

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЕТА КОНВЕРТОПЛАНА

**Пихно Э.В., студент; Федюн Р.В. доц., к.т.н.**

*(ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, Украина)*

Конвертопланы в настоящее время, по ряду причин, не являются распространенным видом транспорта, единственная страна-производитель конвертопланов – США, - успешно использует их в военно-транспортных целях. Конвертоплан совмещает в себе преимущества самолетов и вертолетов, такие как: возможность вертикальных взлета и посадки, большая скорость движения (502 км/ч против 350 км/ч у вертолетов), большая грузоподъемность, большая дальность работы, высокая надежность. Однако из-за особенностей конструкции управление конвертопланом лежит исключительно на пилотах.

Большая сложность разработки и управления в настоящее время и препятствует широкому распространению конвертопланов. Однако учитывая их преимущества, это очень полезное и интересное транспортное средство, которое можно использовать как в военных, так и в гражданских целях.

При преодолении трудностей автоматизации, конвертопланы возможно использовать очень широко. Небольшие модели (весом до 5 кг) могут выполнять самые разные функции. Например, быстрая доставка почты в пределах района города, аэрофотосъемка с небольшой высоты для большой детализации снимков, картография, визуальное наблюдение за событиями и многое другое. Крупные модели смогут выполнять роль автономных транспортных средств, средств наблюдения.

В работе должны быть решены следующие задачи:

- разработать математическую модель конвертоплана и произвести исследование динамических характеристик;
- синтезировать регуляторы по контурам управления скоростью и высотой;
- оценить эффективность полученного решения.

Для моделирования конвертоплана требовалось разработать математическую модель и на основе нее программу для моделирования. Основной проблемой является нелинейность системы, которую стандартными методами обойти невозможно в данной ситуации.

Математическую модель конвертоплана можно составить используя базовые физические законы, такие как, например, второй закон Ньютона, закон братьев Райт, закон распределения плотности воздуха (барометрическая формула) и другие.

В общем виде конвертоплан описывается следующей системой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{F}_S = \frac{1}{m} \left( \vec{F}_T^{\rightarrow \rightarrow} - \vec{F}_R - \vec{F}_{RLF}^{\rightarrow \rightarrow} - \vec{F}_{RER}^{\rightarrow \rightarrow} + \vec{F}_L^{\rightarrow \rightarrow} + \vec{F}_{LF}^{\rightarrow \rightarrow} + \vec{F}_T^{\rightarrow \rightarrow z} - \vec{F}_g^{\rightarrow \rightarrow} \right) \\ \varepsilon_1 = \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = \frac{\dot{z}^2 (\overline{F_{T2}} - \overline{F_{T1}}) - F_{R\varphi_1}}{2mL_E} \\ \varepsilon_2 = \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = \frac{\dot{z}^2 \overline{F_{ER}} - F_{R\varphi_2}}{mL_{ER}} \\ \varepsilon_3 = \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} = \frac{\dot{y}^2 (\overline{F_{T2}} - \overline{F_{T1}}) - F_{R\varphi_3}}{2mL_E} \\ \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \\ \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} \\ \omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} \end{array} \right. \quad (1)$$

В данной системе (1) представлены следующие элементы: а) вектор ускорения, который зависит от массы  $m$ , общей силы тяги  $\vec{F}_T$ , общей силы сопротивления  $\vec{F}_R$ , сопротивление закрылков  $\vec{F}_{RLF}$ , сопротивление руля высоты  $\vec{F}_{RER}$ , подъемная сила крыльев  $\vec{F}_L$ , подъемная сила от закрылков  $\vec{F}_{LF}$ , силы тяжести  $\vec{F}_g$ ; б) ускорения по углам Эйлера, который зависят от векторов тяги каждого из двигателей  $\vec{F}_{T2}$  и  $\vec{F}_{T1}$ , массы и расстояния между двигателями  $L_E$  и закрылками  $L_{ER}$ . Однако данная система описывает непрерывную нелинейную систему, а в современных условиях следует рассматривать дискретные, т.к. подавляющее большинство управляющих контроллеров – цифровые. Так же, можно несколько более идеализировать систему и для упрощения убрать из системы сопротивления от закрылков и руля высоты, убрать изменение плотности с высотой (в данной системе оно представлено в составе сил, а не в явном виде). Итак, упрощенная цифровая система имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}(N) = \frac{1}{m} \vec{F}_g = \frac{1}{m} (\vec{F}_T - \vec{F}_R + \vec{F}_L + \vec{F}_{LF} + \vec{F}_T - \vec{F}_g) \\ \vec{v}(N+1) = \vec{v}(N) + \vec{a}(N) \\ \vec{r}(N+2) = \vec{r}(N+1) + \vec{v}(N+1) \\ \varepsilon_1(N) = \frac{\vec{r}(\vec{F}_{T2} - \vec{F}_{T1}) - F_{R\varphi 1}}{2mL_E} \\ \omega_1(N+1) = \omega_1(N) + \varepsilon_1(N) \\ \varphi_1(N+2) = \varphi_1(N+1) + \omega_1(N+1) \\ \varepsilon_2(N) = \frac{\vec{r}\vec{F}_{ER} - F_{R\varphi 2}}{mL_{ER}} \\ \omega_2(N+1) = \omega_2(N) + \varepsilon_2(N) \\ \varphi_2(N+2) = \varphi_2(N+1) + \omega_2(N+1) \\ \varepsilon_3(N) = \frac{\vec{r}(\vec{F}_{T2} - \vec{F}_{T1}) - F_{R\varphi 3}}{2mL_E} \\ \omega_3(N+1) = \omega_3(N) + \varepsilon_3(N) \\ \varphi_3(N+2) = \varphi_3(N+1) + \omega_3(N+1) \\ N = nT, n \in Z \end{array} \right. \quad (2)$$

