МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

АДІ

ДонНТУ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Иррациональные уравнения»

для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Горловка 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Иррациональные уравнения»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Утверждено на заседании
учебно-методической комсcии
АДИ ДонНТУ
протокол №3 от 12.12.2006г.

Утверждено на заседании
кафедры «Высшая математика»
протокол № 8 от 06.12.2006г.

Горловка 2007

УДК 510-075

Методическое пособие по теме «Иррациональные уравнения» для слушателей подготовительных курсов автодорожного института ДонНТУ / Сост. Вовк Л.П. – Горловка: АДИ ДонНТУ, 2007. – 81 с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки абитуриентов по одной из самых сложных тем элементарной математики. Представлены систематизированные по типам и уровням сложности иррациональные уравнения, большинство из которых предлагались на вступительных экзаменах, собеседованиях и рейтинговых испытаниях в ДонНТУ в течение нескольких последних лет.

Составитель	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.
Компьютерный набор	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.
Рецензент	Н.С. Тю, проф., д.ф.-м.н.
Ответственный за выпуск	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала.

Областью допустимых значений (ОДЗ) иррационального уравнения будет множество тех значений неизвестного, при которых неотрицательны одновременно все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Два уравнения называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают, т.е. любое решение первого уравнения является решением второго. И обратно, любое решение второго уравнения является решением первого.

При решении иррациональных уравнений рекомендуется делать преобразования, приводящие к равносильным уравнениям. Если же это затруднительно, то необходимо делать проверку полученных решений, чтобы отбросить посторонние корни. В этом случае проверка является обязательным элементом решения и необходима даже в тех случаях, когда лишние корни не появились, но ход решения был таков, что они могли появиться. С другой стороны, иногда легче сделать проверку, чем обосновать то, что в ней нет необходимости. В этом случае проверка заменяет необходимое обоснование. Наконец, проверка может быть средством контроля правильности проделанных преобразований.

Следует отметить, что во многих уравнениях полезно, а иногда и необходимо, найти ОДЗ. Однако, универсального ответа на вопрос находить или не находить ОДЗ нет и быть не может. Уравнение может быть правильно решено, если в решении отсутствует даже упоминание об ОДЗ. И наоборот, верно найденная ОДЗ и последующий отбор корней по нему скорее всего приведут к ошибкам при формулировке ответа. Из последующих примеров будет видно, что большинство посторонних корней могут принадлежать ОДЗ. Кроме того, иногда задача определения ОДЗ оказывается слишком сложной и ненужной задачей. Поэтому при решении иррациональных уравнений нужно ориентироваться, прежде всего, на проверку полученных корней.

Перейдем к рассмотрению и классификации основных методов решения иррациональных уравнений.

1. Учет структуры ОДЗ

В некоторых задачах не стоит сразу пытаться избавиться от радикалов в уравнении. Определение ОДЗ, возможно, позволит либо доказать что исходное уравнение корней не имеет (если ОДЗ – пустое множество), либо состоит из конечного числа точек, что позволяет без алгебраических преобразований только с помощью проверки полученных значений выписать ответ, либо, наконец, если левая часть разложена на сомножители, отбросить корни, не принадлежащие ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{2x-9}{3x+1}}+\sqrt{4x-2}=\sqrt{9-x^2}+4$$

Решение. Уравнение имеет достаточно сложный вид. ОДЗ дается системой неравенств, обеспечивающих неотрицательность подкоренных выражений:

$$\begin{cases}\dfrac{2x-9}{3x+1}\ge 0\\ 4x-2\ge 0\\ 9-x^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\left(=\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[\dfrac{9}{2};\infty\right)\\ x\in\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)\\ x\in[-3;3]\end{cases}$$

Поскольку данная система неравенств противоречива, ОДЗ уравнения является пустым множеством. Таким образом, нет значений неизвестного, при которых исходное уравнение существует.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+1}{5x-3}}+\sqrt{4-3x^2}=\sqrt{\frac{2x+2}{x+5}}+1$$

Решение. ОДЗ данного уравнения находится из системы

$$\begin{cases}\frac{x+1}{5x-3}\geq 0\\ 4-3x^2\geq 0\\ \frac{2x+2}{x+5}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1]\cup\left(\frac{3}{5};\infty\right)\\ x\in\left[-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right]\\ x\in(-\infty;-5)\cup[-1;\infty)\end{cases}\Rightarrow$$

$$x=-1.$$

Поскольку $x=-1$ – единственное допустимое значение, достаточно проверить, является ли оно решением уравнения. Подставив значение $x=-1$ в уравнение, убеждаемся, что оно обращается в числовое тождество $1\equiv 1$. Следовательно, $x=-1$ есть единственное решение этого уравнения.

Ответ: $x=-1$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{9-x^2}\left(x^2-8x+15\right)(x+4)=0$$

Решение. ОДЗ данного уравнения определяется неравенством $9-x^2\geq 0$. Решая это неравенство, находим, что $-3\leq x\leq 3$.

Решение исходного уравнения дается решениями совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}9-x^2=0\\ x^2-8x+15=0\\ x+4=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 3\\ x=3;\ x=5,\\ x=-4\end{array}\right.$$

которые принадлежат ОДЗ. Легко определить, что корни этой совокупности $x_{1,2}=\pm 3$ принадлежат отрезку $[-3;3]$, корни $x_3=5$ и $x_4=-4$ выходят за его границы, т.е., являются посторонними корнями.

Ответ: $x_{1,2}=\pm 3$.

2. Возведение уравнения в степень

Решение иррациональных уравнений, естественно, состоит в сведении их к соответствующим рациональным алгебраическим уравнениям, которые являются следствиями данных иррациональных уравнений. Метод возведения в степень является наиболее часто употребляемым при решении иррациональных уравнений. Он состоит в возведении обеих частей уравнения в некоторую степень и последующим освобождении от радикалов по формуле

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n=f(x).$$

Отметим, что возведение обеих частей уравнения в степень и преобразование радикалов никогда не влекут потери корней, но могут привести к появлению лишних корней. Чтобы этого не случилось, если проверка корней затруднительна, необходимо перед операцией возведения в степень проверять выполнение следующей теоремы.

Теорема 1. Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному. Если обе части иррационального уравнения неотрицательны для всех значений переменного из ОДЗ, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень, получится уравнение, равносильное исходному на множестве ОДЗ.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{5x+27}=x+3$$

Решение. ОДЗ данного уравнения является вся числовая ось: $x\in R$. Возводя обе части уравнения в куб (нечетная степень!), получим равносильное уравнение

$$5x+27=x^3+9x^2+27x+27,$$

или
$$x^3+9x^2+22x=0.$$

Используем тот факт, что в данном уравнении нет свободного члена, что позволяет разложить его на сомножители

$$x \cdot (x^2 + 9x + 22) = 0$$

Отсюда следует совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 9x + 22 = 0 \end{array}\right.$$

Учитываем, что второе уравнение совокупности не имеет действительных корней (его дискриминант отрицателен), и приходим к выводу, что данное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

При данном способе решения проверка корня не является обязательной, поскольку все преобразования не нарушали равносильность уравнений. Однако, учитывая элементарность проверки, чтобы удостовериться в правильности выкладок, «для себя» ее лучше сделать.

Проверка: $x = 0$: $\sqrt[3]{27} = 3$ $\quad 3 \equiv 3$.

Ответ: $x = 0$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

Решение. Поскольку корни квадратного трехчлена, стоящего под знаком радикала, иррациональные, ОДЗ находить пока не будем, а обоснование решения проведем при помощи проверки полученных решений. Возводим обе части данного уравнения в квадрат

$$4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4$$

и получаем следующее квадратное уравнение

$$2x^2 - 6x = 0,$$

корни которого будут $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Проводим проверку полученных решений при помощи подстановки их в исходное уравнение. Имеем

$$x_1 = 0: \quad \sqrt{4} = -2, \quad 2 \neq -2$$

$$x_2 = 3: \quad \sqrt{1} = 1, 1 = 1$$

Таим образом, делаем вывод, что корень $x_1 = 0$ – посторонний.

Ответ: $x = 3$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{x + 7} - x + 3 = 0.$$

Решение. Вначале попробуем решить данное уравнение, как предыдущее. А именно: обоснуем решение проверкой полученных корней. Изолируем радикал в левой части

$$\sqrt{x + 7} = 3 - x \qquad (2.1)$$

и возведем обе части полученного уравнения в квадрат

$$x + 7 = 9 - 6x + x^2.$$

Имеем квадратное уравнение для определения неизвестного x

$$x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Его корни: $x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}$, $x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$. Легко видеть, что проверка данных корней очень затруднительна. Поэтому для обоснования решения находим ОДЗ исходного уравнения $x \geq -7$ и определяем преобразование, могущее повлечь за собой появление посторонних корней. Таким преобразованием является возведение обеих частей уравнения (2.1) в квадрат. Дело в том, что правая часть уравнения (2.1) может принимать, как положительные, так и отрицательные значения в пределах ОДЗ. Заметим, однако, что ни одно значение x, при котором $3 - x < 0$, не может служить корнем уравнения (2.1), так как в этом случае неотрицательное число (радикал в левой части) оказалось бы равным отрицательному. Иначе говоря, все корни уравнения (2.1) должны удовлетворять неравенству $3 - x \geq 0$, что с учетом ОДЗ дает область локализации корней

$$-7 \leq x \leq 3$$

Из двух полученных корней уравнения, только корень $x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}$ удовлетворяет этому неравенству. Второй же корень $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$, хотя и принадлежит ОДЗ, но не удовлетворяет неравенству $3 - x \ge 0$.

Ответ: $x = \dfrac{7-\sqrt{41}}{2}$.

Данный пример иллюстрирует тот факт, что только определение ОДЗ недостаточно для правильного отбора корней, поскольку посторонние корни зачастую принадлежат ОДЗ. Необходимым является удовлетворение требований сформулированной выше теоремы 1 о возможности возведения обеих частей иррационального уравнения в четную степень. Более того, для уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \qquad (2.2)$$

вообще не имеет смысла искать ОДЗ и требовать выполнения неравенства $f(x) \ge 0$, а достаточно записать только условие отбора корней $g(x) \ge 0$. Действительно, при выполнении условия $g(x) \ge 0$ обе части уравнения (2.2) неотрицательны и условия теоремы 1 выполнены. Следовательно, обе части уравнения (2) можно возвести в квадрат и перейти к уравнению

$$f(x) = g^2(x).$$

Тогда за счет условия $g^2(x) \ge 0$ автоматически следует, что $f(x) \ge 0$. Поэтому даже при необоснованном возведении в квадрат посторонние корни попадают внутрь ОДЗ. Подобные рассуждения полезно запомнить и применять их при решении усложненных иррациональных уравнений и неравенств, в которых определение ОДЗ невозможно.

Обобщая вышесказанное, можно сказать, что уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ будет равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^{2n}(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}.$$

Если в уравнение входит несколько радикалов, то однократным возведением в квадрат не обойтись. Обычно

всякий раз радикал уединяется, т.е. его располагают в одной из частей уравнения, а все остальное переносится в другую часть. Кстати, при этом нет нужды каждый раз проверять неотрицательность выражения, стоящего под знаком радикала. В этом случае корнями исходного уравнения будут лишь те корни первого уравнения без радикалов, которые будут давать числа одного знака в обеих частях всех тех промежуточных уравнений, которые возводились в квадрат. Однако проводить процедуру согласования знаков обеих частей уравнения следует проводить только тогда, когда уравнение сведено к виду (2.2). До этого же добиться неотрицательности обеих частей можно простым переносом радикалов.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{2x+3}$$

Решение. ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2x+3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ge -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad x \ge -1.$$

Чтобы корректно провести операцию возведения в квадрат без получения посторонних корней перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$$

Теперь обе части уравнения неотрицательны и условия теоремы 1 выполнены. Возводим в квадрат левую и правую части и получаем равносильное уравнение

$$x + 1 + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} + 2x + 3 = 1 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - 3x$$

Ставим условие согласования знаков левой и правой части уравнения, требуя, чтобы $-3 - 3x \ge 0$, т.е. $x \le -1$. Это условие на неизвестную вместе с условием определяющим ОДЗ $x \ge -1$ определяют только одно возможное значение $x = -1$, которое может быть решением уравнения. Поэтому нет необходимости еще проведения повторной операции возведения в квадрат. Подставляем это значение $x=-1$ в исходное уравнение:

$$x=-1: \qquad 0+1=1 \Rightarrow 1\equiv 1.$$

Получили верное числовое тождество.

Ответ: $x=-1$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}$$

Решение. ОДЗ данного уравнения дается системой неравенств, требующих, чтобы все подкоренные выражения были неотрицательны. Ее решение: $x\geq -2$.

Из-за наличия минусов в обеих частях данного уравнения не следует торопиться с возведением в квадрат – в результате можем получить уравнение, не равносильное исходному. Этого легко избежать – достаточно переписать исходное уравнение в виде

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}\ .$$

Здесь обе части уже неотрицательны и возведение в квадрат не приведет к появлению посторонних решений. После возведения в квадрат получим следующее уравнение, равносильное исходному на множестве ОДЗ

$$2x+7+2\sqrt{x^2+7x+12}=2x+9+2\sqrt{x^2+9x+14}$$

Приводя подобные члены, опять формируем левую и правые части уравнения таким образом, чтобы выполнялись условия их неотрицательности . Тогда получим

$$\sqrt{x^2+7x+12}=\sqrt{x^2+9x+14}+1$$

Теперь по теореме 1 после возведения в квадрат опять получим равносильное уравнение. После некоторых преобразований запишем его в виде

$$2\sqrt{x^2+9x+14}=-3-2x$$

Только теперь наше уравнение сведено к виду (2.2). Требуем выполнения условия $-3-2x\geq 0$, что совместно с неравенством, определяющим ОДЗ, даст множество локализации корней $-2\leq x\leq -\frac{3}{2}$. Еще раз возводим в квадрат

и после приведения подобных членов, получим значение $x=-\frac{47}{24}$, которое удовлетворяет данному неравенству.

