ПНЕВМОТРАНСПОРТ В РЕЖИМЕ УПРУГОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Чальцев М. Н., Мусиенко В. Н. (АДИ «ДонНТУ», г. Горловка, Украина)

The equation of gas filtration through a bed of a bulk material is given for pneumatic conveying basing on the Darcy law and on the assumption of compressibility of a solid-gas mixture. The example of the decision of the linearizing equation of filtration, suitable for calculation of pressure in bunkers and pipelines of the various forms is given.

Многие процессы пневмотранспорта сопровождаются фильтрацией газа через зернистый сыпучий материал. Наиболее существенное влияние оказывает фильтрация на начальной стадии движения транспортируемой смеси при значительной ее концентрации.

В накопительных бункерах, в емкостях камерных насосов, на вертикальных или наклонных участках трассы накапливается значительное количество сыпучего транспортируемого материала в плотном состоянии. Фильтрация воздуха в этих слоях сопровождается термомассообменом, генерирует силовые поля, что приводит в движение транспортируемую смесь.

Согласно [1], при оценке устойчивости слоя, скорость фильтрации и давление являются наиболее существенными характеристиками процесса перехода пылегазовой смеси из плотного в псевдосжиженное состояние. В этой связи представляется целесообразным всестороннее изучение процессов фильтрации даже на современном уровне изученности вопроса.

Существенно важной характеристикой процесса является пористость слоя, представляющая отношение объема пустот ко всему объему слоя.

Сложность процессов, происходящих в пневмотранспортных системах, не позволяет достаточно описать их математически. Поэтому использование идеализированных моделей, базирующихся на феноменологическом представлении, имеет большое практическое значение.

Основополагающим уравнением фильтрации, как известно, является уравнение закона Дарси:

$$\overline{\omega} = -C_{\Phi}\nabla H = -C_{\Phi}\nabla\left(\frac{P}{\gamma} - Z\right), \qquad (1)$$

где $\overline{\omega}$ – скорость фильтрации;

$\nabla(...) = \mathrm{grad}(...)$;

$H = \dfrac{P}{\gamma} + Z$ – напор;

P – давление;

Z – нивелирная высота;

$\gamma = \rho g$ – объемный вес жидкости или газа;

ρ – его плотность;

g – ускорение свободного падения;

C_{Φ} – коэффициент фильтрации [2, 3].

Коэффициент фильтрации вычисляется по формуле:

$$C_Ф = \frac{k_n \gamma}{\mu} = \frac{k_n g}{\nu}, \qquad (2)$$

где k_n – коэффициент проницаемости среды;

μ – коэффициент динамической вязкости газа;

ν – кинематический коэффициент вязкости, связанный с первым зависимостью $\mu = \rho \nu$ [3].

Физическая скорость движения газа $\overline{v}$ связана со скоростью фильтрации зависимостью

$$\overline{v} = -\frac{1}{m_n}\overline{\omega}, \qquad (3)$$

где m_n – пористость слоя сыпучей среды [3].

В литературе приведены различные зависимости, позволяющие определить пористость [1]. Однако они не учитывают изменение этой величины под действием газа в процессе его фильтрации.

Пористость зависит от таких факторов как форма и размеры частиц сыпучего материала, способов и средств его загрузки в емкость и др. однако, давление газа в процессе его фильтрации является одним из наиболее существенных факторов, влияющих на параметр m_n.

Сложную зависимость можно описать, используя понятие об упругой фильтрации [3].

Согласно [3] эффективная плотность газа в пустотах и пористость определяются формулами:

$\tilde{\rho} = m_n \rho$;

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_1 (P - P_0)}; \qquad (4)$$

$m_n = m_0 e^{\beta_2 (P - P_0)}$,

где $\tilde{\rho}$ – эффективная плотность;

ρ – плотность газа;

ρ_0, m_0 – фиксированные значения плотности и пористости соответственно при давлении $P = P_0$;

P_0 – давление до начала фильтрации (начальное давление);

β_1, β_2 – коэффициенты объемного сжатия и его фильтрующей среды соответственно.

Заметим, что экспоненциальная зависимость плотности и пористости от перепада давлений имеет достаточно строгое теоретическое обоснование, основанное на предположении об упругости объемной деформации.

Предположение о линейной упругости деформации объема для сыпучих сред обосновывается на теории пластичности [4–6]. Объемная деформация газов так же упруга, но не линейна. Вместе с тем эту зависимость можно достаточно точно аппроксимировать линейной функцией в небольшом диапазоне изменения давлений.

