МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Иррациональные неравенства»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Горловка 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Иррациональные неравенства»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Утверждено на заседании
учебно-методической комссии
автодорожного института ДонНТУ
протокол №3 от 12.12.2006г.

Утверждено на заседании
кафедры «Высшая математика»
протокол № 8 от 06.12.2006г.

Горловка 2007

УДК 510-075

Учебное пособие по теме «Иррациональные неравенства» для слушателей подготовительных курсов автодорожного института ДонНТУ / Сост. Вовк Л.П. – Горловка: АДИ ДонНТУ, 2007. – 49с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки абитуриентов по одной из сложных тем элементарной математики. Представлены систематизированные по типам и уровням сложности иррациональные неравенства, большинство из которых предлагались на вступительных экзаменах, собеседованиях и рейтинговых испытаниях в ДонНТУ в течение нескольких последних лет.

Составитель	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.
Компьютерный набор	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.
Рецензент	Н.С. Тю, проф., д.ф.-м.н.
Ответственный за выпуск	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Иррациональные неравенства. Общие сведения

Иррациональным называется неравенство, в котором неизвестная величина или некоторые функции неизвестных величин содержатся под знаком радикала.

При решении иррациональных неравенств, как правило, приходится возводить обе части неравенства в натуральную, чаще всего, в четную степень. Такого рода преобразования могут привести к неравенствам, которые не равносильны исходному неравенству, и поскольку множество решений в большинстве случаев представляет бесконечное множество, невозможно провести проверку полученных решений подстановкой. Единственный способ, который гарантирует правильный ответ, состоит в применении исключительно равносильных преобразований неравенств. Опыт показывает, что в основном приходится решать неравенства, содержащие радикалы второй степени. Основной ошибкой при этом является необоснованное возведение обеих частей неравенства в квадрат. В связи с этим, приведем теорему, которая играет основную роль при решении иррациональных (и не только!) неравенств.

Теорема 1. Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, то неравенства $f(x) \leq g(x)$ и $f^2(x) \leq g^2(x)$ равносильны.

Ввиду важности правильного применения этой теоремы приведем ее доказательство, чтобы проиллюстрировать возможность возникновения ошибки.

Доказательство. Оценим знак разности $f^2(x) - g^2(x)$. Используя формулу разности квадратов, получим

$$f^2(x) - g^2(x) = \left(f(x) - g(x)\right) \cdot \left(f(x) + g(x)\right) \qquad (1.1)$$

Первый множитель в правой части по условию меньше либо равен нулю. Второй множитель неотрицателен ввиду того, что $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$. Если он положителен, то знак разности $f^2(x) - g^2(x)$ совпадает со знаком первого сомножителя в формуле (1.1), а если он равен нулю, то $f(x) = g(x) = 0$ и опять неравенства равносильны.

Легко доказать, что теорема 1 остается справедливой, если все знаки нестрогого неравенства $\leq$ заменить на знаки строгого неравенства $<$.

Итак, перефразируя теорему 1, можно утверждать, что если обе части неравенства неотрицательны, то оно равносильно неравенству, полученному из него возведением в квадрат обеих частей.

2. Простейшие иррациональные неравенства

В процессе решения иррациональных неравенств нам часто придется сравнивать радикалы с нулем и константами различного знака. Поэтому предварительно рассмотрим несколько простейших неравенств подобного типа.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} \geq 0$$

Решение. В условии задачи выдвинуто истинное утверждение: радикал четной степени всегда неотрицателен. Однако, было бы ошибкой, как это часто бывает в решениях абитуриентов, формулировать ответ задачи в виде $x \in R$. Необходимо учитывать, что сам радикал четной степени существует только для тех значений аргумента, при котором подкоренное выражение неотрицательно. В нашем случае это приводит к требованию

$$x-2 \geq 0$$

Ответ: $x \in [2;\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} > 0$$

Решение. Радикал четной степени всегда положителен, но нужно убрать из ответа те значения x, при которых он может обращаться в нуль. Таким образом, необходимо решить систему неравенств

$$\begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ \sqrt{x-2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x > 2.$$

Ответ: $x \in (2;\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} \leq 0$$

Решение. Радикал четной степени не может принимать отрицательные значения. Поэтому утверждение «радикал четной степени меньше либо равен нулю» равносильно утверждению «радикал четной степени равен нулю». В нашем случае это эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ \sqrt{x-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} < 0$$

Решение. В условии задачи выдвинуто заведомо ложное утверждение, поэтому у данного неравенства решений нет.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{14 - x - 3x^2} < 2$$

Решение. ОДЗ определяется решением квадратичного неравенства $14 - x - 3x^2 \ge 0$, т.е. $-\frac{7}{3} \le x \le 2$.

Левая часть неравенства неотрицательна, а правая положительна. Поэтому возведем обе части в квадрат. Получим равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} -\frac{7}{3} \le x \le 2 \\ 14 - x - 3x^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} \le x \le 2 \\ 3x^2 + x - 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3} \le x \le 2 \\ x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right) \end{cases}$$

Осталось только найти общую часть пересекаемых множеств.

Ответ: $x \in \left[-\frac{7}{3}; -2\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right]$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt{14 - x - 3x^2} > -2$$

Решение. ОДЗ найдено при решении примера 5: $-\frac{7}{3} \le x \le 2$. Заметим, что в ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая – отрицательна, поэтому применить теорему 1 нельзя. Но в этом и нет необходимости. Действительно, радикал имеет арифметическое значение (неотрицателен), следовательно, любое его значение в ОДЗ удовлетворяет данному неравенству.

Ответ: $x \in \left[-\frac{7}{3}; 2\right]$.

Переходя к методам решения иррациональных неравенств, отметим, что большинство из них повторяют методы решений иррациональных уравнений. Однако, в отличие от уравнений, где часто была возможна проверка найденных корней, при решении неравенств, как правило, получается бесконечное множество решений. Проверить их все принципиально невозможно. Поэтому, подчеркнем еще раз, решая неравенства, нужно тщательно следить за равносильностью всех преобразований. На «первом месте» при этом, конечно, будет стоять операция возведения обеих частей неравенства в квадрат. Перед проведением этой операции полезно приостановить выкладки и тщательно ее обосновать – проверить условия теоремы 1.

3. Метод возведения в степень.

Методом возведения в степень можно решать неравенства следующих типов

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}\,,\ \sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}\ \ \sqrt{f(x)} > g(x)\,,\ \sqrt{f(x)} < g(x)\,. \qquad (3.1)$$

Естественно, знак неравенства в формулах (3.1) может быть как строгим, так и нестрогим.

Пример 7. Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2+x-3} < \sqrt{x+5}$$

Решение. ОДЗ неравенства дается решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+x-3 \ge 0 \\ x+5 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right] \cup [1;\infty) \\ x \ge -5 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in \left[-5;-\dfrac{3}{2}\right] \cup [1;\infty).$$

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, после возведения в квадрат приходим к равносильному неравенству

$$2x^2+x-3 < x+5\text{, т.е. } x^2 < 4\,.$$

Для получения ответа пересекаем область решений полученного квадратичного неравенства $x \in (-2;2)$ с ОДЗ.

Ответ: $x \in \left(-2;-\dfrac{3}{2}\right] \cup [1;2)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\sqrt{4+3x-x^2} < x-2$$

Решение. ОДЗ: $-1 \le x \le 4$. Так как правая часть неравенства содержит неизвестную величину, а поэтому может принимать, как положительные, так и отрицательные значения, то последовательно рассмотрим два случая.

I. $x-2 \ge 0$, т.е. $x \ge 2$. Пересекаем это множество с ОДЗ и получаем область изменения неизвестной, которая входит в ОДЗ и в которой правая часть неравенства неотрицательна. Эта область определяется неравенством

$$2 \le x \le 4 \qquad (3.2)$$

В области (3.2) можно воспользоваться теоремой 1 и возвести обе части неравенства в квадрат. В результате получим

$$4+3x-x^2 < x^2-4x+4 \ \Rightarrow\ 2x^2-7x > 0\,.$$

Находим общую часть множества решений полученного квадратичного неравенства $x \in (-\infty;0) \cup \left(\dfrac{7}{2};\infty\right)$ с множеством (3.2):

$$x \in \left(\frac{7}{2};4\right].$$

II. $x-2<0$, т.е. $x<2$. С учетом ОДЗ находимся в области $x\in[-1;2)$. В этой области исходное неравенство решения не имеет, так как арифметическое значение корня не может быть меньше отрицательного числа, а условие неравенства в этой области можно перефразировать в заведомо ложное утверждение: «квадратный корень меньше отрицательного числа».

Ответ: $x\in\left(\frac{7}{2};4\right]$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x-5}>6-x$$

Решение. ОДЗ: $x\in(-\infty;-5]\cup[1;\infty)$. Рассмотрим два случая.

I. $6-x\geq 0$, т.е. $x\leq 6$.

Пересекаем эту область с ОДЗ :

$$x\in(-\infty;-5]\cup[1;6]. \tag{3.3}$$

В этой области правая часть неотрицательна, и, воспользовавшись теоремой 1, получаем

$$x^2+4x-5>36-12x+x^2 \Rightarrow x>\frac{41}{16}.$$

После пересечения с областью (3.3) имеем множество решений исходного неравенства, которое соответствует первому рассматриваемому случаю

$$x\in\left(\frac{41}{16};6\right] \tag{3.4}$$

II. $6-x<0$, т.е. $x>6$. После пересечения с ОДЗ приходим к выводу, что во втором случае мы находимся в области

$$x>6 \tag{3.5}$$

По определению радикала четной степени исходное неравенство удовлетворяется во всей области (3.5).

Для формулирования ответа объединяем области (3.4) и (3.5).

Ответ: $x\in\left(\frac{41}{16};\infty\right)$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+1}>2x^2+x-1$$

Решение. ОДЗ: $x\in\left[-\frac{1}{2};\infty\right)$. Немедленная реализация процедуры возведения в квадрат приведет в результате к слишком сложному неравенству. Разложим предварительно на множители правую часть и запишем неравенство в следующем виде

$$\sqrt{2x+1}>(2x+1)\cdot(x-1) \tag{3.6}$$

Воспользуемся наличием в правой части неравенства (3.6) множителя $2x+1$, равного подкоренному выражению. Это позволит после возведения в квадрат разложить неравенство на сомножители. Теперь вернемся к основной схеме и рассмотрим два случая.

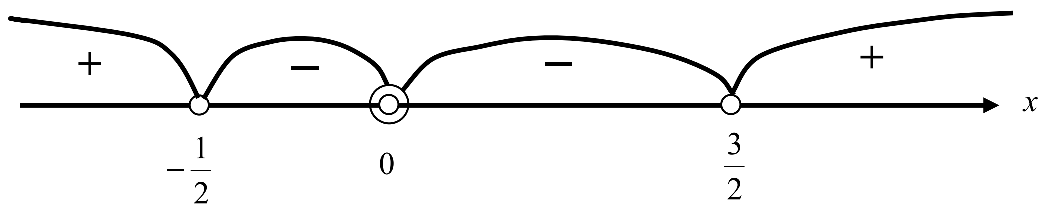
I. $(2x+1)(x-1)\ge 0 \quad \Rightarrow \quad x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[1;\infty)$. Пересекаем эту область с ОДЗ и находим множество значений переменной, в котором справедливы преобразования на первом этапе:

$$x\in\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup[1;\infty) \tag{3.7}$$

В области (3.7) возводим обе части неравенства (3.6) в квадрат:

$$2x+1>(2x+1)^2(x-1)^2 \Rightarrow (2x+1)^2(x-1)^2-(2x+1)<0 \Rightarrow$$
$$(2x+1)\left((2x+1)\left(x^2-2x+1\right)-1\right)<0 \Rightarrow (2x+1)\left(2x^3-3x^2\right)<0 \Rightarrow$$
$$(2x+1)x^2(2x-3)<0 \tag{3.8}$$

Решаем неравенство (3.8) методом интервалов: наносим на числовую ось точки $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$ (2 раза), $x=\frac{3}{2}$ и расставляем знаки:



Итак, решением неравенства (3.8) будет множество $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{3}{2}\right)$. Пересекаем это множество с множеством (3.7) и в результате имеем решение первого этапа

$$x\in\left[1;\frac{3}{2}\right)$$

II. $(2x+1)(x-1)<0 \Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Пересечение этого интервала с ОДЗ не изменяет его. Поскольку на этом интервале в силу условия радикал больше отрицательного числа, делаем вывод, что его нужно присоединить к решению, полученному на первом этапе, что после объединения дает ответ задачи.

