y = mV_y - mV_{0y} = 0 - mV_0 = -mV_0.$$

Т.к. $V = \text{const}$ по условию задачи, следовательно,

$$V = V_0 = 10 \text{ м/с}.$$

Импульс силы

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(-mV)^2 + (-mV_0)^2} = \sqrt{(-10m)^2 + (-10m)^2} = 10m\sqrt{2} = 1 \cdot 10 \cdot 1,41 = 14,1 (\text{нс})$$

Ответ: $S = 14,1$ (нс)/

Количество движения системы материальных точек.

Количеством движения системы материальных точек будем называть векторную величину \bar{Q} , равную геометрической сумме количеств всех точек системы:

$$\bar{Q} = \sum (m_k \bar{V}_k) \quad (4.16)$$

Запишем радиус-вектор центра масс.

$$\bar{r}_c = \frac{\sum (m_k \bar{r}_k)}{M}; \quad | \quad \times \quad M \Rightarrow$$

$$\bar{r}_c \cdot M = \sum m_k \bar{r}_k \Rightarrow \text{продифференцируем:}$$

$$M \cdot \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum m_k \cdot \frac{d\bar{r}_k}{dt}, \text{ где } \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{V}_c, \quad \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{V}_k, \text{ тогда } M \cdot \bar{V}_c = \sum m_k \cdot \bar{V}_k \Rightarrow$$
$$Q = M \cdot \bar{V}_c \quad (4.17)$$

- количество движения системы.

Спроецируем (4.17) на координатные оси:

$$\begin{aligned} x: & \begin{cases} Q_x = M \cdot \dot{x}_c; \\ y: & \begin{cases} Q_y = M \cdot \dot{y}_c; \\ z: & \begin{cases} Q_z = M \cdot \dot{z}_c. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

- количество движения системы в проекциях на координатные оси.

Зная проекции, можно определить полное количество движения системы:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} \quad (4.19)$$

- полное количество движения системы.

II общая теорема динамики. Теорема об изменении и сохранении количества движения системы материальных точек.

Рассмотрим систему материальных точек. Запишем (4.17):

$\bar{Q} = M \cdot \bar{V}_c \Rightarrow$ продифференцируем по времени левую и правую части:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M \frac{d\bar{V}_c}{dt}; \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = M \bar{a}_c; \text{ т.к. } M \bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e; \Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e \quad (4.20)$$

- теорема об изменении количества движения системы материальных точек в дифференциальной форме.

Спроецируем (4.20) на координатные оси:

$$\begin{cases} x: \frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e; \\ y: \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e; \\ z: \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \end{cases} \quad (4.21)$$

- та же теорема, только в проекциях на координатные оси.

Проинтегрируем (4.20):

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e \quad \Big| \quad x(dt) \Rightarrow d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^e \cdot dt; \Rightarrow$$

$$\int_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}_1} d\bar{Q} = \int_0^t \sum \bar{F}_k^e \cdot dt; \Rightarrow \bar{Q} \Big|_{\bar{Q}_0}^{\bar{Q}_1} = \sum \bar{S}^e; \Rightarrow$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}^e \quad (4.22)$$

- теорема в интегральной форме.

Спроецируем (4.22) на координатные оси:

$$\begin{cases} x: Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_x^e; \\ y: Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_y^e; \\ z: Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_z^e. \end{cases} \quad (4.23)$$

- та же теорема, только в проекции на координатные оси.

Из теоремы вытекают следствия, которые представляют собой **закон сохранения движения системы материальных точек**.

1. Если $\sum \bar{F}_k^e = 0$; (формула 4.20) $\Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = 0$; $\Rightarrow \bar{Q} = \text{const}$

2. Если, например, $\sum \bar{F}_{kz}^e = 0$; (формула 4.21) $\Rightarrow \frac{d\bar{Q}_z}{dt} = 0$; $\Rightarrow \bar{Q}_z = \text{const}$.