УДК 621.34.001.5

МЕТОД РАСЧЁТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Рогачев А.И., Сухер А.Н., Дудник А.В.
Харьковский государственный политехнический университет
unishold@online.harkiv.com

The method of calculation of the parameters optimal trajectory is presented. The algorithm is worked out that provides absolute convergence for any real poles of transfer function and any initial data.

Многие задачи оптимального управления электроприводами, работающими большую часть времени в переходных режимах, изучены к настоящему времени достаточно полно. Обычно при проектировании систем управления возникают проблемы с расчётом параметров оптимальных траекторий, которые связаны с необходимостью решения систем трансцендентных уравнений. Несмотря на огромные количества численных методов решения таких систем [1], не существует универсального метода, обеспечивающего сходимость итерационного процесса при любых исходных данных. Кроме того, большинство методов поиска решений требует значительных затрат времени, что не позволяет эффективно использовать их в режиме реального времени. Между тем для многих промышленных, в частности металлургических, электроприводов характерно постоянное изменение граничных условий и возмущений в каждом из отдельных переходных процессов. Поэтому устройство, вырабатывающее оптимальное управляющее воздействие, должно успевать просчитывать новые параметры этого управления за время, значительно меньшее длительности самого переходного процесса.

В статье рассматривается задача оптимального по быстродействию управления тиристорным электроприводом постоянного тока при отработке им переходов по скорости вращения. При безынерционном преобразователе, подобный электропривод может быть описан системой дифференциальных уравнений в относительных единицах [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\tau} = \dfrac{1}{\beta_M}(i - m_C), \\ \dfrac{di}{d\tau} = u - \omega - i, \end{cases} \qquad (1,2)$$

где ω – частота вращения, i – ток якорной цепи, u – напряжение на обмотке якоря, β_M – коэффициент отношения электромеханической постоянной времени T_M к постоянной времени цепи якоря $T_Я$, τ – относительное по отношению к $T_Я$ время, m_C – момент нагрузки.

Если корни характеристического уравнения вещественные ($\beta_M > 4$), то для перевода двигателя от одной установившейся скорости ω_0 к другой установившейся скорости ω_k за минимальное время τ_k потребуется два интервала управления, на каждом из которых u принимает своё максимально допустимое значение $u_{\max}$, соответственно разных знаков [2]. Пусть для определённости $\omega_k > \omega_0$, что не снижает общности решения задачи. Тогда на первом интервале $u_{опт} = +u_{\max}$, а на втором - $u_{опт} = -u_{\max}$. Подстановка этих значений $u_{опт}$ и граничных условий в уравнения (1), (2) позволяет составить систему двух нелинейных уравнений относительно неизвестных длительностей интервалов управлений τ_1 и τ_2 ($\tau_1 + \tau_2 = \tau_k$):

$$\begin{cases} 2u_{\max} + \dfrac{u_{\max} - \omega_0 - m_C}{2b}(\lambda_2 e^{\lambda_1\tau_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2\tau_1}) = \dfrac{u_{\max} + \omega_k + m_C}{2b}(\lambda_1 e^{-\lambda_2\tau_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1\tau_2}), \\ \dfrac{u_{\max} - \omega_0 - m_C}{2b}(e^{\lambda_1\tau_1} - e^{\lambda_2\tau_1}) = \dfrac{u_{\max} + \omega_k + m_C}{2b}(e^{-\lambda_2\tau_2} - e^{-\lambda_1\tau_2}), \end{cases} \qquad (3,4)$$

где

$$b = \sqrt{\frac{\beta_M - 4}{4\beta_M}}, \ \lambda_1 = -\frac{1}{2} + b, \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - b. \qquad (5)$$

Для решения системы (3,4) воспользуемся методом Ньютона, который обладает высокой скоростью сходимости, однако является крайне чувствительным к начальному приближению. Определим условия, при которых итерационный процесс будет сходиться при любых исходных данных. Введём следующие обозначения:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda, \ e^{\lambda_1\tau_1} = v, \ \ e^{-\lambda_1\tau_2} = w, \ \frac{u_{max} - \omega_0 - m_C}{2b} = k_1, \ \frac{u_{max} + \omega_k + m_C}{2b} = k_2.$$

Тогда систему (3,4) можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} k_1(\lambda v - v^\lambda) + k_2(\lambda w - w^\lambda) = -\dfrac{2u_{\max}}{\lambda_1} = \sigma, \\ k_1(v - v^\lambda) + k_2(w - w^\lambda) = 0 \end{cases} \qquad (6,7)$$

Так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ и $sign\lambda_1 = sign\lambda_2$, то $\lambda > 1$. В относительных единицах $u_{\max} = 1,\ |\omega_0| < 1,\ |\omega_k| < 1$. Следовательно, $k_1 > 0,\ k_2 > 0$, а из (6) $\sigma > 0$.