Ответ: $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Если условие содержит более одного радикала, то мы можем добиться неотрицательности левой и правой части , перебрасывая их из одной части неравенства в другую. При каждом возведении в квадрат количество радикалов будет уменьшаться. Только когда в условии останется один радикал и оно примет вид $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ($\sqrt{f(x)} \geq g(x)$) или $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ($\sqrt{f(x)} \leq g(x)$), можно применять описанную выше процедуру рассмотрения двух случаев неотрицательности и отрицательности правой части $g(x)$.

Пример11. Решить неравенство

$$\sqrt{2x-1} \leq 5 - \sqrt{x+15}$$

Решение. ОДЗ дается решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+15 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x \geq -15 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Переносим радикал в правой части неравенства в левую часть:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leq 5 .$$

Теперь обе части неравенства неотрицательны и операция возведения в квадрат приведет к равносильному неравенству:

$$2x - 1 + 2\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{x+15} + x + 15 \leq 25 ,$$

$$2\sqrt{2x^2 + 29x - 15} \leq 11 - 3x$$

Рассматриваем два случая, когда правая часть неравенства неотрицательна и когда она меньше нуля.

I. $11 - 3x \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -11 \Rightarrow x \leq \frac{11}{3}$.

С учетом ОДЗ $x \geq \frac{1}{2}$ попадаем на интервал $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{11}{3}$. Здесь обе части неравенства неотрицательны, можно возводить в квадрат:

$$4\left(2x^2 + 29x - 15\right) \leq 121 - 66x + 9x^2 \Rightarrow x^2 - 182x + 181 \geq 0 .$$

Корни квадратного трехчлена в левой части неравенства равны $x_1 = 1$ и $x_2 = 181$, следовательно, решение этого неравенства будет $x \in (-\infty;1] \cup [181;\infty)$, что после пересечения с областью $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{11}{3}$ даст решение первого этапа

$$x \in \left[\frac{1}{2};1\right].$$

II. $11 - 3x < 0 \Rightarrow -3x < -11 \Rightarrow x > \frac{11}{3}$.

Эта область полностью принадлежит ОДЗ, но в ней решений нет, т.к. радикал четной степени не может быть меньше или равен отрицательному числу.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

В тех случаях, когда иррациональное неравенство содержит радикалы только нечетной степени, то возведение его обеих частей в нечетную степень не требует рассмотрения двух случаев. Кроме того, следует учитывать, что радикалы нечетной степени существуют при любых знаках подкоренных выражений.

Пример 12. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2-1} \geq x+1$$

Решение. ОДЗ: $x \in R$. Возводим обе части неравенства в куб:

$$x^3+2x^2-1 \geq x^3+3x^2+3x+1 \;\Rightarrow\; -x^2-3x-2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2+3x+2 \leq 0.$$

Находим корни квадратного трехчлена $x_1=-1$ и $x_2=-2$ и по обычной схеме, учитывая знак неравенства, выписываем ответ.

Ответ: $x \in [-2;-1]$.

4. Неравенства, содержащие радикал четной степени в виде сомножителя

В этом разделе будут рассмотрены иррациональные неравенства, в условии которых присутствует в качестве сомножителя в разложении левой части радикал четной степени, а правая часть равна нулю. Такие неравенства можно рассматривать в рамках общего метода интервалов, о котором речь пойдет ниже. Однако, можно учитывать неотрицательность такой функции и попробовать сократить на нее обе части неравенства. Перед этой «опасной» выкладкой обязательно выполнение двух действий: 1) должна быть найдена ОДЗ из условия неотрицательности подкоренного выражения, поскольку после указанного сокращения мы ее потеряем; 2) необходимо решить, включать или не включать в ответ значения неизвестного, при которых обращается в нуль подкоренное выражение.

Выполнение первого условия носит достаточно стандартный характер, поскольку определение ОДЗ практически всегда предваряет процесс решения иррационального неравенства. Игнорирование же второго требования сильно увеличивает вероятность появления ошибки при формулировке ответа. Когда же включать указанные значения неизвестного в ответ? Этот вопрос нужно решать, исходя из условия неравенства. Все же можно указать несколько случаев ответа на него.

Во-первых, если радикал стоит в знаменателе дроби, то значения x, в которых он обращается в нуль, не принадлежат ОДЗ и в ответ, естественно, включены быть не могут.

Во-вторых, если знак неравенства строгий (типа > или <), то нули подкоренного выражения также в ответ не включаем, т.к. даже, если радикал расположен в числителе, он будет обращать в нуль всю левую часть неравенства, что исключается условием.

В-третьих, в случае расположения радикала в числителе дроби и наличия знака нестрогого знака неравенства (≥ или ≤) значения, в которых радикал обращается в нуль, обязательно включаем в ответ. Это необходимо делать даже в тех случаях, когда эти значения не попадают на интервалы, соответствующие знаку неравенства. Неравенство после подстановки этих значений принимает вид истинного утверждения (0≥0 или 0≤0), т.е. удовлетворяется.

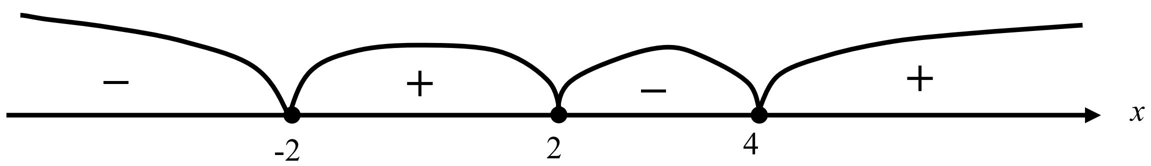
Проиллюстрируем предложенные рекомендации при решении примеров.

Пример13. Решить неравенство

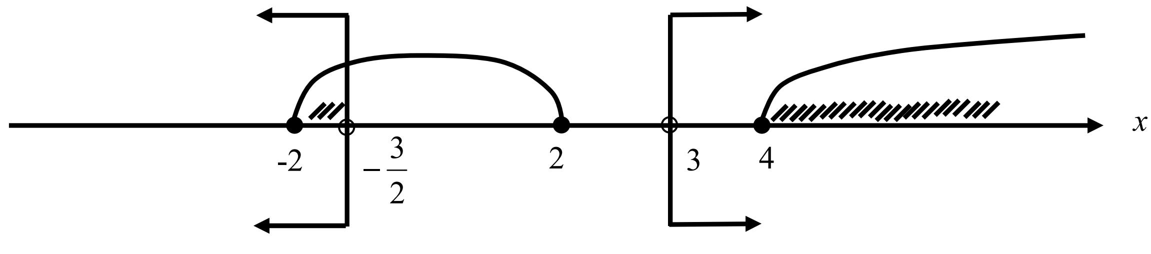
$$\frac{x^3-4x^2-4x+16}{\sqrt{2x^2-3x-9}}\geq 0$$

Решение. ОДЗ определятся неравенством $2x^2-3x-9>0$. Корни квадратного трехчлена в левой части $x_1=3$, $x_2=-\frac{3}{2}$, следовательно, решением будет объединение интервалов $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(3;\infty)$. Точки, в которых радикал (и знаменатель дроби в левой части неравенства) в ответ не включаем. Умножаем обе части неравенства на $\sqrt{2x^2-3x-9}>0$ и решаем алгебраическое неравенство методом интервалов:

$$x^3-4x^2-4x+16\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-4)-4(x-4)\geq 0 \;\Rightarrow\; (x-4)(x^2-4)\geq 0 \;\Rightarrow$$
$$(x-4)(x-2)(x+2)\geq 0$$



Пересекаем решение этого неравенства $x\in[-2;2]\cup[4;\infty)$ с множеством, $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(3;\infty)$, определяющим ОДЗ:



Еще раз обращаем внимание на то, что граничные точки ОДЗ в решение неравенства войти не должны.

Ответ: $x \in \left[-2;-\frac{3}{2}\right) \cup [4;\infty)$.

Для лучшего понимания значения граничных точек ОДЗ на решение иррациональных неравенств рассмотрим несколько вариантов изменения условия только что рассмотренной задачи.

Пример14. Решить неравенство

$$\frac{x^3-4x^2-4x+16}{\sqrt{2x^2-3x-9}}>0 .$$

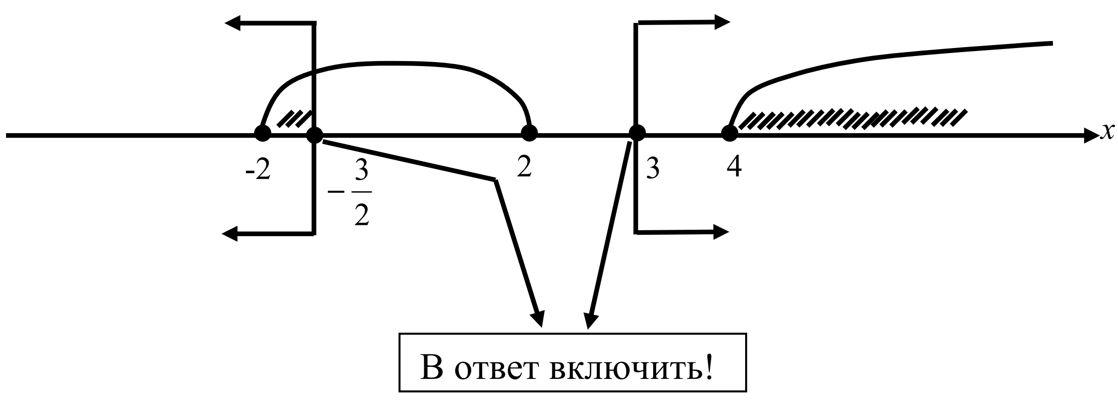
Решение. ОДЗ неравенства будет та же, граничные точки ОДЗ так же, как и ранее, не войдут в решение (радикал в знаменателе!), вот только нули числителя не будут теперь удовлетворять неравенству, поскольку знак неравенства строгий.

Ответ: $x \in \left(-2;\frac{3}{2}\right) \cup (4;\infty)$.

Пример15. Решить неравенство

$$\left(x^3-4x^2-4x+16\right)\cdot\sqrt{2x^2-3x-9}\geq 0 .$$

Решение. Значения неизвестного $x_1=3$ и $x_2=-\frac{3}{2}$, при котором подкоренное выражение обращается в нуль, войдут и в ОДЗ (оно теперь дается неравенствами $x \in \left(-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup [3;\infty)$), и в решение неравенства, поскольку эти значения обращают левую часть неравенства в нуль и, следовательно, ему удовлетворяют. Причем значение $x=-\frac{3}{2}$ в решение войдет «автоматически», поскольку будет участвовать в пересечении множеств, а вот точку $x=3$ в ответ нужно ввести дополнительно на основе высказанных соображений. На пересечение множеств решения алгебраического неравенства $x^3-4x^2-4x+16\geq 0$ с ОДЗ, эта точка не попадет. Рисунок пересечения указанных множеств будет практически дублировать предыдущий рисунок. Разница будет только при закраске точек $x_1=3$ и $x_2=-\frac{3}{2}$:



Ответ: $x \in \left[-2;-\frac{3}{2}\right] \cup \{3\} \cup [4;\infty)$.

Пример16. Решить неравенство

$$\left(x^3 - 4x^2 - 4x + 16\right)\cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 9} > 0 .$$

Решение. ОДЗ: $x \in \left(-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup [3;\infty)$.

