УДК 621.311.153.22:519.2.001.24

ІМІТАЦІЯ КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖАХ МЕТОДОМ ЕЛЕМЕНТНИХ ПРОЦЕСІВ

Курінний Е.Г., Циганкова Н.В.
Донецький державний технічний університет
led@.dgtu.donetsk.ua

The problem of imitation of system of correlative random processes has been considered. It has been suggested to imitate every process as the sum of easy element processes some part of which is connection. The method of imitation can be used for decision of unlinear problems of electrical engineering.

Постановка задачі. Широкий клас задач електропостачання промислових підприємств є нелінійними. По-перше, це зумовлено тим, що параметри режиму є векторами. По-друге, вплив цих параметрів на електроприймачі і мережі залежить від відповідних втрат потужності, що потребує аналізувати квадрати процесів. Наприклад, це притаманне такому показнику ЕМС, як доза флікеру [1], який визнано міжнародною спільнотою - на відміну від дози коливань напруги [2]. По-третє, деякі показники являють собою нелінійні функції випадкових аргументів, як, наприклад, функція поділу двох величин, яка відтворює питомі витрати енергоносіїв і тангенс фі.

Література по методам імітації окремих випадкових процесів дуже велика, проте публікації не містять даних про імітацію корельованих процесів. Метою роботі є розробка метода імітації корельованих процесів $X(t)$ і $Y(t)$ відповідно до типової задачі електропостачання, яка полягає в підсумовуванні навантажень електроприймачів.

Для визначеності розглядається система двох нормальних стаціонарних процесів, яка більш за все зустрічається у практичних задачах: наприклад, процеси активної і реактивної потужностей викликають нагрів елементів мережі, а також втрати і коливання напруги, які негативно впливають на електроприймачі. Розповсюдження результатів на більшу кількість процесів і інші імовірнісні розподіли, які відповідають схемі суми, не викликає труднощів.

Ідея методу. Для імітації процесів $X(t)$ і $Y(t)$ застосуємо метод елементних процесів (ЕП) [3]. Він полягає в тому, що реалізація процесу $X(t)$ з заданою кореляційною функцією $K_X(\tau)$ знаходиться як сума n незалежних ЕП $x(t)$, кожний з яких має кореляційну функцію

$$k_x(\tau) = \frac{1}{n} K_X(\tau). \qquad (1)$$

Імовірнісні розподіли ЕП не мають значення, бо при підсумовуванні великої кількості n процесів розподіл суми збігається з нормальним. Таким же чином знаходиться і реалізація $Y(t)$.

Для отримання ЕП застосовуються послідовності випадкових чисел ξ , які виробляються датчиком випадкових величин. Ці послідовності піддаються перетворенням L_x і L_y за умовою відтворення кореляційних функцій $k_x(\tau)$ і $k_y(\tau)$ відповідних ЕП.

Ідея методу, що пропонується, полягає в тому, що m із n послідовностей випадкових чисел $\xi_1,\ldots,\xi_m$ приймаються однаковими для обох процесів: зі знаком, який збігається зі знаком заданого коефіцієнту кореляції R. Відповідні «парні» ЕП (знак ~) $\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m$ і $\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_m$ будуть корельованими, а останні процеси $x_{m+1},\ldots,x_n$ і $y_{m+1},\ldots,y_n$ – ні. Структурна схема імітації зображена на рис.1, де для зручності позначено: $\eta_{m+1} = \xi_{n+1},\ldots,\ \eta_n = \xi_{2n}$.

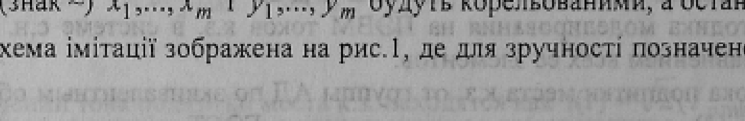

Рисунок 1 –Структурна схема імітації процесів

Наявність парних ЕП робить процеси $X(t)$ і $Y(t)$ також корельованими. Задача полягає у визначенні кількості m парних ЕП за умовою відтворення R.

