МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

АДІ
ДонНТУ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Алгебраические уравнения»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Горловка 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Алгебраические уравнения»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Утверждено на заседании
учебно-методической комссии
автодорожного института ДонНТУ
протокол №3 от 12.12.2006г.

Утверждено на заседании
кафедры «Высшая математика»
протокол № 8 от 06.12.2006г.

Горловка 2007

УДК 510(075)

Учебное пособие по теме «Алгебраические уравнения» для слушателей подготовительных курсов автодорожного института ДонНТУ / Сост. Вовк Л.П. – Горловка: АДИ ДонНТУ, 2007. – 81с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки абитуриентов по одной из базовых тем элементарной математики. Представлены систематизированные по типам и уровням сложности алгебраические уравнения, большинство из которых предлагались на вступительных экзаменах, собеседованиях и рейтинговых испытаниях в ДонНТУ в течение нескольких последних лет.

Составитель Л.П.Вовк, проф., д.т.н.

Компьютерный набор Л.П.Вовк, проф., д.т.н.

Рецензент Н.С. Тю, проф., д.ф.-м.н.

Ответственный за выпуск Л.П.Вовк, проф., д.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебраические уравнения. Общие сведения...……………..4
Рациональные уравнения……………………………………..7
Методы решения алгебраических уравнений……………………..……………………………..9
1. Преобразование алгебраических выражений……………..9
2. Метод разложения на сомножители…….…..………………10
2.1. Терема Безу и ее следствия...………………………..……...11
2.2. Метод группировки………………………….…..…………19
2.3. Применение формул сокращенного умножения……….24
2.4. Специфическая структура уравнения………….……….31
2.5. Решение уравнений относительно коэффициентов..…..32
2.6. Метод неопределенных коэффициентов…….……………34
3. Применение общих формул и методов решения рациональных уравнений 3-й и 4-й степени...………………....38
4. Метод введения новой переменной…….…………………43
4.1. Простейшая замена переменной………………………...44
4.2. Дробно-рациональная замена переменной……………..46
4.3. Возвратно-симметрические уравнения…………………47
4.4. Однородные уравнения…………………………………..50
4.5. Метод дополнения до полного квадрата………………..52
4.6.Уравнения вида $(x+a)^4+(x+в)^4=c$ и $(x+a)^5–(x+в)^5=c$……..53
5. Метод выделения целой части…………………………..54
6. Использование теоремы о пределе монотонной последовательности……………………………………………...55
7. Использование свойств монотонных функций…………...56
8. Метод оценок……………………………………………..57
Задания для самостоятельной работы………………………..60
Список рекомендованной литературы………………………78

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнением с одной переменной называется равенство, содержащее эту переменную. Чаще всего уравнение записывается в виде

$$f(x)=g(x).$$

В зависимости от характера функций $f(x)$ и $g(x)$ в элементарной математике рассматривают уравнение рациональное, иррациональное, тригонометрическое, показательное или логарифмическое. Если в уравнение входят различные типы функций, например тригонометрические и показательные, то его называют смешанным. Напомним некоторые общие понятия, связанные с решением всех типов уравнений.

Множество всех значений переменной x, при которых имеют смысл (определены) левая и правая части уравнения $f(x)=g(x)$, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) или *областью определения* уравнения и обозначается через D. Таким образом, областью допустимых значений уравнения $f(x)=g(x)$ называется множество $D(f)\cap D(g)$, где $D(f)$ и $D(g)$ – области допустимых значений функций $f(x)$ и $g(x)$.

Определенное значение переменной называется *корнем* или *решением* уравнения, если при подстановке его в уравнение получается тождество.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Если из истинности высказывания **A** следует истинность высказывания **B**, то употребляют знак логического следования $\Rightarrow$, т.е. $\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{B}$ (из **A** следует **B**). Если $\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{A}$, то такие высказывания называются *равносильными* или *эквивалентными*. Записывается это так: $\mathbf{A}\Leftrightarrow\mathbf{B}$.

Два уравнения называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают, т.е. любое решение первого уравнения является решением второго. И обратно, любое решение второго уравнения является решением первого. Другими словами равносильными будут

уравнения, которые имеют одни и те же корни. Отметим, что равносильными будут и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, равносильны уравнения $2^{x-3}=8$ и $\sqrt{x-2}=2$, т.к. каждое из них имеет единственный корень $x=6$.

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение, следующие: 1) перемена местами левой и правой частей уравнения; 2) перенос какого-либо слагаемого из одной части уравнения в другую с изменением его знака на противоположный; 3) умножение или деление обеих частей уравнения на отличное от нуля число; 4) добавление или вычитание из обеих частей уравнения одного и того же числа; 5) добавление или вычитание из обеих частей уравнения одной и той же функции при условии, что области определения полученного и исходного уравнения совпадают.

Если к обеим частям уравнения $3x^2+x=0$ добавить функцию $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, то получим уравнение $3x^2+x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$, которое неравносильно исходному, т.к. добавленное выражение имеет смысл не при всех x из ОДЗ уравнения, а только при значениях $x\neq 0$. Данное преобразование сузило ОДЗ уравнения, что может привести к потере корней. В данном случае значение $x=0$ является корнем исходного уравнения, но не является корнем преобразованного уравнения.

Если каждый корень уравнения $f(x)=g(x)$ является в то же время корнем уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, полученного с помощью некоторых преобразований из уравнения $f(x)=g(x)$, то уравнение $f_1(x)=g_1(x)$ называют *следствием уравнения* $f(x)=g(x)$. Так, уравнение $x^2+3x=0$ является следствием уравнения $x+3=0$, а уравнение $x+3=0$ не является следствием уравнения $x^2+3x=0$.

Если каждое из двух уравнений является следствием другого из них, то такие уравнения являются равносильными.

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если ставится задача об отыскании всех таких значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из заданных уравнений. Уравнения, образующие совокупность, записывают либо в столбик с помощью квадратной скобки, например $\left[\begin{array}{l} 6x = x^2 + 5 \\ 2x + 3 = 5x^2 \end{array}\right.$, либо в строку с помощью знака «;», например $6x = x^2 + 5$; $2x + 3 = 5x^2$.