Последовательно введем новые переменные.

$$z = \frac{\sigma}{\lambda - 1},\ x = \left(\frac{k_1}{z}\right)^{1/\lambda} \cdot v,\ y = \left(\frac{k_2}{z}\right)^{1/\lambda} \cdot w,\ a_1 = \left(\frac{k_1}{z}\right)^{(\lambda-1)/\lambda},\ a_2 = \left(\frac{k_2}{z}\right)^{(\lambda-1)/\lambda}. \qquad (8)$$

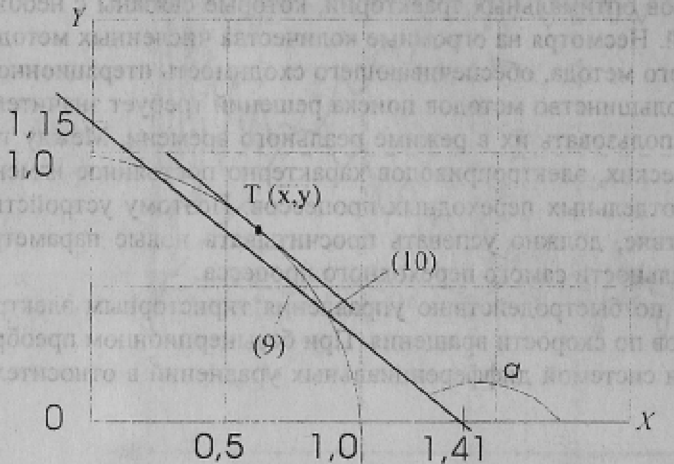

Рисунок 1

Из (8) получается $z > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0$.

Выполнив ряд преобразований, приведём систему уравнений (6), (7) к виду:

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = 1, \\ x^\lambda + y^\lambda = 1. \end{cases} \qquad (9,10)$$

Уравнение (9) – это уравнение прямой линии в координатах x, y, отсекающей на этих осях величины $1/a_1$ и $1/a_2$ соответственно. Уравнение (10) в тех же координатах определяет кривую, отсекающую единичные отрезки на осях координат. На рис. 1 показаны графики (9) и (10) при $u_{\max} = 1;\ \omega_0 = 0;\ \omega_k = 0{,}5;\ \lambda = 2;\ \beta_M = 4{,}5;$ $z = 6;\ a_1 = 0{,}708;\ a_2 = 0{,}866$.

Искомые корни x, y системы уравнений лежат в точках пересечения этих линий. Для их определения найдём на кривой (10) точку, в которой касательная будет параллельна прямой (9). Из (10)

$$y = (1 - x^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x^\lambda}{1 - x^\lambda}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \qquad (11)$$

Выражение (11) определяет тангенс угла наклона α касательной к кривой (10), для которого имеет место равенство

$$tg\alpha = -\frac{a_1}{a_2} = -\left(\frac{(\bar{x})^\lambda}{1 - (\bar{x})^\lambda}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}, \qquad (12)$$

где $\bar{x}$ - точка на кривой (10), в которой касательная параллельна прямой (9).

Обозначим $\gamma = a_1 / a_2$. Тогда из (12) с учетом (10) получим

$$(\bar{x})^\lambda = \frac{\gamma^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}}{1 + \gamma^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}},\ (\bar{y})^\lambda = 1 - (\bar{x})^\lambda = \frac{1}{1 + \gamma^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}}. \qquad (13,14)$$

Пусть $T(\bar{x}, \bar{y})$ – точка с координатами $\bar{x}, \bar{y}$. Тогда решение существует, если точка T лежит дальше от начала координат, чем прямая (9), или совпадает с ней. Аналитически это условие записывается так:

$$a_1\bar{x} + a_2\bar{y} \geq 1 \qquad (15)$$

Подставляя в (15) значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из (13), (14) соответственно, получим необходимое условие существования решения:

$$a_1^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} + a_2^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \geq 1 \qquad (16)$$