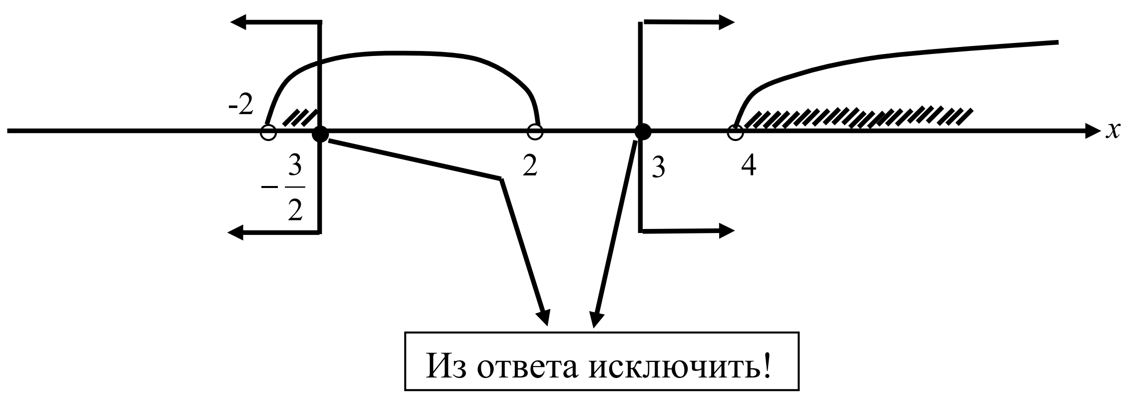
Граничные точки ОДЗ необходимо исключить при формулировке ответа, поскольку при подстановке этих значений в неравенство оно принимает вид ложного утверждения 0>0. В этом отличие решения этой задачи от решения, рассмотренного ранее в примере 15.

Кроме того, после сокращения на радикал неравенство будет иметь строгий знак:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 > 0 .$$

Следовательно, при решении этого неравенства методом интервалов нули кубического многочлена $x = \pm 2$ и $x = 4$ не войдут в ответ.

Окончательный рисунок теперь будет выглядеть так:



Ответ: $x \in \left(-2;\frac{3}{2}\right) \cup (4;\infty)$.

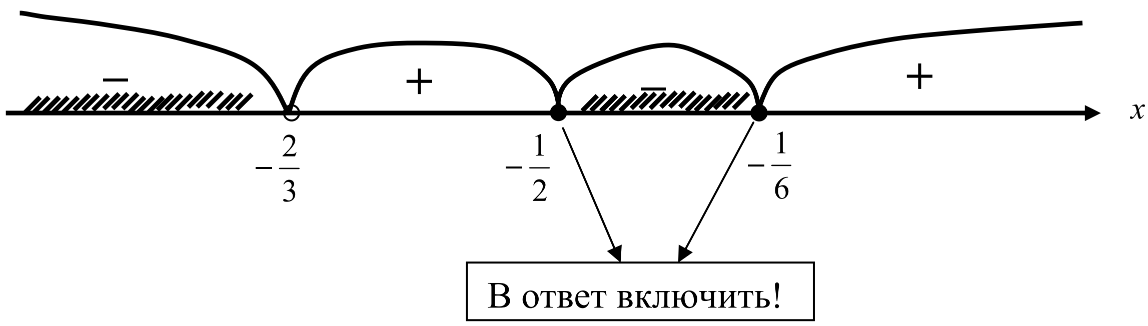
Пример 17. Решить неравенство

$$\sqrt{4x + \frac{1}{3x+2}} \cdot \left(9 - 16x^2\right) \geq 0 .$$

Решение. ОДЗ определяем из условия

$$4x + \frac{1}{3x+2} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{12x^2 + 8x + 1}{3x+2} \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)}{3x+2} \geq 0$$

Решаем полученное дробно-рациональное неравенство методом интервалов, учитывая, что числитель обращается в нуль при $x=-\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{6}$, а знаменатель – при $x=-\frac{2}{3}$:



Итак, ОДЗ состоит из двух интервалов $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{6};\infty\right)$. Значения $x=-\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{6}$ в ответ включаем, поскольку при этих значениях неравенство удовлетворяется (0≥0).

Сокращаем на радикал и решаем неравенство

$$9-16x^2\geq 0 \;\Rightarrow\; 16x^2-9\leq 0 \;\Rightarrow\; (4x-3)(4x+3)\leq 0 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}.$$

Пересекаем полученную область решения с ОДЗ и получаем решение исходного неравенства (значения $x=-\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{6}$ попали в ответ при пересечении множеств, в противном случае пришлось бы вводить их в ответ дополнительно).

Ответ: $x\in\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right]$.

5. Введение дополнительной неизвестной

В иррациональных неравенствах предпосылки введения новой переменной примерно те же, что и в иррациональных уравнениях. Необходимо увидеть в условии некоторое выражение, обозначив которое через новую неизвестную, мы сможем или свести неравенство к стандартному виду (желательно не содержащему радикалов), или, по крайней мере, существенно упростить условие. Однако следует помнить, что возвращение к старой переменной в неравенствах не такое простое, как в уравнениях и требует аккуратности в выкладках.

Большое количество примеров, решаемых при помощи введения новой переменной, может быть также решено и при помощи рассматриваемого ниже метода интервалов. Трудоемкость и эффективность этих двух методов приблизительно одинаковы, и выбор способа решения, обычно, индивидуален.

Чаще всего, в качестве новой переменной выбирается радикал, содержащий исходную неизвестную. В этом случае нет необходимости определять ОДЗ перед началом решения так, как мы практиковали это ранее. Возможен учет ОДЗ при возвращении к старой переменной в том месте, где приходится избавляться от радикала.

Пример 18. Решить неравенство

$$3x^2 + 2\sqrt{3x^2 + 1} - 7 \le 0$$

Решение. В терминах новой переменной $\sqrt{3x^2 + 1} = y \ge 0$, $3x^2 = y^2 - 1$ неравенство перепишется в виде

$$y^2 + 2y - 8 \le 0 .$$

Корни квадратного трехчлена в левой части неравенства будут $y_1 = 2$ и $y_2 = -4$, следовательно, решение квадратного неравенства запишется в виде $-4 \le y \le 2$. Возвращаемся к старой переменной

$$-4 \le \sqrt{3x^2 + 1} \le 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 1} \le 2 \\ \sqrt{3x^2 + 1} \ge -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \begin{cases} 3x^2 + 1 \le 4 \\ x \in ОДЗ \end{cases} \\ x \in R \end{cases}$$

В заключительном преобразовании при избавлении от радикалов необходимо было учесть ОДЗ. В нашем случае оно дается неравенством $3x^2 + 1 \ge 0$, т.е. $x \in R$. Заканчиваем решение:

$$\begin{cases} 3x^2 \le 3 \\ x \in R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le x \le 1 .$$

Ответ: $x \in [-1;1]$.

В следующем примере, несмотря на элементарность замены, мы сталкиваемся с дополнительной сложностью – необходимостью пересечения решения с ОДЗ.

Пример 19. Решить неравенство

$$\frac{3}{11\sqrt{x} - 18} \ge \frac{1}{x - 4}$$

Решение. Вводим очевидную замену переменной $\sqrt{x} = y \ge 0$. Записываем и решаем неравенство в терминах переменной y:

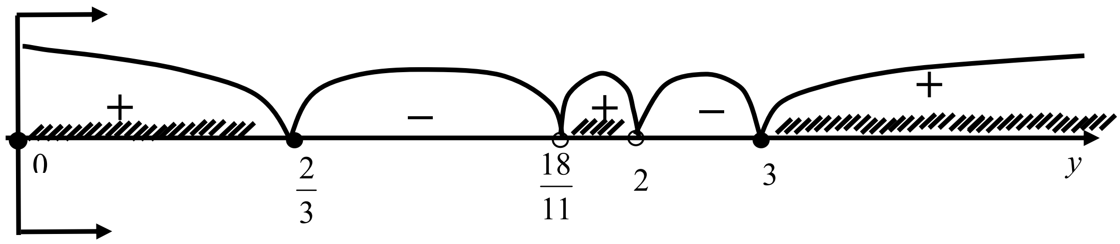
$$\frac{3}{11y - 18} \ge \frac{1}{y^2 - 4} \Rightarrow \frac{3}{11y - 18} - \frac{1}{y^2 - 4} \ge 0 \Rightarrow \frac{3y^2 - 12 - (11y - 18)}{(11y - 18)(y^2 - 4)} \ge 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3y^2 - 11y + 6}{(11y - 18)(y^2 - 4)} \ge 0 \Rightarrow \frac{3(y - 3)\left(y - \frac{2}{3}\right)}{(11y - 18)(y^2 - 4)} \ge 0 \Rightarrow \frac{3(y - 3)\left(y - \frac{2}{3}\right)}{(11y - 18)(y - 2)(y + 2)} \ge 0$$

Поскольку $y \geq 0$, то всегда $y+2>0$ и заключительное неравенство равносильно следующему

$$\frac{3(y-3)\left(y-\frac{2}{3}\right)}{(11y-18)(y-2)} \geq 0.$$

Применяем для решения полученного неравенства метод интервалов:



Записываем решение неравенства в терминах новой переменной y и возвращаемся к исходной переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq \frac{2}{3} \\ \frac{18}{11} < y < 2 \\ 3 \leq y < \infty \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{2}{3} \\ \frac{18}{11} < \sqrt{x} < 2 \\ 3 \leq \sqrt{x} < \infty \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{4}{9} \\ \frac{324}{121} < x < 4 \\ 9 \leq x < \infty \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{array}\right..$$

В данном примере вся совокупность множеств решения неравенства принадлежит ОДЗ $x \geq 0$.

Ответ: $x \in \left[0;\frac{4}{9}\right] \cup \left(\frac{324}{121};4\right) \cup [9;\infty)$.

Пример 20. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3-x}{3+x}} + \sqrt{1+\frac{2x}{3-x}} \geq \frac{5}{2}.$$

Решение. Приведем подкоренное выражение во втором радикале к общему знаменателю. Тогда неравенство перепишется в виде

$$\sqrt{\frac{3-x}{3+x}} + \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} \geq \frac{5}{2}.$$

Теперь понятно, каким образом ввести дополнительную переменную:

$$\sqrt{\frac{3-x}{3+x}} = y > 0.$$

Отметим, что переменная y должна быть строго положительна, поскольку в неравенство входят взаимно обратные выражения. Записываем неравенство в терминах новой переменной, решаем его и возвращаемся к старой переменной, учитывая неотрицательность (а в данном примере положительность) подкоренных выражений:

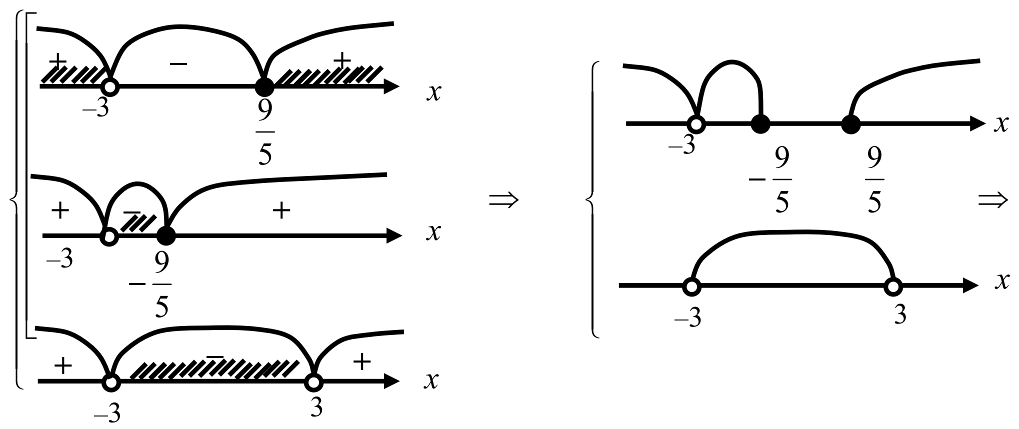
$$y+\frac{1}{y}\ge\frac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad 2y^2-5y+2\ge 0\ (\text{т.к. } y>0)\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}0<y\le\dfrac{1}{2}\\ y\ge 2\end{array}\right.\quad\Rightarrow$$

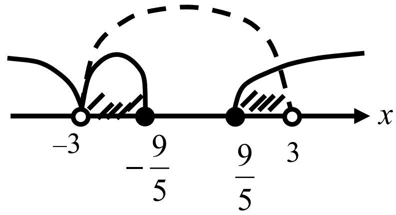
$$\left[\begin{array}{l}0<\sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}}\le\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}}\ge 2\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0<\dfrac{3-x}{3+x}\le\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{3-x}{3+x}\ge 4\end{array}\right.\\ \dfrac{3-x}{3+x}>0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-x}{3+x}\le\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{3-x}{3+x}\ge 4\end{array}\right.\\ \dfrac{3-x}{3+x}>0\end{array}\right.\quad\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-x}{3+x}-\dfrac{1}{4}\le 0\\ \dfrac{3-x}{3+x}-4\ge 0\end{array}\right.\\ \dfrac{3-x}{3+x}>0\end{array}\right.\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{4(3-x)-(3+x)}{3+x}\le 0\\ \dfrac{3-x-4(3+x)}{3+x}\ge 0\end{array}\right.\\ \dfrac{3-x}{3+x}>0\end{array}\right.\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{12-4x-3-x}{3+x}\le 0\\ \dfrac{3-x-12-4x}{3+x}\ge 0\end{array}\right.\\ \dfrac{3-x}{3+x}>0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{9-5x}{3+x}\le 0\\ \dfrac{-9-5x}{3+x}\ge 0\end{array}\right.\\ \dfrac{3-x}{3+x}>0\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{5x-9}{3+x}\ge 0\\ \dfrac{5x+9}{3+x}\le 0.\end{array}\right.\\ \dfrac{x-3}{x+3}<0\end{array}\right.$$

Решаем каждое из полученных неравенств методом интервалов и учитываем знаки объединения и системы





Ответ: $x \in \left(-3;-\frac{9}{5}\right] \cup \left[\frac{9}{5};3\right)$.