Кількісні співвідношення. Як відомо [4], випадковий процес, який надходить на вхід системи зі сталою часу T_c, можна розглядати як білий шум за умовою, що його стала кореляції буде на порядок менше, ніж T_c. Генератор випадкових чисел дає послідовності з нормованою кореляційною функцією у вигляді прямокутного трикутника з вершиною одиниця і основою, яка дорівнює інтервалу часу Δ між суміжними значеннями послідовності. Стала кореляції $\tau_{k\xi}$ такого процесу дорівнює $\Delta/2$, тому послідовність ξ можна вважати білим шумом, якщо

$$\Delta << 2T_c. \tag{2}$$

Оскільки імітується декілька процесів, то в нерівності (2) береться найменша стала часу.

Стандарти σ_ξ усіх послідовностей однакові. За умовою (1) параметр білого шуму становить:

$$c = 2\sigma_\xi^2 \tau_{k\xi} = \sigma_\xi^2 \Delta. \tag{3}$$

Кореляційна функція білого шуму

$$k_\xi(\tau) = \pi c \delta(\tau) \tag{4}$$

визначається через дельта-функцію $\delta(\tau)$.

Для подальшого скористуємося фундаментальним положенням теорії ймовірностей про те, що стаціонарний процес $x(t)$ є результат проходження білого шуму через умовну лінійну систему з ваговою $g_x(t)$ і амплітудною частотною $A_x(\omega)$ функціями, параметри яких залежать від кореляційної функції $k_x(\tau)$ або відповідної спектральної щільності $S_x(\omega)$.

Оскільки параметр c є спектральною щільністю білого шуму, вигляд умовної системи зручно вибрати по амплітудній частотній функції згідно з рівнянням

$$A_x(\omega) = \sqrt{S_x(\omega)/c} = \frac{1}{\sigma_\xi}\sqrt{S_x(\omega)/\Delta}. \tag{5}$$

Суттєво, що незалежно від способу отримання ЕП, їх зв'язок з білим шумом визначається інтегралами Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t g_x(u)\xi(t-u)du, \qquad y(t) = \int_0^t g_y(v)\xi(t-v)dv, \tag{6}$$

де u і v - змінні інтегрування.

Згідно з формулою (6.2.10) з [4] знайдемо кореляційний момент між парними ЕП в стаціонарному стані (при $t \to \infty$):

$$\widetilde{k}_{xy} = \pi c \int_0^\infty \int_0^\infty g_x(u) g_y(v) \delta(u-v) du dv = \pi c \int_0^\infty g_x(v) g_y(v) dv. \tag{7}$$

Згідно з (1) стандарти ЕП:

$$\sigma_x = \sqrt{k_x(0)} = \sigma_X / \sqrt{n}, \qquad \sigma_y = \sigma_Y / \sqrt{n}$$

в $\sqrt{n}$ менше за стандарти σ_X і σ_Y шуканих процесів.

Коефіцієнт кореляції між парними ЕП

$$\widetilde{r}_{xy} = \frac{\widetilde{k}_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = n\frac{\widetilde{k}_{xy}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{8}$$

Перейдемо до характеристик шуканих процесів. Позначення сум приймемо за способом Гауса:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = [x]_1, \qquad \sum_{i=m+1}^{n} x_i = [x]_2.$$

