

УДК 629.3.032+629.3.028

Л. М. Петров, канд. техн. наук, доцент, Т. М. Борисенко
Одеський державний аграрний університет, м. Одеса

ТЕОРЕТИЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ МОЖЛИВИХ РУЙНУВАНЬ ОПОРНОЇ ПОВЕРХНІ ПІД КОЛІСНИМИ РУШІЯМИ МОБІЛЬНОГО ЗАСОБУ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК З ДИФЕРЕНЦІЙНИМИ РІВНЯННЯМИ ЛАГРАНЖА

Проведено теоретичну класифікацію можливих руйнувань опорної поверхні під колісними рушійними засобами мобільного засобу та її зв'язок із диференціальними рівняннями Лагранжа, а також розроблено математичні моделі кочення колісного рушія мобільного засобу, який динамічно поєднаний з опорною поверхнею. Отримано теоретичні дані для визначення параметрів кочення колісного рушія по опорній поверхні з різноманітними фізичними властивостями при експлуатації мобільного засобу в різноманітних умовах.

Ключові слова: колісний рушій, математична модель, опорна поверхня, диференціальне рівняння, сила поштовху, траєкторія руху, осередок плями контакту

Вступ

Для підвищення працездатності мобільних енергетичних засобів (МЕЗ), велика увага приділяється проблемі збільшення ККД колісних рушіїв. При цьому використовують метод навантаження їх гравітаційною силою, яка діє в осередку плями контакту. Під час дії крутного моменту осередок плями контакту зміщується на величину плеча кочення, що супроводжується виникненням моменту опору кочення та поділу деформованої частини шини на зони стиснення й зони розтягу. При такому класичному методі переміщення МЕЗ частина енергії витрачається не за призначенням – створення дотичної сили тяги зі зменшенням тягового ККД.

Для усунення такого недоліку пропонується миттєво передавати енергію розтягнутої частини шини (до моменту виникнення зони розтягнутої частини шини) у зону стиснутої частини шини й перетворення її в дотичну силу тяги зі збільшенням тягового ККД.

Аналіз існуючих методик модернізацій конструкцій колісних рушіїв

При коченні колеса деформація ґрунту в кожний момент часу відбувається переважно по нормалі до його обода [1]. За допомогою коефіцієнтів, які коректують формули Буссинеска, наближують розрахункові закономірності розподілення напружень у м'яких ґрунтах до дійсних [2].

Виділяти n однакових шарів ґрунту, відносні деформації яких визначають за допомогою формули опору матеріалів, запропоновано в [3]:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E}, \quad (1)$$

де σ_i – середні напруження;

E – коефіцієнт пропорційності, який зв'язує напруження та деформацію в будь-якій точці масиву.

За формулою (1) обчислюють деформації шару ґрунту при нерівномірному розподіленні напружень по глибині ґрунту та робиться висновок щодо застосовності моделі Кельвіда до описання деформування ґрунту під дією колеса на ґрунт.

Отримано формули основних показників взаємодії коліс із ґрунтом: коефіцієнт кочення; максимальна деформація ґрунту [3].

Цими формулами відображено вплив конструктивних і експлуатаційних чинників на опір кочення та деформації ґрунту. При цьому, отримано ступінь відповідності їх значень дійсним значенням оцінки реологічних та геометричних параметрів деформування ґрунту в точці А.

© Петров Л. М., Борисенко Т. М., 2012

Для визначення параметра деформування ґрунту в точці A використовується розрахункова закономірність розподілу напружень у ґрунті під колесом, яке котиться [4]

$$\sigma_i = \sigma_m \frac{B}{B+z},$$

де σ_m – максимальний контактний тиск;

z – заглиблення протектора у точці якого визначається напруження;

B – висота протектора.

Аналіз розглянутих теорій показує, що в них відсутнє врахування пружних властивостей опорної поверхні. З метою врахування таких властивостей запропоновано для описання кочення колісного рушія застосувати рівняння невільної матеріальної точки до описання кочення колеса в умовах зв'язку з прошарком опорної поверхні [5].

Мета досліджень

Метою досліджень є розробка класифікацій можливих руйнувань опорної поверхні під колісними рушіями мобільного засобу та її зв'язок із диференціальними рівняннями Лагранжа, а також розроблено математичні моделі кочення колісного рушія мобільного засобу, який динамічно поєднаний із опорною поверхнею.

Методика дослідження

Для розробки методики запобігання можливих руйнувань опорної поверхні під колісними рушіями мобільного засобу та її зв'язок із диференціальними рівняннями Лагранжа, було розроблено конструктивну схему (рисунок 1) та фізичну модель колісного рушія з опорною поверхнею.

Оскільки кочення колісного рушія обумовлюється наперед заданими умовами, рух колісного рушія є обмеженим, тому що колісний рушій здійснює кочення по опорній поверхні, зв'язком якої з ним є деформований прошарок.

Уявимо рівняння опорної поверхні в зоні плями контакту у формі

$$f(x, y) = 0, \quad (2)$$

де x – деформація прошарків ґрунту в напрямку руху колеса;

y – деформація прошарків ґрунту в глибину опорної поверхні.