В дальнейшем мы будем изучать процесс при небольших перепадах давлений. Поэтому коэффициент β_1 вычисляется как секущая диаграммы давление – объемная деформация в окрестности точки ρ_0 или как касательная к кривой в этой точке.

Величины $\beta_1\left(P-P_0\right)$ и $\beta_2\left(P-P_0\right)$ представляют собой объемную деформацию газа и сыпучей среды соответственно.

Можно показать, что общее решение уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\overline{v}=0 \qquad (5)$$

имеет вид:

$$\rho=\rho_0 e^{-\left(\Theta-\Theta_0\right)}, \qquad (6)$$

где ρ_0, Θ_0 – соответственно начальные значения плотности и объемной деформации;

$\Theta=\int\limits_0^t \nabla\cdot\overline{v}d\tau$ – деформация объема;

$\nabla\cdot\overline{v}=\dfrac{\partial\Theta}{\partial t}$ – дивергенция скорости, определяющая скорость объемного расширения среды.

При этом необходимо условие равенства нулю конвекции объемной деформации

$$\overline{v}\cdot\nabla\Theta=0. \qquad (7)$$

Иначе говоря, объемное расширение среды происходит в направлении ортогональном линиям тока (скорости движения среды).

В предположении о линейной упругости объемной деформации, учитывая, что положительной считается деформация расширения, мы получаем формулы (4). Как видим, зависимости (4) достаточно строго теоретически обоснованы.

Указанные выше зависимости позволяют составить уравнение упругой фильтрации в процессе пневмотранспорта.

Преобразуем уравнение (1) к более удобному виду.

Во-первых, заметим, что при перепаде нивелирных высот до нескольких сот метров, влияние, оказываемое величиной Z, в формуле (1) будет не более нескольких процентов, что меньше точности ввода исходных данных, определяемых на основании опыта.

Действительно, сравним величины $\frac{P}{\rho}$ и gZ. Первая из них определяет квадрат скорости звука в газе [2] и имеет порядок в нормальных климатических условиях 10^5 м^2/с^2. Величина gZ при Z меньше нескольких сот метров имеет порядок 10^3 м^2/с^2. По сравнению с P/ρ имеем порядок малости 10^{-2}. Поэтому, пренебрегая вторым слагаемым под знаком градиента в формуле (1), мы допустим ошибку меньше погрешности измерений исходных параметров.

Таким образом, пренебрегая влиянием нивелирных высот на процесс фильтрации, перепишем уравнение (1) в таком виде

$$\overline{\omega} = -\frac{k_n}{v}\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) = -\frac{k_n}{v}\left(\frac{1}{\rho}\nabla P + P\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right). \tag{8}$$

Второе слагаемое в формуле (11) преобразуем с использованием уравнений (4).

Имеем:

$$P\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{P}{\rho^2}\nabla\rho. \tag{9}$$

Поскольку $\frac{1}{\rho}\nabla\rho = \nabla \ln\rho$, то уравнение (9) записываем так:

$$P\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{P}{\rho}\nabla \ln\rho.$$

Используя уравнение (4) получим:

$$P\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{\beta_1 P}{\rho}\nabla P. \tag{10}$$

Таким образом, уравнение (8) принимает следующий вид:

$$\overline{\omega} = -\frac{k_n\left(1-\beta_1 P\right)}{v}\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{11}$$

Множитель $\frac{k_n\left(1-\beta_1 P\right)}{v}$ можно понимать как коэффициент фильтрации сыпучей среды в процессе пневмотранспортирования в режиме упругой фильтрации. С увеличением давления этот коэффициент уменьшается и, наоборот, с уменьшением давления он возрастает.

Давление в процессе упругой фильтрации играет двоякую роль. С одной стороны увеличение давления приводит к повышению плотности газа и пористости сыпучей среды, но с другой стороны это уменьшает коэффициент, что снижает скорость фильтрации.

Следует, однако, заметить, что произведение коэффициента упругости на давление, или, что то же, отношение давления к модулю упругости, достаточно малая безразмерная величина, имеющая порядок $10^{-2} \div 10^{-3}$. Поэтому влияние давления на коэффициент фильтрации будет не таким уж и большим.

Для получения замкнутой системы уравнений, привлекаем уравнение неразрывности (5), записанное в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\left(\rho\bar{v}\right) = 0.$$

В это уравнение вместо плотности нужно подставить эффективную плотность, используя формулу (4), а вместо скорости фильтрации – физическую скорость, определяемую уравнением (3). В результате получаем

$$\frac{\partial\left(m_n\rho\right)}{\partial t} = \nabla\cdot\left(\frac{k_n\left(1-\beta_1 P\right)}{v}\nabla P\right). \quad (12)$$

Производную по времени от эффективной плотности можно линеаризовать на основании нижеследующего.