В задачах повышенной сложности зачастую усмотреть сразу замену переменной достаточно сложно и приходится предварительно преобразовывать неравенство. Особенно осторожно следует производить операции разбиения радикалов на сомножители, сокращения на радикал, внесения функций под знак радикалов и т.п.

Пример 21. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}+\sqrt{\frac{x-3}{x+4}} \geq \frac{7}{x+3}\sqrt{\frac{x+3}{x+4}}.$$

Решение. Для определения ОДЗ требуем неотрицательности всех подкоренных выражений:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{x+3} \geq 0 \\ \frac{x-3}{x+4} \geq 0 \\ \frac{x+3}{x+4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x \in (-\infty;-3) \cup [4;\infty) \\ x \in (-\infty;-4) \cup [3;\infty) \\ x \in (-\infty;-4) \cup [3;\infty) \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (-\infty;-4) \cup [4;\infty)$$

В этой задаче нужно не спешить с сокращением радикалов в правой части неравенства, поскольку эта операция будет происходить по-разному на разных участках ОДЗ.

I. $x \in (-\infty;-4)$. На этом участке $x-4<0$, $x-3<0$, $x+3<0$, $x+4<0$. Учитываем, что $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}}$, $\sqrt{A \cdot B}=\sqrt{-A}\cdot\sqrt{-B}$, если $A<0$ и $B<0$. Следовательно, при рассматриваемых значениях x будут справедливы следующие соотношения:

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-3}},\ \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{-x-4}},\ \sqrt{\frac{x+3}{x+4}}=\frac{\sqrt{-x-3}}{\sqrt{-x-4}},$$

$$x+3=-(-x-3)=-\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{-x-3}.$$

Учитываем выписанные формулы при преобразовании обеих частей неравенства. Имеем:

$$\frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-3}}+\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{-x-4}} \geq -\frac{7}{\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{-x-3}}\cdot\frac{\sqrt{-x-3}}{\sqrt{-x-4}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-3}}+\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{-x-4}} \geq -\frac{7}{\sqrt{-x-3}\cdot\sqrt{-x-4}}.$$

При $x<-4$ все знаменатели в заключительном неравенстве строго положительны, поэтому после избавления от них придем к равносильному неравенству

$$\sqrt{-x+4}\cdot\sqrt{-x-4}+\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{-x-3} \geq -7.$$

Полученное неравенство имеет характер истинного утверждения, поскольку правая часть при $x < -4$ всегда положительна, а правая – отрицательна. Следовательно, на первом этапе решением неравенства будет интервал $x \in (-\infty; -4)$.

II. $x \in [4; \infty)$. При этих значениях аргумента справедливы формулы:

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}} = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+3}}, \ \sqrt{\frac{x-3}{x+4}} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}}, \ \sqrt{\frac{x+3}{x+4}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}},$$

$$x+3 = \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x+3}.$$

Преобразованное с учетом этих соотношений исходное неравенство запишется в виде

$$\sqrt{x^2-16} + \sqrt{x^2-9} \geq 7.$$

Только теперь появилась необходимость вводить дополнительную переменную, поскольку возведение обеих частей в квадрат приведет к усложнению решения. Обозначим $\sqrt{x^2-16} = y \geq 0$. Тогда

$$x^2 - 16 = y^2, \ x^2 - 9 = y^2 + 7, \ \sqrt{x^2-9} = \sqrt{y^2+7}.$$

В терминах новой переменной неравенство перепишется в виде

$$\sqrt{y^2+7} \geq 7 - y. \qquad (5.1)$$

Учтем, что $y^2 + 7 \geq 0$ при всех значениях y. Поэтому при решении неравенства (5.1), учитывая смысл новой переменной, будем считать, что $y \geq 0$. Рассматриваем два случая.

А. $\begin{cases} 7 - y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \leq y \leq 7$. В этой области обе части неравенства (5.1) неотрицательны. Возводим в квадрат:

$$y^2 + 7 \geq 49 - 14y + y^2 \quad \Rightarrow \quad 14y \geq 42 \quad \Rightarrow \quad y \geq 3.$$

Полученное множество после пересечения с множеством $0 \leq y \leq 7$ даст решение этапа А: $3 \leq y \leq 7$.

Б. $\begin{cases} 7 - y < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y > 7$.

При $y > 7$ неравенство (5.1) принимает вид истинного утверждения: «квадратный радикал больше либо равен отрицательному числу». Следовательно, множество $y > 7$ есть решение этапа Б.

Объединяем множества решений обоих этапов и находим решение неравенства (5.1):

$$y \geq 3.$$

Возвращаемся к исходной переменной x:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-16}\ge 3\\ x\ge 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-16\ge 9\\ x\ge 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-16\ge 9\\ x\ge 4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x^2\ge 25\\ x\ge 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\ge 5\\ x\ge 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-5]\cup[5;\infty)\\ x\ge 4\end{cases}\Rightarrow$$

$$x\ge 5.$$

Для формулировки окончательного ответа объединяем решения этапов I и II.

Ответ: $x\in(-\infty;-4)\cup[5;\infty)$.

6. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств

Процедура реализации метода интервалов при решении иррациональных неравенств претерпевает некоторые изменения по сравнению с решением рациональных и дробно-рациональных неравенств. Отличие состоит в необходимости учета ОДЗ, которая при наличии радикалов четной степени состоит, как правило, из нескольких интервалов, вне которых мы не имеем права ставить знаки левой части неравенства на основном рисунке. В остальном алгоритм аналогичен случаю рациональных и дробно-рациональных неравенств. Таким образом, для решения иррациональных неравенств необходимо провести следующие операции:

1) найти ОДЗ;
2) перенести все слагаемые в левую часть неравенства;
3) разложить ее на сомножители;
4) приравнять каждый сомножитель нулю и найти его корни;
5) нанести полученные значения на числовую ось;
6) оставить на числовой оси только множества, входящие в ОДЗ (если корни определены правильно, все они попадут внутрь ОДЗ);
7) расставить на оставшихся интервалах знаки левой части неравенства и сформулировать ответ.

Пример 21. Решить неравенство

$$\frac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}}\le 2x+3$$

Решение. ОДЗ находим из решения неравенства $3x^2-3>0$, т.е.,

$$x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty).$$

Нетрудно заметить, что множитель $2x+3$ присутствует и в левой и в правой части неравенства. Это и есть ключ к решению задачи. Преобразования очевидны:

$$\frac{3(2x-3)(2x+3)}{\sqrt{3x^2-3}}-(2x+3)\le 0\qquad\Rightarrow\qquad(2x+3)\left(\frac{3(2x-3)}{\sqrt{3x^2-3}}-1\right)\le 0$$

$$(2x+3)\left(\frac{3(2x-3)-\sqrt{3x^2-3}}{\sqrt{3x^2-3}}\right)\le 0 \quad \Rightarrow (2x+3)\left(\sqrt{3}(2x-3)-\sqrt{x^2-1}\right)\le 0 .$$

Заключительное преобразование (умножение обеих частей неравенства на $\sqrt{3x^3-3}$) стало возможным ввиду того, что для всех значений аргумента из ОДЗ $\sqrt{3x^3-3}>0$.

Итак, левая часть неравенства разложена на сомножители. Приравниваем каждый из них нулю.

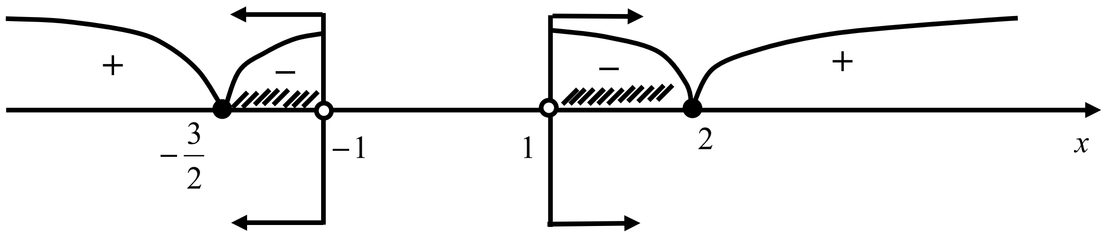
I. $2x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}$.

II. $\sqrt{3}(2x-3)-\sqrt{x^2-1}=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}(2x-3)=\sqrt{x^2-1} \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3(4x^2-12x+9)=x^2-1 \\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty) \\ 2x-3\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x^2-36x+28=0 \\ x\ge\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=2,\quad x_2=\frac{14}{11} \\ x\ge\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad x=2 .$$

Наносим полученные значения $x=-\frac{3}{2}$ и $x=2$ на числовую ось и строим основной рисунок, указывающий интервалы знакопостоянства левой части неравенства. При этом рекомендуется границы ОДЗ на рисунке отмечать иначе, чем граничные точки обычных интервалов, например, следующим образом.



Ответ: $x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right)\cup(1;2]$.

Пример 21. Решить неравенство

$$\sqrt{x^3-7x^2+27x-21}\ge x^2-4x+3$$

Решение. Для определения ОДЗ нужно решить неравенство

$$x^3-7x^2+27x-21\ge 0 .$$

Подбирая делители свободного члена, находим корень кубического многочлена $x=1$. После деления правой части на $x-1$, можно записать это неравенство в виде

$$(x-1)(x^2-6x+21)\ge 0$$

Второй сомножитель в разложении левой части представляет собой квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом и положительным коэффициентом при старшей степени. Следовательно, этот квадратный трехчлен положителен при всех значениях аргумента и на него можно разделить левую и правую части. В результате делаем вывод, что ОДЗ исходного неравенства имеет вид

$$x \ge 1.$$

Возведение обеих частей исходного неравенства в квадрат (естественно, при рассмотрении двух возможных знаков правой части) приведет к появлению членов с x^4, x^3 и т.д. Поэтому изберем другой путь и разложим многочлены в левой и правой частях на сомножители. Тогда исходное неравенство примет следующий вид:

$$\sqrt{(x-1)(x^2-6x+21)} \ge (x-1)(x-3) \qquad (6.1)$$

Учтем, что ввиду структуры ОДЗ выполняется неравенство $x-1 \ge 0$. Кроме того, как было сказано выше, $x^2-6x+21>0$ при всех x. Следовательно, справедливы формулы

$$x-1=\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \text{ и } \sqrt{(x-1)(x^2-6x+21)}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x^2-6x+21},$$

с использованием которых, неравенство (6.1) перепишется в виде

$$\sqrt{x-1}\cdot\left(\sqrt{x^2-6x+21}-(x-3)\sqrt{x-1}\right)\ge 0. \qquad (6.2)$$