Ответ: $x=-\frac{47}{24}$.

Данное оформление решения не требует проверки полученного значения корня. Однако, при наличии времени все же можно порекомендовать абитуриенту сделать проверку, чтобы проверить проведенные выкладки и снять возможные «шероховатости» в оформлении решения. Подставляем полученный корень в исходное уравнение и получаем

$$\sqrt{\frac{25}{24}}-\sqrt{\frac{121}{24}}=\sqrt{\frac{1}{24}}-\sqrt{\frac{49}{24}}\text{, т.е. } 5-11=1-7, \qquad -6\equiv -6.$$

Проверка еще раз доказывает правильность полученного значения x.

Следует заметить, что при решении некоторых примеров удовлетворение условий теоремы 1 перед возведением в квадрат может привести к усложнению последующих уравнений. В этом случае рекомендуется переносить радикалы исходного уравнения влево-вправо таким образом, чтобы неизвестная x или более высокие ее степени $x^2, x^3, \ldots$ максимально сокращались, если это возможно. Отбор посторонних корней в этом случае может быть произведен только при помощи проверки.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5\ .$$

Решение. ОДЗ определяется как решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-5\geq 0 \\ x^2+8x-4\geq 0. \end{cases}$$

Не будем пока решать эту систему, но запомним, что любой корень исходного уравнения должен ей удовлетворять.

Все условия теоремы 1 выполнены – можно возводить обе части уравнения в квадрат, не опасаясь появления посторонних решений. Но в данном случае эта операция нецелесообразна – в результате получим слишком сложное уравнение. Гораздо удобнее переписать исходное уравнение в виде

$$\sqrt{x^2+x-5}=5-\sqrt{x^2+8x-4} \qquad (2.3)$$

и обе его части возведем в квадрат. Конечно, теперь теорема 1 не применима, и это преобразование может привести к появлению посторонних корней. Поэтому необходимо будет сделать проверку. Итак, возведем обе части уравнения (2.3) в квадрат и получим

$$10\sqrt{x^2+8x-4}=7x+26.$$

Перед очередным возведением в квадрат отметим, что все корни полученного уравнения должны удовлетворять условию $7x+26\ge 0$, то есть $x\ge -\frac{26}{7}$. Это условие не отменит проверку, но может уменьшить ее объем. В результате после некоторых преобразований приходим к уравнению

$$51x^2+436x-1076=0,$$

откуда $x_1=2,\ x_2=-\frac{538}{51}$. Заметим, что $x_2<-\frac{26}{7}$, поэтому этот корень – посторонний. Осталось проверить значение $x_1=2$ прямой подстановкой в исходное уравнение. Имеем

$$x=2: \qquad 1+4=5.$$

Ответ: $x=2$.

Заметим, что в ходе решения нам так и не потребовалось решать систему неравенств, описывающую ОДЗ данного уравнения.

Пример 10. Решить уравнение

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$$

Решение. Система неравенств, определяющая ОДЗ данного уравнения, имеет вид

$$\begin{cases} x^2+x\ge 0 \\ x\ne 0 \\ x+\sqrt{x^2+x}\ne 0 \\ x-\sqrt{x^2+x}\ne 0 \end{cases}$$

Решение этой системы: $x\in(-\infty;-1]\cup(0;\infty)$.

Приводим левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)-\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}=\frac{3}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3x-5\sqrt{x^2+x}}{x^2-\left(x^2+x\right)}=\frac{3}{x}$$

Поскольку знаменатель обращается в нуль при значении $x=0$, которое не входит в ОДЗ, можем от него избавиться и прийти к равносильному на ОДЗ уравнению

$$3x-5\sqrt{x^2+x}=-3, \text{ т.е., } 5\sqrt{x^2+x}=3x+3.$$

Для корректного возведения в квадрат необходимо предварительно потребовать выполнения неравенства

$$3x+3\ge 0,$$

что с учетом ОДЗ дает область локализации корней уравнения:

$$x\in\{-1\}\cup(0;\infty).$$

Еще раз возводим в квадрат и заканчиваем решение

$$25\left(x^2+x\right)=9(x+1)^2 \Rightarrow 25x(x+1)-9(x+1)^2=0 \Rightarrow$$

$$(x+1)(25x-9x-9)=0 \Rightarrow$$

$$x_1=-1;\ x_2=\frac{9}{16}.$$

Оба корня принадлежат найденной области локализации $x\in\{-1\}\cup(0;\infty)$.

Ответ: $x_1=-1;\ x_2=\frac{9}{16}$.

В задачах повышенной сложности избавление от радикалов может приводить не к квадратному уравнению, а к алгебраическому уравнению более высокой степени. В этом случае необходимо привлечение методов решения таких уравнений.

Пример 11. Решить уравнение

$$3x^2 - 2 = \sqrt{24x + 27}$$

Решение. Требования принадлежности решений ОДЗ и неотрицательности обеих частей уравнения приводит к условию $x \geq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$9x^4 - 12x^2 + 4 = 24x + 27 \quad \Rightarrow$$
$$9x^4 - 12x^2 - 24x - 23 = 0.$$

Попытки определить рациональные корни этого уравнения к цели не приводят. После углубленного анализа левой части уравнения приходим к выводу о возможности сведения уравнения к виду $f^2(x) = g^2(x)$. С этой целью представим уравнение в виде

$$\left(9x^4 - 6x^2 + 1\right) - 6x^2 + 3 = 24x + 27 \quad \Rightarrow$$
$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 6\left(x^2 + 4x + 4\right).$$

Цель достигнута, уравнение принимает вид

$$\left(3x^2 - 1\right)^2 = \left(\sqrt{6}(x+2)\right)^2.$$

Остальные преобразования комментариев не требуют:

$$\left(3x^2 - 1\right)^2 - \left(\sqrt{6}(x+2)\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\left(3x^2 - 1 - \sqrt{6}(x+2)\right)\cdot\left(3x^2 - 1 + \sqrt{6}(x+2)\right) = 0.$$

Приравниваем каждый сомножитель нулю и получаем совокупность двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2 - \sqrt{6}\cdot x - \left(1 + 2\sqrt{6}\right) = 0 \\ 3x^2 + \sqrt{6}\cdot x - \left(1 - 2\sqrt{6}\right) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{18 + 24\sqrt{6}}}{6} \\ x \in \varnothing \ \ (D < 0) \end{array}\right.$$

С учетом условия $x \geq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ необходимо из двух корней оставить больший.

Ответ: $x = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{18 + 24\sqrt{6}}}{6}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$x^2 - 5 = \sqrt{5 - x}$$

Решение. Корень данного уравнения должен принадлежать множеству $x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; 5\right]$. Решим уравнение относительно 5, считая ее неизвестной по аналогии с x. Имеем

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 5 - x \Rightarrow 25 - 5 - 2\cdot 5x^2 + \left(x^4 + x\right) = 0 \Rightarrow$$
$$5^2 - \left(1 + 2x^2\right)\cdot 5 + x^4 + x = 0 \Rightarrow$$
$$5 = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1 - 4\left(x^4 + x\right)}}{2} =$$
$$= \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x-1)^2}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2}.$$

Таким образом, имеем два уравнения

$$\left[\begin{array}{l} 5 = \dfrac{2x^2 + 1 + 2x - 1}{2} = x^2 + x \\ 5 = \dfrac{2x^2 + 1 - 2x + 1}{2} = x^2 - x + 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 5 = 0 \\ x^2 - x - 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

При формулировке ответа учитываем область локализации корней уравнения $x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; 5\right]$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Хотя метод возведения в степень является основным методом решения иррациональных уравнений, его применение зачастую может привести лишь к усложнению исходного уравнения. Таким образом, следует познакомиться с группой методов решения, которые дают иные способы избавления от радикалов.

3. Введение дополнительных неизвестных

Введение нового неизвестного – важнейший метод решения уравнений любых видов и типов. При решении иррациональных уравнений следует ориентироваться в большом количестве разнообразных замен переменной, однако, все они преследуют по существу одну цель – избавиться от радикалов или, по крайней мере, уменьшить их количество в уравнении. Наиболее простая замена: *новая переменная – радикал от выражения, содержащего неизвестную*

Пример 11. Решить уравнение

$$x^2 - 2x + 10 = \sqrt{2x^2 - 6x + 85} + x - 1$$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде

$$x^2 - 3x + 11 = \sqrt{2x^2 - 6x + 85} \qquad (3.1)$$

Ключом к решению данного уравнения является констатация того факта, что коэффициенты при различных степенях x в квадратных трехчленах , стоящих в левой и правой частях уравнения (3.1), пропорциональны. Теперь видно, что если ввести вспомогательное неизвестное

$$y = \sqrt{2x^2 - 6x + 85},\ y \geq 0,$$

то уравнение примет гораздо более простой вид. Действительно, выразим через новую переменную выражение в левой части уравнения. Имеем последовательно

$$2x^2 - 6x + 85 = y^2$$

$$x^2 - 3x + 42{,}5 = \frac{y^2}{2}$$

$$x^2 - 3x + 11 = \frac{y^2}{2} - 31{,}5$$

Таким образом, уравнение (3.1) в терминах новой переменной запишется следующим образом

$$\frac{y^2}{2} - 31{,}5 = y,$$

$$y^2 - 2y - 63 = 0$$

Корни полученного квадратного уравнения: $y_1 = 9$, $y_2 = -7$. Поскольку $y_2 < 0$, второй корень не учитываем и для определения x имеем уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 85} = 9,$$

обе части которого положительны, следовательно, условия теоремы 1 выполнены и после возведения в квадрат

$$2x^2 - 6x + 85 = 81 \qquad (3.2)$$

и решения получающегося квадратного уравнения

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

получаем два корня $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Подстановкой обеих корней в исходное уравнение убеждаемся, что оба они обращают это уравнение в тождество.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Заметим, что в данном уравнении проверка сделана для подстраховки, поскольку все преобразования приводили нас к равносильным уравнениям. Действительно, ОДЗ данного уравнения дается неравенством

$$2x^2 - 6x + 85 \geq 0.$$

Хотя при оформлении решения мы данное неравенство не решали и даже не формулировали, в процессе решения, как видно из уравнения (3.2), оно удовлетворяется автоматически. Поэтому оба полученных корня попали в ОДЗ.

В только что рассмотренном примере реализован случай наиболее простой замены переменной, применяющейся при решении иррациональных уравнений, когда в качестве новой переменной принимается радикал, зависящий от исходной переменной. Если в уравнении присутствует более одного радикала, приходится искать более сложные замены переменной, представляющие уже *комбинации (чаще всего алгебраические суммы) нескольких радикалов*.

Пример 12. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+3x=12-2\sqrt{2x^2-3x-9}-\sqrt{x-3}$$

Решение. ОДЗ данного уравнения дается системой неравенств

$$\begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ x-3\ge 0 \\ (2x+3)(x-3)\ge 0 \end{cases}, \text{ решение которой: } x\ge 3.$$

Воспользуемся одним из самых «дельных» советов элементарной математики: разложим квадратный трехчлен на сомножители и перепишем уравнение в следующем виде

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}+3x+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=12$$

Вводим новую переменную

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=t\ge 0. \qquad (3.3)$$

Докажем теперь, что все уравнение будет квадратным относительно новой переменной. Действительно,

$$2x+3+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}+x-3=t^2$$

$$3x+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=t^2$$

и уравнение (3.3) примет вид

$$t^2+t-12=0,$$

откуда $t_1=3$; $t_2=-4$ – посторонний корень (<0).

Возвращаемся к переменной x и получаем уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3,$$

решение которого проводим методом возведения в степень

$$3x+2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=9$$

$$2\sqrt{(2x-3)(x-3)}=9-3x \qquad (3.4)$$

Условие неотрицательности обеих частей этого уравнения $9-3x\ge 0$ совместно с неравенством, определяющим ОДЗ $x\ge 3$ дает единственное значение, которое может быть корнем уравнения: $x=3$. Поэтому вместо возведения в квадрат обеих частей уравнения (3.4), просто подставим значение $x=3$ в исходное уравнение и убедимся, что оно обращает его в тождество:

$$3+9=12-2\cdot 0-0, \qquad 12\equiv 12.$$

Ответ: $x=3$.

Рассмотрим далее *однородные иррациональные уравнения*. В этом типе уравнений замену следует проводить только после того, как доказана однородность рассматриваемого уравнения, что обычно представляет основную трудность. После этого решение проводится аналогично тому, как это производилось в однородных алгебраических уравнениях.

Напомним, что уравнение называется однородным уравнением второго порядка относительно функций $u(x)$ и $v(x)$, если оно имеет следующую структуру

$$a_0u^2+a_1u\cdot v+a_2v^2=0,$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные коэффициенты.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(9+x)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(9-x)^2}-3\cdot\sqrt[3]{81-x^2}=0$$

Решение. ОДЗ данного уравнения – вся числовая ось. Перепишем его в «однородном» виде

$$\sqrt[3]{(9+x)^2}-3\cdot\sqrt[3]{(9+x)(9-x)}+2\cdot\sqrt[3]{(9-x)^2}=0$$

В данном уравнении упомянутые выше функции u и v равны

$$u=\sqrt[3]{(9+x)}, \quad v=\sqrt[3]{(9-x)}.$$

Делим обе части уравнения на неизвестную функцию $v^2=\sqrt[3]{(9-x)^2}\ne 0$.