Розв'язання цього рівняння дозволяє визначити параметри процесу кочення колісного рушія. Під час руху (кочення) колісного рушія точки контакту його з опорною поверхнею замикаються на ній, а координати повинні задовольняти цьому рівнянню.

При розгляданні кочення колісного рушія приймається до уваги механічна дія на нього з боку опорної поверхні у вигляді реакції зв'язку N (рисунок 1).

Нехай опорна поверхня не має тертя. Тоді, згідно з другим законом Ньютона

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = F + N,$$

де m – маса, яка приходиться на колісний рушій;

$\frac{dV}{dt}$ – прискорення, з яким рухається колісний рушій;

F – сила, яка діє на колісний рушій (відновлююча сила).

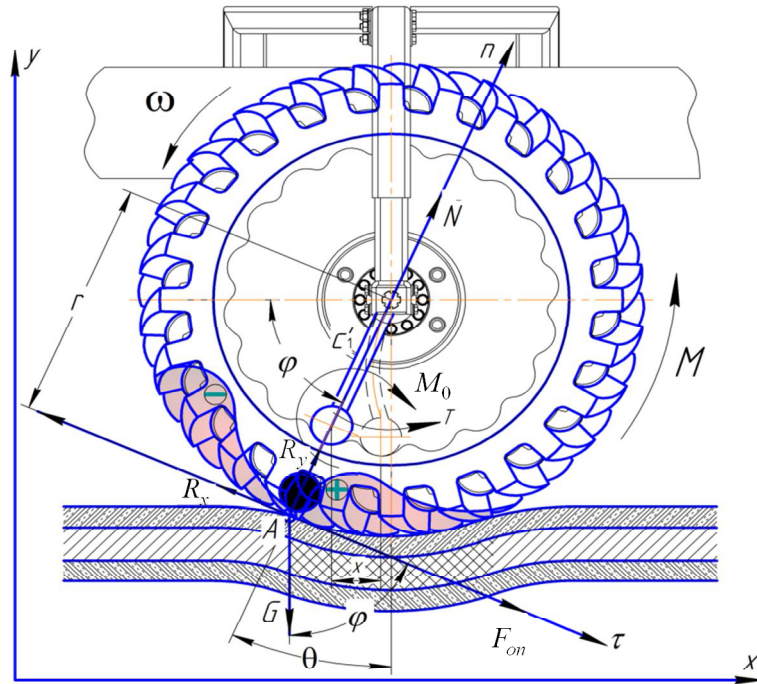


Рисунок 1 – Пристосування натуральних та декартових осей координат до описання зв'язку колісного рушія з опорною поверхнею:

ω – кутова швидкість, c^{-1} ; G – гравітаційна вага, Н

Якщо обидві частини цього рівняння спроектувати на декартові осі координат, будуть отримані диференціальні рівняння можливої рухливості колісного рушія

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{onx} - R_x + N_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{ony} - R_y + N_y, \end{aligned} \quad (3)$$

де F_{onx} – складова сили опору по осі x ;

F_{ony} – складова сили опору по осі y ;

R_x – складова сили поштовху на мобільний засіб від динамічної ваги в напрямку руху колісного рушія в точці прикладення моменту опору його коченню;

R_y – складова сили поштовху на мобільний засіб від динамічної ваги в напрямку деформування шини з опорною поверхнею в точці прикладення моменту опору його коченню;

N_x – складова опорної реакції зв'язку вздовж осі x ;

N_y – складова опорної реакції зв'язку вздовж осі y .

Представимо вирази $F_{onx} - R_x$ та $F_{ony} - R_y$ у вигляді $F_{cnx} = F_{onx} - R_x$ та $F_{cny} = F_{ony} - R_y$, де F_{cnx} – сила сприяння вибігу мобільного засобу від дії на нього сили поштовху в напрямку руху колісного рушія в точці прикладення моменту опору його коченню;

F_{cny} – сила сприяння вибігу мобільного засобу від дії на нього сили поштовху в напрямку деформування шини з опорною поверхнею в точці прикладення моменту опору його коченню.

Складові R_x та R_y визначаються за формулою

$$R_x = \frac{T'}{r}$$

де T' – закручуючий момент, який діє на гнучкий елемент, що направлений проти годинникової стрілки.

Для моменту, який діє в точці зіткнення динамічної ваги з профілем гребінки, що визначається координатами x і y , будемо мати:

$$M_0 = R_x(r + y) - R_y \cdot x = T' \left(1 + \frac{y}{d} \right) - R_y \cdot x,$$

де d – діаметр колеса;

M_0 – додатковий момент опору кочення колісного рушія, який виникає під дією динамічної ваги;

r – вектор-радіус траєкторії руху осередку деформованої шини.

F_{on_x} та F_{on_y} являють собою проекції сили, а N_x та N_y – проекції нормальної реакції на координатні осі відповідно до методики [6]:

$$N_x = N \cdot \cos(N, i); \quad N_y = N \cdot \cos(N, j).$$

Згідно з цією методикою та методикою диференціальної геометрії визначають направляючі косинуси нормалі до опорної поверхні (2) [6]:

$$\cos(N, i) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}; \quad \cos(N, j) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \quad (4)$$

де $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 2r$ – частка величин деформованих прошарків ґрунту.