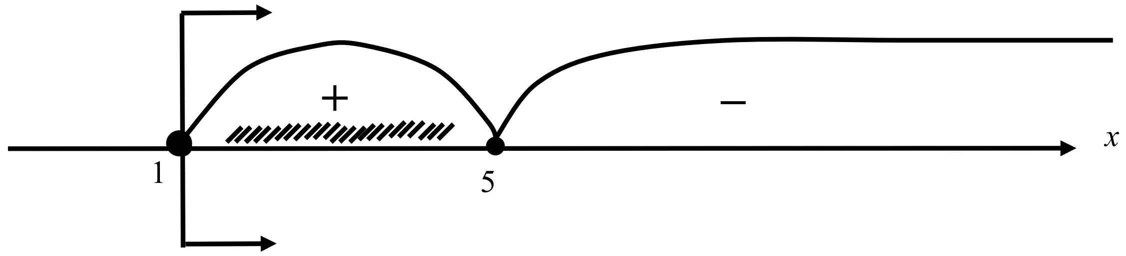
Применяем метод интервалов и приравниваем нулю каждый из сомножителей. Первый из них обращается в нуль при $x=1$. Равенство нулю второго сомножителя приводит к необходимости решения уравнения

$$\sqrt{x^2-6x+21}=(x-3)\sqrt{x-1}$$

При дополнительном ограничении $x-3\ge 0$, которое не выводит нас за рамки ОДЗ, возводим в квадрат обе части этого уравнения и группируем слагаемые:

$$x^2-6x+21=(x^2-6x+9)(x-1) \Rightarrow x^2-6x+21=x^3-7x^2+15x-9 \Rightarrow$$
$$x^3-8x^2+21x-30=0 \Rightarrow (x^3-5x^2)-(3x^2-21x+30)=0 \Rightarrow$$
$$(x^3-5x^2)-3(x^2-7x+10)=0 \Rightarrow x^2(x-5)-3(x-5)(x-2)=0 \Rightarrow$$
$$(x-5)(x^2-3x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-5=0\\x^2-3x+6=0\end{array}\right.\\x-3\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\x\in\varnothing\ (D<0)\end{array}\right.\\x\ge 3\end{cases} \Rightarrow x=5.$$

Итак, правая часть неравенства (6.2) обращается в нуль при $x=1$ и при $x=5$. Оба корня принадлежат множеству $x\ge 1$, определяющему ОДЗ. Строим основной рисунок метода интервалов, указывающий внутри ОДЗ знаки левой части неравенства (6.2).



Ответ: $x \in [1;5]$.

Пример 22. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{3-x^2-2x} \ge \sqrt[3]{4-x}$$

Решение. ОДЗ: $x \in R$. Возводим обе части неравенства в куб и группируем стандартным образом утроенные произведения:

$$x^2+x+1+3\cdot\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2\sqrt[3]{3-x^2-2x}+3\cdot\sqrt[3]{x^2+x+1}\cdot\left(\sqrt[3]{3-x^2-2x}\right)^2+3-x^2-2x \ge 4-x$$

$$4-x+3\cdot\sqrt[3]{x^2+x+1}\cdot\sqrt[3]{3-x^2-2x}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{3-x^2-2x}\right) \ge 4-x$$

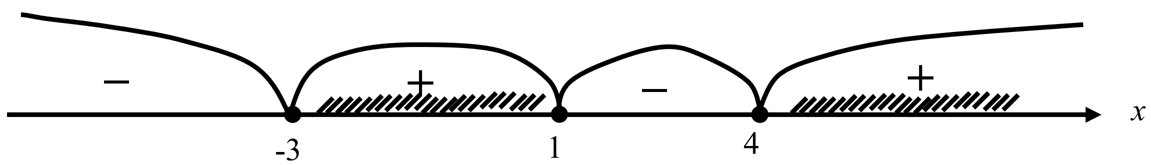
$$\sqrt[3]{x^2+x+1}\cdot\sqrt[3]{3-x^2-2x}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{3-x^2-2x}\right) \ge 0 \qquad (6.3)$$

Применяем метод интервалов и приравниваем к нулю каждый сомножитель. Определяем корни каждого уравнения, учитывая возможность возведения обеих частей уравнения в куб.

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x^2+x+1}=0\\ \sqrt[3]{3-x^2-2x}=0\\ \sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{3-x^2-2x}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+x+1=0\\ 3-x^2-2x=0\\ \sqrt[3]{x^2+x+1}=-\sqrt[3]{3-x^2-2x}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing \quad (D<0)\\ x^2+2x-3=0\\ x^2+x+1=-\left(3-x^2-2x\right)\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing \quad (D<0)\\ x_1=1,\ x_2=-3\\ x=4\end{array}\right.$$

Наносим полученные значения на числовую ось и определяем знаки левой части неравенства (6.3) на получающихся интервалах. Например, при $x=0$ имеем $1\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\left(1+\sqrt[3]{3}\right)>0$. Далее обычным способом чередуем знаки на полученных интервалах.



Ответ: $x \in [-3;1] \cup [4;\infty)$.

7. Иррациональные неравенства, сводящиеся к модульным

В большинстве случаев решения неравенств избавляться от радикалов четной степени в условии гораздо труднее, чем от модулей. Поэтому, если удается перейти от иррационального неравенства к неравенству, содержащему модули, это облегчит решение задачи. При этом возможно применение формул

$$\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|, \quad \sqrt[2n]{f^{2n}(x)} = |f(x)|.$$

Пример 23. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+26-10\sqrt{x+1}} \geq 4\sqrt{|x+1|}$$

Решение. Когда под знак внешнего радикала входит еще один радикал, следует попробовать преобразовать подкоренное выражение к полному квадрату суммы или разности некоторых выражений. В нашем случае это возможно сделать при помощи стандартной замены $\sqrt{x+1} = y \geq 0$. Чтобы не переходить к новой переменной, попытаемся представить подкоренные выражения в виде полных квадратов, воспринимая $2\sqrt{x+1}$ и $10\sqrt{x+1}$, как удвоенные произведения. Имеем:

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{x+1-10\sqrt{x+1}+25} \geq 4\sqrt{|x+1|},$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x+1}-5\right)^2} \geq 4\sqrt{|x+1|}.$$

Учитывая полученную запись неравенства, можем найти его ОДЗ из условия $x+1 \geq 0$. Отсюда следует, что, во-первых, $x \geq -1$ и, во-вторых, $|x+1| = x+1$. После перехода к модульной записи неравенство теперь примет вид:

$$\left|\sqrt{x+1}-1\right| + \left|\sqrt{x+1}-5\right| \geq 4\sqrt{x+1}$$

Применяем обобщенный метод интервалов и находим точки, в которых каждый модуль обращается в нуль:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-1=0\\ \sqrt{x+1}-5=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{x+1}=5\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=24\end{array}\right..$$

Точки $x=0$ и $x=24$ разбивают ОДЗ на три интервала, на каждом из которых неравенство будет иметь различный вид.

I. $-1 \leq x \leq 0$. На этом интервале оба подмодульных выражения отрицательны и неравенство запишется в виде

$$\left(1-\sqrt{x+1}\right)+\left(5-\sqrt{x+1}\right) \geq 4\sqrt{x+1}, \text{ т.е.,}$$

$$\sqrt{x+1} \leq 1 \Rightarrow x+1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 0.$$

С учетом условия $-1 \leq x \leq 0$ имеем на рассматриваемом интервале решение неравенства $-1 \leq x \leq 0$.

Аналогично поступаем на оставшихся интервалах.

II. $\begin{cases} 0 < x \le 24 \\ \left(\sqrt{x+1}-1\right)+\left(5-\sqrt{x+1}\right) \ge 4\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \le 24 \\ \sqrt{x+1} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \le 24 \\ x \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow\ x \in \varnothing$.

III. $\begin{cases} x > 24 \\ \left(\sqrt{x+1}-1\right)+\left(\sqrt{x+1}-5\right) \ge 4\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 24 \\ \sqrt{x+1} \le -3 \end{cases} \Rightarrow\ x \in \varnothing$.

Итак, решение неравенства существует только на первом интервале.

Ответ: $-1 \le x \le 0$.

8. Иррациональные неравенства, содержащие знак модуля

Если в условии неравенства присутствуют и радикалы и модули, то решение технически существенно усложняется. Это связано с тем, что освобождение и от радикалов, и от модулей в общем случае требует разветвления решения, что усложняет его логическую структуру. Порядок действий при этом определяется конкретным условием задачи. Все же можно утверждать, что в большинстве задач удобнее сначала убрать радикал, а уже потом раскрыть модуль. Естественно, бывают и исключения. Особенно это относится к тем неравенствам, где раскрытие модуля сразу упрощает условие задачи.

Пример 24. Решить неравенство

$$\sqrt{10-x^2} \ge 3 \cdot \frac{|x|}{x}.$$

Решение. ОДЗ находим, решая систему неравенств:

$$\begin{cases} 10-x^2 \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-10 \le 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10} \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in \left[-\sqrt{10};0\right) \cup \left(0;\sqrt{10}\right].$$

Заметим, что при раскрытии модуля правая часть неравенства существенно упростится, превратившись в константу. Поэтому избавимся сначала от модуля, воспользовавшись его определением. Для этого рассмотрим два случая.

I. $x \ge 0$. С учетом структуры ОДЗ попадаем в область

$$0 < x \le \sqrt{10}. \qquad (8.1)$$

Здесь $|x| = x$, $\frac{|x|}{x} = 1$ и неравенство перепишется в виде (значение $x = 0$ не принадлежит множеству (8.1))

$$\sqrt{10-x^2} \ge 3.$$

Обе части полученного неравенства неотрицательны, поэтому возможна операция возведения в квадрат

$$10 - x^2 \ge 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 \le 1 \;\Rightarrow \quad |x| \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le x \le 1 .$$

С учетом неравенства (8.1) решение неравенства на первом этапе будет

$$0 < x \le 1 . \qquad (8.2)$$

II. $x < 0$. После пересечения множества $x < 0$ с ОДЗ определяем значения x, для которых справедливы последующие выкладки:

$$-\sqrt{10} \le x < 0 \qquad (8.3)$$

В области (8.3) $|x| = -x$, $\dfrac{|x|}{x} = -1$. Исходное неравенство принимает вид

$$\sqrt{10 - x^2} \ge -3 .$$

Полученное неравенство справедливо для всех значений x из множества (8.3).

Для формулировки ответа объединяем множества (8.2) и (8.3).

Ответ: $x \in \left[-\sqrt{10};0\right) \cup (0;1]$.

Пример 25. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2} + |x - 4| \le 6$$

Решение. Изолируем радикал в левой части неравенства, переписав его в виде

$$\sqrt{x+2} \le 6 - |x - 4| . \qquad (8.4)$$

Избавимся в начале решения от иррациональной функции в неравенстве. Для этого необходимо, во-первых, найти ОДЗ и, во-вторых, обосновать операцию возведения в квадрат, рассмотрев два случая возможных знаков правой части неравенства (8.4). Отметим, что для этого нам необходимо будет решить неравенство, содержащее знак модуля.

ОДЗ находится из неравенства $x + 2 \ge 0$ и имеет вид

$$x \ge -2 . \qquad (8.5)$$

Рассматриваем два возможных знака правой части неравенства (8.4).

I. $6 - |x - 4| \ge 0$. Для определения множества решений этого неравенства изолировать модуль в левой части неравенства и использовать готовые формулы для его снятия:

$$|x - 4| \le 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 4 \le 6 \\ x - 4 \ge -6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \le 10 \\ x \ge -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -2 \le x \le 10 .$$

После пересечения полученного интервала $-2 \le x \le 10$ с ОДЗ (неравенство (8.5)) получим область значений неизвестного, где правая часть неравенства (8.4) неотрицательна

$$-2 \le x \le 10 . \qquad (8.6)$$

Возводим в квадрат обе части неравенства (8.4) и приводим подобные члены:

$$x+2 \le 36-12|x-4|+(x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-8x+16-12|x-4|+36-2-x \ge 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2-9x-12|x-4|+50 \ge 0 \qquad (8.7)$$

Теперь нужно раскрывать модуль. Рациональнее всего это можно сделать, воспользовавшись его определением, поскольку под модулем стоит простое, линейное относительно x, выражение:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & x-4 \ge 0 \\ 4-x, & x-4<0 \end{cases}.$$

В соответствии со знаком выражения $x-4$ рассматриваем два множества значений неизвестного.