Обоснуем это преобразование. Предположим противное: $v^2=\sqrt[3]{(9-x)^2}=0$, т.е. $x=9$. Подставим значение $x=9$ в исходное уравнение и получим $\sqrt[3]{324}=0$, что неверно. Данное противоречие и доказывает, что $x \neq 9$. После деления уравнение примет вид

$$\left(\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}\right)+2=0.$$

Замена переменной теперь очевидна: $z=\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}$. После решения квадратного уравнения

$$z^2-3z+2=0,$$

которое имеет корни $z_1=1,\ \ z_2=2$, возвращаемся к исходной переменной

$\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}=1$	$\sqrt[3]{\frac{9+x}{9-x}}=2$
$\frac{9+x}{9-x}=1$	$\frac{9+x}{9-x}=8$
$x=0$	$x=7$

В процессе решения встретилось две опасные выкладки: деление на функцию, содержащую неизвестную величину и избавление от знаменателя $9-x$ при нахождении корней. Оба преобразования требуют выполнение условия $x \neq 9$, что было доказано в процессе решения. Поэтому ответ можно формулировать без проверки. Однако, ввиду простоты корней ее все же рекомендуется сделать.

Ответ: $x=0,\ \ x=7.$

Следующий тип иррациональных уравнений, требующих при решении замены переменной, – это *уравнения содержащие выражения вида* $\sqrt[n]{x^m}$. Такие уравнения рекомендуется решать в следующем порядке:

1). Привести все выражения в уравнении к дробным степеням при помощи формул

$$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}, \qquad x^m\cdot x^n=x^{m+n}, \qquad \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n},$$

$$\left(x^m\right)^n=x^{mn}, \quad x^{-m}=\frac{1}{x^m}.$$

2). Избавиться, если это необходимо, от x в знаменателях, оставив в уравнении только положительные степени неизвестной.

3). Привести все дроби в показателях степеней к общему знаменателю k.

4). Ввести новую переменную $z=x^{\frac{r}{k}}$, где числитель r в показателе степени следует выбрать так, чтобы в терминах новой переменной уравнение не содержало радикалов.

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[6]{x}+\sqrt{x}=2$$

Решение. ОДЗ уравнения определяется неравенством $x \geq 0$. Переходим к дробным степеням

$$x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{2}}=2,$$

или
$$x^{\frac{4}{6}}+x^{\frac{3}{6}}-2x^{\frac{1}{6}}=2.$$

Вводим новую переменную по формуле

$$z=x^{\frac{1}{6}},\ \ z\geq 0.$$

Теперь уравнение запишется как уравнение четвертой степени относительно переменной z

$$z^4+z^3-2z-2=0.$$

Для его решения можно применить, например, метод группировки:

$$z^3(z+1)-2(z+1)=0,$$

$$(z+1)(z^3-2)=0.$$

Таким образом, имеем два корня $z_1=-1,\ z_2=\sqrt[3]{2}$. Отрицательный корень не учитываем ($z\geq 0$) и для определения x имеем уравнение

$$\sqrt[6]{x}=\sqrt[3]{2}\text{, откуда } x=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=\left(\left(\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\right)\right)^6=2^{\frac{1}{3}\cdot 6}=2^2=4.$$

Ответ: $x=4$.

Если в уравнении присутствует несколько радикалов степени выше второй, может помочь *метод введения двух неизвестных*.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{2x+12}+\sqrt[4]{5-2x}=3.$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases}2x+12\ge 0\\ 5-2x\ge 0\end{cases}\text{, откуда } -6\le x\le \frac{5}{2}.$$

Вводим две новые переменные

$$\sqrt[4]{2x+12}=u\ge 0$$

$$\sqrt[4]{5-2x}=v\ge 0$$

Теперь уравнение запишется в виде

$$u+v=3. \tag{3.5}$$

Вторую связь между новыми переменными получим, преобразуя их зависимости от x. Имеем

$$\begin{cases}2x+12=u^4\\ 5-2x=v^4\end{cases}.$$

Складываем эти два соотношения и получаем нужную зависимость

$$u^4+v^4=17 \tag{3.6}$$

Объединяем уравнения (3.5),(3.6) в систему и решаем ее методом исключения неизвестных.

$$\begin{cases}u+v=3\\ u^4+v^4=17\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}v=3-u\\ u^4+(3-v)^4=17\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}v=3-u\\ u^4+(u-3)^4=17\end{cases}$$

Уравнение для определения переменной u представляет собой уравнение вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$, решение которого рекомендуется начинать с замены переменной $x=y-\dfrac{a+b}{2}$. В нашем случае $a=0,\ b=-3$, т.е.

$$u=y-\frac{0+(-3)}{2}=y+\frac{3}{2}.$$

Для определения y, таким образом, имеем уравнение

$$\left(y+\frac{3}{2}\right)^4+\left(y-\frac{3}{2}\right)^4=17.$$

Возводим двучлены в четвертую степень и приводим подобные

$$y^4+4y^3\cdot\frac{3}{2}+6y^2\cdot\frac{9}{4}+4y\cdot\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+y^4-4y^3\cdot\frac{3}{2}+$$

$$+6y^2\cdot\frac{9}{4}-4y\cdot\frac{27}{8}+\frac{81}{16}=17,$$

$$2y^4+27y^2-\frac{55}{8}=0$$

Полученное биквадратное уравнение решаем стандартной заменой $y^2=z\ge 0$. Тогда

$$2z^2+27z-\frac{55}{8}=0\quad\Rightarrow\quad z_1=\frac{1}{4},\ z_2=-\frac{55}{4}<0.$$

Учитываем только положительный корень и последовательно находим все предыдущие переменные:

$$z=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad y_1=\frac{1}{2},\ y_2=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow$$

$$u_1=2,\ u_2=1.$$

Переменную v находить не имеет смысла, поскольку мы просто продублируем вычисления и получим те же значения неизвестного, которые однозначно определяются зависимостью u от x. Итак, для определения x имеем два уравнения

$\sqrt[4]{2x+12}=2$	$\sqrt[4]{2x+12}=1$
$2x+12=16$	$2x+12=1$
$x=2$	$x=-\dfrac{11}{2}$

Оба корня входят в ОДЗ. В четную степень мы возводили обе части уравнений только в конце решения, когда неотрицательность обеих частей была очевидна. Решение обосновано.

Ответ: $x_1=2,\quad x_2=-\dfrac{11}{2}$.

Специфической формой введения новых неизвестных служат *тригонометрические замены переменных.* Идея использования этих замен состоит в сведении иррационального уравнения к более простому тригонометрическому уравнению за счет свойств тригонометрических функций. Выбор замены зависит от вида уравнения. Например, если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то целесообразно сделать замену $x=a\cdot\cos t$ или $x=a\cdot\sin t$. Если в уравнении присутствует радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то можно сделать замену $x=a\cdot tgt$. Если же в уравнение входит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то возможна замена $x=\dfrac{a}{\cos t}$ или $x=\dfrac{a}{\sin t}$.

Кроме указанных форм радикалов на целесообразность применения тригонометрических замен может указывать наличие в уравнении выражений, напоминающих формулы тригонометрии. Например, $1-2x^2$, $2x^2-1$, $4x^3-3x$, $3x-4x^3$ и т.п.

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1-|x|}{2}}=2x^2-1$$

Решение. Определение ОДЗ уравнения приводит к необходимости выполнения неравенства $1-|x|\le 1$, откуда $-1\le x\le 1$.

Заметим, что левая и правая части уравнения являются четными функциями. Следовательно, если x_1 – корень уравнения, то и $(-x_1)$ также будет его корнем. Это дает возможность рассматривать только значения $x>0$ ($x=0$ не является корнем). С учетом ОДЗ и указанного условия можем рассматривать значения x, удовлетворяющие условию $0<x<1$ (значение $x=1$ также не является корнем).

Дополнительно из условия неотрицательности правой части уравнения необходимо добавить ограничение $2x^2-1\ge 0$, что в совокупности с условием $0<x<1$ приведет к неравенству

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\le x<1. \qquad (3.7)$$

Вводим тригонометрическую замену $x=\sin t$. С учетом неравенства (3.7) можно считать, что $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le \sin t<1$, т.е. $\dfrac{\pi}{4}\le t<\dfrac{\pi}{2}$.

В терминах введенной тригонометрической подстановки исходное уравнение запишется в виде (при данных ограничениях на новую переменную t можно считать, что $|\sin t|=\sin t$)

$$\sqrt{\frac{1-\sin t}{2}}=-\cos 2t$$

Правая часть этого уравнения $-\cos 2t\ge 0$, если $\dfrac{\pi}{4}\le t<\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому можно обе части уравнения возвести в квадрат и решить получающееся тригонометрическое уравнение. Имеем

$$\frac{1-\sin t}{2}=\cos^2 2t \;\Rightarrow\; \left(2\cos^2 2t-1\right)+\sin t=0 \;\Rightarrow$$

$$\cos 4t+\sin t=0 \;\Rightarrow$$

$$\cos 4t+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=0 \;\Rightarrow\; 2\cos\left(\frac{3t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{5t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\,.$$

Приравниваем каждый сомножитель к нулю. Имеем две совокупности решений:

а). $\cos\left(\frac{3t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{3t}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n \;\Rightarrow$

$$t=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z\,.$$

Так как $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{\pi}{2}$, то в данной совокупности ни при каком значении n нет корней исходного уравнения.

б). $\cos\left(\frac{5t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{5t}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k \;\Rightarrow$

$$t=\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5},\ k\in Z\,.$$

При $k=0$ имеем значение $t=\frac{3\pi}{10}\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, $x=\sin\frac{3\pi}{10}$, и исходное уравнение имеет два корня $x=\sin\frac{3\pi}{10}$ и $x=-\sin\frac{3\pi}{10}$. Ответ можно оставить в тригонометрической форме, а можно записать и в радикалах, ибо

$$x=\sin\frac{3\pi}{10}=\sin 54^0=\cos 36^0=1-2\sin^2 18^0=$$

$$=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.$$

Ответ: $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

4. Умножение на вспомогательную функцию

Иногда иррациональное уравнение удается решить довольно быстро, если умножить обе его части на удачно подобранную функцию. При этом могут появиться посторонние корни (нули этой функции). Поэтому предлагаемый метод требует обязательного исследования полученных значений. Чаще всего при этом используются формулы

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b,\quad a\ge 0,\ b\ge 0\,.$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)=a-b$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=a+b\,.$$

Пример 17. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+4x+9}+\sqrt{3x^2-4x+9}=4x\,. \qquad (4.1)$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases}3x^2+4x+9\ge 0\\ 3x^2-4x+9\ge 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x\in R$$

Заметим, что левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому уравнение будет иметь решение только, если $x\ge 0$.

Умножим обе части уравнения (4.1) на выражение

$$\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}\,,$$

которое является сопряженным для выражения, стоящего в левой части. После очевидных преобразований получим следующее уравнение

$$8x=4x\cdot\left(\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}\right),$$

$$4x\cdot\left(\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}-2\right)=0\,.$$

Полученное уравнение имеет корень $x=0$, однако, это значение не удовлетворяет исходному уравнению и поэтому может быть отброшено. В результате имеем уравнение

$$\sqrt{3x^2+4x+9}-\sqrt{3x^2-4x+9}=2\,,\quad (4.2)$$

которое является никак не легче исходного. Используем тот факт, что уравнение (4.2) является следствием уравнения (4.1) и поэтому уравнения (4.1) и (4.2) должны быть рассмотрены совместно. Складывая их и сокращая на 2, получаем

$$\sqrt{3x^2+4x+9}=2x+1$$

Требуем выполнения условия $2x+1\ge 0$, что совместно с ранее выдвинутым условием $x\ge 0$ дает область локализации корней $x\ge 0$. Возводим обе части полученного уравнения в квадрат и в результате получим

$$x^2=8\text{, т.е. } x=\pm 2\sqrt{2}\,.$$

Условию $x\ge 0$ удовлетворяет только корень $x=2\sqrt{2}$.

Проверка.

$$x=2\sqrt{2}:\qquad \sqrt{33+8\sqrt{2}}+\sqrt{33-8\sqrt{2}}=4\cdot 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32+8\sqrt{2}+1}+\sqrt{32-8\sqrt{2}+1}=8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\left(4\sqrt{2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(4\sqrt{2}-1\right)^2}=8\sqrt{2}$$

$$\left|4\sqrt{2}+1\right|+\left|4\sqrt{2}-1\right|=8\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2}+1+4\sqrt{2}-1=8\sqrt{2}$$

$$8\sqrt{2}=8\sqrt{2}\,.$$

Ответ: $\quad x=2\sqrt{2}$.

Заметим, что умножение на сумму радикалов не приводит обычно к появлению посторонних корней. Дело в том, что область определения этой суммы та же, что у исходного уравнения. К тому же чаще всего оба радикала не обращаются в ноль одновременно. Поэтому указанная сумма радикалов положительна, что позволяет после умножения на нее получить уравнение, равносильное исходному. Если же приходится умножать на разность радикалов, как в только что рассмотренном примере, то появление посторонних корней практически неизбежно. В примере 17 таким посторонним корнем было значение $x=0$.