Підставивши значення (4) у диференціальні рівняння руху (3), можна отримати нові рівняння

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{on_x} - R_x + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{on_y} - R_y + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння (5) є диференціальними рівняннями деформації опорної поверхні жорстким колісним рушієм, а множник $N / \Delta f$ є множником Лагранжа, який для колеса, що кочиться по опорній поверхні, визначає погонну деформацію еластичної шини.

Нехай точка A рухається по деформованій опорній поверхні (рисунок 1). До точки A буде прикладено силу опору F_{on} коченню колісного рушія та сила реакції зв'язку деформованої опорної поверхні \bar{N} на жорсткий колісний рушій.

Диференціальні рівняння руху точки A по деформованій опорній поверхні та жорсткому колісному рушію матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{on_x} + N \cos(N, i), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{on_y} + N \cos(N, j), \end{aligned}$$

а з урахуванням множника Лагранжа:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{onx} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{ony} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6)$$

де λ – множник Лагранжа.

Після введення натуральних осей координат та їх зв'язку, за допомогою деформованої опорної поверхні та колісного рушія, буде отримано два рівняння зв'язку:

$$\begin{aligned} m \cdot \omega_\tau &= F_{on\tau}, \\ m \cdot \omega_n &= F_{onn} + N, \end{aligned}$$

де $F_{on\tau}$ та F_{onn} – проекція F_{on} на натуральні осі координат.

При цьому за позитивний напрямок дотичної приймається напрямок у бік можливого розтягування шини, який відраховується від точки А. За позитивний напрямок осі n приймається її напрямок до центру колеса.

У рівняннях (6) не враховано силу тертя між деформованою поверхнею та шиною. Диференціальні рівняння, які описують процес кочення колісного рушія з урахуванням цих сил, матимуть вигляд [6]:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{onx} + N_x + F_x^{TP}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{ony} + N_y + F_y^{TP}. \end{aligned}$$

Проекції сили тертя на координатні осі:

$$\begin{aligned} F_x^{TP} &= F^{TP} \cdot \cos(F^{TP}, i) = -F^{TP} \cdot \cos(V, i) = -F^{TP} \frac{V_x}{V} = \frac{-F^{TP}}{V} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ F_y^{TP} &= \frac{-F^{TP}}{V} \cdot \frac{dy}{dt}, \end{aligned} \quad (7)$$

де V_x – проекція швидкості на вісь x ;

V – швидкість.

З урахуванням (7) диференціальні рівняння руху колісного рушія по деформованій опорній поверхні матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{onx} + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F^{TP}}{V} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_{ony} + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F^{TP}}{V} \cdot \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Проекції сил на осі координат:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= F_{on} \cdot \sin \varphi; \\ m \frac{dV}{dt} &= -F_{on} \cdot \cos \varphi - mg, \end{aligned}$$

де φ – центральний кут відхилення пружного елемента від вертикальної осі, яка проходить через осередок плями контакту та осередок колеса.

Рівняння зв'язку деформованої опорної поверхні та жорсткого колеса – це рівняння кола:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Диференціальне рівняння руху точки A деформованої поверхні у формі Лагранжа має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{on} \cdot \sin \varphi + 2\lambda x;$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_{on} \cdot \cos \varphi - mg + 2\lambda y.$$

Вводяться натуральні осі координат n і τ та проектується діючі сили на ці осі. Отримуються диференціальні рівняння у формі Ейлера:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{on\tau} + mg \cos \varphi;$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \sin \varphi + N. \quad (8)$$

З кінематики відомо, що прискорення на дотичну та нормаль мають вигляд [6]:

$$\omega_\tau = \frac{d^2 S}{dt^2}; \quad \omega_n = \frac{V^2}{\rho},$$

де S – дуга деформованої опорної поверхні чи шини;
 ρ – радіус кривизни.

$$S = r \cdot \varphi.$$

Тоді з (8)

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_{on} + mg \cos \varphi;$$

$$m \frac{V^2}{\rho} = -mg \sin \varphi + N.$$

Двічі продиференціюється

$$\frac{dS}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Знаходиться диференціальне рівняння руху колісного рушія частини шини в опорній поверхні.

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = r \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Результати дослідження

Деформована частина шини знаходиться між стиснутою ділянкою та розтягнутою. Тому в роботі [1] враховано, що коли до моменту завершення процесу відновлення деформації ґрунту відновлення деформації колеса ще не відбулося, то подальше відновлення деформації колеса буде відбуватися при постійній остаточній деформації ґрунту.