Нетрудно убедиться, что для рассматриваемого электропривода условие (16) всегда выполняется. Однако при его выполнении система уравнений (9), (10) может иметь два решения, одно решение и ни одного решения. Для заданных условий задачи $a_1 < 1$ и $a_2 < 1$. Поэтому

$$\min\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right) > 1 \qquad (17)$$

и всегда имеет место два решения. Для поиска этих решений с дальнейшим применением численного метода Ньютона исследуем функцию,

$$\bar{y} = \frac{1 - a_1 \bar{x}}{a_2}, \qquad (18)$$

полученную из уравнения (9). Подставив (18) в (10), получим уравнение

$$g(\bar{x}) = (\bar{x})^{\lambda} + \left(\frac{1 - a_1 \bar{x}}{a_2}\right)^{\lambda} - 1 = 0. \qquad (19)$$

Продифференцировав $g(\bar{x})$ по $\bar{x}$ и приравняв $g'(\bar{x})$ нулю, определим экстремальное значение $g(\bar{x})$.

$$g\left(\bar{x}\right) = \frac{1}{a_1^{\frac{1}{\lambda-1}} + a_2^{\frac{1}{\lambda-1}}} - 1, \qquad (20)$$

при

$$\bar{x} = \frac{a_1^{\frac{1}{\lambda-1}}}{a_1^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} + a_2^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}} - 1. \qquad (21)$$

Совместное рассмотрение (16) и (20) показывает, что $g\left(\bar{x}\right) \leq 0$. Вычислим вторую производную $g''(\bar{x})$:

$$g''(\bar{x}) = \lambda(\lambda - 1) \cdot (\bar{x})^{\lambda-2} + \lambda(\lambda - 1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \left(\frac{1 - a_1 \bar{x}}{a_2}\right)^{\lambda-2} \qquad (22)$$

Так как $\bar{x}$ должен находится в интервале $[0,1]$, а $\lambda > 1$, то $g''(\bar{x}) > 0$. В крайней левой точке рассматриваемого интервала $g(0) = \dfrac{1}{a_2^{\lambda}} - 1 > 0$ и в правой $g(1) = \left(\dfrac{1 - a_1}{a_2}\right)^{\lambda} > 0$. Следовательно, если в качестве начального приближения принять $\bar{x}_0 = 0$, то будет найден меньший корень уравнения $g(\bar{x}) = 0$, а если $\bar{x}_0 = 1$, то больший корень. После нахождения $\bar{x}$ из (16) найдём $\bar{y}$, а затем искомые τ_1, τ_2 по формулам

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{\bar{x}}{\left(\frac{k_1}{z}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{\bar{y}}{\left(\frac{k_2}{z}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} \qquad (23)$$

Анализ найденных решений показывает, что из начальной точки $\bar{x}_0 = 1$ получаются отрицательные значения τ_1 и τ_2, что не имеет практического смысла. Поэтому в программной реализации метода Ньютона, использующего сделанные ранее выводы, ищется то решение, которое связано с начальным приближением $\bar{x}_0 = 0$. Исследования самой программы подтвердили её работоспособность при практически всех возможных исходных данных и быструю сходимость итерационного процесса, которая обеспечивается численным методом Ньютона. Так при задаваемой точности поиска решения 10^{-6} число итераций не превышает 5. Это позволяет использовать данную программу в реальном времени. В заключение отметим, что при учёте ограничений по току якоря и по рывку оптимальный переходной процесс будет состоять из большего числа интервалов с разными законами управления. Однако, с точки зрения определения длительностей этих интервалов вычислительная задача упрощается. В то же время для определения необходимости учёта этих ограничений предварительно по-прежнему требуется решить изложенную ранее задачу, что делает рассмотренные вычисления необходимой составной частью решения общей задачи расчёта оптимального электропривода.

ЛИТЕРАТУРА.

1. В.В. Иванов. Методы вычислений на ЭВМ/ Справочное пособие. – Киев. Наукова думка. 1986. 584 с.
2. Пышкало В.Д., Акимов Л.В., Шамрай В.П. Оптимальные по быстродействию промышленные электроприводы. – М.: Энергия. 1967. 104 с.