Разложим функцию $m_n\rho$ в степенной ряд в окрестности точки P_0

$$m_n\rho = m_0\rho_0 e^{\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(P-P_0\right)} = m_0\rho_0\left(1+\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(P-P_0\right)+...\right). \quad (13)$$

Безразмерная величина $\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(P-P_0\right)$ имеет порядок $10^{-2} \div 10^{4}$. Поэтому, ограничиваясь линейным членом ряда (13), и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получим

$$m_n\rho \cong m_n\rho\left(1+\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(P-P_0\right)\right). \quad (14)$$

В таком случае модно записать достаточно точно:

$$\frac{\partial\left(m_n\rho\right)}{\partial t} \cong m_0\rho_0\left(\beta_1+\beta_2\right)\frac{\partial P}{\partial t}. \quad (15)$$

Уравнения (12) с использованием (15) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \nabla\cdot\left(\chi\nabla P\right), \quad (16)$$

где

$$\chi = \frac{k_n\left(1-\beta_1 P\right)}{v m_0\rho_0\left(\beta_1+\beta_2\right)}. \quad (17)$$

Величина χ определяет коэффициент пьезопроводности среды. Он характеризует способность среды передавать давление так же, как коэффициент теплопроводности – способность проводить тепло.

Если в сыпучей среде в процессе пневмотранспортирования происходит тепломассообмен и (или) фильтрация происходит в физических полях различной природы, то уравнение (16) будет неоднородным и его нужно записать с учетом влияния указанных факторов в таком виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\chi \nabla P \right) = F, \tag{18}$$

где F – функция, характеризующая влияние тепломассообмена и физических полей на процесс упругой фильтрации.

Уравнения (16) или (18) нелинейные уравнения в частных производных второго порядка параболического типа. В общем случае интегрирование таких уравнений сопряжено с большими математическими трудностями.

Однако, заметим, что безразмерная величина $\beta_1 P$, имеющая порядок $10^{-2} \div 10^{-3}$, может быть принята в качестве малого параметра, характеризующего отклонение коэффициента пьезопроводности от величины

$$\chi_0 = \frac{k_n}{v m_0 \rho_0 \left(\beta_1 + \beta_2 \right)}. \tag{19}$$

Это позволяет интегрировать уравнения (16) ил (18) методом малого параметра. При этом с достаточно большой степенью точности можно ограничить решение первым или вторым приближением.

Еще одним упрощением, позволяющим облегчить интегрирование уравнений (16) и (18), является то, что давление незначительно зависит от времени, поскольку величина $\left(\beta_1 + \beta_2 \right) \frac{\partial P}{\partial t}$ имеет порядок $10^{-2} \div 10^{-4}$ с$^{-1}$. Поэтому, пренебрегая производной давления по времени по сравнению с величиной $\nabla \cdot \left(\chi \nabla P \right)$, мы допускаем совсем небольшую ошибку.

В этом случае уравнение (16) принимает более простой вид:

$$\nabla \cdot \left(\frac{k_n \left(1 - \beta_1 P \right)}{v} \nabla P \right) = -\nabla \left(\frac{k_n}{2 v \beta_1} \cdot \nabla \left(1 - \beta_1 P \right)^2 \right) = 0. \tag{20}$$

Если коэффициент проницаемости и коэффициент кинематической вязкости не зависят от координат, то уравнение (20) преобразуется в уравнение Лапласа относительно функции $\left(1 - \beta_1 P \right)^2$

$$\Delta \left(1 - \beta_1 P \right)^2 = 0. \tag{21}$$

Очевидно, решить это линейное уравнение гораздо проще, чем исходное уравнение.

Когда тепломассообмен и влияние физических полей на фильтрацию имеют существенные значения, вместо уравнения (21) нужно записать уравнение Пуассона:

$$\Delta\left(1-\beta_1 P\right)^2 = -\frac{2\nu\beta_1}{k_n}F. \qquad (22)$$

Это так же линейное уравнение, методы решений которого хорошо разработаны.