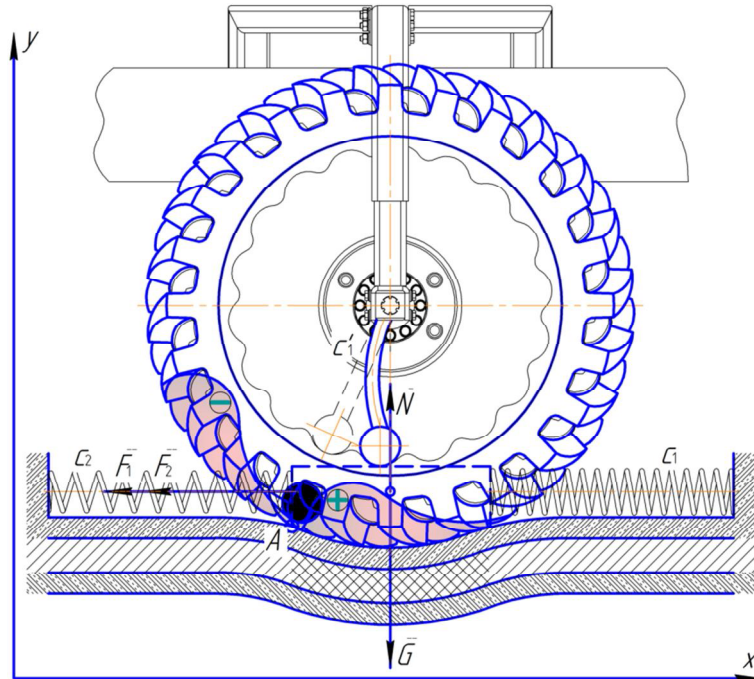


Рисунок 2 – Абсолютно жорстка поверхня

Але в цій роботі не враховано вплив на процес відновлення деформованої частини колеса, що затиснута між ділянками стиснутої та розтягнутої шини.

Введемо поняття «деформована ділянка шини», яка затиснута між ділянками стиснутої та розтягнутої шини (рисунок 2).

Спрямуємо вісь x у напрямку, що протилежний руху. При цьому початок відліку перпендикулярний від центру колеса.

Запишемо початкові умови руху деформованої шини при $t = 0$, $x_0 = x_i$, $\dot{x}_0 = V$.

При коченні колісного рушія ліва частина шини стискається на x , та її пружна відновлююча сила F_2 спрямована ліворуч. Одночасно, права пружина розтягується на x , та її пружна сила F_1 також спрямована ліворуч.

Окрім відновлюючих сил F_1 і F_2 до деформованої шини прикладено вагу G та нормальну реакцію N гладкої поверхні.

Диференціальні рівняння руху деформованої частини шини в проекції на вісь x

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = F_{1x} + F_{2x}; \quad \text{чи} \quad m \ddot{x} = -(c_1 + c_2) x,$$

де $F_{1x} = -c_1 x$; $F_{2x} = c_2 x$ – проекції відновлюючих сил на вісь x ;

c_1 – пружня деформація (жорсткість) прошарків опорної поверхні поза фронтом розтягнутої частини шини;

c_2 – пружня деформація (жорсткість) прошарків опорної поверхні перед фронтом стиснутої частини шини.

Жорсткість розтягнутої та стиснутої частини шини можна замінити однією еквівалентною жорсткістю перехідної зони деформованої частини шини:

$$c = c_1 + c_2. \quad (9)$$

Тоді диференціальне рівняння буде мати вигляд

$$m\ddot{x} = c \cdot x = 0; \text{ чи } \ddot{x} = k^2 x = 0, \quad (10)$$

де $k^2 = \frac{(c_1 + c_2)g}{m}$ – постійний коефіцієнт;

m – вага, яка приходиться на колісний рушій.

Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, яке при $n = 0$ відповідає диференціальному рівнянню (10):

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

звідки дійсні та від'ємні корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm ki$, тому рівняння (10) буде мати вигляд

$$x = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt, \quad (11)$$

де t – час.

Визначаємо постійні інтегрування c_1 і c_2 шляхом диференціювання рівняння (10)

$$\dot{x} = c_1 k \cdot \sin kt + c_2 k \cdot \cos kt. \quad (12)$$

Підставивши в рівняння (11) $t = 0; x_0 = x_1$, а в рівняння (12) $t = 0; \dot{x} = V$, отримуємо

$$c_1 = x_1; c_2 = \frac{V}{k}.$$

Тоді рівняння (11) приймає вигляд:

$$x = x_1 \cdot \cos kt + \frac{V}{k} \cdot \sin kt. \quad (13)$$

Представимо, що початкова координата x_1 змінюється за залежністю $x_1 = a \cdot \sin \alpha$, а швидкість відновлення деформованої частини шини – за залежністю $\frac{V}{k} = a \cdot \cos \alpha$.

Тоді рівняння, яке описує процес відновлення стиснутої частини шини, буде мати вигляд

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha), \quad (14)$$

де a – постійна;

α – кут, який визначає фазу відновлення.

У світовій практиці не розглядалося питання врахування процесу дії змінного опору прошарків на процес відновлення стиснутої шини, а тому розглянемо випадок змінної дії опору прошарків опорної поверхні на процес кочення колісного рушія (рисунок 3).

Початок відліку осі x приймаємо в положенні рівноваги колісного рушія при відсутності дії деформованої опорної поверхні. Початкові умови руху колісного рушія при $t = 0, x = x_0, \dot{X} = \dot{X}_0$.

Зобразимо деформовану частину колісного рушія зміщену праворуч на осі x . При цьому в пружині виникає відновлююча сила F , яка спрямована ліворуч.