Решением совокупности уравнений является объединение множеств корней уравнений, образующих данную совокупность. Например, уравнение $(x^2 + 4x - 12)(2x^2 + x - 3) = 0$ равносильно совокупности уравнений:

$$(x^2 + 4x - 12)(2x^2 + x - 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2 + 4x - 12 = 0 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Решая каждое из уравнений совокупности, получаем корни исходного уравнения: $x_1 = -6$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -\frac{3}{2}$.

При решении уравнений приходится также применять «опасные» преобразования, которые могут привести к появлению посторонних корней или даже к потере корней. Причиной этого могут быть преобразования, выполняемые с помощью формул, изменяющих ОДЗ уравнений. Чаще всего это происходит при возведении в квадрат (или в любую четную степень) обеих частей уравнения, умножение (или деление) обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную, и т.д.

Во всех случаях, когда преобразование, выполняемое в процессе решения уравнения, приводит к уравнению, являющемуся следствием заданного уравнения, но не установлена равносильность полученного и заданного уравнений, необходима проверка найденных корней. Решение в этом случае не может считаться законченным, если не сделана

проверка. Зачастую, однако, оказывается, что проверка корней оказывается сложнее решения уравнения. Например, это происходит, если найденные корни иррациональны. В этом случае необходимо провести доказательство равносильности выполняемых преобразований уравнения на всех этапах решения, т.е. определить «опасные» выкладки и обосновать их. Так, при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную, нужно исследовать те значения переменной, при которых это выражение обращается в нуль, а при возведении в четную степень обеих частей уравнения, необходимо потребовать перед этим преобразованием неотрицательности левой и правой части уравнения. Подробнее на этом остановимся далее при решении примеров.

Таким образом, решение уравнения обычно осуществляется в следующем порядке: 1) отыскивается ОДЗ уравнения; 2) исходное уравнение путем различного рода преобразований сводится к уравнению (чаще всего квадратному), корни которого могут быть найдены по известным формулам или по известному алгоритму. Находятся корни преобразованного уравнения; 3) проверяется принадлежность найденных корней к ОДЗ исходного уравнения; 4) выполняется проверка тех из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ.

Рациональные уравнения

Целое алгебраическое уравнение принято записывать в виде:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots a_n$ – заданные числа, x – неизвестное (переменная), n – степень алгебраического уравнения (наибольшая степень уравнения). Выражение $P(x)$ называют *многочленом степени n*, если коэффициент при старшей степени неизвестной не равен нулю $(a_0 \neq 0)$. Если $a_0 = 1$, то целое алгебраическое уравнение называется *приведенным*.

Уравнения, содержащие многочлены и алгебраические дроби (дроби вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены), называются *дробными алгебраическими уравнениями* или *дробно-рациональными уравнениями*.

При решении *линейного уравнения* $a \cdot x = b$ возможны три случая:

1) $a \neq 0$, тогда $x = \frac{b}{a}$ – единственный корень уравнения;
2) $a = 0, b = 0$, тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом *x*, т.е. ответом является $x \in R$
3) $a = 0, b \neq 0$, тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ называется *квадратным уравнением* с одной переменной. Его корни вычисляются по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения. Таким образом, квадратное уравнение имеет действительные корни только в случае $D \geq 0$.

Если $b = 2k$, $k \in Z$, т.е. b – четное число, то квадратное уравнение можно записать в виде $x^2 + 2kx + c = 0$. Тогда формулу для корней квадратного уравнения можно упростить и использовать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Наконец, если к тому же $a = 1$, то формулы для определения корней уравнения $x^2 + 2kx + c = 0$ еще более упрощаются и принимают вид

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}.$$

При решении квадратных уравнений возможно использование *теоремы Виета*: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Путем разложения на множители квадратное уравнение можно записать в виде:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Методы решения алгебраических уравнений

При решении целых алгебраических уравнений преобразования, выполняемые в процессе решения, приводят только к уравнениям, равносильным заданному. Поэтому найденные корни формально можно не проверять. При решении же дробно-рациональных уравнений вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ обе части уравнения умножают на одно и то же выражение $Q(x)$, что может привести к появлению посторонних корней. Поэтому при решении дробно-рациональных уравнений необходима либо проверка, либо, если она затруднительна, отслеживание опасных выкладок и исключение тех значений неизвестной, при которых $Q(x) = 0$.

Дадим полную классификацию методов решения рациональных уравнений.

1. Метод преобразования алгебраических выражений

Решение очень многих рациональных уравнений основано на удачной группировке и последующем приведении сгруппированных слагаемых к общему знаменателю. В более простых случаях группировка не требуется. При избавлении от общего знаменателя обе части уравнения по существу умножаются на функцию, содержащую неизвестную величину («опасная» выкладка!). В связи с этим возникает опасность получения посторонних решений, которая купируется либо проверкой, либо нахождением области допустимых значений (что, как правило, излишне), либо просто указанием соответствующих ограничений и дальнейшей проверкой их выполнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{x+1}{2x-1}+\frac{x}{x-3}=\frac{3x}{2x-10}.$$

Решение. ОДЗ находится легко, поэтому выпишем ограничения на неизвестную, при которых знаменатели дробей не обращаются в нуль

$$\begin{cases} x\in R \\ 2x-1\neq 0 \\ x-3\neq 0 \\ 2x-10\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in R \\ x\neq \dfrac{1}{2} \\ x\neq 3 \\ x\neq 5 \end{cases}$$

Теперь можно не сохранять общий знаменатель при проведении преобразований. Перенося все слагаемые в левую часть и умножая обе части уравнения на $(2x-1)(x-3)(2x-10)\neq 0$, получим:

$$(x+1)(x-3)(2x-10)+x(2x-1)(2x-10)-3x(2x-1)(x-3)=0,$$

$$2\left(x^2-2x-3\right)(x-5)+2\left(2x^2-x\right)(x-5)-3\left(2x^2-x\right)(x-3)=0,$$

$$2(x-5)\left(x^2-2x-3+2x^2-x\right)-3\left(2x^3-7x^2+3x\right)=0,$$

$$6(x-5)\left(x^2-x-1\right)-3\left(2x^3-7x^2+3x\right)=0,$$

$$3\left(2\left(x^3-6x^2+4x+5\right)-\left(2x^3-7x^2+3x\right)\right)=0,$$

$$-5x^2+5x+10=0,$$

$$x^2-x-2=0,$$

$$x_1=-1;\quad x_2=2.$$

Оба решения принадлежат ОДЗ. Проверка формально не нужна, но ввиду того, что корни – целые числа, ее все же полезно сделать.