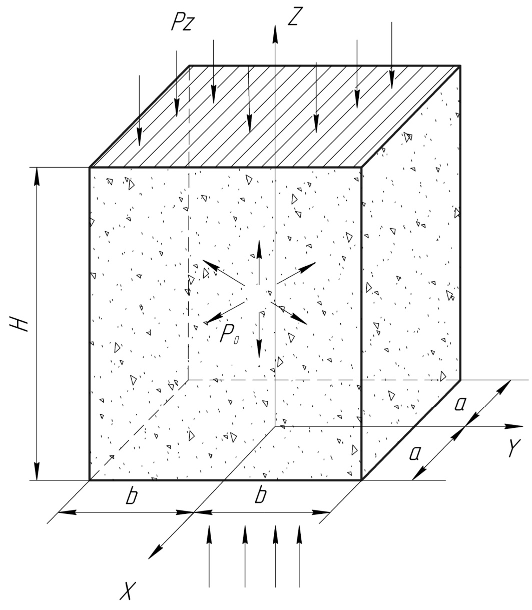
Таким образом, получено уравнение упругой фильтрации (16) или (18) и предложены методы его решения. Следует отметить, что данное уравнение, отписывающее фильтрацию газа в пневмотранспорте сыпучих материалов, отличается от уравнения фильтрации газов в пористых средах, например, в массивах горных пород под землей, которое имеет вид для однородной среды [3]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k_n}{2\mu m_n}\Delta P^2. \qquad (23)$$

В качестве примера интегрирования уравнения (16) рассмотрим задачу об упругой фильтрации газа в бункере или трубопроводе на вертикальных участках трассы.

Бункер в форме прямоугольного параллелепипеда или кругового цилиндра высотой H засыпан сыпучим материалом и в этом материале установилось постоянное равномерное давление до начала фильтрации, равное P_0.

Затем, в некоторый момент времени, соответствующий началу фильтрации, на торцевые поверхности бункера, ограничивающие сыпучий материал по высоте, подали равномерное и постоянное давление P_1 на нижней поверхности и P_2 на верхней поверхности. Под действием перепада давлений на граничных поверхностях происходит фильтрация газа через сыпучий материал.



Задача состоит в определении закона распределения давления в пространстве и времени при распространении газа через сыпучий материал, заполняющий бункер.

Рассмотрим сначала бункер в форме прямоугольного параллелепипеда. Введем декартову систему координат. Ее начало разместим в центре тяжести нижнего основания.

Составим краевые условия задачи:

1) начальное условие сводится к тому, что при $t = 0$, $P = P_0$.

$$\left(P\left(x, y, z, t = 0\right)\right) = P_0; \tag{24}$$

2) граничные условия:

$$\begin{cases} P\left(x, y, z = 0, t\right) = P_1 & \left(P\big|_{z=0} = P_1\right) \\ P\left(x, y, z = H, t\right) = P_1 & \left(P\big|_{z=H} = P_2\right). \end{cases} \tag{25}$$

На боковых поверхностях $x = \pm a$; $y = \pm b$ необходимо задать условие непроницаемости стенок бункера для газа. На этих плоскостях скорость фильтрации равна нулю. Поэтому, согласно (11), имеем:

$$\overline{\omega} \cdot \overline{i} = \omega_x = -\frac{k_n\left(1 - \beta_1 P\right)}{v} \cdot \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = 0$$

или, что то же $\left.\dfrac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = 0.$ (26)

Аналогично получаем $\left.\dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=\pm b} = 0.$ (27)

Таким образом, мы сформулировали смешанную задачу для уравнения фильтрации. Решим эту задачу в упрощенной постановке без учета влияния давления на коэффициент фильтрации. В этом случае уравнение (16) принимает вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi_0 \Delta P, \tag{28}$$

где χ_0 определяется по формуле (19).

Уравнение (28) сходно с уравнением теплопроводности и уравнением диффузии для однородных сред. Методы решения этих уравнений приведены в литературе [7].

Граничному условию (25) можно удовлетворить, приняв частное решение уравнения (28) в виде:

$$P^* = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{H} Z. \tag{29}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что давление P^*, определяемое формулой (29), удовлетворяет уравнению (28) и граничному условию (25). Однако, это решение не удовлетворяет начальному условию задачи (24) при произвольных значениях P_1, P_2, Z.