Iа. $x-4 \ge 0 \ \Rightarrow x \ge 4$. Пересекаем это множество с множеством (8.6), где справедливы все преобразования на I-м этапе

$$\begin{cases} x \ge 4 \\ -2 \le x \le 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4 \le x \le 10.$$

В найденной области записываем неравенство (8.7) ($|x-4| = x-4$) и находим его решение

$$x^2-9x-12(x-4)+50 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-21x+98 \ge 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x-14)(x-7) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty;7] \cup [14;\infty).$$

Оставляем в ответе ту часть полученного множества, которое принадлежит области $4 \le x \le 10$.

$$\begin{cases} x \in (-\infty;7] \cup [14;\infty) \\ 4 \le x \le 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4 \le x \le 7$$

Iб. $x-4<0 \ \Rightarrow \ x<4$. После пересечения с множеством (8.6) определяем область значений x: $-2 \le x < 4$, где неравенство (8.7) перепишется в виде ($|x-4| = 4-x$)

$$x^2-9x-12(4-x)+50 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x+2 \ge 0.$$

Его решение элементарно и имеет вид

$$x \in (-\infty;-2] \cup [-1;\infty).$$

В ответ включаем пересечение этого множества с множеством $-2 \le x < 4$, определяющим этап Iб:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;-2] \cup [-1;\infty) \\ -2 \le x < 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in \{-2\} \cup [-1;4).$$

Решение, соответствующее случаю неотрицательной правой части неравенства (8.4) получено. Теперь предположим, что она отрицательна.

II. $6-|x-4|<0$. Решаем это неравенство, содержащее знак модуля по готовым формулам:

$$|x-4|>6 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-4>6 \\ x-4<-6 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x>10 \\ x<-2 \end{array}\right..$$

После пересечения с ОДЗ (формула (8.5)) получаем область $x>10$. Здесь неравенство (8.4) представляет собой высказывание «квадратный корень меньше, либо равен отрицательному числу», что невозможно. Делаем вывод, что в области $x > 10$ решений у данного неравенства нет.

Для окончательной формулировки ответа объединяем полученные ранее решения этапов Iа и Iб:

$$\left[\begin{array}{l} 4 \le x \le 7 \\ x \in \{-2\} \cup [-1;4) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x \in \{-2\} \cup [-1;7].$$

Ответ: $x \in \{-2\} \cup [-1;7]$.

Более простое решение имеют неравенства, в условии которых модуль и радикал входят в качестве сомножителей. В этом случае можно со всеми необходимыми предосторожностями сократить на них, учитывая тот факт, что эти функции не могут иметь отрицательные значения. Можно также применить и метод интервалов, приравнивая к нулю каждый сомножитель и расставляя внутри ОДЗ знаки левой части неравенства.

Пример 26. Решить неравенство

$$\sqrt{4x + \frac{1}{3x+2}} \cdot \left(36 - 49x^2\right) \cdot |x - 8| \ge 0 .$$

Решение. Сократим на первый и третий сомножитель, присутствующие в разложении левой части неравенства. Чтобы сократить на радикал, необходимо, во-первых, определить предварительно ОДЗ и, во-вторых, решить вопрос о включении или не включении в ответ тех значений x, которые обращают радикал в нуль.

ОДЗ неравенства определяется условием неотрицательности подкоренного выражения. Для этого решаем дробно-рациональное неравенство

$$4x + \frac{1}{3x+2} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x(3x+2)+1}{3x+2} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{12x^2 + 8x + 1}{3x+2} \ge 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{6}\right)}{3x+2} \ge 0 .$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов и получаем решение, определяющее ОДЗ:

$$x \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{6}; \infty\right).$$

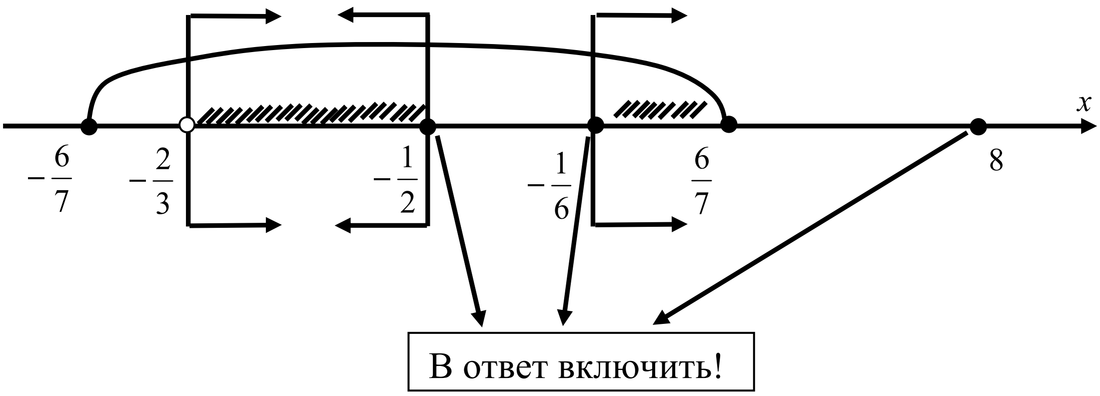
Поскольку знак неравенства нестрогий, значения $x = -\frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{6}$ нужно включить в ответ, независимо от того попадут ли они в решение неравенства, получающегося после сокращения на радикал.

Сокращение на неотрицательное выражение $|x-8|$ возможно при учете того факта, что значение $x=8$, при котором модуль обращается в нуль, нужно также внести в окончательный ответ, поскольку это значение при подстановке в неравенство обращает его в истинное утверждение $0 \ge 0$.

Таким образом, исходное неравенство после сокращения на указанные неотрицательные функции примет вид квадратного неравенства, решение которого элементарно:

$$36-49x^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; x^2 \le \frac{36}{49} \;\Rightarrow\; |x| \le \frac{6}{7} \;\Rightarrow\; -\frac{6}{7} \le x \le \frac{6}{7}.$$

При оформлении окончательного рисунка учитываем ОДЗ и вносим граничные точки ОДЗ и нуль модульного выражения в ответ:



Ответ: $x \in \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{6};\frac{6}{7}\right] \cup \{8\}$.

9. Использование свойств монотонности функций

Решение примеров с использованием свойств монотонных функций основывается на следующих очевидных утверждениях.

Теорема 2. Пусть на промежутке (a,b) задана возрастающая функция $y=f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)<c$ (или $f(x)>c$). Если x_0 – корень уравнения $f(x)=c$, причем $a<x_0<b$, то решения данного неравенства – весь промежуток (a,x_0) (для неравенства $f(x)>c$ – соответственно промежуток (x_0,b)).

Единственность корня следует из монотонности функции $y=f(x)$. Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число x_0, а если функция задана на замкнутом или полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

Теорема 3. . Пусть на промежутке (a,b) задана возрастающая функция $y=f(x)$ и убывающая функция $y=g(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)>g(x)$. Если x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, лежащий на рассматриваемом промежутке, то решения данного неравенства – все числа из промежутка (x_0,b).

Пример 27. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3}+3\sqrt{3x-2}<15 .$$

Решение. ОДЗ данного неравенства: $x\geq\frac{2}{3}$. Заметим, что левая часть неравенства – возрастающая в ОДЗ функция. Угадываем, при каком значении x левая часть равна правой. Это будет при $x=6$ (в сформулированной выше теореме 1 $x_0=6$). Таким образом, с учетом ОДЗ можем утверждать, что, начиная со значения $x=\frac{2}{3}$ и, заканчивая значением $x=6$, левая часть неравенства будет меньше 15 (что и требуется по условию задачи), а после этого значения – больше 15.

Ответ: $x\in\left[\frac{2}{3};6\right)$.

Пример 28. Решить неравенство

$$\sqrt{x+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}-\sqrt{3}<\sqrt{x}-1 .$$

Решение. ОДЗ неизвестного – $x\geq 0$. Обе части неравенства – возрастающие функции, поэтому пока что теорема 3 неприменима. Преобразуем данное неравенство таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы 2. Для этого запишем его таким образом

$$\sqrt{x+x\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}}-\sqrt{x}<\sqrt{3}-1 .$$

Вынесем общий сомножитель $\sqrt{x}$ за знак левой части неравенства:

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-1\right)<\sqrt{3}-1 .$$

В полученном неравенстве справа – константа, а слева – возрастающая функция, равная произведению неотрицательных возрастающих функций. Осталось заметить, что при $x=1$ левая часть равна правой. Поэтому в силу высказанных выше утверждений, решением неравенства будет все множество допустимых значений x, меньших 1.

Ответ: $x\in[0;1)$.

10. Задания для самостоятельной работы

Простейшие неравенства

1. $\sqrt{x} < -3$ Отв.: $\varnothing$.

2. $\sqrt{x} > -1$ Отв.: $[0;\infty)$.

3. $\sqrt{5x} \le 0$ Отв.: $\{0\}$.

4. $\sqrt{7x} > 0$ Отв.: $(0;\infty)$.

5. $\sqrt{-x} \ge 0$ Отв.: $(-\infty;0]$.

6. $\sqrt{-3x} \le 0$ Отв.: $\{0\}$.

7. $\sqrt{-6x} < 0$ Отв.: $\varnothing$.

8. $\sqrt{2-x} > 0$ Отв.: $(-\infty;2)$.

9. $\sqrt{x+7} \ge 0$ Отв.: $[-7;\infty)$.

10. $\sqrt{1-4x} < 0$ Отв.: $\varnothing$.

11. $\sqrt[3]{x} > 0$ Отв.: $(0;\infty)$.

12. $\sqrt[3]{-x} < 0$ Отв.: $(0;\infty)$.

13. $\sqrt[3]{-4x} \ge 0$ Отв.: $(-\infty;0]$.

14. $x^3 - \sqrt{1+x} > x - \sqrt{1+x}$ Отв.: $(-1;0)\cup(1;\infty)$.

Метод возведения в степень

15. $\sqrt{4+3x-x^2} < 2$ Отв.: $[-1;0)\cup(3;4]$.

16. $\sqrt{4+3x-x^2}<-2$ Отв.: $\varnothing$.

17. $\sqrt{4+3x-x^2}>-2$ Отв.: $[-1;4]$.

18. $\sqrt{-x}<2$ Отв.: $(-4;0]$.

19. $\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}<3$ Отв.: $\left[-1;\dfrac{17}{10}\right)$.

20. $\sqrt{x^2+5x}<\sqrt{1+4x-x^2}$ Отв.: $\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$.

21. $\sqrt{2x^2+5x-6}>\sqrt{-x-3}$ Отв.: $\left(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{15}}{2}\right)$.

22. $x<\sqrt{2-x}$ Отв.: $(-\infty;1)$.

23. $x+1>\sqrt{x+2}$ Отв.: $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\infty\right)$.

24. $\sqrt{x^2-5x+4}<x-3$ Отв.: $[4;5)$.

25. $\sqrt{x^2-5x-24}>x-2$ Отв.: $(-\infty;-3]$.

26. $\sqrt{4+3x-x^2}<x-1$ Отв.: $(3;4]$.

27. $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$ Отв.: $(3;5]$.

28. $\sqrt{2x^2-8x+7}<x-2$ Отв.: $\left[2+\sqrt{\dfrac{1}{2}};3\right)$.

29. $2-3x<\sqrt{4+9x-9x^2}$ Отв.: $\left(0;\dfrac{4}{3}\right]$.

30. $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$ Отв.: $(2;\infty)$.

31. $\sqrt{x^2+4x-5}>2x-3$ Отв.: $(-\infty;-5]\cup\left[1;\dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$.

32. $\sqrt{5x-x^2-4}>2x-5$ Отв.: $\left[1;\frac{25+3\sqrt{5}}{10}\right)$.

33. $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}>5$ Отв.: $(5;\infty)$.

34. $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\le 4$ Отв.: $[-5;-4]\cup[4;5]$.

35. $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\le\sqrt{10-x}$ Отв.: $\{5\}$.

36. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+3}$ Отв.: $\left(\sqrt{\frac{28}{3}};\infty\right)$.

37. $\sqrt{x+4}>\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}$ Отв.: $(-3;1]$.

38. $\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{14x^2+23x+8}\le\sqrt{17x^2+25x+8}$ Отв.: $\left\{-\frac{8}{7}\right\}\cup\{0\}$.

39. $\sqrt{x+14}-\sqrt{x-2}\ge\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}$ Отв.: $[11;\infty)$.

40. $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-5}\le\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}$ Отв.: $[5;6]$.