Деформація викривленої плями контакту стиснутої частини з урахуванням еквівалентної жорсткості перехідної зони стиснення й розтягу шини опишеться рівнянням

$$|x| = \frac{F}{c}. \quad (15)$$

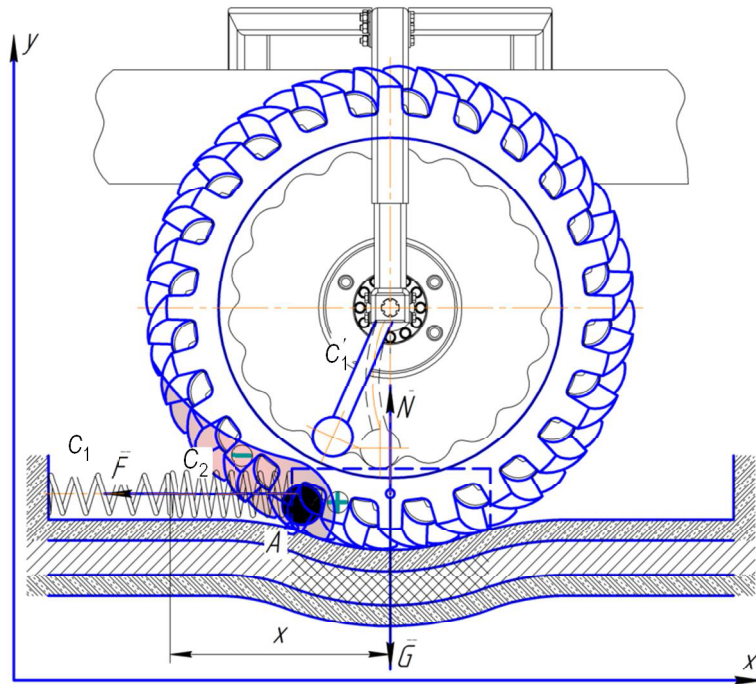


Рисунок 3 – Подолання колісним рушієм змінного опору

При зміщенні деформованої частини шини праворуч на довжину x кожна з частин опорної поверхні отримує деформацію. Сума цих деформацій дорівнює $|x|$, тобто

$$|x| = |x_1| + |x_2|, \quad (16)$$

де x_1 – деформація 1-го прошарку опорної поверхні;

x_2 – деформація 2-го прошарку опорної поверхні.

Так як кожна з частин опорної поверхні деформується під дією сили \bar{F} , тоді

$$|x_1| = \frac{F}{c_1}; \quad |x_2| = \frac{F}{c_2}. \quad (17)$$

Підставивши (15) і (17) в (16) отримується коефіцієнт піддатливості шини до деформації

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

Еквівалентний коефіцієнт жорсткості деформації опорної поверхні буде

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

При зміщенні деформованої частини шини праворуч на величину x , проекція відновлюючої сили F_x , яка спрямована ліворуч, буде дорівнювати

$$F_x = -c \cdot x = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \cdot x.$$

Окрім відновлюючої сили F_x до деформованої частини шини прикладено вагу \bar{G} та нормальну силу \bar{N} , яка є реакцією опорної поверхні.

Диференціальне рівняння руху деформованої частини шини в проекції на вісь x буде мати вигляд:

$$m\ddot{x} = F'_x \text{ чи } m\ddot{x} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \cdot x.$$

А еквівалентне диференціальне рівняння буде мати вигляд:

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0. \quad (18)$$

Характеристичне рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню (18), має вигляд:

$$\lambda^2 + k^2.$$

Рішення цього рівняння представимо у вигляді:

$$x = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \sin kt. \quad (19)$$

Для визначення постійних інтегрування c_1 та c_2 продиференціюємо рівняння (19)

$$\dot{x} = -c_1 \cdot k \cdot \sin kt + c_2 \cdot k \cdot \cos kt. \quad (20)$$

Підставимо в рівняння (19) $t = 0, x = x_0$, а в рівняння (20) $t = 0, x = \dot{x}_0$, отримуємо $c_1 = x_0, c_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$.

Тоді рівняння (19) приймає вигляд:

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{x_0}{k} \sin kt. \quad (21)$$

Прийmemo

$$x_0 = a \cdot \sin \alpha; \quad \frac{x_0}{k} = a \cdot \cos \alpha.$$

Тоді рівняння (21) зміщення деформованої частини шини буде мати вигляд:

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha).$$

Коли опорна поверхня має складатися з декількох шарів, врахування процесу відновлення деформованої частини шини при багато прошарковій опорній поверхні може мати вигляд згідно з рисунком 3.