Реалізації шуканих процесів знаходяться шляхом підсумовування ЕП зі своїми знаками:

$$X = [x]_1 + [x]_2, \qquad Y = \pm[y]_1 + [y]_2.$$

Взаємні кореляційні функції між x і $\widetilde{x}$ дорівнюють нулю, бо між відповідними білими шумами ξ не має зв'язку, а тому кореляційна функція суми ЕП $x(t)$ збігається з заданою $K_X(\tau)$. Покажемо, що це виконується і для другого процесу. Дійсно, оскільки y і $\widetilde{y}$ не корельовані, то згідно з теоремою про кореляційну функцію суми або різниці некорельваних процесів знайдемо

$$[\widetilde{k}_y(\tau)]_1 + [k_y(\tau)]_2 = nk_y(\tau) = K_Y(\tau).$$

Позначивши через M операцію знаходження математичного очікування, визначимо взаємний кореляційний момент:

$$K_{XY} = M\{([\widetilde{x}]_1 + [x]_2)(\pm[\widetilde{y}]_1 + [y]_2)\}.$$

У цьому виразі лише математичне очікування добутку$[\widetilde{x}]_1[\widetilde{y}]_1$ сум парних ЕП відрізняється від нуля. В свою чергу, у останньому добутку лише добутки $\widetilde{x}\widetilde{y}$ з однаковими індексами мають однакові кореляційні моменти, які визначаються формулою (7). Тому остаточно знайдемо

$$K_{XY} = \pm M\{[\widetilde{x}]_1[\widetilde{y}]_1\} = \pm[\widetilde{k}_{xy}]_1 = \pm m\widetilde{k}_{xy}.$$

За визначенням коефіцієнт взаємної кореляції між процесами

$$R = \frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \pm\frac{m\widetilde{k}_{xy}}{\sigma_X\sigma_Y} = \pm m\left|\widetilde{r}_{xy}\right|/n, \tag{9}$$

де враховане співвідношення (8). Воно відноситься до додатних ЕП, тому в формулі (9) потрібно брати абсолютне значення коефіцієнта кореляції.

Формула (9) дає змогу знайти шукану кількість

$$m = nR/\left|\widetilde{r}_{xy}\right|. \tag{10}$$

Якщо імітуються процеси з однаковими нормованими кореляційними функціями, то у цьому випадку $\widetilde{k}_{xy} = \sigma_x\sigma_y$, $|\widetilde{r}_{xy}| = |\widetilde{r}_{xx}| = 1$, а потрібна кількість парних ЕП $m = n|R|$.

Реалізація методу. Імітація стаціонарних ергодичних процесів може бути здійснена як «по реалізації» великої тривалості, так і «по ансамблю» з великою кількістю N реалізацій. В обох випадках потрібно вилучити з розгляду початковий інтервал $T_п$ часу, в межах якого відбувається перехідний процес від нульових початкових умов. Тривалість цього інтервалу дорівнює 5-6 найбільших сталих часу $T_с$.

Імітація замінює експеримент, тому якість відтворення характеристик процесів оцінюється відомими методами математичної статистики: по критеріям згоди – для статистичних (знак ^) розподілів і довірчим інтервалам – для кореляційних функцій і коефіцієнтів кореляції. Оскільки нульове і одиничне значення коефіцієнту кореляції відтворюється точно, то найбільшу похибку слід очікувати при $|R|$=0,5.

Імітація по ансамблю має деякі переваги. По-перше, з умови визначення кореляційної функції на інтервалі значень аргументу від 0 до τ_{max} тривалість імітації достатньо брати рівною $T_п+\tau_{max}$. По-друге, зріз по ансамблю буде кратний величині Δ, тому помилка від дискретності часу зникає. По-третє, метод імітації по своїй суті не гарантує відтворення характеристик для кожної реалізації, тому є вірогідність появи реалізації, яку потрібно виключити з розгляду. При імітації по ансамблю це практично не позначається на результаті усереднення, бо ця ймовірність дуже мала, а значення, які дуже відрізняються від інших, можна виключити згідно із принципом практичної впевненості.