5. Метод разложения на сомножители

Данный метод является одним из основных методов решения практически всех типов уравнений. Однако, его реализация при решении иррациональных уравнений требует осторожности, когда речь идет о таких преобразованиях, как вынесение множителя за знак радикала, разбиение радикала на два сомножителя и т.п. Дело в том, что легко можно сделать ошибки, если не учитывать при этих преобразованиях знаки подкоренных выражений. Например, при разбиении радикала на два сомножителя нужно учитывать, что

$$\sqrt{a\cdot b}=\begin{cases}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ a\ge 0, b\ge 0\\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b},\ a<0, b<0\end{cases}\qquad (5.1)$$

Иначе формула (14) может быть записана в виде

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{|\,a\,|}\cdot\sqrt{|\,b\,|}\,.$$

Пример 18. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{x^2-3x-4}$$

Решение. Находим вначале ОДЗ уравнения, требуя неотрицательности подкоренных выражений. Решаем систему неравенств

$$\begin{cases}2x^2+x-1\ge 0\\ x^2-x-2\ge 0\\ x^2-3x-4\ge 0\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{cases}(x+1)(2x-1)\ge 0\\ (x+1)(x-2)\ge 0\\ (x+1)(x-4)\ge 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x\in(-\infty;-1]\cup[0{,}5;\infty)\\ x\in(-\infty;-1]\cup[2;\infty)\\ x\in(-\infty;-1]\cup[4;\infty)\end{cases}\Rightarrow$$

$$x\in(-\infty;-1]\cup[4;\infty)$$

Раскладывая квадратный трехчлен на сомножители, запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{(x+1)(2x-1)}+\sqrt{(x+1)(x-2)}-\sqrt{(x+1)(x-4)}=0\qquad (5.2)$$

Под каждым радикалом стоит сомножитель $x+1$, что позволяет применить метод разложения на сомножители. Учитываем, что на различных участках ОДЗ сомножители под радикалами будут иметь разные знаки, разбиваем решение на два этапа.

I. $x \in (-\infty;-1]$.

На этом участке все сомножители отрицательны и в соответствии с формулой (5.1) имеем

$$\sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{1-2x}$$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{(x+1)(x-4)} = \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{4-x}$$

После вынесения общего сомножителя, уравнение (5.2) примет вид

$$\sqrt{-x-1} \cdot \left(\sqrt{1-2x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{4-x}\right) = 0$$

Равенство нулю первого сомножителя дает значение $x=-1$, которое принадлежит рассматриваемому интервалу и удовлетворяет уравнению. Приравниваем нулю второй сомножитель и учитывая требования теоремы 1, получаем уравнение

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{4-x}$$

После возведения в квадрат и локализации радикала в левой части получим уравнение

$$2\sqrt{(1-2x)(2-x)} = 1+2x,$$

которое может иметь решение только при выполнении неравенства $1+2x \geq 0$. Это приводит к условию $x \geq -\frac{1}{2}$, что не совместимо с требованием $x \in (-\infty;-1]$. Таким образом, второй сомножитель на рассматриваемом интервале в нуль не обращается.

II. $x \in [4;\infty)$. На этом участке по формуле (5.1) будем иметь

$$\sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x-1},$$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2},$$

$$\sqrt{(x+1)(x-4)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$$

Аналогично предыдущему получим

$$\sqrt{x+1} \cdot \left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x-4}\right) = 0$$

Теперь значение $x=-1$, обращающее в нуль первый сомножитель, представляет собой посторонний корень, т.к. это значение не принадлежит интервалу $[4;\infty)$. Равенство нулю второго сомножителя в конечном итоге приводит к уравнению

$$2\sqrt{(2x-1)(x-2)} = -(1+2x).$$

Условие неотрицательности правой части приведет к неравенству $x \leq -\frac{1}{2}$, что противоречит условию $x \in [4;\infty)$.

Ответ: $x=-1$.

6. Уравнения, содержащие кубические радикалы

При решении уравнений, которые содержат более одного кубического радикала, проявляется некоторая специфика преобразований, дающая основание для выделения этой группы уравнений в отдельный тип.

Пример 19. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x-34} - \sqrt[3]{x-71} = 1.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения: $x \in R$.

1-й способ (введение новой переменной)

Обозначим $\sqrt[3]{x-34} = y$. Тогда $x = y^3 + 34$ и уравнение примет вид $y - \sqrt[3]{y^3 - 37} = 1$ или $\sqrt[3]{y^3-37} = y-1$.

Возводя обе части в куб (по теореме 1 равносильность уравнений выполняется), получим после приведения подобных членов квадратное уравнение $y^2 - y - 12 = 0$, решая которое, находим $y_1 = -3,\ y_2 = 4$.

Возвращаемся к переменной x:

$$\sqrt[3]{x-34}=-3, \quad x=7 \qquad \text{или}$$
$$\sqrt[3]{x-34}=4, \quad x=98.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют уравнению.

Ответ: $x_1=7, \quad x_2=98$.

2-й способ (введение двух новых переменных)

Обозначим $\sqrt[3]{x-34}=u, \quad \sqrt[3]{x-71}=v$. Возводим обе части этих соотношений в куб и вычитаем одно из другого. В результате получаем систему уравнений, которую решение которой не вызывает затруднений

$$\begin{cases} u-v=1 \\ u^3-v^3=37 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} u-v=1 \\ (u-v)(u^2+uv+v^2)=37 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v=u-1 \\ u^2-u-12=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} u_1=-3 \\ v_1=-4 \end{cases} \text{или} \begin{cases} u_2=4 \\ v_2=3 \end{cases}$$

Возвращение к исходной переменной дает те же решения, что были получены первым способом: $x_1=7, \quad x_2=98$.

3-й способ (возведение обеих частей уравнения в куб)

Уравнения рассматриваемой структуры могут быть решены также возведением обеих частей в третью степень и группировкой утроенных произведений при помощи формул

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

Возводим обе части уравнения (16) в куб

$$x-34-3\cdot\sqrt[3]{(x-34)^2(x-71)}+3\cdot\sqrt[3]{(x-34)(x-71)^2}-(x-71)=1$$

$$37-3\cdot\sqrt[3]{(x-34)(x-71)}\cdot\left(\sqrt[3]{x-34}-\sqrt[3]{x-71}\right)=1$$

Учитывая, что по условию $\sqrt[3]{x-34}-\sqrt[3]{x-71}=1$, получим

$$12-\sqrt[3]{(x-34)(x-71)}\cdot 1=0,$$

откуда

$$x^2-105x+686=0$$

Корни этого уравнения: $\qquad x_1=7, \quad x_2=98$.

Если число кубических радикалов в уравнении больше двух, только третий способ дает возможность быстро найти решение.

Пример 20. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x-7}+\sqrt[3]{x-7}-\sqrt[3]{3x-14}=0.$$

Решение. ОДЗ: $x \in R$. Записываем уравнение в виде

$$\sqrt[3]{2x-7}+\sqrt[3]{x-7}=\sqrt[3]{3x-14}$$

и возводим обе его части в куб

$$2x-7+3\cdot\sqrt[3]{(2x-7)^2(x-7)}+3\cdot\sqrt[3]{(2x-7)(x-7)^2}+x-7=3x-14$$

$$3\cdot\sqrt[3]{(2x-7)(x-7)}\cdot\left(\sqrt[3]{2x-7}+\sqrt[3]{x-7}\right)=0$$

$$\sqrt[3]{(2x-7)(x-7)(3x-14)}=0$$

Уравнение разложено на сомножители. Приравниваем каждый из них к нулю и получаем три корня исходного уравнения.

Ответ: $x_1=\dfrac{7}{2}, \quad x_2=7, \quad x_3=\dfrac{14}{3}.$

7. Уравнения, сводящиеся к модульным

В основной своей массе иррациональные уравнения сложнее, чем уравнения, содержащие знак модуля. Поэтому, если выражение под знаком радикала представляет собой степень некоторой функции, то необходимо воспользоваться формулами

$$\sqrt[2n]{f^{2n}(x)}=\left|f(x)\right|, \quad \sqrt[2n+1]{f^{2n+1}(x)}=f(x) \qquad (7.1)$$

Это практически наверняка облегчит дальнейшее решение. Отметим, частные случаи формул (17)

$$\sqrt{f^2(x)}=\left|f(x)\right|, \qquad \sqrt[3]{f^3(x)}=f(x), \quad \sqrt{x^2}=|x|. \quad (7.2)$$

Пример 21. Решить уравнение

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2$$

Решение. Сделаем подстановку $\sqrt{x-4} = y \geq 0$. Тогда $x = y^2 + 4$ и уравнение примет вид

$$\sqrt{y^2 - 2y + 1} - \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 2,$$

т.е., $$\sqrt{(y-1)^2} - \sqrt{(y-3)^2} = 2.$$

Теперь применим первую из формул (7.2) и получим

$$|y-1| - |y-3| = 2$$

Полученное уравнение решаем методом интервалов

I. $0 \leq y \leq 1$: $(1-y)-(3-y)=2 \Rightarrow -2=2 \Rightarrow$ решений нет.

II. $1 < y \leq 3$: $(y-1)-(3-y)=2 \Rightarrow y=3 \in (1;3]$.

Ш. $y > 3$: $(y-1)-(y-3)=2 \Rightarrow 2=2 \Rightarrow$

$$y \in R.$$

Итак, решение $y \geq 3$. Переходим к исходной переменной. Для ее определения имеем неравенство

$$\sqrt{x-4} \geq 3, \text{ т.е. } x \geq 13.$$

Ответ: $x \in [13;\infty)$.

Следует отметить, что ОДЗ этого уравнения $x \geq 4$ определяется требованием нетрицательности только внутреннего подкоренного выражения. Его можно было находить при решении заключительного иррационального неравенства. Что касается существования внешних радикалов, то в процессе решения было доказано, что под ними стоят полные квадраты, т.е они заведомо существуют.

8. Уравнения, содержащие знак модуля

При решении большинства уравнений этого типа рекомендуется сначала избавляться от радикалов, а уже затем раскрывать модули. При этом следует руководствоваться положениями, сформулированными выше.

Пример 22. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+4} = 5 - |x-3|$$

Решение. ОДЗ определяется неравенством $3x + 4 \geq 0$, т.е. $x \geq -\dfrac{4}{3}$.

Для того, чтобы избавиться от радикала, необходимо возвести обе части уравнения во вторую степень. Чтобы в обеих частях уравнения стояли неотрицательные выражения, необходимо перед этим потребовать выполнения неравенства

$$5 - |x-3| \geq 0 \Rightarrow |x-3| \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \leq 5 \\ x-3 \geq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-2 \leq x \leq 8.$$

С учетом ОДЗ получаем область локализации корней

$$-\frac{4}{3} \leq x \leq 8. \qquad (8.1)$$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим

$$3x + 4 = 25 - 10 \cdot |x-3| + x^2 - 6x + 9, \text{ т.е.}$$

$$x^2 - 9x - 10 \cdot |x-3| + 30 = 0$$

Раскрываем модуль по определению

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x-3 \geq 0 \\ 3-x, & x-3 < 0 \end{cases}$$

I. $x \geq 3$. С учетом неравенства (8.1) попадаем в область $3 \leq x \leq 8$. Здесь уравнение запишется в виде

$$x^2 - 9x - 10(x-3) + 30 = 0, \text{ т.е.}$$

$$x^2 - 19x + 60 = 0.$$

Из двух корней $x_1 = 4,\ x_2 = 15$ интервалу $[3;15]$ принадлежит только значение $x_1 = 4$.

II. $x < 3$. Ввиду (8.1) попадаем на интервал $\left[-\dfrac{4}{3};3\right)$.

Здесь решаем уравнение

$$x^2 - 9x - 10(3-x) + 30 = 0, \text{ т.е. } x^2 + x = 0.$$

Таким образом, имеем два значения $x_1 = -1, \quad x_2 = 0$,

которые оба принадлежат интервалу $\left[-\dfrac{4}{3};3\right)$.

Ответ: $x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0$.

9. Учет структуры уравнения

При этом способе решения множество, представляющее собой ОДЗ исходного уравнения и ограничения на неизвестную, следующие из анализа структуры уравнения должны в совокупности либо сводиться к пустому множеству (тогда уравнение не имеет решения) либо давать в пересечении только одну точку, которая проверяется затем простой подстановкой в уравнение. Если же пересечением упомянутых множеств служит интервал, то данный метод не применим.

Пример 23. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1-2x^2} = \sqrt{x} - \frac{3}{2}.$$

Решение. Легко заметить, что простое возведение в квадрат обеих частей приведет к очень сложному уравнению. Так же не подходит ни один из рассмотренных выше методов решения.

ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

$\begin{cases} x+1-2x^2 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$, решение которой имеет вид $x \in [0;1]$.

Поскольку в левой части уравнения стоит радикал четной степени, то уравнение может иметь решение только в том случае, если правая часть будет неотрицательна. Это возможно только при выполнении условия $\sqrt{x} - \dfrac{3}{2} \ge 0$, т.е. при $x \ge \dfrac{9}{4}$. Данное множество не имеет с интервалом [0;1] общих точек. Таким образом, решений у данного уравнения нет.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Отметим, что в уравнениях рассматриваемого типа практически отсутствуют математические преобразования.

10. Использование монотонности функций

Метод решения, основанный на исследовании монотонности функций, входящих в уравнение, применим как к обычным школьным задачам, так и к более сложным, нестандартным задачам, где этот метод оказывается зачастую единственным, позволяющим получить решение. Кроме того, использование монотонности функций, входящих в уравнение, практически всегда упрощает техническую часть решения.