41. $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-4}\le\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}$ Отв.: $[7;8]$.

42. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x-1}<1$ Отв.: $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

43. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$ Отв.: $(5;\infty)$.

44. $\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0$ Отв.: $\left[-\frac{15}{4};-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$.

45. $\sqrt[3]{\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}}<\sqrt[3]{\frac{6}{x-1}}$ Отв.: $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(1;5)$.

46. $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x}$ Отв.: $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}};\infty\right)$.

47. $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$

Отв.: $\left(\frac{17}{3};\infty\right)$.

48. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2+2x-3}>\sqrt{4x^2-6x+2}$ Отв.: $(5;\infty)$.

49. $\begin{cases}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}<4\\ \sqrt{\frac{3x-4}{8-x}}>1\end{cases}$ Отв.: $(3;8)$.

50. $\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}<4-x\\ \sqrt{x+2}>\sqrt{8-x^2}\end{cases}$ Отв.: $\varnothing$.

Неравенства, содержащие радикал четной степени в виде сомножителя

51. $(x-6)\sqrt{x}\ge 0$ Отв.: $\{0\}\cup[6;\infty)$.

52. $\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x+3}>0$ Отв.: $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$.

53. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$ Отв.: $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;7)$.

54. $\frac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x}\ge 0$ Отв.: $\left(-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup[1;10)$.

55. $\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$ Отв.: $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)$.

56. $(x-1)\cdot\sqrt{-x^2+x+6}\ge 0$ Отв.: $\{-2\}\cup[1;3]$.

57. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$ Отв.: $\{-1\}\cup[2;\infty)$.

58. $(x+8)\sqrt{x^2-5x+4}\le 0$ Отв.: $(-\infty;-8]\cup\{4\}\cup\{1\}$.

59. $\sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot(8x^2-6x+1)\geq 0$ Отв.: $\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

60. $(x^2+2x-24)\cdot\sqrt{x^2-4x-5}\geq 0$ Отв.: $(-\infty;-6]\cup\{-1\}\cup[5;\infty)$.

61. $(x^2+4x-5)\cdot\sqrt{x^2-4}\leq 0$ Отв.: $[-5;-2]\cup\{2\}$.

62. $(x^2-6x+5)\cdot\sqrt{x^2-10x+24}\geq 0$ Отв.: $(-\infty;1]\cup\{4\}\cup[6;\infty)$.

63. $(x^2-1)(x-3)(x+10)\cdot\sqrt{x-6}\geq 0$ Отв.: $[6;\infty)$.

64. $\sqrt{9x+\frac{1}{2x+1}}\cdot\left(9-25x^2\right)\geq 0$ Отв.: $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{6};\frac{3}{5}\right]$.

Введение дополнительной неизвестной

65. $x^2-\sqrt{x^2+4}-8\leq 0$ Отв.: $[-\sqrt{12};\sqrt{12}\,]$.

66. $2x^2-\sqrt{2x^2+1}-5\leq 0$ Отв.: [-2;2].

67. $x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+2}\leq 0$ Отв.: $\left[-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\right]$.

68. $\sqrt{x}-3\leq\frac{2}{\sqrt{x}-2}$ Отв.: $[0;1]\cup(4;16]$.

69. $\frac{2}{5\sqrt{x}-4}\leq\frac{1}{x-1}$ Отв.: $\left[\frac{1}{4};\frac{16}{25}\right)\cup(1;4]$.

70. $\frac{3}{5\sqrt{x}-3}\geq\frac{2}{x-1}$ Отв.: $\left[0;\frac{1}{9}\right]\cup\left(\frac{9}{25};1\right)\cup[9;\infty)$.

71. $\frac{1}{1-x}\leq\frac{4}{\sqrt{2x+3}}$ Отв.: $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]\cup(1;\infty)$.

72. $\frac{1}{\sqrt{10-x}}\geq\frac{1}{x+2}$ Отв.: $(-\infty;-2)\cup[1;10)$.

73. $\frac{1}{\sqrt{x-2}} \ge \frac{1}{10+x}$ Отв.: $(2;\infty)$.

74. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{3}{2}$ Отв.: $(-\infty;-1) \cup \left(\frac{5}{3};\infty\right)$.

75. $\sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}} - \frac{17}{4} + \sqrt{1-\frac{2}{3x+1}} \ge 0$ Отв.: $\left[-\frac{17}{45};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\frac{17}{45}\right]$.

76. $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \sqrt{1-\frac{2x}{2+x}} \ge \frac{10}{3}$ Отв.: $\left(-2;-\frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{8}{5};2\right)$.

77. $\sqrt{1-\frac{2}{x+1}} \ge \frac{5}{2} - \sqrt{1+\frac{2}{x-1}}$ Отв.: $\left[-\frac{5}{3};-1\right) \cup \left(1;\frac{5}{3}\right]$.

78. $\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-x+14} > 6$ Отв.: $(-\infty;-1) \cup (2;\infty)$.

79. $\sqrt{x^2-5x+4} + \sqrt{x^2-5x+20} \ge 4$ Отв.: $(-\infty;1] \cup [4;\infty)$.

80. $\sqrt{2x^2-x+3} - \sqrt{2x^2-x-5} \ge 2$

Отв.: $\left[-\frac{3}{2};\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{41}}{4};2\right]$.

81. $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$ Отв.: $(-2;-1] \cup \left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

82. $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} > 0$ Отв.: $(-\infty;-4) \cup (1;\infty)$.

83. $2x^2 - \sqrt{(x-3)(2x-7)} < 13x+9$ Отв.: $(-1;3] \cup \left[\frac{7}{2};\frac{15}{2}\right)$.

84. $\sqrt{2x(x+3)-1} \ge 2-x^2-3x$

Отв.: $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\infty\right)$.

85. $\sqrt{2x(x+2)-3} \ge 3-2x-x^2$

Отв.: $\left(-\infty;-1-\sqrt{3}\,\right]\cup\left[-1+\sqrt{3};\infty\right)$.

86. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$ Отв.: $\left(1;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

87. $\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{4}}>\dfrac{2}{x}-1$ Отв.: $\left[-\dfrac{4}{\sqrt{3}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right]$.

88. $\sqrt{25-x^2}\le\dfrac{12}{x}$ Отв.: $(0;3]\cup[4;5]$.

89. $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}}\ge\dfrac{7}{x+4}\cdot\sqrt{\dfrac{x+4}{x+5}}$. Отв.: $(-\infty;-5)\cup[4;\infty)$.

90. $-2(x+1)>(x+2)\left(\sqrt{x+1}-x-2\right)$ Отв.: $[-1;0)\cup(0;\infty)$.

91. $(x+1)^2<4\sqrt{x}\left(x+3\sqrt{x}+1\right)$ Отв.: $\left(17-2\sqrt{2};17+2\sqrt{2}\right)$.

92. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$ Отв.: $(1;2)\cup(10;\infty)$.

93. $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt{x-2}>1$ Отв.: $(2;3)\cup(11;\infty)$.

94. $\sqrt{x^2-5x+4}\ge 2x-\sqrt{19}-5$

Отв.: $(-\infty;-1]\cup\left[4;\dfrac{5}{2}+\dfrac{4\sqrt{19}+7}{6}\right]$.

95. $\sqrt{x^2+9x+14}\ge\sqrt{39}-9-2x$

Отв.: $\left[\dfrac{2\sqrt{39}}{3}-6;\infty\right)$.

Метод интервалов при решении иррациональных неравенств

96. $\left(\sqrt{3+x}+x-3\right)\cdot\left(\sqrt{5+4x}+x-4\right)\le 0$ Отв.: $\{1\}$.

97. $\dfrac{\sqrt{5+x^2}+x-5}{x^2-4}<0$ Отв.: $(-\infty;-2)$.

98. $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\le 0$ Отв.: (-1;2].

99. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}-6}>0$ Отв.: $[0;1)\cup(4;\infty)$.

100. $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6}>0$ Отв.: $[0;4)\cup(9;\infty)$.

101. $(x-3)\cdot\sqrt{x^2+4}\le x^2-9$ Отв.: $\left(-\infty;-\dfrac{5}{6}\right]\cup[3;\infty)$.

102. $(x^2-4x+3)\cdot\sqrt{x+1}\le x^2-2x-3$ Отв.: $\{-1\}\cup\{3\}$.

103. $x^2\ge x\cdot\left(4+\sqrt{24-2x-x^2}\right)$ Отв.: $[-6;0]\cup\{4\}$.

104. $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$ Отв.: $\left[-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{5}{2}\right]$.

105. $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}<4$ Отв.: $\left[\dfrac{3}{2};2\right)\cup(2;26)$.

106. $\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}>-\dfrac{1}{3}$ Отв.: $(-2;1)\cup(1;\infty)$.

107. $\dfrac{1}{\sqrt{6-2x}+x}\le\dfrac{1}{3}$ Отв.: $\left(-\infty;-1-\sqrt{7}\right)\cup[1;3]$.

108. $\dfrac{1}{\sqrt{6-3x}+x}\ge\dfrac{1}{2}$ Отв.: $\left(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2};-1\right]\cup\{2\}$.

109. $\dfrac{2x+\sqrt{x+2}}{2x-\sqrt{x+2}}\ge 1$ Отв.: $\{-2\}\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{8};\infty\right)$.

110. $\dfrac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4}<\dfrac{1}{2}$ Отв.: $(-\infty;-4)\cup\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{8}{7}\right)$.

111. $\dfrac{2x+3}{\sqrt{6x^2+7x-3}}<2$ Отв.: $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{10};\infty\right).$

112. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$ Отв.: $[-6;0)\cup(3;4].$

113. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$ Отв.: $\left[-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right).$

114. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\dfrac{3}{2}$ Отв.: $\left(\dfrac{12}{25};\dfrac{1}{2}\right].$

115. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geq\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$ Отв.: $[-2;-1]\cup\{3\}.$

116. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$ Отв.: $[-2;0)\cup(0;2].$

117. $\sqrt{\dfrac{25-x^2}{x+4}}+\sqrt{x+4}>\dfrac{6}{\sqrt{x+4}}$ Отв.: $\left(\dfrac{2-\sqrt{46}}{2};5\right].$

118. $\sqrt{\dfrac{16-x^2}{x+3}}+\sqrt{x+3}>\dfrac{4}{\sqrt{x+3}}$ Отв.: $\left(\dfrac{1-\sqrt{31}}{2};4\right].$

119. $\sqrt{x^3+5x^2+14x+16}\geq x^2+3x+2$ Отв.: $[-2;1].$

120. $\dfrac{(x^2-1)\cdot\left(\sqrt{3+x^2}+2x\right)}{|x-2|-4x+3}\geq 0$ Отв.: {-1}.

121. $\dfrac{\left(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2\right)\cdot\left(|2x+3|-|3x+2|\right)}{(x^2-5x+4)\cdot\left(\sqrt{5+x}+1-x\right)\cdot\left(x^{99}-1\right)}\leq 0$

Отв.: $[-5;-1)\cup\{0\}\cup(1;4)\cup(4;\infty).$

122. $\dfrac{\left(\sqrt{7-x}+2x-8\right)\cdot\left(\sqrt{22+x}-x-2\right)\cdot\left(|2x+1|-3x\right)}{(x^2-x-6)\cdot\left(|3x+1|-|2x+4|\right)\cdot\left(x^{2006}-1\right)}\leq 0$

Отв.: [-22;-2).

Иррациональные неравенства, сводящиеся к модульным

123. $\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}+x}{x^2-3x+2}\ge 2$ Отв.: $\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left(2;\dfrac{9+\sqrt{33}}{4}\right]$.

124. $\dfrac{2\sqrt{9-18x+9x^2}+x}{x^2-10x+24}\le 1$ Отв.: $(-\infty;2]\cup(4;6)\cup[15;\infty)$.

125. $\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}-x}{x^2-3x+2}\ge 3$ Отв.: $\left(1;\dfrac{4}{3}\right]$.

126. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\dfrac{3}{2}$ Отв.: $[1;\infty)$.

127. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\le 1$ Отв.: $[5;10]$.

128. $\sqrt{x+28-10\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+67-16\sqrt{x+3}}\ge\dfrac{5}{3}\sqrt{|x+3|}$

Отв.: $\left[-3;\dfrac{1158}{121}\right]\cup[1518;\infty)$.