Довірчу ймовірність $E_д$ звичайно приймають рівною 0,9, що відповідає однаковим імовірностям виходу за верхню і нижню межі довірчого інтервалу: по 0,05. Межі інтервалів визначаються формулами:

$$\hat{\sigma}_{max,min} = (1\pm\beta_\sigma)\sigma, \qquad \hat{R}_{max,min} = \mathrm{th}\left(0{,}5\ln\frac{1+R}{1-R} \pm \frac{\beta_R}{\sqrt{N-3}}\right),$$

в яких коефіцієнти β_σ і β_R беруться з табл.3 і 4 [5]. При $E_д$ = 0,9 і $N \geq 25$ маємо β_R = 1,65.

Експоненціальні кореляційні функції. В теорії електричних навантажень широко використовується математична модель випадкових процесів, які мають експоненціальну кореляційну функцію

$$K_X(\tau) = \sigma_X^2\exp(-\alpha_X|\tau|),$$

де α_X – параметр. Спектральна щільність ЕП у цьому випадку дорівнює

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha_X(1+\omega^2/\alpha_X^2)}.$$

Підставивши це рівняння в формулу (5), знайдемо частотну функцію умовної системи

$$A_x(\omega) = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_X\Delta}}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2/\alpha_X^2}},$$

якій відповідає інерційна ланка з коефіцієнтом передачі

$$a_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_X\Delta}},$$

зі сталою часу $T_x = 1/\alpha_X$ і ваговою функцією $g_x(t) = a_x\alpha_X\exp(-\alpha_X t)$. Аналогічно знайдемо a_y і T_y. Підстановка вагових функцій в формули (7) і (8) дає коефіцієнт кореляції

$$\widetilde{r}_{xy} = 2\sqrt{\alpha_X\alpha_Y}/(\alpha_X+\alpha_Y). \tag{11}$$

Потрібна кількість парних ЕП

$$m=\frac{n(\alpha_X+\alpha_Y)|R|}{2\sqrt{\alpha_X\alpha_Y}}. \tag{12}$$

На рис.2 штриховими лініями показані статистичні кореляційні функції двох імітованих процесів з різними стандартами $\sigma_X = 0{,}5$ і $\sigma_Y = 0{,}6$ умовних одиниць (у.о.), однаковими параметрами $\alpha = 0{,}5$ с$^{-1}$, коефіцієнтом кореляції $R = -0{,}5$ при $\Delta = 0{,}25$ с. Теоретичні функції показані безперервними лініями. Умови імітації спеціально були прийняті такими, щоб теоретичні похибки були досить великими: припустимі відхилення для дисперсій дорівнюють +24,5% від їх теоретичних значень, а для коефіцієнта кореляції – від -25,5 до 21,6%. Не зважаючи на це фактичні похибки були значно меншими: усього 0,8% для дисперсій і 14,9% для коефіцієнта кореляції.