Часто удается доказать, что в одной части уравнения стоит монотонно возрастающая функция, а в другой – монотонно убывающая функция. Тогда можно воспользоваться тем фактом, что графики этих функций могут иметь не более одной точки, т.е. такое уравнение может иметь только единственный корень (или не иметь корней вообще). Не проводя никаких алгебраических преобразований, корень такого уравнения можно просто подобрать и этим процесс решения задачи завершить. Теоретическое обоснование подобных действий дают следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $y = f(x)$ – монотонно возрастающая или монотонно убывающая на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x) = a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Теорема 3 (теорема о «встречной» монотонности). Пусть функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на некотором промежутке, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Геометрический смысл приведенных теорем достаточно ясен – горизонтальная прямая или график монотонно убывающей функции может пересечь график монотонно возрастающей функции $y = f(x)$ не более, чем в одной точке.

Другими словами эти графики либо вообще не пересекутся, либо пересекутся в одной точке.

Доказательство монотонности функций, входящих в уравнение, может проводиться различными способами. Отметим некоторые из них.

Во-первых, можно основываться на определении монотонных функций. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на некотором промежутке, если для любых значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е., большему значению аргумента будет соответствовать большее значение функции. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ будет следовать неравенство $g(x_1) > g(x_2)$ (большему значению аргумента будет соответствовать меньшее значение функции), то функция $y = g(x)$ будет *монотонно убывающей*.

Во-вторых, если это возможно, можно привести графическое решение задачи, изобразив схематично графики монотонных функций и ориентировочно абсциссу их точки пересечения.

В третьих, можно воспользоваться критериями монотонности функций, основанными на знаках их производных. Именно, функция $y = f(x)$ будет на некотором промежутке монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если на этом промежутке ее производная $f'(x)$ будет положительной (отрицательной).

При решении иррациональных уравнений полезно воспользоваться тем, что функция $f(x) = \sqrt[n]{x}$ монотонна. Например, функция $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$ в своей области определения возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$.

Отметим также два важнейших свойства монотонных функций, которые часто используются при решении уравнений описываемым методом.

Свойство А. Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция, возрастающая (убывающая) на их общей области определения.

Свойство В. Разность возрастающей и убывающей (убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (убывающая) на их общей области определения.

Рассмотрим примеры.

Пример 24. Решить уравнение

$$\sqrt[5]{2x-1} + \sqrt{5x-1} = 3$$

Решение. ОДЗ: $x \geq \frac{1}{5}$. В левой части – сумма возрастающих функций, а в правой – константа. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подбором определяем, что значение $x = 1$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x = 1$.

В этом примере корень $x = 1$ был просто угадан. Однако, назвать приведенное решение нестрогим нельзя – доказано, что решений не больше одного и оно предъявлено. Кстати, угадывать решение в задачах, решение которых основывается на свойствах монотонных функций, обычно, довольно просто – следует перебирать неотрицательные значения аргумента из ОДЗ и искать, при каких из них нацело извлекаются радикалы, стоящие в условии задачи.

Пример 25. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3x-4} + \sqrt{7x+8} - \sqrt{57-2x} = 1$$

Решение. ОДЗ уравнения находим, как решение системы неравенств:

$$\begin{cases} 7x+8 \geq 0 \\ 57-2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{8}{7} \\ x \leq \dfrac{57}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$-\frac{8}{7} \leq x \leq \frac{57}{2}.$$

Левая часть уравнения – возрастающая в своей области определения функция, т.к. первые два радикала с увеличением x увеличиваются, а третий уменьшается, но он вычитается из первых двух и поэтому их разность возрастает (свойство В). По теореме 2 уравнение имеет не более одного решения. При подборе корня исследуем поочередно все целые значения аргумента из ОДЗ.

Начинаем со значения $x=-1$, т.к. все остальные отрицательные целые значения x не входят в ОДЗ. При $x=-1$ третий радикал «не извлекается» и уравнение не удовлетворяется. Последовательно перебираем значения $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ и убеждаемся, что и при этих значениях аргумента левая часть уравнения принимает значения, не равные 1. Наконец, при подстановке значения $x=4$ получается тождество 2+6-1=1.

Ответ: $x=4$.

Естественно, угадать корень можно далеко не всегда, но метод использования монотонности и не претендует на универсальность. Чаще всего к нему прибегают тогда, когда другие, более традиционные методы решения, рассмотренные ранее, к цели не приводят.

Если целые значения аргумента, принадлежащие ОДЗ, уравнению не удовлетворяют, можно попробовать локализовать корень, чтобы сузить область поиска и попробовать проанализировать ряд дробных чисел, при которых извлекаются нацело радикалы, входящие в уравнение. С этой целью при переборе целых значений неизвестного необходимо сравнивать значения левой и правой частей уравнения и определить пару целых значений аргумента x, при которых знак сравнения изменится на противоположный (больше на меньше или наоборот). Тогда можно сделать вывод, что корень находится между этими целыми числами.

Пример 26. Решить уравнение

$$\sqrt{28-2x}-1=\sqrt{2x+1}+\sqrt[5]{23+6x}$$

Решение. ОДЗ уравнения: $-\frac{1}{2}\le x\le 14$. Левая часть уравнения представляет собой монотонно убывающую функцию, а правая – монотонно возрастающую. Из теоремы о «встречной» монотонности следует, что уравнение имеет не более одного корня. Перебираем целые значения аргумента из ОДЗ и приходим к выводу, что ни одно из этих значений уравнению не удовлетворяет. Сравниваем величины левой и правой частей уравнения.

При $x=0$ и при $x=1$ левая часть уравнения больше правой части, а при $x=2$ знак сравнения меняется и левая часть уравнения становится больше правой части ($\sqrt{24}-1<\sqrt{5}+\sqrt[5]{35}$). Приходим к выводу, что значение искомого корня уравнения находится между числами 1 и 2. Теперь достаточно легко убедиться, что это значение равно $\frac{3}{2}$. Действительно, подставляя $x=\frac{3}{2}$ в уравнение, убеждаемся, что оно обращается в верное равенство: 5-1=2+2.

Ответ: $x=\frac{3}{2}$

11. Метод оценок

При решении уравнений методом оценок необходимо отыскать в условии «слабое» место, т.е. такую функцию, наибольшее или наименьшее значения которой возможно найти (например, квадратный трехчлен, сумму двух взаимно обратных положительных выражений и т.п.). При определении наибольшего или наименьшего значения функции можно использовать методы дифференциального исчисления.

Пример 27. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$$

Решение. ОДЗ: $1 \le x \le 3$. Рассмотрим квадратный трехчлен в правой части уравнения и выделим в нем полный квадрат

$$x^2 - 4x + 6 = (x^2 - 4x + 4) + 2 = (x-2)^2 + 2 \ge 2.$$

Теперь видно, что обе части исходного уравнения положительны, Возводя их во вторую степень, получим равносильное уравнение

$$2 + 2\cdot\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \left((x-2)^2 + 2\right)^2 \qquad (11.1)$$

Найдем наибольшее значение, которое может принимать подкоренное выражение в левой части

$$-x^2 + 4x - 3 = -\left((x^2 - 4x + 4) - 1\right) = -\left((x-2)^2 - 1\right) =$$
$$= 1 - (x-2)^2 \le 1.$$

Таким образом,

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2\cdot\sqrt{-x^2 + 4x - 3} \le 4.$$

Итак, левая часть уравнения (11.1) меньше или равна 4, а правая – больше или равна 4. В соответствии с методом оценок составляем систему

$$\begin{cases} 2 + 2\cdot\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 4 \\ \left((x-2)^2 + 2\right)^2 = 4 \end{cases}$$

Находим корень второго уравнения системы $x = 2$ и подставляя его в первое уравнение, убеждаемся, что оно обращается в тождество.

Ответ: $x = 2$.

Пример 28. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 12x + 3} + \sqrt{7x^2 - 28x + 32} = 16x - 13 - 4x^2$$

Решение. ОДЗ уравнения – все множество действительных чисел, поскольку оба квадратных трехчлена, стоящие под знаками радикалов, имеют отрицательные дискриминанты. Выделим в каждом квадратном трехчлене полный квадрат и оценим все выражения, входящие в уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 12x + 3} = \sqrt{3(x-2)^2 + 1} \ge \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{7x^2 - 28x + 32} = \sqrt{7(x-2)^2 + 4} \ge \sqrt{4} = 2$$

$$16x - 13 - 4x^2 = 3 - 4(x-2)^2 \le 3$$

Таким образом в уравнении

$$\sqrt{3(x-2)^2 + 1} + \sqrt{7(x-2)^2 + 4} = 3 - 4(x-2)^2$$

левая часть должна быть не меньше 3, а правая часть, наоборот, не больше 3. Значит, равенство возможно лишь при таком значении x, при котором обе части уравнения равны 3. Имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt{3(x-2)^2 + 1} = 1 \\ \sqrt{7(x-2)^2 + 4} = 2, \\ 3 - 4(x-2)^2 = 3 \end{cases}$$

каждое уравнение которой имеет единственное решение $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 29. Решить уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}$$

Решение. Не находя ОДЗ, оценим все радикалы, присутствующие в левой части уравнения. Имеем

$$4x - x^2 = -\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4 = 4 - (x-2)^2 \le 4 \quad \Rightarrow$$
$$\sqrt{4x - x^2} \le 2$$
$$4x - x^2 - 3 = -\left(x^2 - 4x + 4\right) + 1 = 1 - (x-2)^2 \le 1 \quad \Rightarrow$$
$$\sqrt{4x - x^2 - 3} \le 1$$

Что касается оценки правой части уравнения, то учитывая неотрицательность радикала четной степени, можем утверждать, что

$$3 + \sqrt{2x - x^2} \ge 3.$$

Таким образом, левая часть уравнения не превосходит 3, а правая часть – не меньше 3. В соответствии с методом оценок имеем систему

$$\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3\\ 3+\sqrt{2x-x^2}=3\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}=2\\ \sqrt{4x-x^2-3}=1.\\ \sqrt{2x-x^2}=0\end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет единственное решение $x=2$, которое удовлетворяет также и второму и третьему уравнению системы. Следовательно, $x=2$ – общий корень всех трех уравнений системы.

Хотя фактически мы уже сделали проверку исходного уравнения системы при $x=2$, все же не мешает еще раз оформить ее, так как при решении мы обошлись без определения ОДЗ.

Проверка: $x=2$: $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3 \Rightarrow 3\equiv 3$.

Ответ: $x=2$.

Пример 30. Решить уравнение

$$(5x+2)\sqrt[5]{7x-3}=54$$

Решение. Попытка избавиться от радикала приводит к неприведенному уравнению шестого порядка, решить которое очень непросто. Пойдем другим путем.

Запишем уравнение в виде

$$(5x+2)\sqrt[5]{7x-3}=27\cdot 2.$$

Тогда одно из решений получим, если приравняем множители в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases}5x+2=27\\ \sqrt[5]{7x-3}=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x=25\\ 7x-3=32\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\ x=5\end{cases} \Rightarrow$$

$$x=5.$$

Естественно, это только часть решения. Нужно найти другие решения или доказать, что найденный корень – единственный. С этой целью проведем следующие оценки.

1. При $x<5$ справедливы неравенства
$5x+2<27$ и $\sqrt[5]{7x-3}<2$, т.е. $(5x+2)\sqrt[5]{7x-3}<54$.
2. При $x>5$ аналогично можно показать, что

$$(5x+2)\sqrt[5]{7x-3}>54.$$

Таким образом, в исходном уравнении равенство может быть достигнуто лишь при $x=5$.

Ответ: $x=5$.

Пример 31. Решить уравнение

$$|x+2|+|x+3|=\sqrt{x^2+x+8}+\sqrt{x^2+17}$$

Решение. ОДЗ уравнения: $x\in R$.

Воспользуемся формулами

$$|x+2|=\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{x^2+4x+4},$$

$$|x+3|=\sqrt{(x+3)^2}=\sqrt{x^2+6x+9}$$

и выделим полученные квадратные трехчлены под радикалами в правой части уравнения:

$$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{x^2+4x+4-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+$$

$$+\sqrt{x^2+6x+9-6\left(x-\frac{4}{3}\right)}.$$

При $x=\frac{4}{3}$ левая часть уравнения равна правой части, т.е. значение $x=\frac{4}{3}$ – корень уравнения.

При $x<\frac{4}{3}$ левая часть уравнения левая часть меньше правой части.

При $x>\frac{4}{3}$ левая часть уравнения левая часть больше правой части.

Делаем вывод, что при $x < \frac{4}{3}$ и при $x > \frac{4}{3}$ уравнение корней не имеет.

Ответ: $x = \frac{4}{3}$.

12. Суперпозиция функций

Суперпозицией функций называется сложная функция, составленная из двух и более функций. Например, сложная функция $f(g(x))$ есть суперпозиция двух функций $f(t)$ и $t = g(x)$. Свойства суперпозиции функций могут быть использованы при решении уравнений вида

$$f(f(x)) = x \qquad (12.1)$$

или уравнений более общего вида

$$f(f(\ldots f(x))) = x \qquad (12.2)$$

Лемма. Любой корень x_1 уравнения

$$f(x) = x \qquad (12.3)$$

будет и корнем уравнений (12.1), (12.2).

Действительно, в частности, так как $f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1$, то уравнение (12.1) является следствием уравнения (12.3).

На этой лемме основаны следующие, весьма полезные при решении уравнений теоремы.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ монотонно возрастает, то уравнения (12.2) и (12.3) (так же, как и уравнения (12.1) и (12.3)) равносильны.