Данная модель (2) означает, что существуют дискретные шаги, на каждом из которых рассчитывается соответствующее значение ускорения, скорости и перемещения (как линейного, так и углового). На нулевом шаге рассчитывается ускорение, которое повлияет на скорость на первом шаге, а скорость повлияет на перемещение уже на втором шаге. При этом, чем больше период дискретизации  $T$ , тем дольше будет задержка.

Для начала, рассмотрим случай, когда конвертоплан взлетает в режиме вертикального полета. Начальными условиями являются: нулевая тяга двигателей  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , нулевая высота  $\vec{r} = \{0, 0, 0\}$ , положение двигателей имеет нулевые углы поворота  $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ , закрылки и руль высоты не участвуют.

При старте двигателей в реальности происходит раскручивание пропеллеров по аperiodическому процессу первого порядка (упрощенно), вместе с этим постепенно увеличивается и сила тяги. Конвертоплан будет стоять на земле до тех пор, пока  $\vec{F}_T \leq \vec{F}_g$ .

Когда же сила тяги, которая в данном случае будет выступать в роли подъемной силы, превысит силу тяжести, начнется взлет конвертоплана. Зная массу, можно достаточно просто определить требуемую для взлета силу:  $F = mg$ . Приняв массу конвертоплана в модели 2 кг,

получаем требуемую силу  $F = 2.5 * 9.806 = 24,515 \text{ Н}$ . При моделировании примем, что обороты роторов изменяются по линейному закону, и получим следующий график (рис.1):

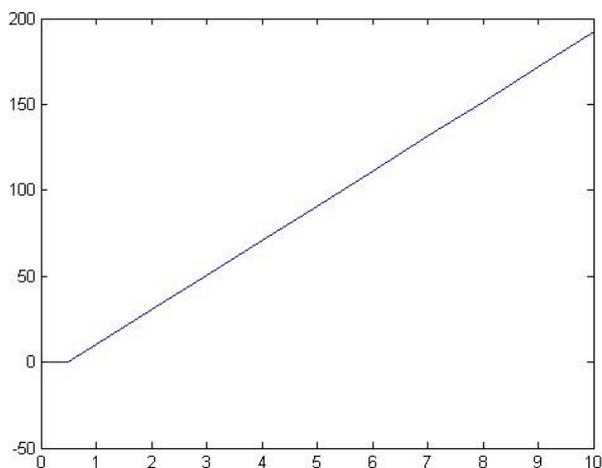


Рисунок 1 – График ускорения при линейном возрастании оборотов двигателей. Ось абсцисс – время, с, ось ординат – ускорение м/с<sup>2</sup> \* 10<sup>-1</sup>

По данному графику видно, что некоторое время ускорения нет, что подтверждает неравенство  $\vec{F}_T \leq \vec{F}_g$ . Данный график соответствует 15000 об/мин, предельно допустимых оборотах для винтовых движетелей.

Как видно, график имеет четкий апериодический вид, при этом немного увеличилось время «мертвой зоны». Введя простой ПИ-регулятор, можно просто задавать необходимую высоту, а конвертоплан сам поднимется на нее. Для данного контура был синтезирован ПИ-регулятор с коэффициентами  $P = 0.834$  и  $T_i = 8.13$ .

Далее, произведем моделирование с выходом конвертоплана из вертикального режима полета в горизонтальный. При моделировании получаем следующий результат (рис.2):

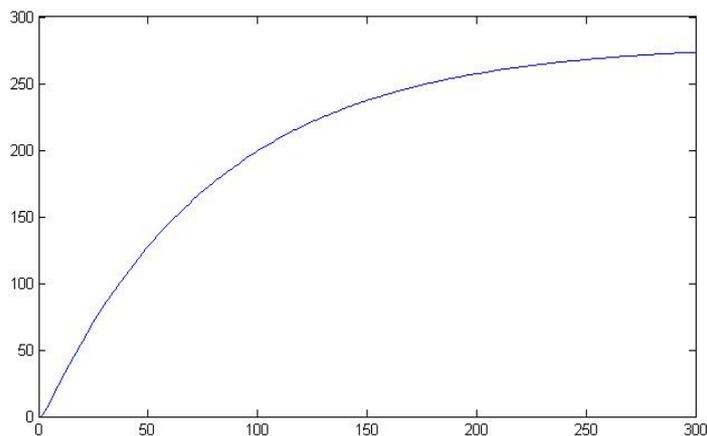


Рисунок 2 – График зависимости скорости с регулятором высоты. Ось абсцисс – время, с, ось ординат – скорость, км/ч