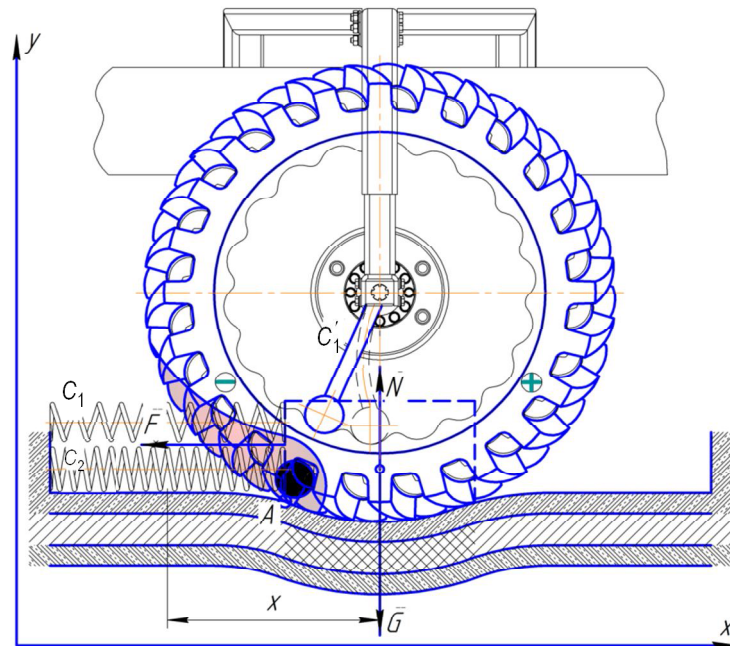


Рисунок 4 – Подолання колісним рушієм опору коченню у вигляді декількох шарів

Вибравши початок відліку з точки, коли колісний рушій не котився, напрямом осі x спрямовуємо праворуч та, приклавши до осередку деформованої частини шини силу ваги \bar{G} та реакцію опорної поверхні \bar{N} , отримуємо фізичну модель кочення колеса по опорній поверхні, яка складається з декількох прошарків.

При зміщенні деформованої частини шини праворуч по осі x обидва шари отримують одночасно деформацію

$$x_1 = x_2 = x.$$

У деформованій частині шини виникають відновлюючі сили F_1 та F_2 , сума яких

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Замінюємо дві жорсткості деформованих прошарків однією еквівалентною жорсткістю:

$$\frac{\bar{F}}{|x|} = \frac{\bar{F}_1}{|x_1|} + \frac{\bar{F}_2}{|x_2|},$$

отримуємо $c = c_1 + c_2$.

Як видно з викладеного, при опорній поверхні, яка складається з декількох прошарків, коефіцієнт жорсткості, який характеризує деформацію шарів опорної поверхні, дорівнює сумі коефіцієнтів жорсткості окремих прошарків опорної поверхні, і рівняння зміщення деформованої частини шини буде мати вигляд:

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha).$$

Особливий випадок у роботі кочення колісного рушія по опорній поверхні є вирішення питання врахування процесу деформування еластичної шини під дією дотичної сили тяги.

Коли деформована частина шини підпадає під дію дотичної сили тяги $H'_{d.m.}$, яку можна описати рівнянням, що зв'язане з траєкторією руху осередку деформованої шини, то

$$F_{d.m.} = k^2 \cdot m \cdot r.$$

Початок декартових осей координат суміщуємо з осередком декартової частини шини.

Початкові умови руху осередку деформованої частини шини: при $t = 0, x = 0, y = b, \dot{x} = V_0, \dot{y} = 0$, а тому осередок деформованої шини займає положення $K_0 (OK_0 = b)$ і має початкову швидкість деформації V_0 (рисунок 5).

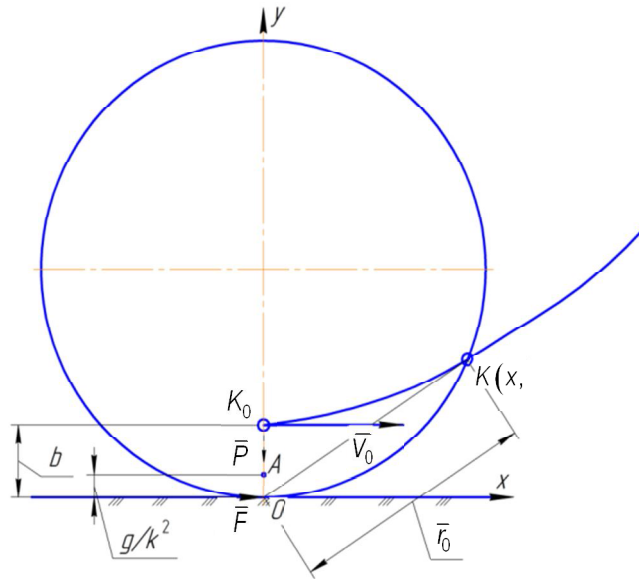


Рисунок 5 – Деформування еластичної шини під дією дотичної сили тяги:
 b – координата осередку деформованої шини

Векторне диференціальне рівняння руху осередку деформованої частини шини буде мати вигляд:

$$\overline{m\ddot{\omega}} = \overline{P} + \overline{F},$$

де $\overline{P} = \overline{G}$ – гравітаційна складова від дії гравітаційної ваги

чи
$$\ddot{r} = g + k^2 r. \quad (22)$$

Рівняння (22) у проєкціях на осі x та y буде мати вигляд:

$$\ddot{x} - k^2 \cdot x = 0, \quad (23)$$

$$\ddot{y} - k^2 \cdot y = -g. \quad (24)$$

Рівняння (23) являється однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Для його інтегрування відповідне характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 - k^2 = 0.$$