Общее решение уравнения (28) при заданных краевых условиях (24)–(27) будем искать в виде суммы частного решения (29) и решения, удовлетворяющего однородным смешанным граничным условиям и начальному условию

$$\left.\tilde{P}\right|_{t=0} = P_0 - P_1 - \frac{P_2 - P_1}{H} Z = \left(P_0 - P_1\right)\left(1 - \frac{P_2 - P_1}{P_0 - P_1} \cdot \frac{Z}{H}\right). \quad (30)$$

Граничные условия для функции $\tilde{P}$ записываются в виде:

$$\left.\tilde{P}\right|_{Z=0} = 0; \ \left.\tilde{P}\right|_{Z=H} = 0; \ \left.\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = 0; \ \left.\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}\right|_{y=\pm b} = 0. \quad (31)$$

Общее решение уравнения (28) представляются в виде суммы двух решений: $P = \tilde{P} + P^*$. (32)

Вследствие независимости краевых условий задачи (30), (31) от координат x и y, от этих координат не должно зависеть общее решение P^* уравнения (28). Поэтому это уравнение становится одномерным и принимает вид:

$$\frac{\partial P^*}{\partial t} = \chi_0 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (33)$$

На основании приведенного выше заключаем, что если удастся реализовать такие краевые условия, чтобы в начальный момент в бункере давление газа было равномерным, а торцевые давления в течение всего времени фильтрации были постоянными, то процесс фильтрации в бункерах различной цилиндрической формы будет протекать одинаково. Этот процесс не будет зависеть от формы поперечного сечения бункера. Таким образом, решение задачи, приведенное ниже, пригодно для бункеров и трубопроводов различной формы поперечного сечения.

Уравнение (33) решается методом разделения переменных в виде суммы ряда Фурье [7].

Частное решение уравнения (33), удовлетворяющее однородному граничному условию

$$\left.P^*\right|_{Z=0} = 0; \qquad \left.P^*\right|_{Z=H} = 0 \quad (34)$$

Представляется в виде [7]

$$P_n^* = C_n e^{-\chi_0 \lambda_n t} \sin\frac{\pi n}{H} Z, \quad (35)$$

где $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2$;

C_n – постоянная.

Общее решение уравнения (33), удовлетворяющее однородным граничным условиям и начальному условию (30), представляется в виде ряда Фурье:

$$P^*(Z,t) = \sum_1^\infty C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \chi_0 t} \sin\frac{\pi n}{H} Z, \tag{36}$$

В котором коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{H}\int_0^H (P_0 - P_1)\cdot\left(1 - \frac{P_2 - P_1}{P_0 - P_1}\frac{\xi}{H}\right)\sin\frac{\pi n}{H}\xi d\xi = \\ &= \frac{2(P_0 - P_1)}{H}\int_0^H \cdot\left(1 - \frac{\alpha\xi}{H}\right)\sin\frac{\pi n}{H}\xi d\xi, \end{aligned} \tag{37}$$

где $\alpha = \frac{P_2 - P_1}{P_0 - P_1}$.

Коэффициенты C_n вычисляются в явном виде:

$$C_n = \frac{2(P_0 - P_1)}{\pi n}\left(1 - (-1)^n (1-\alpha)\right). \tag{38}$$

Таким образом, общее решение поставленной задачи, согласно предыдущему имеет вид:

$$P = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{H} Z + \frac{2(P_0 - P_1)}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1 - (-1)^n (1-\alpha)}{n} e^{-\left(\frac{\pi n}{H}\right)^{\chi_0 t}} \sin\frac{\pi n}{H} Z. \tag{39}$$

Из полученного решения, представленного формулой (39), видно, что давление фильтрации существенно зависит от нескольких величин: от давления в начале координат; перепадов давлений $P_2 - P_1$ и $P_0 - P_1$, безразмерного комплекса $\alpha = \frac{P_2 - P_1}{P_0 - P_1}$, а также от высоты фильтрующего слоя H и коэффициента пьезопроводности. Причем последний влияет существенно на скорость затухания процесса.

В рамках сформулированных выше краевых условий задачи первые два слагаемых в формуле (39) не зависят от времени и оказывают наиболее существенное влияние на давление фильтрации.

В силу теоремы существования и единственности, доказанной в курсах математической физики [7], приведенное выше решение уравнения фильтрации (28) единственно. Других решений, отличных от данного, существовать не может.

Список литературы:

1. Забродский С. С. Гидродинамика и теплообмен в псевдоожиженном слое / С. С. Забродский. – М.–Л.: Государственное энергетическое издательство, 1963. – С. 13–40.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – С. 103–105, 431.
3. Ершов Л. В. Механика горных пород / Л. В. Ершов и др. – М.: Недра, 1987. – С. 132–148.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Физматгиз, 1969. – С. 49–90.
5. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В Соколовский. – М.: Гостехиздат, 1954. – С. 40–62.
6. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – С. 180–241.