Ответ: $x_1=-1;\quad x_2=2$.

2. Метод разложения на сомножители

Данный метод состоит в том, чтобы, используя группировку слагаемых, а также формулы сокращенного умножения, привести исходное уравнение к виду, когда слева записано произведение сомножителей, а справа – нуль. Затем каждый из сомножителей приравнивается к нулю, и путем решения простейших уравнений находятся корни исходного уравнения.

Другими словами, метод разложения на сомножители заключается в следующем: если $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)$, то всякое решение уравнения

$$f(x)=0 \qquad (2.1)$$

является решением совокупности уравнений

$$f_1(x)=0;\quad f_2(x)=0;\quad \ldots;\quad f_n(x)=0 \qquad (2.2)$$

Представление уравнения (2.1) в виде (2.2) иногда называют факторизованным видом уравнения (2.1) (от английского слова «factor» – множитель).

Метод разложения на сомножители является одним из основных методов решения абсолютно всех типов уравнений. При решении рациональных уравнений реализация этого метода проходит либо формально при помощи теоремы Безу, если речь идет о нахождении рациональных корней, либо при помощи группировки отдельных групп слагаемых с целью нахождения общего сомножителя в этих группах.

2.1. Терема Безу и ее следствия

Теорема Безу находит применение не только при решении уравнений, но и в задачах, связанных с делимостью многочленов (нахождение остатка при делении многочленов, определение кратности многочленов и т.д.), с разложением многочленов на множители, с определением кратности корней и многих других .

Теорема 1 (теорема Безу). Остаток от деления полинома $P_n(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен значению этого полинома при $x=a$.

Следствие 1. Остаток от деления полинома $P_n(x)$ на двучлен $ax+b$ равен значению этого полинома при $x = -b/a$, т. е. $R=P_n(-b/a)$.

Следствие 2. Если число a является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на $(x-a)$ без остатка.

Следствие 3. Если многочлен $P(x)$ имеет попарно различные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то он делится на произведение двучленов $(x-\alpha_1)$ $(x-\alpha_n)$ без остатка.

Следствие 4. Многочлен степени n имеет не более n различных корней.

Следствие 5. Для любого многочлена $P(x)$ и числа α разность $(P(x)-P(\alpha))$ делится без остатка на двучлен $(x-\alpha)$.

Следствие 6. Число a является корнем многочлена $P(x)$ степени не ниже первой тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x-a)$ без остатка.

Следствие 7. Многочлен, не имеющий действительных корней, в разложении на множители линейных множителей не содержит.

Следствие 8. Если коэффициенты приведенного целого алгебраического уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

являются целыми числами, то целые корни следует искать среди делителей свободного члена a_n.

Пример 2. Найти остаток от деления многочлена $x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ на двучлен $x-2$.

Решение. По теореме Безу

$$R = P_3(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 5 = 3.$$

Ответ: R = 3 .

Пример 3. Найти остаток от деления многочлена четвертой степени $32x^4 - 64x^3 + 8x^2 + 36x + 4$ на двучлен $2x-1$.

Решение. Согласно следствию 1 из теоремы Безу

$$R = P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 32\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 64\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 36\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 18$$

Ответ: R = 18 .

Основное внимание при рассмотрении последующих задач рассмотрим решению целых алгебраических уравнений при помощи теоремы Безу. При этом будут использоваться следствия 2 и 3 из этой теоремы. Последовательность действий при этом формализована и содержит следующие этапы.

1. Находим целый корень x_1 при помощи перебора делителей свободного члена и подстановки их в уравнение.

2. Делим многочлен из левой части уравнения на двучлен $x - x_1$. Согласно следствию 6 после такого деления остаток будет равен нулю. Этот факт может служить контролем достоверности проводимых преобразований. Если остаток получается не равным нулю, то ошибку следует искать либо на этапе подбора корня, либо в процедуре деления многочлена на многочлен.

3. Частное от деления в предыдущем пункте – многочлен $(n-1)$-й степени. Возвращаемся к пункту 1 и аналогично ищем его корень.

4. Продолжаем процесс до того момента, когда полученный после деления многочлен не станет многочленом второй степени. Его корни находим, решая соответствующее квадратное уравнение.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0.$$

Решение.

1. Целые корни ищем среди делителей свободного члена, т.е. выбираем их из чисел ± 1; ± 2; ± 4; ± 8; ± 16. Подставляем поочередно эти числа в уравнение и определяем, что число $x_1 = -1$ обращает его в тождество, т.е. является корнем уравнения.

2. Делим данный многочлен на двучлен $x-(-1)=x+1$. Процедура деления многочлена на многочлен напоминает процедуру деления «в столбик» обычных чисел, только при подборе сомножителя в частном руководствуемся тем, чтобы в процессе вычитания сокращались только старшие степени x. Имеем:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3-8x^2+12x+16 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+x^3} & x^3-4x^2-4x+16 \\
\quad -4x^3-8x^2 & \\
\quad \underline{-4x^3-4x^2} & \\
\quad -4x^2+12x & \\
\quad \underline{-4x^2-4x} & \\
\qquad\qquad 16x+16 & \\
\qquad\qquad \underline{16x+16} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Тот факт, что остаток равен нулю, свидетельствует об отсутствии ошибок в преобразованиях.