Розв'язання диференціального рівняння (23) має вигляд:

$$x = c_1 \cdot e^{kt} + c_2 \cdot e^{-kt}. \quad (25)$$

Для визначення постійних інтегрування c_{I1} та c_{I2} продиференціюємо рівняння (25) і отримаємо

$$x = c_1 \cdot e^{kt} + c_2 \cdot e^{-kt}. \quad (26)$$

Підставивши в рівняння (25) і (26) початкові умови, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} O &= c_{II1} + c_{II2}, \\ V_0 &= c_{II1} \cdot k - c_{II2} \cdot k. \end{aligned} \quad (27)$$

Розв'язання системи рівнянь (27) дозволяє знайти постійні інтегрування:

$$c_{II1} = \frac{V_0}{2 \cdot k} \quad \text{та} \quad c_{II2} = -\frac{V_0}{2 \cdot k}.$$

Отже, остаточно отримуємо

$$c_{II1} = \frac{V_0}{2 \cdot k} (e^{kt} - e^{-kt}) = -\frac{V_0}{k} \cdot shkt.$$

Диференційне рівняння (24) є неоднорідним і його загальне розв'язання у має вигляд

$$y = y_1 + y_2,$$

де y_1 – загальне розв'язання відповідного однорідного розв'язання;

y_2 – часне розв'язання.

$$\ddot{y} - k^2 \cdot y = 0, \quad (28)$$

Розв'язання диференційного рівняння (28) має вигляд:

$$y = c_{II3} \cdot e^{kt} + c_{II4} \cdot e^{-kt}, \quad (29)$$

де c_{II3} і c_{II4} – постійні інтегрування.

Часне розв'язання y_2 представимо у вигляді

$$y_2 = A.$$

Підставимо у рівняння (24) цей вираз і отримуємо

$$y_2 = \frac{g}{k^2}. \quad (30)$$

Враховуючи формули (29) і (30), загальне розв'язання буде мати вигляд:

$$y = c_{II3} \cdot e^{kt} + c_{II4} \cdot e^{-kt} + \frac{g}{k^2}. \quad (31)$$

Продиференціювавши рівняння (31), отримуємо

$$\dot{y} = c_{II3} \cdot k \cdot e^{kt} - c_{II4} \cdot k \cdot e^{-kt}. \quad (32)$$

У рівняння (31) та (32) підставимо початкові умови та отримуємо систему рівнянь:

$$b = c_{II3} + c_{II4} + \frac{g}{k^2}, \quad (33)$$

$$O = c_{II3} \cdot k - c_{II4} \cdot k.$$

З рівняння (33) знаходимо постійні інтегрування

$$c_{II3} = c_{II4} = \frac{1}{2} \left(b - \frac{g}{k^2} \right).$$

Підставляючи постійні інтегрування c_3 та c_4 в рівняння (31), отримуємо рівняння руху осередку деформованої шини мають вигляд

$$x = \frac{V_0}{k} \cdot shkt, \quad (34)$$

$$y = \left(b - \frac{g}{k^2} \right) chkt + \frac{g}{k^2}. \quad (35)$$

З рівняння руху (34) та (35) виключимо час:

$$shkt = \frac{k \cdot x}{V_0}; \quad chkt = \frac{y - \frac{g}{k^2}}{b - \frac{g}{k^2}}.$$

Враховуючи, що $ch^2 - sh^2kt = 1$ отримуємо рівняння траєкторії осередку деформованої частини шини точки M :

$$\frac{\left(y - \frac{g}{k^2} \right)^2}{\left(b - \frac{g}{k^2} \right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{V_0}{k} \right)^2} = 1. \quad (36)$$

Рівняння (36) уявляє з себе рівняння гіперболи з центром $A \left(O; \frac{g}{k^2} \right)$.

Дійсна піввісь проходить із координатою $b - g/h^2$, а мнима піввісь – з координатою V_0/k .

Висновки

Шляхом теоретичних розрахунків виявлено, що в усіх випадках можливих руйнувань опорної поверхні під колісними рушіями мобільного засобу, встановлено зв'язок із диференційними рівняннями Лагранжа та ці випадки описуються однією математичною залежністю.

Частка величин деформованих прошарків ґрунту Δf описується рівнянням, яке відповідає руху цих величин по колу. Коло деформованих прошарків ґрунту створюється вектором – радіусом траєкторії руху осередку деформованої шини.

Включення в конструкцію колісного рушія динамічної ваги, яка під'єднана до осередку колеса через пружний елемент, дозволяє миттєво передавати енергію розтягнутої частини шини (до моменту виникнення зони розтягнутої частини шини) у зону стиснутої частини шини та перетворювати її в дотичну силу тяги зі збільшенням тягового ККД.

Список літератури

1. Бабков В. Ф. Проходимость колесных машин по ґрунту / В. Ф. Бабков, А. К. Бируля, В. М. Сиденко. – М.: Автотрансиздат, 1959. – 189 с.
Babkov V. F. Prokhodimost kolesnykh mashin po gruntu (Soil trafficability of wheeled vehicles) / V. F. Babkov, A. K. Birulya, V. M. Sidenko. – М.: Avtotransizdat, 1959. – 189 s.
2. Вонг Дж. Теория наземных транспортных средств / Дж. Вонг. – М.: Машиностроение, 1982. – 284 с.
Vong Dzh. Teoriya nazemnykh transportnykh sredstv (Theory of ground transport vehicles) / Dzh. Vong. – М.: Mashinostroyeniye, 1982. – 284 s.
3. Водяник И. И. Воздействие ходовых систем на почву (научные основы) / И. И. Водяник. – М.: Агропромиздат, 1990. – 172 с.
Vodyanik I. I. Vozdeystviye khodovykh system na pochvu (nauchnye osnovy) (The effect of undercarriages on soil (scientific bases) / I. I. Vodyanik. – М.: Agropromizdat, 1990. – 172 s.
4. Хой Б. К. Основы инженерного ґрунтоведения / Б. К. Хой. – М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1966. – 46 с.
Khou B.K. Osnovy inzhenernogo gruntovedeniya (Basics of soils engineering) / B. K. Khou. – М.: Izd-vo lit. po str-vu, 1966. – 460 s.

5. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика: в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 1966. – 665 с.
- Bat M. I. Teoreticheskaya mekhanika v primerakh i zadachakh. Dinamika: v 3 t. (Theoretical mechanics in examples and questions. Dynamics: in 3 vol.) / M. I. Bat, G. Yu. Dzhanelidze, A. S. Kelzon. – М.: Nauka, 1966. – Т. 2. – 1966. – 665 s.
6. Воронков И. М. Курс теоретической механики / И. М. Воронков; под ред. А. П. Колесникова, А. Д. Халанской. – 11-е изд. – М.: Наука, 1964. – 596 с.
- Voronkov I. M. Kurs teoreticheskoy mekhaniki (The course of theoretical mechanics) / I. M. Voronkov; pod red. A. P. Kolesnikova, A. D. Khalanskoj. – 11-e izd. – М.: Nauka, 1964. – 596 s.
7. Петров Л. М. Теорія колісного рушія для важких умов експлуатації / Л. М. Петров // Аграр. вісн. Причорномор'я: зб. наук. пр. – Одеса, 2009. – № 48. – С. 33–40.
- Petrov L. M. Teoriya kolisnogo rushiya dlya vazhkykh umov ekspluatatsii (Wheeled running gear theory for complicated usage conditions) / L. M. Petrov // Agrar. visn. Prychornomorya: zb. nauk. pr. – Odesa, 2009. – № 48. – S. 33–40.
8. Горячкин В. П. Собрание сочинений: в 7 т. / В. П. Горячкин. – М.: Сельхозиздат, 1938. – Т. 2. – 1938. – 528 с.
- Goryachkin V. P. Sobraniye sochineniy (Collected edition): v 7 t. / V. P. Goryachkin. – М.: Selkhozizdat, 1938. – Т. 2. – 1938. – 528 s.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В. Ф. Оробей, Одеський національний політехнічний університет.
Рецензент: канд. техн. наук, доц. А. В. Хімченко, АДІ ДонНТУ.

Стаття надійшла до редакції 14.12.12

Л. Н. Петров, Т. Н. Борисенко

Одесский государственный аграрный университет г. Одесса

Теоретическая классификация возможных разрушений опорной поверхности под колесными движителями мобильного средства и ее связь с дифференциальными уравнениями Лагранжа

Проведена теоретическая классификация возможных разрушений опорной поверхности под колесными движителями мобильного средства и ее связь с дифференциальными уравнениями Лагранжа, а также разработаны математические модели качения колесного движителя мобильного средства, динамично соединенный с опорной поверхностью. Полученные теоретические данные для определения параметров качения колесного движителя по опорной поверхности с различными физическими свойствами при эксплуатации мобильного средства в различных условиях.

КОЛЕСНЫЙ ДВИЖИТЕЛЬ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПОРНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, СИЛА ТОЛЧКА, ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ, ЦЕНТР ПЯТНА КОНТАКТА

L. N. Petrov, T. N. Borisenko

Odessa State Agriculture University, Odessa

Theoretical Classification of Possible Breaking of Bearing Surface Area under Wheeled Running Gear of Transport Vehicle and its Connection with Lagrange Differential Equation

The theoretical classification of possible breaking of bearing surface area under wheeled running gear of transport vehicle and its connection with Lagrange differential equation has been made. The mathematical models of rolling movement of wheeled running gear of transport vehicle dynamically connected with bearing surface area have been developed. The theoretical data for rolling movement characteristics of wheeled running gear on bearing surface area with various physical properties under transport vehicle operation in different conditions have been obtained. To consider these theoretical data suggested for rolling movement of wheeled running gear the equation of constrained particle has been used for rolling movement of a wheel in terms of upper layer of bearing surface area.

It has been experimentally established that an upper part of deformed soil layers goes round in a circle; however, it has been theoretically shown that the circle of deformed soil layers is made by the radius-vector of motion path of the point of deformed wire.

For approbation of experimental and theoretical studies we have made the construction of the wheeled running gear with discrete and power support which is connected to the point of the wheel through the springing element that allows quickly to transfer the driving energy of the part of the wire (till the moment of formation of the stretched part of the wire) to the pressed part of the wire and to transform it into the tangential tractive effort with the increase of tractive coefficient of efficiency.

WHEELED RUNNING GEAR, MATHEMATICAL MODEL, BEARING SURFACE AREA, DIFFERENTIAL EQUATION, STRENGTH OF PUSH, PATH OF MOTION, TOOTH BEARING CENTER