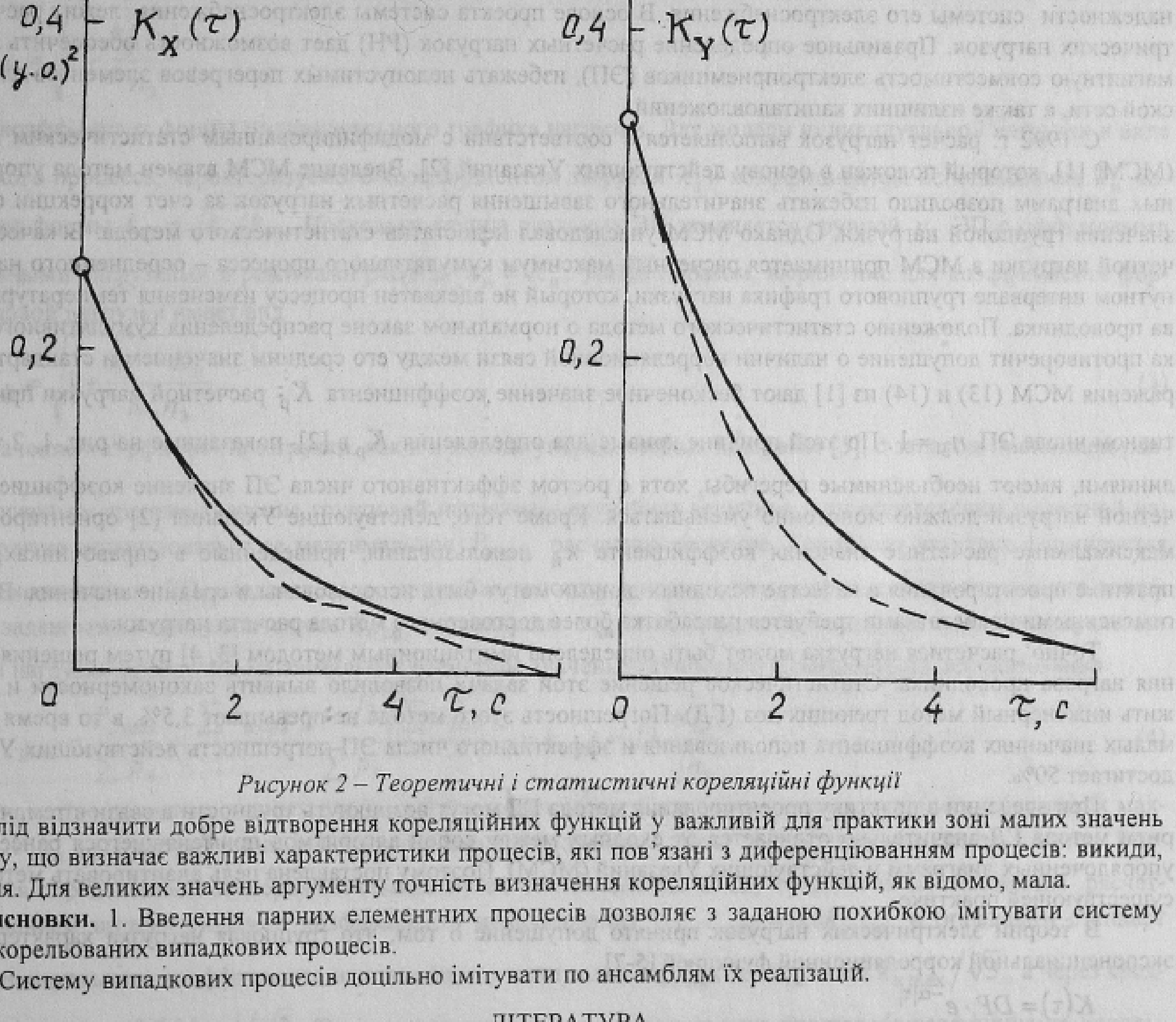

Рисунок 2 – Теоретичні і статистичні кореляційні функції

Слід відзначити добре відтворення кореляційних функцій у важливій для практики зоні малих значень аргументу, що визначає важливі характеристики процесів, які пов'язані з диференціюванням процесів: викиди, коливання. Для великих значень аргументу точність визначення кореляційних функцій, як відомо, мала.

Висновки. 1. Введення парних елементних процесів дозволяє з заданою похибкою імітувати систему взаємно корельованих випадкових процесів.

2. Систему випадкових процесів доцільно імітувати по ансамблям їх реалізацій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Flickermeter. Functional and design specification.-Geneva: IEC Report, 1986, Publication 868. - p.31.
2. ГОСТ 13109-87. Электрическая энергия. Требования к качеству электрической энергии в электрических сетях общего значения.-Введ.01.01.89.
3. Куренный Э.Г., Дмитриева Е.Н. Статистическое моделирование нормальных случайных процессов в заводских электрических сетях. –Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1977, № 5.- С.128-140.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. –М.: Советское радио, 1966. - 678 с.
5. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Наука, 1979. - 496 с.