3. Теперь уравнение перепишется в виде

$$(x+1)\left(x^3-4x^2-4x+16\right)=0.$$

Перебираем делители свободного члена в многочлене третьего порядка

$$P_3(x)=x^3-4x^2-4x+16.$$

Приходим к выводу, что следующий корень уравнения $x_2=-2$. Таким образом, можно записать, что

$$P_3(x)=x^3-4x^2-4x+16=(x+2)\cdot P_2(x)$$

Для определения $P_2(x)$ производим еще одно деление многочлена $P_3(x)$ на двучлен $(x+2)$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-4x^2-4x+16 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2-6x+8 \\
\quad -6x^2-4x & \\
\quad \underline{-6x^2-12x} & \\
\qquad\qquad 8x+16 & \\
\qquad\qquad \underline{8x+16} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

4. Собираем результаты. После подбора двух корней исходное уравнение принимает вид

$$(x+1)(x+2)\left(x^2-6x+8\right)=0$$

Осталось решить квадратное уравнение

$$x^2-6x+8=0.$$

Его корни: $x_3=2$ и $x_4=4$.

Ответ: $x_1=-2$; $x_2=-1$; $x_3=2$; $x_4=4$.

Реализация описанного алгоритма практически не претерпевает изменений при решении неполных уравнений. В этом случае в уравнении отсутствуют члены, содержащие некоторые степени неизвестной.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^3+5x^2-12=0.$$

Решение. Для формализации процесса деления «неполного» многочлена на двучлен можно представить его полным, учитывая, что коэффициент при соответствующей степени неизвестной равен нулю.

Для нашего примера имеем

$$x^3+5x^2-12=x^3+5x^2+0\cdot x-12$$

Проводим процедуру деления, учитывая, что значение $x=-2$ обращает многочлен в нуль. При этом следует особенно внимательно производить вычитание в процедуре деления «уголком» и контролировать процесс деления наличием нулевого остатка.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+5x^2+0\cdot x-12 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2+3x-6 \\
\quad 3x^2+0x & \\
\quad \underline{3x^2+6x} & \\
\qquad\quad -6x-12 & \\
\qquad\quad \underline{-6x-12} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Уравнение разбито на сомножители: $(x+2)(x^2+3x-6)=0$, приравниваем каждый из них нулю.

$$
\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x^2+3x-6=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.
$$

Ответ: $x_1=-2$; $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

Перейдем к процедуре определения рациональных корней целого алгебраического уравнения, у которого коэффициент при старшей степени неизвестной $a_0\neq 1$. В этом случае простое деление на этот коэффициент всего уравнения с целью сведения его к приведенному и последующему применению рассмотренной процедуры не приведет к цели, поскольку коэффициенты уравнения становятся дробными, что нарушает условия следствия 8 из теоремы Безу.

Умножим обе части исходного уравнения на a_0^{n-1}:

$$a_0^n x^n + a_1 a_0^{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0^{n-1} x + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Полученное уравнение после введения новой переменной $y=a_0 x$ принимает вид приведенного

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Если исходное уравнение имело рациональные корни, то полученное в терминах новой переменной y приведенное уравнение имеет целые корни, которые, как и ранее, следует

искать среди делителей свободного члена. Решив приведенное уравнение, возвращаемся к исходной переменной $x=\dfrac{y}{a_0}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$3x^3-7x^2+5x-1=0.$$

Решение. Умножаем обе части уравнения на 3^2. Имеем:

$$3^3x^3-7\cdot 3^2x^2+15\cdot 3x-9=0$$

Обозначим $y=3x$ и запишем уравнение в виде

$$y^3-7y^2+15y-9=0$$

Целые корни ищем среди делителей числа 9, т.е. среди чисел $\pm 1;\pm 3$. Имеем $y_1=1$. Находим частное от деления многочлена $y^3-7y^2+15y-9$ на $y-1$:

$$
\begin{array}{l|l}
y^3-7y^2+15y-9 & y-1 \\ \cline{2-2}
\underline{y^3-y^2} & y^2-6y+9 \\
\quad -6y^2+15y & \\
\quad \underline{-6y^2+6y} & \\
\qquad\quad 9y-9 & \\
\qquad\quad \underline{9y-9} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Таким образом, после разложения на сомножители решаем уравнение

$$(y-1)(y-3)^2=0,$$

которое имеет корни $y_1=1$ и $y_{2,3}=3$. Возвращаемся к переменной x и получаем решение исходного уравнения.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{3}$; $x_{2,3}=1$.

Уравнения, левая часть которых представляет собой многочлен с целыми коэффициентами и свободным членом, равным 1 или –1 (иногда 2 и –2), преобразуются в приведенные уравнения с помощью почленного деления на x в старшей степени и последующей замены $\frac{1}{x}=t$. Нетрудно установить, что такое деление не приводит к потере корней, так как $x=0$ не является корнем уравнения, свободный член которого отличен от нуля.

Пример 7. Решить уравнение

$$10x^3-3x^2-2x+1=0.$$

Решение. После деления на x^3 получаем

$$10-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0.$$

Полагая $\frac{1}{x}=t$, приходим у уравнению

$$t^3-2t^2-3t+10=0.$$

Находим методом подбора целый корень этого уравнения $t=-2$ и разделив многочлен $t^3-2t^2-3t+10$ на $t+2$, получим квадратный трехчлен t^2-4t+5, который действительных корней не имеет. Так как $x=\frac{1}{t}$, то $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

В более сложных случаях может быть полезна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть коэффициенты уравнения

$$\boldsymbol{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0}$$

$a_0,a_1,...,a_n$ являются целыми числами. Если несократимая дробь $x=\frac{p}{q}$ является корнем уравнения, то число p является делителем свободного члена a_n, а число q – делителем старшего коэффициента a_0.

