

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ОТРЕЗКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Назаренко В.И., Иванов А.Ю.

Кафедра ЭВМ ДонГТУ

vn@cs.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Nazarenko V.I., Ivanov A.Y. Definition of the distance between two segments in three-dimensional space. Task of definition of shortest distance between two segments in three-dimensional space is described from the point of view of program realisation in CAD for designing the space constructions. The are formulated criterions of parallelism and intersection of lines, calculation the distance between of them, is defined the membership of point in segments of line.

Необходимость определения расстояния между двумя отрезками возникает в различных отраслевых САПР, выполняющих автоматизированное проектирование пространственных конструкций. Например, в САПР буровзрывных работ нормативными документами [1] жестко регламентируется минимально допустимое расстояние между шпуровыми зарядами взрывчатых веществ. В связи с этим рассмотрим в общей постановке задачу определения такого расстояния.

Будем считать, что нам заданы концевые точки $M_1(x_{m_1}, y_{m_1}, z_{m_1})$ и $N_1(x_{n_1}, y_{n_1}, z_{n_1})$ отрезка $\overline{M_1N_1}$, принадлежащего прямой L_1 , и концевые точки $M_2(x_{m_2}, y_{m_2}, z_{m_2})$ и $N_2(x_{n_2}, y_{n_2}, z_{n_2})$ отрезка $\overline{M_2N_2}$, принадлежащего прямой L_2 . Параметрические уравнения прямых L_1 и L_2 имеют вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + l_1 t_1 \\ y &= y_1 + m_1 t_1 \\ z &= z_1 + n_1 t_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2 + l_2 t_2 \\ y &= y_2 + m_2 t_2 \\ z &= z_2 + n_2 t_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{m_1}; & y_1 &= y_{m_1}; & z_1 &= z_{m_1}; & x_2 &= x_{m_2}; & y_2 &= y_{m_2}; & z_2 &= z_{m_2}; \\ l_1 &= x_{n_1} - x_{m_1}; & m_1 &= y_{n_1} - y_{m_1}; & n_1 &= z_{n_1} - z_{m_1}; \\ l_2 &= x_{n_2} - x_{m_2}; & m_2 &= y_{n_2} - y_{m_2}; & n_2 &= z_{n_2} - z_{m_2}. \end{aligned}$$

Направляющими векторами прямых L_1 и L_2 являются:

$$\vec{L}_1 = \overline{\langle l_1, m_1, n_1 \rangle} \quad \text{и} \quad \vec{L}_2 = \overline{\langle l_2, m_2, n_2 \rangle}.$$

В частном случае прямые L_1 и L_2 могут быть параллельны друг другу. Это имеет место, если коллинеарны их направляющие векторы \vec{L}_1 и \vec{L}_2 :

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

Естественно, проверку отношений (3) необходимо выполнять с точностью ε , т.е.

$$\left(\left| \frac{l_2}{l_1} - \frac{m_2}{m_1} \right| < \varepsilon \right) \wedge \left(\left| \frac{l_2}{l_1} - \frac{n_2}{n_1} \right| < \varepsilon \right),$$

где ε - малое число (например, $\varepsilon=0,001$).

Предположим, что прямые L_1 и L_2 параллельны одной из осей координат, например, оси X . Тогда $m_1 = m_2 = 0$, $n_1 = n_2 = 0$, вследствие чего в программе будет сгенерировано прерывание из-за деления на нуль. Следовательно, отношение (3) из практических соображений нельзя использовать для проверки параллельности двух прямых. Вместо него целесообразно рассматривать направляющие косинусы прямой:

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Тогда критерием параллельности двух прямых будет равенство с точностью ε их направляющих косинусов.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то для расчета расстояния между отрезками M_1N_1 и M_2N_2 необходимо предварительно определить координаты точек пересечения K_1 и K_2 перпендикуляров, опущенных на прямую L_2 из точек M_1 и N_1 .

Уравнение перпендикуляра M_1K_1 :

$$\left. \begin{array}{l} l_2(x - x_{m_1}) + m_2(y - y_{m_1}) + n_2(z - z_{m_1}) = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} x - x_{m_1} & y - y_{m_1} & z - z_{m_1} \\ x_2 - x_{m_1} & y_2 - y_{m_1} & z_2 - z_{m_1} \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

Здесь уравнение перпендикуляра записано в виде пересечения двух плоскостей.

Первое уравнение в системе (4), взятое отдельно, определяет плоскость, проведенную через точку M_1 перпендикулярно прямой L_2 , второе – плоскость, проведенную через точку M_1 и прямую L_2 .

Для определения координат точки пересечения K_1 перпендикуляра с прямой L_2 достаточно использовать параметрические уравнения этой прямой и уравнение первой плоскости из системы (4):

$$\left. \begin{array}{l} x = x_2 + l_2 t_2 \\ y = y_2 + m_2 t_2 \\ z = z_2 + n_2 t_2 \\ l_2 x + m_2 y + n_2 z + p = 0 \end{array} \right\}, \quad (5)$$

где $p = -(l_2 x_{m_1} + m_2 y_{m_1} + n_2 z_{m_1})$.