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает и имеет обратную функцию $f^{-1}(x)$. Тогда уравнения $f(x) = f^{-1}(x)$ и $f(x) = x$ равносильны.

Пример 33. Решить уравнение

$$\sqrt{3 + \sqrt{x}} = x - 3.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения: $x \geq 0$. Кроме того. Из условия согласования знаков левой и правой частей следует к тому же, что $x - 3 \geq 0$, т.е., $x \geq 3$.

Перепишем уравнение в виде

$$3 + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = x.$$

Обозначим $f(x) = 3 + \sqrt{x}$, тогда выписанное уравнение можно представить в виде $f(f(x)) = x$. Рассмотрим функцию $f(x)$. Ее производная $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ сохраняет положительное значение при всех $x \geq 3$. Таким образом, можно утверждать, что при всех значениях $x \geq 3$ функция $f(x)$ возрастает и, следовательно, условия теоремы 4 выполнены. Находим корни уравнения $f(x) = x$, т.е., уравнения

$$3 + \sqrt{x} = x.$$

Последовательно находим

$$\begin{cases} \sqrt{x} = x - 3 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x^2 - 6x + 9 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 9 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$.

Пример 32. Решить уравнение

$$x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x - 1}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{x^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x - 1}.$$

Покажем, что левая и правая части этого уравнения представляют собой взаимно обратные функции.

Пусть $f(x)=\dfrac{x^3+1}{2}$, тогда $x^3+1=2f(x)$, т.е., $x=\sqrt[3]{2f(x)-1}$. Таким образом, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ и уравнение принимает в наших обозначениях вид $f(x)=f^{-1}(x)$. Так как $f(x)$ является монотонно возрастающей функцией, то в силу теоремы 5 необходимо решить уравнение $f(x)=x$, а именно $\dfrac{x^3+1}{2}=x$. Последовательно находим

$$x^3+1=2x \;\Rightarrow\; x^3-2x+1=0 \;\Rightarrow\; (x^3-1)-2(x-1)=0 \;\Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x+1-2)=0 \;\Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-1)=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $x_1=1$, $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

В следующей задаче необходимо, во-первых, используя понятие суперпозиции функций, увидеть, какую именно функцию следует ввести в рассмотрение, и, во-вторых, учесть такие ее свойства, как нечетность и монотонность.

Пример 34. Решить уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{4x^2+4x+8}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

Решение. После выделения под первым радикалом полного квадрата, уравнение можно переписать в виде

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

Теперь видно, что ОДЗ уравнения – вся числовая ось: $x\in R$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right).$$

При таком выборе исходному уравнению можно придать вид

$$f(2x+1)+f(3x)=0.$$

Исследуем свойства введенной функции $f(x)$. Во-первых, заметим, что $f(x)$ – нечетная функция. Как известно, функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если в своей области определения она удовлетворяет соотношению $f(-x)=-f(x)$. В нашем случае

$$f(-x)=(-x)\cdot\left(1+\sqrt{(-x)^2+7}\right)=-x\cdot\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=-f(x).$$

Замеченное свойство позволяет переписать уравнение в виде

$$f(2x+1)=-f(x) \quad\Leftrightarrow\quad f(2x+1)=f(-x).$$

Далее, при $x\ge 0$ является произведением двух возрастающих неотрицательных сомножителей x и $\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)$, что гарантирует возрастание $f(x)$ при $x\ge 0$. А в силу нечетности можно утверждать, что $f(x)$ возрастает и при $x<0$ (график нечетной функции симметричен относительно начала координат). Тем самым, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси. Как следствие, равенство $f(2x+1)=f(-x)$ выполняется только при условии

$$2x+1=-x, \text{ т.е. } x=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}$.

13. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Учет структуры ОДЗ

1. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$ Отв.: $\frac{1}{2}$; 1.
2. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$ Отв.: -1; 2.
3. $(x^2-4)\sqrt{2x+1}=0$ Отв.: $-\frac{1}{2}$; 2.
4. $(x^2-1)\sqrt{3x+4}=0$ Отв.: $-\frac{4}{3}$; -1; 1.
5. $(4x^2-9)\sqrt{x-1}=0$ Отв.: $\frac{3}{2}$; 1.
6. $\sqrt{4-x^2}(x^2-4x-5)=0$ Отв.: ± 2; -1.
7. $\sqrt{3-x^2}(x^2-3x-4)=0$ Отв.: $\pm\sqrt{3}$; -1.
8. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=3$ Отв.: $\varnothing$.
9. $\sqrt{\frac{4-x}{x}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=2-\sqrt{x^2-12}$ Отв.: 4.
10. $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+7}-\sqrt{4x+1}$ Отв.: 2.

Метод возведения в степень

11. $\sqrt{-3x}=9$ Отв.: -27.
12. $\sqrt{-x}=-2$ Отв.: $\varnothing$.
13. $\sqrt{x^2+7x-10}=-1$ Отв.: $\varnothing$.
14. $\sqrt[3]{-2x-5}=-3$ Отв.: 11.
15. $\sqrt[5]{24x-2x^3}=x$ Отв.: -2; 0; 2.
16. $\sqrt{x^2-6x}=\sqrt{10-3x}$ Отв.: -2.
17. $\sqrt{3-x^2}=\sqrt{-5x-3}$ Отв.: -1.

18. $\sqrt{x^3+11x-13}=\sqrt{6x^2-7}$ Отв.: 2;3.
19. $\sqrt{x^3+2x}=\sqrt{5x^2-8}$ Отв.: 2;4.
20. $\sqrt{x}=-x$ Отв.: 0.
21. $\sqrt{x-2}=4-x$ Отв.: 3.
22. $\sqrt{6-x}=-x$ Отв.: -3.
23. $\sqrt{1-2x}=-1-x$ Отв.: -4.
24. $2\sqrt{x+31}=4-x$ Отв.: -6.
25. $\sqrt{15x^2-14}=2-3x$ Отв.: -3.
26. $x+5=\sqrt{8-9x-x^2}$ Отв.: -1.
27. $\sqrt{1+8x-x^2}=2x-2$ Отв.: 3.
28. $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$ Отв.: -1.
29. $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$ Отв.: $-\sqrt{3}$.
30. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$ Отв.: 5.
31. $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$ Отв.: 8.
32. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-6}=5$ Отв.: $\varnothing$.
33. $\sqrt{2-x}-\sqrt{x+8}=2$ Отв.: -7.
34. $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$ Отв.: 2.
35. $\sqrt{2x+4}-\sqrt{x}=\sqrt{x-12}$ Отв.: 16.
36. $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{x}$ Отв.: 5;9.
37. $\sqrt{4+x}+\sqrt{x+7}=\sqrt{3-2x}$ Отв.: -3.
38. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$ Отв.: -1.
39. $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$ Отв.: $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$.
40. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$ Отв.: 0.
41. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}$ Отв.: $\frac{97}{24}$.

42. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}$ Отв.: $-\dfrac{23}{24}$.

43. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}-\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}=0$

Отв.: 3; $\dfrac{5}{4}$.

44. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$

Отв.: 3.

45. $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}=0$

Отв.: $-\dfrac{1}{6};-1$

46. $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$

Отв.: 2.

47. $\left(\sqrt{x+9}\right)^2+2\sqrt{(x+9)(x+11)}+\left(\sqrt{x+11}\right)^2=10$

Отв.: -7,4.

49. $\sqrt[3]{x}=\sqrt{x-4}$ Отв.: 8.

50. $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$

Указание. ОДЗ данного уравнения $x\in(0;20]$. После возведения в квадрат с учетом ОДЗ ($x>0$) в удвоенном произведении можно воспользоваться тем, что $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$ и избавиться от знаменателя. Отв.: 12.

51. $9-\sqrt{81-7x^3}=\dfrac{x^3}{2}$ Отв.: 0.

52. $\dfrac{3}{2x-\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{5}{2x+\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{4}{3x^2-x}$

Отв.: -1.

53. $\dfrac{3}{x-\sqrt{x^2-3}}-\dfrac{3}{x+\sqrt{x^2-3}}=2$ Отв.: ± 2.

Замена неизвестной

1. Новая неизвестная – радикал от функции исходной переменной

54. $\sqrt{9x^3+7}+\sqrt[4]{9x^3+7}=6$ Отв.: 1.

55. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=12$ Отв.: 729.

56. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$ Отв.: 1; $-\dfrac{27}{8}$.

57. $\dfrac{x+5}{x}-\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}=30$ Отв.: $\dfrac{1}{7}$.

58. $\sqrt{\dfrac{3x}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{3(x+2)}{x}}-2=0$ Отв.: -3.

59. $x\cdot\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=2$ Отв.: 1.

60. $\sqrt{x^2+8x}+6=x^2+8x$ Отв.: -9;1.

61. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0$ Отв.: -4;1.

62. $2\sqrt{7x^2-6x-1}=1+6x-7x^2$ Отв.: $-\dfrac{1}{7};1$.

63. $\sqrt{4x-x^2-3}=2x^2-8x+9$ Отв.: 2.

64. $\sqrt{12x-4x^2-8}=8x^2-24x+19$ Отв.: $\dfrac{3}{2}$.

65. $\sqrt{6x-x^2-8}=x^2-6x+10$ Отв.: 3.

66. $5x^2+35x+2\sqrt{x^2+7x+1}=46$ Отв.: -8;1.

67. $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$ Отв.: $\dfrac{1}{2}$.

68. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$ Отв.: 2.

69. $\sqrt{\dfrac{x^2+6x}{x-1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x-1}}$

Указание. Учитывая ОДЗ уравнения $x>1$, привести к общему знаменателю и ввести новую переменную $\sqrt{x^2+6x-7}=y\ge 0$.

Отв.: 2.

70. $\sqrt{\dfrac{x^2+8x}{x+1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$ Отв.: 1.

71. $x+4+\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}=\dfrac{12}{x-4}$ Отв.: ± 5.

2. Новая неизвестная – комбинация радикалов от функций исходной переменной

72. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+2\sqrt{x^2+5x}=25-2x$ Отв.: 4.

73. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2+5x-6}=51-2x$

Отв.: 10.

74. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}=4-2x$

Отв.: 1.

75. $x+\sqrt{x^2+4x-12}=2+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$

Отв.: 3.

76. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$ Отв.: 5.

77. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

Отв.: 3.

78. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$ Отв.: $\dfrac{841}{144}$.

79. $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+2}=4x-2\sqrt{3x^2+10x+8}+4$

Отв.: 7.

80. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}\right)=x+\sqrt{x^2-9}-6$ Отв.: $\dfrac{73}{16}$.

81. $x^2+2x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}=30$ Отв.: $\dfrac{11-\sqrt{21}}{2}$.

82. $4\sqrt{x^2-3x}+2\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=5x-24$

Указание. Обозначить $2\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=y$. Отв.: $\dfrac{196}{9}$.

3. Однородные иррациональные уравнения

83. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$ Отв.: 5.

84. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=2x$ Отв.: 1; 2.

85. $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$ Отв.: $3;-\dfrac{8}{9}$.

86. $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$

Отв.: $2-2\sqrt{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

87. $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(x+1)$ Отв.: $\dfrac{81-9\sqrt{97}}{8};3$.

88. $10x^2-2x-1-3x\sqrt{2x+1}=0$ Отв.: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4};\dfrac{1-\sqrt{26}}{25}$.

89. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-9}=\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-3x-54}$

Отв.: 10.

90. $2\sqrt{5x+1}-2\sqrt{2x-5}=3\sqrt[4]{10x^2-23x-5}$

Отв.: 3.

91. $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x-9}=\dfrac{5}{6}\sqrt[4]{3x^2-21x-54}$

Отв.: 25.

92. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=2\sqrt[n]{x^2-1}$

Отв.: $\varnothing$.

93. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-3)(x-2)}$

Отв.: $\dfrac{190}{63};\dfrac{2185}{728}$.

94. $3\cdot\sqrt[3]{(4+x)^2}-\sqrt[3]{(4-x)^2}-2\sqrt[3]{16-x^2}=0$

Отв.: $0;-\dfrac{56}{13}$.

95. $x^2-16(x+1)\sqrt{x}+66x+1=0$ Отв.: $31\pm 8\sqrt{15}$.

96. $x^2+12(x-2)\sqrt{x}+32x+4=0$ Отв.: $20-6\sqrt{11}$.

4. Новая неизвестная – исходная переменная в дробной степени

97. $x^3\cdot\sqrt[6]{x^5}+x^2\cdot\sqrt[12]{x}=20\sqrt[3]{x}$ Отв.: $0;\sqrt[7]{256}$.

98. $x\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x^5}=3$ Отв.: 1.

99. $x^{\frac{20}{21}}+x^{\frac{5}{42}}=12x^{-\frac{5}{7}}$ Отв.: $3^{\frac{6}{5}}$.

100. $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$ Отв.: 8.

101. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8$ Отв.: -1;1.

102. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$ Отв.: 32.

103. $5\cdot\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0$

Отв.: 0;4.

104. $x^{\frac{4}{5}}-7x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-1}=0$ Отв.: $1;2\sqrt[3]{4};-3\sqrt[3]{9}$.

105. $8{,}4\cdot\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\cdot\sqrt[4]{x^{-1}\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}$

Отв.: 4.

5. Введение двух неизвестных

106. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$ Отв.: $\dfrac{63}{5};-\dfrac{17}{5}$.

107. $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$ Отв.: -17;23.

108. $\sqrt[4]{13+3x}+\sqrt[4]{69-3x}=4$ Отв.: -4; $\dfrac{68}{3}$.

109. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$ Отв.: 8.

110. $\sqrt[5]{\dfrac{1}{64}+x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{64}-x}-\dfrac{1}{2}=0$ Отв.: $\pm\dfrac{1}{64}$.

111. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$ Отв.: 2.

112. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$ Отв.: 1;2;10.

113. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ Отв.: 3.

114. $\sqrt[3]{x-4}=1-\sqrt{x+1}$ Отв.: 3.

115. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$

Отв.: 7;26.

116. $\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{x-9}=\sqrt{x^2-11x+10}+2$

Указание. Пусть $\sqrt[3]{x-2}=u$, $\sqrt[3]{x-9}=v$, т.е., $x-2=u^3$, $x-9=v^3$. Далее: $x^2-11x+10=(x-2)(x-9)-8=u^3v^3-8$. Тогда исходное уравнение в новых переменных примет вид $uv=\sqrt{u^3v^3-8}+2$, откуда $uv=2$.

Отв.: 1; 10.

6. Тригонометрические замены переменных

117. $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$

Указание. Учитывая ОДЗ, можно сделать замену $x=\cos t$, $t\in[0;\pi]$ и свести получающееся тригонометрическое уравнение к виду $\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{t}{2}=0$. Отв.: $\cos\frac{3\pi}{10}$.

118. $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-4x\sqrt{1-4x^2}\right)}=1-8x^2$

Указание. Сделать тригонометрическую замену $x=\frac{1}{2}\cos t$, $t\in[0;\pi]$, тогда уравнение запишется в виде $\frac{1}{\sqrt{2}}|\sin t-\cos t|=-\cos 2t$. Из условия $-\cos 2t\ge 0$ следует, что $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3\pi}{4}$. Корни уравнения, принадлежащие этому промежутку, дает после снятия модуля только уравнение $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t-\cos t)=(\sin t-\cos t)(\sin t+\cos t)$. Из равенства нулю первого сомножителя $\sin t-\cos t=0$ получим решение $t_1=\frac{\pi}{4}$, откуда $x_1=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Приравнивая второй сомножитель к нулю, получим уравнение $\sin t+\cos t=\frac{1}{\sqrt{2}}$, один корень которого $t_2=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ принадлежит промежутку $t\in[0;\pi]$. Тогда второй корень исходного уравнения будет равен

$$x_2=\frac{1}{2}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}.$$

Второй способ решения основывается на следующем разложении левой и правой частей уравнения $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(2x-\sqrt{1-4x^2}\right)^2}=\left(\sqrt{1-4x^2}-2x\right)\left(\sqrt{1-4x^2}+2x\right)$.

Отв.: $\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$.

119. $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+2x\sqrt{1-x^2}\right)}=1-2x^2$ Отв.: $-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

120. $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$ Отв.: $-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

121. $\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)$ Отв.: $\frac{1}{2\sqrt{2}};\ -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$.

122. $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$ Отв.: $\cos\frac{\pi}{8};\cos\frac{5\pi}{8};\cos\frac{3\pi}{4}$.

123. $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$

Указание. После замены $x=tgt$ уравнение примет вид $\frac{1}{|\cos t|}-tgt=\frac{5}{2}|\cos t|$. Отв.: $-\frac{3}{4}$.

124. $\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+x^2-x=0$

Отв.: $1;\cos\left(\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

125. $\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+x^2+x=0$

Отв.: $-1;-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

126. $4\left(3x\sqrt{1-x^2}+4x^2-2\right)=5\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)$

Указание. Заменой $x=\cos t$ уравнение сводится к тригонометрическому виду

$$4(3\sin t\cos t+2\cos 2t)=5\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)$$ или после

преобразований с использованием формулы вспомогательного аргумента $\sin\left(2t+arctg\frac{4}{3}\right)-\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Отв.: $\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{2}{5}arctg\frac{4}{3}\right)$; $\cos\left(\frac{11\pi}{10}-\frac{2}{5}arctg\frac{4}{3}\right)$.

127. $\sqrt{2x+3}(16x+6)+9=0$

Указание. Применить замену $x=-\frac{3}{2}\sin^2 t$. Тогда уравнение сведется к виду $\sqrt{3}\cos t\cdot(6-24\sin^2 t)+9=0$ или

$\cos 3t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отв.: $-\frac{3}{2}\sin^2\frac{5\pi}{18}$; $-\frac{3}{2}\sin^2\frac{7\pi}{18}$.

7. Разные замены переменных

128. $\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{8-4x^2}}=2$ Отв.: $1; -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

129. $\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{5-4x^2}}=3$ Отв.: $1; \frac{1}{2}; -\frac{5+\sqrt{65}}{12}$.

130. $\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+2x+63}$

Указание. После исследования ОДЗ и согласования знаков левой и правой части ($1\le x\le 9$) возвести обе части уравнения в квадрат и ввести переменную $\sqrt{-x^2+2x+63}=y\ge 0$. Второй способ: ввести переменные $\sqrt{x+7}=u\ge 0$, $\sqrt{9-x}=v\ge 0$ и составить систему уравнений для их определения.

Отв.: $1+\sqrt{46-2\sqrt{17}}$.

131. $\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-x^2+16}$

Отв.: $1+\sqrt{7+4\sqrt{2}}$.

132. $(x-1)(x+3)-(x-1)\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}-20=0$

Отв.: $-1-\sqrt{20}; -1+\sqrt{29}$.

133. $(x-2)(x+3)-2(x-2)\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}-48=0$

Отв.: $-7; \frac{-1+\sqrt{281}}{2}$.

134. $x\cdot\sqrt{x}+x(x-1)=2(x-1)^3$ Отв.: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

135. $\sqrt[4]{13x+1}+\sqrt[4]{4x-1}=3\sqrt[4]{x}$ Отв.: $\frac{1}{3}$.

136. $6\sqrt{\sqrt{9+x^2}+x}-\sqrt{\sqrt{9+x^2}-x}=3\sqrt{9+x^2}+3x$

Указание. Ввести переменную $\sqrt{\sqrt{9+x^2}+x}=u\ge 0$, тогда $\sqrt{\sqrt{9+x^2}-x}=\frac{3}{u}$ и уравнение примет вид $6u-\frac{3}{u}=3u^2$.

Отв.: $-4; \frac{3\sqrt{5}-11}{2(3+\sqrt{5})}$.

137. $4\sqrt{\sqrt{4+x^2}+x}-\sqrt{\sqrt{4+x^2}-x}=2\sqrt{4+x^2}+2x$

Отв.: $-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{5}-1}{2(3+\sqrt{5})}$.

138. $x^2-4x\sqrt{x+1}+8x-8\sqrt{x+1}+8=0$

Указание. В терминах переменной $t=\sqrt{x+1}$ уравнение перепишется в виде $(t-1)^4=0$. Отв.: 0.

139. $x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+10}=2$

Указание. Выделить из первых слагаемых двучлен в четвертой степени $(x+1)^4+\sqrt{(x+1)^2+9}=3$. В терминах переменной $t=(x+1)^2$ уравнение перепишется в виде $t^2+\sqrt{t+9}=3$, т.е. $\sqrt{t+9}=3-t^2$. Далее применить метод оценок.

Отв.: -1.

Умножение обеих частей уравнения на функцию

140. $\sqrt{5x^2-4x+8}+\sqrt{5x^2+3x+8}=7$

Отв.: $1;-\frac{17}{19}$.

141. $\sqrt{2x^2+2x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=x$

Отв.: $0;1;-\frac{5}{7}$.

142. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$

Отв.: 4.

143. $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1$

Отв.: $-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}$.

144. $\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2+x+1}=1-6x$

Отв.: $\frac{1-\sqrt{33}}{16};\frac{1}{6}$.

145. $\sqrt{9x^2-12x+11}-\sqrt{5x^2-8x+10}=2x-1$

Отв.: $\frac{1}{2}$.

146. $\sqrt{x^2+5x+2}+\sqrt{x^2+x+3}=7$

Отв.: $2;-\frac{239}{45}$.

147. $\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+x}$

Отв.: -3;1.

148. $\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{7}{2x+3}$

Отв.: -5;2.

149. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$

Отв.: -6;1.

150. $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(10-x)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(10-x)}=3$

Отв.: 2;9.

151. $\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3$

Отв.: -3;4.

152. $\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1$

ё Отв.: $3;\frac{5+\sqrt{297}}{8}$.

Разложение на сомножители

153. $(1+x)\sqrt{3-x^2}=1-x^2$ Отв.: $-1;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

154. $(x-1)\sqrt{7-x^2}=x^2-7$ Отв.: $\pm\sqrt{7};\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

155. $x\sqrt{5-x^2+2x}=2x-x^2$ Отв.: $0;\frac{3-\sqrt{11}}{2}$.

156. $\left(\sqrt{6-x^2}+x\right)^2=(1-x)^2$ Отв.: $\frac{2-\sqrt{29}}{5}$.

157. $\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)^2=(1-x)^2$ Отв.: $\frac{2+\sqrt{19}}{5};\pm\sqrt{3}$.

158. $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{7-6x-x^2}=1-x$
Отв.: -3;1.

159. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$
Отв.: -1;1.

160. $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$
Отв.: -1;5.

161. $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x^2-1}$.
Отв.: 1.

162. $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x^2-x}$
Отв.: $1;\frac{5-2\sqrt{7}}{3}$.

163. $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-6x+8}$
Отв.: $2;\frac{-2-4\sqrt{13}}{3}$.

164. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}$
Отв.: 0;2.

165. $\left(\sqrt{5x+16}+4\right)\left(\sqrt{5x+16}+4x^2+16x-7\right)=5x$
Указание. Представить уравнение в виде
$\left(\sqrt{5x+16}+4\right)\left(\left(\sqrt{5x+16}-4\right)+4x^2+16x-3\right)=5x$ и раскрыть скобки. Отв.: $\frac{\sqrt{19}-4}{2}$.

166. $\left(\sqrt{6x+9}+3\right)\left(\sqrt{6x+9}+6x^2+9x-23\right)=6x$
Отв.: $\frac{\sqrt{561}-9}{12}$.

Уравнения, содержащие кубические радикалы

167. $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$ Отв.: -5; 2.

168. $\sqrt[3]{x+59}-\sqrt[3]{x-4}=3$ Отв.: -60; 5.

169. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$ Отв.: 0.

170. $\sqrt[3]{5x+2}-\sqrt[3]{5x-2}=2$ Отв.: $\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

171. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$ Отв.: -6; $-\frac{11}{2};-5$.

172. $\sqrt[3]{2+11x}+\sqrt[3]{2-11x}=4$ Отв.: $\varnothing$.

173. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$ Отв.: $1;\frac{3}{2};2$.

174. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$ Отв.: $8;8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21}$.

175. $\sqrt[3]{x^2-7x+10}+\sqrt[3]{x^2-9x-36}=\sqrt[3]{2x^2-16x-26}$
Отв.: $-3;2;5;12;4\pm\sqrt{29}$.

176. $\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}=1$

<u>Указание.</u> Заменить $\frac{2}{x}=y$ и возвести в куб. Отв.: $\frac{2}{7}$; -1.

Сведение иррациональных уравнений к модульным

177. $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$
Отв.: $x\in[2;\infty)$.

178. $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$
Отв.: $x\in[-1;1]$.

179. $\sqrt{4x^2-8x+4}=3(x^2-3x+2)$

Отв.: $1; \frac{8}{3}$.

180. $x+\sqrt{9-36x+36x^2}=2(x^2-5x+6)$

Отв.: $1; \frac{15}{2}$.

181. $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$

Отв.: 4.

182. $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$

Отв.: $x\in[2;7]$.

183. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

Отв.: $x\in[5;10]$.

184. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$

Отв.: 15.

185. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$

Отв.: 5.

186. $\dfrac{\sqrt{x-1-\sqrt{2x-3}}+\sqrt{x+3-3\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x+11+5\sqrt{2x-3}}}=\dfrac{1}{4}$

Отв.: 6.

187. $\sqrt{(x+9)^2}+2\sqrt{(x+9)(x+11)}+\sqrt{(x+11)^2}=10$

Отв.: -12,6; -7,4.

188. $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}$

Отв.: $-\frac{12}{129}; \frac{12}{127}$.

189. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$

Отв.: -1;1.

Иррациональные уравнения, содержащие знак модуля

190. $\left|3\sqrt{x}+2-x\right|+\left|x-3\sqrt{x}+3\right|=9$

Отв.: 16.

191. $\left|2\sqrt{x}+1-x\right|+\left|x-2\sqrt{x}+2\right|=7$

Отв.: 9.

192. $3\sqrt{x+4}=5-2|x+2|$ Отв.: $-\frac{15}{4};-3;-\frac{7}{4}$.

193. $\sqrt{5x-34}=|x-3|-4$ Отв.: $\frac{19+\sqrt{29}}{2}$.

194. $5\sqrt{1+|x^2-1|}=3+|5x+3|$ Отв.: $x\in(-\infty;-1]\cup\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

195. $\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|$

Отв.: $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

Учет структуры уравнения

196. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}=0$ Отв.: $x\in\varnothing$.

197. $\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{x}+1$ Отв.: $\varnothing$.

198. $\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{x}-2$ Отв.: $\varnothing$.

199. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-6\sqrt{x}=\sqrt{12x-2}$ Отв.: $\frac{1}{6}$.

200. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}$

Указание. ОДЗ: $x\in[-1;0)\cup[1;\infty)$. Условие существования второго радикала имеет вид $\dfrac{x-1}{x}\geq 0$, следовательно, левая часть уравнения в ОДЗ неотрицательна. Условие неотрицательности левой части $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\geq 0$ приводит к неравенству $x\in[1;\infty)$, сужающему ОДЗ и позволяет применить формулу $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\sqrt{x+1}$. Тогда уравнение примет вид $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1\right)=0$. Равенство нулю второго сомножителя после избавления от знаменателя и возведения в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$ приводит к соотношению $\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2=0$.

Отв.: 1; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Использование монотонности функций

201. $\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}=8$ Отв.: 30.
202. $\sqrt{7+3x}+\sqrt[5]{71x+30}=7$ Отв.: 3.
203. $\sqrt{37x+12}-\sqrt{31-6x}=2$ Отв.: 1.
204. $\sqrt{5x+1}+\sqrt{17x+13}=12$ Отв.: 3.
205. $\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[5]{14x+4}=4$

Отв.: 2.

206. $\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$ Отв.: 4.
207. $2x^3+5x-4=\sqrt{10-x}$ Отв.: 1.
208. $x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$ Отв.: -1.
209. $2\sqrt{x-8}+\sqrt{2x-24}+3\sqrt{x-11}+4\sqrt{x+13}+\sqrt{x+24}=33$

Отв.: 12.

210. $5\sqrt{2x-24}+3\sqrt{5x-59}+\sqrt{x-8}+\sqrt{3x-20}+\sqrt{x+13}+$

$+2\sqrt{x+24}=26$ Отв.: 12.

211. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ Отв.: 1.
212. $\sqrt{27x+9}-\sqrt{19-3x}=2$ Отв.: 1.
213. $\sqrt{x}-\sqrt{2-x}-\sqrt{5-3x}+\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-2x}=0$

Отв.: 1.

214. $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}$

Отв.: 5.

215. $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}=1$

Отв.: $\frac{1}{2}$.

Метод оценок

216. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ Отв.: 1.
217. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=1+\sqrt{4-x}$

Указание. На ОДЗ левая часть уравнения больше или равна трем, а правая – меньше трех.

Отв.: $x\in\varnothing$.

218. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

Отв.: 3.

219. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}-x^2=5+2x$

Отв.: –1.

220. $2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

Отв.: -1.

221. $\sqrt{4x-4x^2+3}=\frac{3}{2}-x-\frac{2}{2x-3}$

Отв.: $\frac{1}{2}$.

222. $\sqrt{5+4x-x^2} = x + \frac{1}{x-1}$ Отв.: 2.

223. $\sqrt{8x-x^2-7} = x + \frac{7-2x}{x-3}$ Отв.: 4.

224. $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}} = \sqrt{4x-x^2}$

Отв.: 2.

225. $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$

Указание. Записать уравнение в виде

$\sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} = 5-(x+1)^2$ и оценить левую и правую части. Отв.: -1.

226. $\sqrt{2x^2+4x+11} + \sqrt{3x^2-12x+13} + x^2+6x+5 = 0$

Указание. Записать уравнение в виде

$\sqrt{2(x+1)^2+9} + \sqrt{3(x-2)^2+1} = 4-(x+3)^2$ и оценить левую и правую части. Отв.: $\varnothing$.

227. $\sqrt{6x-x^2-5} + \sqrt{6x-x^2-8} = 3 + \sqrt{4x-x^2-3}$

Указание. Убедиться, что левая часть уравнения не превышает 3, а правая часть не меньше 3. Отв.: 3.

228. $\sqrt[3]{2x^2+8x+72} + \sqrt[3]{3x^2+12x+12} = \sqrt{12-4x-x^2}$

Отв.: -2.

(ДонНТУ,2006, 1.5.24б, 24.10.06) $x^2+13 = 5x+4\sqrt{x}$

Указание. Записать уравнение в виде

$x^2-6x+9+\left(x-4\sqrt{x}+4\right)=0$. Отв.: $\varnothing$.

229. $(3x+2)\sqrt[3]{x+1} = 8\sqrt[3]{3}$ Отв.: 2.

230. $(4x-3)\sqrt[5]{9x+5} = 18$

Указание. Принимаем $4x-3=9$ и $\sqrt[5]{9x+5}=2$, откуда $x=3$ – корень уравнения. Далее оцениваем сомножители левой части уравнения при $x<3$ и $x>3$ и доказываем, что других корней уравнения. Отв.: 3.

231. $(4x+1)\sqrt{x+1} = \sqrt{5}$

Указание. Умножим обе части уравнения на 2: $(4x+1)\sqrt{4x+4} = 2\sqrt{5}$. Составим систему: $\begin{cases} 4x+1=2 \\ \sqrt{4x+4}=\sqrt{5} \end{cases}$,

откуда $x=\frac{1}{4}$. При $x>\frac{1}{4}$ левая часть уравнения всегда больше $2\sqrt{5}$, а при $-1 \le x < \frac{1}{4}$ – всегда больше $2\sqrt{5}$.

Отв.: $\frac{1}{4}$.

232. $|x+3|+|x+4| = \sqrt{x^2+13} + \sqrt{x^2-4x+24}$

Отв.: $\frac{2}{3}$.

233. $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}$

Указание. Записать уравнение в виде

$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2-1+3(x+1)} + \sqrt{x^2-x+1+3(x+1)}$

и рассмотреть три случая: $x+1=0$, $x+1>0$ и $x+1<0$.

Отв.: -1.

234. $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 3$

Указание. Исходим из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$.

Имеем $\sqrt{(1-x)(1+x)} \le \frac{(1-x)+(1+x)}{2} = 1$, т.е., $\sqrt[4]{1-x^2} \le 1$.

Далее, $\sqrt{1-x} = \sqrt{(1-x)\cdot 1} \le \frac{1-x+1}{2} = \frac{2-x}{2}$,

$\sqrt{1+x} \le \frac{1+x+}{2} = \frac{2+x}{2}$. Таким образом, левая часть уравнения не больше, чем $1+\frac{2-x}{2}+\frac{2+x}{2}=3$.равенство нулю всех трех слагаемых возможно только при $x=1$.

Отв.: $x=1$.

235. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt{1-x}-1=0$

Указание. Обозначим $\sqrt{1-x^2}=u$, $\sqrt[4]{x^2+x-1}=v$, $\sqrt{1-x}=w$. Тогда имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными $\begin{cases} u+v+w=1 \\ u^2+v^4+w^2=1 \end{cases}$. В силу неравенств $0 \le u,v,w \le 1$, справедливость которых следует из структуры ОДЗ, заключаем, что одновременное равенство $u^2+v^4+w^2=u+v+w=1$ возможно только в случае, когда $u^2=u;\ v^4=v;\ w^2=w$. Учитывая, что $u+v+w=1$, имеем три случая: 1) $u=1; v=w=0$, 2) $u=w=0; v=1$, 3) $u=v=0; w=1$. Решение имеет только второй случай.

Отв.: 1.

Суперпозиция функций

236. $x^3+4=5\sqrt[3]{5x-4}$

Указание. Разделить обе части на 5 и ввести функцию $f(x)=\frac{x^3+4}{5}$. Используя то, что уравнение запишется в виде $f(x)=f^{-1}(x)$, придем к условию $\frac{x^3+4}{5}=x$.

Отв.: 1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

237. $\sqrt[3]{3x+9}=27(x+1)^3-6$

Указание. В терминах переменной $y=3(x+1)$ уравнение перепишется в виде $\sqrt[3]{y+6}=y^3-6$, т.е. в виде $f(y)=f^{-1}(y)$.

Отв.: $-\frac{1}{3}$.

238. $\sqrt[3]{2-x}=2-x^3$ Отв.: 1.

239. $\sqrt[3]{x}+1=2(2x-1)^3$ Отв.: 1.

240. $4x^3+1=5\cdot\sqrt[3]{\frac{5x-1}{4}}$ Отв.: 1; $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$.

242. $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$ Отв.: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

243. $(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(1+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Отв.: $-\frac{1}{5}$.

248. $x\left(\sqrt{x^2+2}+1\right)+(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+1\right)=0$

Отв.: $-\frac{1}{2}$.

Усложненные иррациональные уравнения

249. $\sqrt{18+3x}-\sqrt{9-x^2}=\sqrt{3x}$

Отв.: $3\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.

250. $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

Отв.: 7.

251. $2\sqrt{x+1}=x^2+x-1$

Отв.: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

252. $(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}=x^2+\frac{5}{3}x+1$

Отв.: $\frac{\sqrt{13}-7}{6};0$.

253. $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$

<u>Указание.</u> После нахождения ОДЗ и возведения в квадрат привести уравнение к виду $2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$.

Отв.: -1.

254. $\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\sqrt{x-\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{1}{3}-x}+x-1$

Отв.: $\varnothing$.

255. $(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}+4x=0$

Отв.: 0.

256. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Отв.: -2.

257. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$

Отв.: -1.

258. $\sqrt{3x^2-13x+13}-\sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{3x^2-11x+7}-$
$-\sqrt{x^2-5x+8}$.

Отв.: 3.

259. $x^3-1=\sqrt{x}\cdot(-3x^2+5x-3)$

Отв.: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

260. $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\cdot\sqrt{1-x^2}$

Отв.: $\cos\frac{3\pi}{10}$.

261. $x^2-10=\sqrt{37+12x}$ Отв.: $3+\sqrt{2}$.

262. $x^2-5=\sqrt{12x+27}$ Отв.: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{2}$.

263. $x^2+2=\sqrt{-4x-3}$ Отв.: $x\in\varnothing$.

264. $x^2-4x+32=16\sqrt{x}$ Отв.: 4.

265. $x^2+8x+14\sqrt{x+4}=-1$ Отв.: -3.

266. $\sqrt{x+5}=x^2-5$

Отв.: $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

267. $\sqrt{x+2}=x^2-2$ Отв.: 2; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

268. $x^2-3=\sqrt{3-x}$ Отв.: 2; $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

269. $\frac{96x-24}{12x+5}=\sqrt{-144x^2+72x+7}$

Отв.: $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}}\right)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаян Э.Н. Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности. – Ростов-на-Дону: Изд-во «Феникс», 2004. – 480с.
2. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. 4-е изд., испр. – М.: Издательский отдел УНЦДО, ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 690с.
3. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – Київ: Рад. шк., 1991. – 224с.
4. Гайштут А.Г., Ушаков Р.П. Сборник задач по математике с примерами решений. – Киев: А.С.К., 2002. – 592с.
5. Гельфанд М.Б., Мануха А.С., Ушаков Р.П. Математика. Справочное пособие. – Киев: Вища школа, 1982. – 464с.
6. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983. – 384с.
7. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Иррациональные уравнения // «Квант». – 2001. – №5. – С. 42–45.
8. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Монотонные функции в конкурсных задачах. // «Квант». – 2002. – №6. – С. 34–40.
9. Иванов О.А. Задачи по алгебре и началам анализа. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 384с.
10. Кононов Ю.Н., Солонский Ю.Н., Шалдырван В.А. Как подготовиться к вступительным экзаменам в вуз. Донецк: ДНУ, 1995. – 128с.
11. Кушнір І. Задачі з однією підказкою. – Київ: ФАКТ, 2003. – 176с.
12. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия. – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век": ООО "Издательство "Мир и Образование", 2005. – 464с.
13. Математика: сборник задач с решениямидля поступающих в вузі / Н.В. Мирошин и др.; под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. – М.: АСТ: Астрель, 2005. – 829с.
14. Махров В.Г., Махрова В.Н. Новый репетитор по математике для старшекласников и абитуриентов. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 2004. – 544с.

15. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 320с.
16. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / Кравцов С.В. и др. – М.: Издательство "Экзамен", 2005. – 544с.
17. Назаретов А.П. 1000 задач по математике для поступающих в вузы. – М.: Аквариум, 2001. – 416с.
18. Нестеренко Ю.В., Олейник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. – М.: Наука. Главная ред.. физ.-мат. литературы, 1983. – 448 с.
19. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Бортаковский А.С. и др.; Под ред. Молодожниковой Р.Н. – М.: Изд-во МАИ, 1995. – 464с.
20. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Егерев В.К. и др.; Под ред. Сканави М.И. – Киев: Канон, 1997. – 528с.
21. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / Довбыш Р.И. и др.– Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336с.
22. Сборник тренировочных задач по математике от простых до самых сложных. Методические материалы для слушателей школ инженерного резерва дистанционного обучения ДонНТУ. – Донецк, 2006. – 99с.
23. Суконник Я.Н. Математические задачи повышеннной трудности. Пособие для учителей. – Киев: Рад. Шк., 1985. – 176с.
24. Титаренко А.М., Роганин А.Н. Форсированній курс школьной математики. – Х.: Торсинг, 2005. – 448с.
25. Титаренко О.М. 5770 задач з математики. – Харків: Торсінг, 2004. – 336с.
26. Улитин Г.М., Мироненко Л.П. Математика. Методическое пособие для абитуриентов. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – 330с.
27. Шарыгин И.Ф. Математика. Для поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1997. – 416с.
28. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1989. – 252с.
29. Ярский А.С. Уравнения, которые «не решаются» // «Квант».

– 1998. – №3. – С. 47–49.
30. 3000 конкурсных задач по математике / Куланин Е.Д. и др.; Под ред. Бобылева Н.А. – М.: Рольф, 1997. – 608с.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Иррациональные уравнения»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Леонид Петрович Вовк

Подписано к печати Тираж 200
Усл. печ. листов. 5,82
Заказ 2-07 Формат 70*90/16

АДИ ГВУЗ ДонНТУ
84646 г. Горловка, ул. Кирова, 51