Пример 8. Решить уравнение

$$3x^3+5x^2+8x+4=0.$$

Решение. Старший коэффициент уравнения равен трем, поэтому q может принимать значения $\pm1;\pm3$. Далее, свободный член уравнения равен четырем, т.е. в соответствии с теоремой 2, параметр p может принимать значения $\pm1;\pm2;\pm4$. Таким образом, рациональные корни уравнения следует искать среди чисел

$$\pm1;\ \pm2;\ \pm4;\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{4}{3},$$

Согласно теореме 2 никаких других рациональных корней данное уравнение иметь не может. Перебирая варианты, приходим к выводу, что $x=-\frac{2}{3}$ действительно обращает уравнение в тождество. Разделив «уголком» левую часть уравнения на $x+\frac{2}{3}$ (а еще лучше – на $3x+2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)$), получим

$$(3x+2)(x^2+x+2)=0.$$

Теперь легко убедиться, что $x=-\frac{2}{3}$ – единственный действительный корень уравнения.

Ответ: $x=-\frac{2}{3}$.

2.2. Метод группировки

Метод группировки слагаемых, как правило, применяется совместно с другими методами разложения на множители и чаще всего с методом вынесения за скобки. Суть метода состоит в том, что все слагаемые данного многочлена перегруппировываются таким образом, чтобы в каждой группе, возможно после вынесения общего множителя за скобки, образовалось бы одно и то же выражение. Это выражение можно вынести за скобки как общий для всех групп множитель.

Метод группировки может быть применен совместно с теоремой Безу. На первом этапе решения определяют подбором рациональный корень уравнения x_1. Тем самым определяется вид двучлена $(x-x_1)$, который можно вынести за знак всей левой части уравнения. После этого не представляет особого труда объединить в группы слагаемые левой части, которые содержат при разложении множитель $(x-x_1)$.

Если же целое алгебраическое уравнение не имеет рациональных корней, реализация алгоритма метода группировки сильно усложняется, но остается единственным способом решения.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^3-3x+2=0.$$

Решение. Распишем одночлен $-3x$, как $-3x=-x-2x$. Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$x^3-x-2x+2=0.$$

Теперь группируем:

$$x(x^2-1)-2(x-1)=0,$$

$$(x-1)(x(x+1)-2)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0\Rightarrow x_1=1, \\ x^2+x-2=0\Rightarrow x_2=-2, x_3=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=x_3=1, x_2=-2$.

Пример 10. Решить уравнение

$$x^4+x^3+3x^2+2x+2=0.$$

Решение. Попробуем какой-нибудь член уравнения представить в виде суммы нескольких слагаемых таким образом, чтобы осуществить группировку, позволяющую получить удачное разложение на сомножители. Положим $3x^2=x^2+2x^2$. Тогда получим

$$\left(x^4+x^3+x^2\right)+\left(2x^2+2x+2\right)=0.$$

И далее

$$x^2\left(x^2+x+1\right)+2\left(x^2+x+1\right)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2\right)=0$$

Задача сведена к решению совокупности уравнений

$$x^2+x+1=0; \qquad x^2+2=0.$$

Каждое из полученных квадратных уравнений имеет отрицательный дискриминант и поэтому действительных корней не имеет. Следовательно, не имеет решений и исходное уравнение.

Ответ: $x\in\varnothing$.

В следующей задаче для успешного решения необходимо увидеть общий сомножитель после операции приведения к общему знаменателю.

Пример 11. Решить уравнение

$$\frac{3x^2}{2x^2+1}+6x^2-10x+3=0.$$

Решение. Данное уравнение формально относится к классу дробно-рациональных уравнений. Поэтому предварительно находим его ОДЗ: $2x^2+1\neq 0$, т.е. $x\in R$.

Избавление от знаменателя и сведение задачи к целому алгебраическому уравнению с последующим применением рассмотренных выше стандартных методов требует большого количества преобразований. Например, только избавление от знаменателя существенно усложняет уравнение. К тому же, проводя эти выкладки, нужно быть уверенным в наличии как минимум двух рациональных корней исходного уравнения, что вовсе не обязательно.

Внимательное изучение условия должно навести на мысль позаимствовать из заключительных трех слагаемых левой части некоторое выражение. Данное преобразование должно преследовать две цели: во-первых, после его выделения желательно, чтобы оставшийся квадратный трехчлен упрощался или раскладывался на сомножители и, во-вторых, что более важно, после сложения этого выражения с дробью, в числителе образовывался тот же квадратный трехчлен.

Реализация этих действий потребует, очевидно, нескольких попыток. Приведем в решении нужный вариант.

Именно, заметим, что три заключительных слагаемых будут пропорциональны тройке, если мы представим линейное слагаемое в виде $-10x = -9x - x$. Теперь реализация приведенных выше рассуждений приведет к записи уравнения в виде

$$\left(\frac{3x^2}{2x^2+1} - x\right) + 6x^2 - 9x + 3 = 0.$$

Приводим выражение в скобках к общему знаменателю и выносим тройку из оставшихся членов уравнения:

$$\frac{3x^2 - 2x^3 - x}{2x^2+1} + 3\cdot\left(2x^2 - 3x + 1\right) = 0.$$

Теперь уже видно, что за знак левой части уравнения выносится общий сомножитель $2x^2 - 3x + 1$. Завершаем решение:

$$\frac{-x\left(2x^2-3x+1\right)}{2x^2+1} + 3\cdot\left(2x^2-3x+1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(2x^2-3x+1\right)\left(3 - \frac{x}{2x^2+1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\left(2x^2-3x+1\right)\left(6x^2-x+3\right)}{2x^2+1} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2-3x+1=0 \\ 6x^2-x+3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x \in \varnothing \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{1}{2}$.

В сложных уравнениях, где действия по группировке слагаемых далеко не очевидны, приходится предугадывать преобразования, как минимум на два шага вперед, чтобы увидеть общий сомножитель в левой части уравнения.

Пример 12. Решить уравнение

$$2x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Решение. Подбор корней уравнения по старшему коэффициенту и свободному члену займет много времени и ни к чему не приведет, поскольку данное уравнение рациональных корней не имеет.