Из (5)

$$t_2 = \frac{l_2 x_2 + m_2 y_2 + n_2 z_2}{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}$$

Подставив значение t_2 в параметрические уравнения (2) прямой L_2 , получим координаты точки K_1 .

Аналогичным образом определяем координаты точки K_2 пересечения перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на прямую L_2 . Для этого достаточно в систему уравнений (5) вместо координат точки M_1 подставить координаты точки N_1 .

Расстояние между параллельными прямыми L_1 и L_2

$$d(M_1, K_1) = \sqrt{(x_{m_1} - x_{k_1})^2 + (y_{m_1} - y_{k_1})^2 + (z_{m_1} - z_{k_1})^2}$$

может быть принято в качестве кратчайшего расстояния d_{\min} между отрезками $\overline{M_1N_1}$ и $\overline{M_2N_2}$ лишь в том случае, когда эти отрезки полностью или частично перекрывают друг друга. Такое перекрывание имеет место, если

- точка K_1 расположена между точками M_2 и N_2 или
- точка K_2 расположена между точками M_2 и N_2 или
- точка M_2 расположена между точками K_1 и K_2 ($[M_2N_2] \in [K_1K_2]$).

В общем случае точка $P(x_p, y_p, z_p)$, лежащая на прямой L_p , расположена между точками $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ отрезка $[P_1P_2] \in L_2$, если

при $|x_2 - x_1| > \varepsilon$ имеет место $(x_1 - x_p)(x_p - x_2) \geq 0$ или

при $|y_2 - y_1| > \varepsilon$ имеет место $(y_1 - y_p)(y_p - y_2) \geq 0$ или

при $|z_2 - z_1| > \varepsilon$ имеет место $(z_1 - z_p)(z_p - z_2) \geq 0$.

Если отрезки $\overline{M_1N_1}$ и $\overline{M_2N_2}$ перекрывают друг друга, то кратчайшее расстояние между ними – это длина перпендикуляра $d(M_1, K_1)$, в противном случае следует определить минимальное из расстояний между точками M_1 и M_2 , M_1 и N_2 , N_1 и M_2 , N_1 и N_2 :

$$d_{\min} = \min(d(M_1, M_2), d(M_1, N_2), d(N_1, M_2), d(N_1, N_2)).$$

Если отрезки $\overline{M_1N_1}$ и $\overline{M_2N_2}$ не параллельны, то для нахождения минимального расстояния между ними необходимо сформировать уравнение общего перпендикуляра к прямым L_1 и L_2 , предварительно вычислив векторное произведение $\bar{L} = \bar{L}_1 \times \bar{L}_2 = \begin{vmatrix} m & n \end{vmatrix}$, где

$$l = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

В этом случае вектор \bar{L} определяет направление прямой, которая перпендикулярна к обоим прямым L_1 и L_2 .

Уравнение общего перпендикуляра представим в виде пересечения двух плоскостей:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

Первое уравнение в системе (6), взятое отдельно, определяет плоскость, проходящую через прямую L_1 параллельно вектору \bar{L} , второе – плоскость, проходящую через прямую L_2 параллельно тому же вектору \bar{L} .

Общее уравнение первой плоскости из (6):

$$d_1(x - x_1) + d_2(y - y_1) + d_3(z - z_1),$$

где

$$d_1 = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m & n \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n & l \end{vmatrix}; \quad d_3 = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l & m \end{vmatrix}.$$

После преобразований получим:

$$d_1x + d_2y + d_3z + p_1 = 0, \quad (7)$$

где $p_1 = -(d_1x_1 + d_2y_1 + d_3z_1)$.

Аналогично для второй плоскости

$$d_4x + d_5y + d_6z + p_2 = 0, \quad (8)$$

где

$$d_4 = \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m & n \end{vmatrix}; \quad d_5 = \begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ n & l \end{vmatrix}; \quad d_6 = \begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ l & m \end{vmatrix};$$

$$p_2 = -(d_4x_2 + d_5y_2 + d_6z_2).$$

Координаты точки K_1 пересечения перпендикуляра и прямой L_1 получаем из совместного решения уравнений (1) и (7), координаты точки K_2 пересечения перпендикуляра и прямой L_2 - из совместного решения уравнений (2) и (8).

Если точка $K_1 \in [M_1N_1]$, а точка $K_2 \in [M_2N_2]$, то кратчайшее расстояние между рассматриваемыми отрезками – это длина перпендикуляра, т.е. расстояние между точками K_1 и K_2 . В противном случае необходимо определить минимальное из расстояний между точками M_1 и M_2 , M_1 и N_2 , N_1 и M_2 , N_1 и N_2 .

Литература

1. *Единые правила безопасности при взрывных работах.* – Киев: Норматив, 1992. – 171 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия.* – М.: Наука/Физматлит РАН, 1999. – 224 с.