129. $\sqrt{(2x+1)^2}<x+5$ Отв.: (-2;4).

130. $\sqrt{(3x-2)^2}>x+6$ Отв.: $(-\infty;-1)\cup(4;\infty)$.

131. $\sqrt{(x^3-2)^2}>x-\sqrt[3]{2}$ Отв.: $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};\infty\right)$.

132. $\sqrt{x^4-8x^2+16}>2-x$ Отв.: $(-\infty;-3)\cup(-1;2)\cup(2;\infty)$

133. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$ Отв.: $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$.

134. $\sqrt{1-4x+4x^2}\le\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ Отв.: $[0;2]$.

135. $\sqrt{x^2 - \frac{6x^2}{|x|} + \frac{3}{tg^2 30^0}} < \frac{1}{2}\sin^2 30^0$ Отв.: $\left(-\frac{25}{8};-\frac{23}{8}\right)\cup\left(\frac{23}{8};\frac{25}{8}\right)$.

136. $\sqrt{9x^2 - 6x + x^0} > \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ Отв.: $(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};\infty\right)$.

137. $ctg77^0 \cdot ctg13^0 + \sqrt{x^2\cos 60^0 \sin 30^0} - x^2\cos 60^0 \le 0$

Отв.: $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$.

138. $tg5 \cdot ctg(\pi - 5) + x\sin 30^0 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} < 1$

Отв.: $\left(2;\frac{10}{3}\right)$.

Иррациональные неравенства, содержащие знак модуля

139. $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \ge 0$ Отв.: $[-\sqrt{3};0)\cup(0;2]$.

140. $\sqrt{x^2-1} + \frac{|x|}{x} \le 1$ Отв.: $[-\sqrt{5};-1]\cup\{1\}$.

141. $\frac{x}{|x|} \le \sqrt{9-x^2}$ Отв.: $[-3;0)\cup(0;2\sqrt{2}]$.

142. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} \ge 0$ Отв.: $[-1;\sqrt[3]{4})$.

143. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{|x|-|x-2|} < 0$ Отв.: $(-\infty;-4)$.

144. $\left|2-\sqrt{x+2}\right| > x-2$ Отв.: $[-2;2)$.

145. $\left|\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right| \le 1$ Отв.: $[-2;\infty)$.

146. $\sqrt{x-3} \le 3-|x-6|$ Отв.: $\{3\}\cup[4;7]$.

147. $\sqrt{x-2}+|x-8| \le 6$ Отв.: $\{2\}\cup[3;11]$.

148. $\sqrt{x^2-5}+3 > |x-1|$ Отв.: $\left(-\infty;-\frac{9}{4}\right)\cup\left[\sqrt{5};\infty\right)$.

149. $3\sqrt{x^2+x-2} \ge |x+2|-1$ Отв.: $(-\infty;-2]\cup\left[\frac{-7+\sqrt{657}}{16};\infty\right)$.

150. $2\sqrt{x^2-x-2} \ge |x+1|-2$ Отв.: $(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1+\sqrt{28}}{3};\infty\right)$.

151. $\frac{\sqrt{2|x|-x^2+8}}{|x|} < 1$ Отв.: $\left[-4;\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};4\right]$.

152. $\frac{\sqrt{4|x|-x^2+5}}{|x|} < 1$ Отв.: $\left[-5;\frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt{14}}{2};5\right]$.

153. $\sqrt{9x+\frac{1}{2x+1}}\cdot\left(25-36x^2\right)\cdot|x-7| \ge 0$

Отв.: $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]\cup\left[-\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right]\cup\{7\}$.

154. $\frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \le \sqrt{4x-3}$ Отв.: $\left(\frac{3}{4};7\right]$.

155. $x-\sqrt{1-|x|} < 0$ Отв.: $\left[-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

156. $\sqrt{5-|x+1|} \le 2+x$ Отв.: $[0;4]$.

157. $3\sqrt{x^2+|x|-2} \ge 1-x$ Отв.: $\left(-\infty;\frac{7-\sqrt{657}}{16}\right]\cup[1;\infty)$.

158. $2\sqrt{x^2-|x|-2} \ge x-2$ Отв.: $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$.

159. $\sqrt{5-x^2}<\dfrac{2}{|x|}$ Отв.: $[-\sqrt{5};-2)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;\sqrt{5}]$.

Использование свойств монотонности функций

160. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}<6$ Отв.: $[1;5)$.

161. $x^5+2x^4+\sqrt{x}>4$ Отв.: $(1;\infty)$.

162. $x^{15}+3\cdot\sqrt[4]{x-1}\geq 1$ Отв.: $[1;\infty)$.

163. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}$ Отв.: $[3;16]$.

Разные неравенства

164. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{2x+1}-1$ Отв.: $\left(0;\dfrac{45}{8}\right)$.

165. $6\cdot\left(\sqrt{8+x}-\sqrt{5-x}\right)\leq\sqrt{(8+x)(5-x)}$ Отв.: $[-8;1]$.

166. $\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}\geq\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{(7-x)(3+x)}$ Отв.: $[-3;-2]$.

167. $\sqrt{3-x}-\sqrt{2+x}\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{(3-x)(2+x)}$ Отв.: $[-1;3]$.

168. $\sqrt{x+7}-1<\sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}$

Отв.: $\left[-7;-6+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$

169. $\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$

Отв.: $\left[-5;-4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$.

170. $x^2 \geq 2x + \sqrt{x^2 + 3x^3 - x^4}$

Отв.: $\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};0\right] \cup \left[3;\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.

171. $(x+5)^2 \geq x + 5 + \sqrt{(x+5)^2 \cdot (2x^2 + 4x - 5)}$

Отв.: $\{-5\} \cup \left[-3;\frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{14}}{2};7\right]$.

172. $\sqrt{x^3 + x^2 - 4x + 1} \geq |x-2|$ Отв.: $[\sqrt[3]{3};\infty)$.

173. $\sqrt{5 + x^2 - \sqrt{x-2}} \geq x + 1$ Отв.: $\{2\}$.

174. $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2 \cdot \sqrt{x(x+7)} < 35 - 2x$ Отв.: $\left[0;\frac{841}{144}\right)$.

175. $2 \cdot \sqrt{x(x-77)} - \sqrt{x} - \sqrt{x-77} < 187 - 2x$ Отв.: $[77;81)$.

176. $x \cdot \sqrt{17 - x^2} \geq x^2 - 12$ Отв.: $\left[-\frac{3}{\sqrt{2}};4\right]$.

177. $x \cdot \sqrt{10 - x^2} \geq x^2 - 6$ Отв.: $[-\sqrt{2};3]$.

178. $\frac{\sqrt{1-x^3} - 1}{1+x} \leq x$ Отв.: $[-2;-1) \cup [0;1]$.

179. $\frac{\sqrt{1+x^3} + x - 2}{x-1} \geq x + 1$ Отв.: $[-1;0] \cup (1;2]$.

180. $\sqrt{x^3 + x^2 - 2x + 1} \leq x$ Отв.: $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$.

190. $\sqrt{x^3 + 3x} > x^2 - 6x + 3$ Отв.: $\left(\frac{9-\sqrt{69}}{2};\frac{9+\sqrt{69}}{2}\right)$.

191. $2 \cdot \sqrt{x^3 + 4x} > x^2 - 8x + 4$ Отв.: $(8-\sqrt{60};8+\sqrt{60})$.

192. $\sqrt{9-\frac{9}{x}} < x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}$ Отв.: $\left[3;\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};\infty\right]$.

193. $(x-2)\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \geq x-1$ Отв.: $(-\infty;-1]\cup[3;\infty)$.

194. $(4-x)\sqrt{\frac{7-x}{4-x}} \geq -x-1$ Отв.: $(-\infty;4)\cup[7;\infty)$.

195. $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1`}{4} < \sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}$

Отв.: $\left[\frac{1}{2};7-2\sqrt{10}\right)\cup\left(7-2\sqrt{10};7+2\sqrt{10}\right)\cup\left(7+2\sqrt{10};\infty\right)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаян Э.Н. Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности. – Ростов-на-Дону: Изд-во «Феникс», 2004. – 480с.
2. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. 4-е изд., испр. – М.: Издательский отдел УНЦДО, ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 690с.
3. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – Київ: Рад. шк., 1991. – 224с.
4. Гайштут А.Г., Ушаков Р.П. Сборник задач по математике с примерами решений. – Киев: А.С.К., 2002. – 592с.
5. Гельфанд М.Б., Мануха А.С., Ушаков Р.П. Математика. Справочное пособие. – Киев: Вища школа, 1982. – 464с.
6. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983. – 384с.
7. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Иррациональные уравнения // «Квант». – 2001. – №5. – С. 42–45.
8. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Монотонные функции в конкурсных задачах. // «Квант». – 2002. – №6. – С. 34–40.
9. Иванов О.А. Задачи по алгебре и началам анализа. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 384с.
10. Кононов Ю.Н., Солонский Ю.Н., Шалдырван В.А. Как подготовиться к вступительным экзаменам в вуз. Донецк: ДНУ, 1995. – 128с.
11. Кушнір І. Задачі з однією підказкою. – Київ: ФАКТ, 2003. – 176с.
12. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия. – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век": ООО "Издательство "Мир и Образование", 2005. – 464с.
13. Лунгу К.Н. Тесты по математике для абитуриентов. – М.: Абрис-пресс, 2004. – 352с.
14. Математика для поступающих в вузы. Учебное пособие / Бондаренко М.Ф. и др.; Под ред. Семенца В.В. – Харьков, ХТУРЭ. – 1120с.
15. Математика: сборник задач с решениямидля поступающих в вузі / Н.В. Мирошин и др.; под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. – М.: АСТ: Астрель, 2005. – 829с.
16. Материалы вступительных экзаменов. Задачи по физике и математике / Егоров А.А. и др..; Под ред. Розова Н.Х. и Стасенко А.Л. – М.: Бюро Квантум, 1993. – 320с.

17. Махров В.Г., Махрова В.Н. Новый репетитор по математике для старшекласников и абитуриентов. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 2004. – 544с.
18. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 320с.
19. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / Кравцов С.В. и др. – М.: Издательство "Экзамен", 2005. – 544с.
20. Назаретов А.П. 1000 задач по математике для поступающих в вузы. – М.: Аквариум, 2001. – 416с.
21. Нестеренко Ю.В., Олейник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. – М.: Наука. Главная ред.. физ.-мат. литературы, 1983. – 448 с.
22. письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике. . – М.: Айрис-пресс, 2004. – 320с.
23. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Бортаковский А.С. и др.; Под ред. Молодожниковой Р.Н. – М.: Изд-во МАИ, 1995. – 464с.
24. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Егерев В.К. и др.; Под ред. Сканави М.И. – Киев: Канон, 1997. – 528с.
25. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / Довбыш Р.И. и др.– Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336с.
26. Сборник тренировочных задач по математике от простых до самых сложных. Методические материалы для слушателей школ инженерного резерва дистанционного обучения ДонНТУ. – Донецк, 2006. – 99с.
27. Суконник Я.Н. Математические задачи повышеннной трудности. Пособие для учителей. – Киев: Рад. Шк., 1985. – 176с.
28. Титаренко А.М., Роганин А.Н. Форсированнiй курс школьной математики. – Х.: Торсинг, 2005. – 448с.
29. Титаренко О.М. 5770 задач з математики. – Харків: Торсінг, 2004. – 336с.
30. Улитин Г.М., Мироненко Л.П. Математика. Методическое пособие для абитуриентов. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – 330с.
31. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс підготовки к екзамену. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 420с.
32. Шарыгин И.Ф. Математика. Для поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1997. – 416с.
33. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1989. – 252с.
34. Ярский А.С. Уравнения, которые «не решаются» // «Квант». –

1998. – №3. – С. 47–49.
35. 3000 конкурсных задач по математике / Куланин Е.Д. и др.; Под ред. Бобылева Н.А. – М.: Рольф, 1997. – 608с.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Иррациональные неравенства»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Леонид Петрович Вовк

Подписано к печати Тираж 200
Усл. печ. листов. 3,51
Заказ 4-07 Формат 70*90/16

АДИ ГВУЗ ДонНТУ

84646 г. Горловка, ул. Кирова, 51