Применяем метод группировки в «чистом» виде: объединяем в одну группу первое, третье и пятое, а во вторую – второе и четвертое слагаемое. Цель этого преобразования – выделить в этих группах слагаемых общий сомножитель, который является кваратным трехчленом. Имеем:

$$\left(2x^4 - 7x^2 + 6\right) + \left(4x^3 - 8x\right) = 0.$$

Выражение в первых скобках – биквадратный трехчлен. Обозначив $x^2 = z$, можно свести его к квадратному трехчлену и разложить на сомножители

$$2z^2 - 7z + 6 = (2z-3)(z-2)$$

Возвращаемся к переменной x и получаем разложение биквадратного трехчлена

$$2x^4 - 7x^2 + 6 = \left(2x^2-3\right)\left(x^2-2\right).$$

Теперь понятно, что нужно сделать со второй группой слагаемых – выделить сомножитель $\left(x^2-2\right)$. Имеем

$$\left(2x^2-3\right)\left(x^2-2\right) + 4x\left(x^2-2\right) = 0.$$

Остальные преобразования можно не комментировать:

$$\left(x^2-2\right)\left(2x^2-4x-3\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2=0 \\ 2x^2-4x-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\sqrt{2}; \\ x_{3,4} = \dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2};\ x_{3,4} = \dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$.

2.4. Применение формул сокращенного умножения

Довольно эффективно применяются при разложении многочлена на множители формулы сокращенного умножения. Полезно помнить следующие формулы:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a-b)(a+b)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), n \in Z$.

Пример 13. Решить уравнение

$$4 = 25(x^2 - 2x + 1)(x-2)^2$$

Решение. Этот пример характеризует большую роль формул сокращенного умножения при группировке слагаемых. Раскрытие скобок при решении данного примера приведет к сложному уравнению четвертого порядка, решение которого практически невозможно. К тому же подобная выкладка «уничтожит» структуру исходного уравнения. Если переписать уравнение в виде

$$2^2 = [5(x-1)(x-2)]^2,$$

то можно увидеть, что мы имеем уравнение вида

$$f^2(x) = g^2(x)$$

Этот тип уравнений будет достаточно часто встречаться в последующем. Решение предполагает перенесение всех слагаемых в одну часть и разложения ее на сомножители при

помощи формулы для разности квадратов. В общем случае имеем

$$f^2(x) - g^2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$$

Таким образом, получены готовые формулы для рассматриваемого типа уравнений:

$$f^2(x) = g^2(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Вернемся к нашему примеру и конкретизируем для него функции $f(x) = 2$ и $g(x) = 5(x^2 - 3x + 2)$. Имеем

$$(2 - 5(x^2 - 3x + 2)) \cdot (2 + 5(x^2 - 3x + 2)) = 0,$$

$$(-5x^2 + 15x - 8) \cdot (5x^2 - 15x + 12) = 0$$

Равенство нулю первого сомножителя дает корни $x_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{65}}{10}$. Второй сомножитель имеет отрицательный дискриминант и действительных корней не имеет.

Для формального обоснования решения нужно сделать проверку, но, поскольку она очень сложна, то убеждаемся в равносильности всех преобразований, находим ОДЗ: $x \in R$ и записываем ответ.

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{65}}{10}$.

Левая часть формулы разности квадратов может быть «скрыта» в условии. Особенно трудно привести уравнение к виду $f^2(x) = g^2(x)$, если в качестве функций $f(x)$ и (или) $g(x)$ подразумеваются квадратные трехчлены. В этом случае придется делать, скорее всего, несколько попыток подбора указанных функций.

Пример 14. Решить уравнение

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 22x - 23 = 0.$$

Решение. Прежде всего, при решении этого уравнения нужно попробовать подобрать рациональные корни уравнения. Свободный член имеет всего четыре делителя (± 1 и ± 23), поэтому эти попытки займут мало времени, однако к успеху не приведут. Далее ориентируясь на выражение x^4-2x^3, можно сделать попытку дополнить его до полного квадрата $\left(x^2-x\right)^2=x^4-2x^3+x^2$, вычитая и добавляя x^2. Например,

$$\left(x^4-2x^3+x^2\right)+x^2-22x-23=0\text{, т.е.,}$$

$$\left(x^2-x\right)^2=-\left(x^2-22x-23\right).$$

Наши ожидания не оправдались: правая часть выписанного уравнения не сводится к полному квадрату. Расширим поле поиска функций $f(x)$ и $g(x)$, взяв в качестве одной из них квадратный трехчлен. Сделав несколько попыток, остановимся на трехчлене x^2-x+2. Действительно, возведем этот трехчлен в квадрат, чтобы выделить этот квадрат в левой части уравнения. Имеем

$$\left(x^2-x+2\right)^2=\left(\left(x^2-x\right)+2\right)^2=x^4-2x^3+x^2+4\left(x^2-x\right)+4=$$
$$=x^4-2x^3+5x^2-4x+4$$

Ориентируясь на полученное выражение, перепишем исходное уравнение в виде

$$x^4-2x^3+\left(5x^2-3x^2\right)-\left(4x+18x\right)+4-27=0.$$

Таким образом,

$$x^4-2x^3+5x^2-4x+4=3x^2+18x+27.$$

Цель достигнута: уравнение можно представить в нужном виде, а именно

$$\left(x^2-x+2\right)^2=\left(\sqrt{3}(x+3)\right)^2.$$

Заканчиваем решение:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-2=\sqrt{3}(x+3) \\ x^2+x-2=-\sqrt{3}(x+3) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-2-\sqrt{3}(x+3)=0 \\ x^2+x-2+\sqrt{3}(x+3)=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x-\left(2+3\sqrt{3}\right)=0 \\ x^2-\left(\sqrt{3}+1\right)x+\left(3\sqrt{3}-2\right)=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{3}-1\pm\sqrt{11+10\sqrt{3}}}{2} \\ x\in\varnothing\ (D<0) \end{array}\right. .$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{3}-1\pm\sqrt{11+10\sqrt{3}}}{2}$.

В следующем примере иллюстрируется применение формулы для разности кубов.