На представленном графике видно, что максимальная скорость модели превышает 250 км/ч. Точное ее максимальное значение – 279,8 км/ч. Для небольшой модели это правдивое значение, т.к. есть пропеллерные модели, имеющие скорость полета до 390 км/ч [1].

Для проверки модели возьмем параметры реального конвертоплана V-22 Osprey: площадь ометаемой поверхности роторов 422 м<sup>2</sup>, площадь крыла 38 м<sup>2</sup>, максимальная скорость вращения – 7000 об/мин, коэффициент аэродинамического сопротивления 1.19.

Практическая максимальная скорость на уровне моря составляет 396 км/ч, на максимальной высоте – до 580 км/ч [2]. Приблизительное время набора максимальной скорости – 3 минуты. Внесем в программу данные коэффициенты и промоделируем. Результат представлен на рисунке 3:

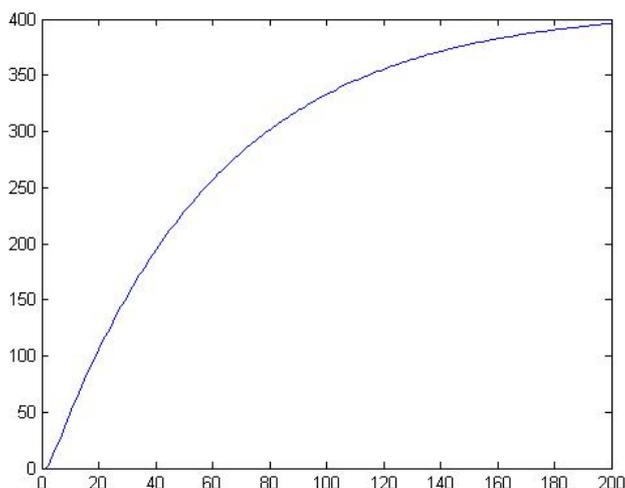


Рисунок 3 – График зависимости скорости от времени для модели с параметрами конвертоплана V-22 Osprey. Ось абсцисс – время, с, ось ординат – скорость, км/ч

На графике есть непродолжительный перегиб длительностью порядка 7 секунд, соответствующий переходу из вертолетного режима в самолетный, а затем происходит постепенный набор скорости. Как видно из графика, максимальная скорость составляет почти 400 км/ч. Точное же значение при  $t = 220$  с составляет 399,63 км/ч. Таким образом, модель полностью подтверждает реальные данные, и расхождение по максимальному значению составляет всего 0.9%. По времени набора максимальной скорости так же модель дает достоверный результат – конвертоплан набрал скорость в 396 км/ч немногим более, чем за 3 минуты, а точнее за 3 минуты и 13 секунд.

Следует отметить, что для синтеза коэффициентов регулятора использовался метод Коэна-Куна, который позволяет по полученным без регулятора графикам получить достаточно оптимальные коэффициенты регулирования [3].

#### **Выводы.**

В результате работы были получены непрерывная и цифровая математическая модели, а так же регуляторы по контурам высоты и скорости. При разработке математической модели особое внимание уделялось балансу между полнотой описания и сложностью. При переводе непрерывной модели в цифровую так же были введены допущения по условиям работы, которые позволили еще более упростить модель. Проведя моделирование было установлено, что модель достаточно точно описывает поведение конвертоплана. На основании разработанной модели и проведенного моделирования были разработаны ПИ-регуляторы по контурам высоты и скорости. Моделирование с регуляторами показало достаточную эффективность такого решения: система действует не хуже опытных пилотов, однако за счет данной автоматизации возможно значительно упростить их задачи.

#### Перечень ссылок

1. Книга рекордов Гиннеса. Режим доступа: [http://guinness.h12.ru/hob\\_mod.htm](http://guinness.h12.ru/hob_mod.htm)
2. Электронная энциклопедия «Википедия», «Конвертоплан Bell V-22 Osprey». Режим доступа: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Bell\\_V-22\\_Osprey](http://ru.wikipedia.org/wiki/Bell_V-22_Osprey)
3. Официальный сайт Мичиганского Технического Университета. Метод Коэна-Куна для настройки регуляторов. Режим доступа: <http://www.chem.mtu.edu/~tbco/cm416/cctune.html>
4. М.А. Айзерман, «Классическая механика», изд. Физматлит, М. 2005г.