Пример15 . Решить уравнение

$$x^3+2x-4\sqrt{2}=0.$$

Решение. Представляем свободный член уравнения в виде $-4\sqrt{2}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}$. Тогда, имея в виду формулу для разности кубов, возможно сгруппировать члены уравнения таким образом

$$\left(x^3-2\sqrt{2}\right)+2\left(x-\sqrt{2}\right)=0.$$

Дальнейшие преобразования очевидны:

$$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)+2\left(x-\sqrt{2}\right)=0,$$

$$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+4\right)=0$$

Второй сомножитель в нуль не обращается (отрицательный дискриминант).

Ответ: $x=\sqrt{2}$.

Гораздо сложнее увидеть в условии структуру формул для куба суммы или куба разности. Задачи такого рода относятся к усложненным, поскольку догадаться по структуре уравнения о применении этих формул или можно только хорошо ориентируясь в методах решения алгебраических уравнений. Все же полезно написать формулы для $(x\pm1)^3$, $(x\pm2)^3$, $(x\pm3)^3$ и увидеть их составляющие в условии задачи.

Если же удастся свести уравнение к виду $f^3(x)=g^3(x)$, то его решение элементарно и имеет вид $f(x)=g(x)$.

Иллюстрацию решений подобных задач начнем с примеров наиболее простой структуры.

Пример 16. Решить уравнение

$$28x^3+3x^2+3x+1=0.$$

Решение. Запишем формулу $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$. Видим, что уравнение содержит в левой части выражение $3x^2+3x+1$, присутствующее и в приведенной формуле. Не достает только слагаемого x^3. Позаимствуем его из слагаемого $28x^3$. Последующие преобразования комментариев не требуют:

$$27x^3+\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=0\Rightarrow$$
$$(x+1)^3=(-3x)^3\Rightarrow$$
$$x+1=-3x\Rightarrow$$
$$4x=-1\Rightarrow$$
$$x=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x=-\dfrac{1}{4}$.

Пример 17 . Решить уравнение

$$x^3+x^2+\frac{1}{3}x+4=0.$$

Решение. Первые три слагаемых в левой части уравнения напоминают структуру формулы куба суммы. Воспользуемся этим для построения алгоритма решения. Вначале умножаем обе части на три:

$$3x^3+3x^2+x+12=0.$$

Приравниваем степени коэффициентов и неизвестных так, как мы это делали при решении целых алгебраических уравнений для случая $a_0\neq1$. Именно, еще раз умножаем обе части на 3^2:

$$\left(3^3x^3\right)+3\cdot\left(3^2x^2\right)+3\cdot(3x)+108=0.$$

Наконец, пришло время выделить полный куб суммы, добавляя и вычитая единицу:

$$\left(3^3x^3\right)+3\cdot\left(3^2x^2\right)+3\cdot(3x)+1+107=0\Rightarrow$$
$$(3x+1)^3=-107.$$

Извлекаем кубический корень из обеих частей уравнения и решаем полученное уравнение относительно x:

$$3x+1=-\sqrt[3]{107}\qquad\Rightarrow\qquad x=-\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{107}+1\right).$$

Ответ: $x=-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{107}+1\right)$.

В следующей задаче, несмотря на идентичность идеи решения, реализация ее происходит намного сложнее.

Пример 18. Решить уравнение

$$x^3+9x^2-18x+12=0.$$

Решение. Рациональных корней данное уравнение не имеет, в чем можно убедиться, перебирая делители числа 12. Группировка слагаемых также к цели не приводит. Попробуем выделить в одной из частей уравнения полный куб разности. Предпосылки для этого есть: левая часть уравнения немного напоминает формулу для куба суммы. Однако, сходу выделение куба суммы в левой части уравнения к цели не приводит. Например, напрашиваются следующие преобразования, выделяющие куб двучлена $(x+3)^3$:

$$x^3+9x^2+27x+27=45x+15\Rightarrow$$
$$(x+3)^3=15(3x+1).$$

Видим, что правая часть уравнения при данных преобразованиях не отвечает нашим ожиданиям и не может быть сведена к кубу двучлена.

Вернемся к исходному уравнению и попробуем выделить в нем куб разности. Поскольку в формуле для куба разности двух чисел знаки чередуются, то первое, что нужно сделать – это продублировать нужное сочетание знаков в указанной формуле, в соответствии с которой коэффициент при

x^2 должен быть отрицательным и далее с уменьшением показателя степени чередоваться. Такого сочетания знаков мы добьемся, если перенесем в правую часть второе, третье и четвертое слагаемые. Имеем

$$x^3 = -9x^2 + 18x - 12\,.$$

В правой части выписанного уравнения не хватает первого слагаемого, содержащего x^3, и число –12 не является кубом никакого числа. Начнем со второго несоответствия, поскольку слагаемое, содержащее x^3, можно всегда добавить в левую и правую часть уравнения, что мы и сделаем позднее. Итак, ближайшее к –12 число, представляющее собой куб, это –8. Сделаем преобразование правой части таким образом, чтобы она содержала –8. Учитываем, что $-12 = \frac{3}{2}\cdot(-8)$ и записываем наше уравнение в виде

$$x^3 = \frac{3}{2}\left(-6x^2 + 12x - 8\right) \text{ или } 2x^3 = 3\left(-6x^2 + 12x - 8\right).$$

Теперь подошла очередь выписать формулу для полного куба разности $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ и увидеть в ней слагаемые, присутствующие в правой части нашего уравнения. Остается дополнить правую часть недостающим слагаемым, содержащим x^3. Для этого добавляем в левую и правую части уравнения слагаемое $3x^3$. Имеем:

$$5x^3 = 3\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) \Rightarrow$$

$$5x^3 = 3(x-2)^3.$$

Цель достигнута: уравнение приведено к виду $f^3(x) = g^3(x)$, а именно

$$\left(\sqrt[3]{5}\cdot x\right)^3 = \left(\sqrt[3]{3}\cdot(x-2)\right)^3.$$

Таким образом,

$$\sqrt[3]{5}\cdot x = \sqrt[3]{3}\cdot(x-2).$$

Отсюда находим x:

$$x = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}}$$

Ответ: $x = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}}$.

2.4. Специфическая структура уравнения

В сложных алгебраических уравнениях зачастую очень трудно провести удачную группировку слагаемых. В этом случае, возможно, уравнение имеет специфическую структуру, позволяющую провести либо специальную группировку слагаемых, либо специальную замену переменных (об этом речь будет идти ниже при рассмотрении возвратно-симметрических уравнений).

Теорема 3. Если в уравнении

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

выполняется следующие зависимости между коэффициентами

$$a+b=b+c+d=d+e,$$

то левая часть уравнения раскладывается на множители, одним из которых будет x^2-x+1, а второй находится делением левой части уравнения на x^2-x+1.

Пример 19. Решить уравнение

$$2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0\,.$$

Решение. Проверка условий теоремы 2 о существовании рациональных корней позволяет сделать вывод о том, что данное уравнение рациональных корней не имеет.

Проверим выполнение условий теоремы 3. В нашем уравнении коэффициенты при неизвестных равны

$$a = 2,\ b = 1,\ c = -4,\ d = 6,\ e = -3\,.$$

Соотношение из теоремы 3 выполняется, поэтому левая часть уравнения нацело делится на трехчлен $x^2 - x + 1$. Производим процедуру деления уголком

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+\ x^3-4x^2+6x-3 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-2x^3+2x^2} & 2x^2+3x-3 \\
\qquad 3x^3-6x^2+6x & \\
\qquad \underline{3x^3-3x^2+3x} & \\
\qquad\qquad -3x^2+3x-3 & \\
\qquad\qquad \underline{-3x^2+3x-3} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Уравнение примет вид:

$$\left(x^2-x+1\right)\left(2x^2+3x-3\right)=0.$$

Первый сомножитель не имеет действительных корней, а второй сомножитель имеет два корня, которые и представляют ответ.

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$.

2.5. Решение уравнений относительно коэффициентов.

Этот прием состоит в том, что уравнение рассматривается не относительно неизвестной, а записывается в виде квадратного уравнения относительно какого-либо коэффициента, входящего в уравнение. Естественно, этот метод приведет к цели, если дискриминант получающегося квадратного уравнения будет представлять полный квадрат некоторой функции от x. Суть этого метода легче всего понять на примере.

Пример 20. Решить уравнение

$$4x^3-4\sqrt{5}x^2+5x-2\sqrt{5}+4=0.$$

Решение. Введем вспомогательный параметр, обозначив $\sqrt{5}=a$. Уравнение примет вид:

$$4x^3-4ax^2+a^2x-2a+4=0.$$

Рассмотрим и решим это уравнение как квадратное относительно коэффициента a (при этом учитываем, что $x=0$ не является корнем уравнения):

$$xa^2-\left(4x^2+2\right)a+4\left(x^3+1\right)=0.$$

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^4+4x^2+1-4\left(x^3+1\right)x}}{x}=$$

$$=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^2-4x+1}}{x}=$$

$$=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x-1)^2}}{x}=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{x}.$$

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2x^2+2x}{x} \\ a=\dfrac{2x^2-2x+2}{x} \end{array}\right., \text{ т.е, } \left[\begin{array}{l} a=2x+2 \\ 2x^2-(2+a)x+2=0 \end{array}\right..$$

При преобразованиях важно помнить, что сокращение на x в первом уравнении и умножение на x обеих частей второго уравнения не нарушает их равносильности, поскольку $x\neq 0$. Возвращаемся к подстановке $\sqrt{5}=a$ и решаем полученные уравнения относительно неизвестной x:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+2-\sqrt{5}=0 \\ 2x^2-\left(2+\sqrt{5}\right)x+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2} \\ x_{2,3}=\dfrac{2+\sqrt{5}\pm\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4} \end{array}\right..$$

Отв.: $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$; $x_{2,3} = \dfrac{2+\sqrt{5}\pm\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4}$.

2.6. Метод неопределенных коэффициентов

Существует еще один, достаточно общий способ разложения многочленов на сомножители – *метод неопределенных коэффициентов*. Суть этого метода состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной.

Теоретической основой метода являются следующие утверждения:

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Так, если выполняется равенство

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n,$$

то из него вытекают следующие соотношения между коэффициентами

$$a_0 = b_0;\ a_1 = b_1;\ \ldots;\ a_{n-1} = b_{n-1};\ a_n = b_n.$$

2. Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один действительный корень, а потому разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителя.

3. Любой многочлен четвёртой степени разлагается в произведение многочленов второй степени.

Пусть известно, что в результате некоторых преобразований образуется многочлен, коэффициенты которого неизвестны. Эти коэффициенты нужно обозначить буквами и считать их неизвестными. Далее для определения этих неизвестных составляется система уравнений. Поясним алгоритм метода на примерах.

Пример 21. Решить уравнение

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Решение. Поскольку многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителей, то будем искать многочлены $x - p$ и $ax^2 + bx + c$ такие, что справедливо равенство

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x-p)(ax^2 + bx + c)$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые с одинаковыми степенями x, получим

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = ax^3 + (b - ap)x^2 + (c - bp)x - pc.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этого равенства, получаем систему четырёх уравнений для определения четырёх неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} 3 = a \\ -1 = b - ap \\ -3 = c - bp \\ 1 = -pc \end{cases}$$

Выражаем все неизвестные системы через параметр b. Имеем

$$a = 3;\ p = \frac{b+1}{3};\ c = \frac{b^2 + b - 9}{3}.$$

Теперь из четвертого уравнения системы после некоторых преобразований получаем уравнение для определения b

$$b(b^2 + 2b - 8) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $b_1 = 0;\ b_2 = 2;\ b_3 = -4$, однако, легко проверить, что в каждом из этих трех случаев будем иметь после нахождения параметров p и c одно и то же разложение левой части уравнения:

$$(x+1)(3x-1)(x-1) = 0.$$

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{1}{3};\ x_3 = 1$.

Легко заметить, что рассмотренный пример гораздо легче решать при помощи теоремы Безу, подбирая, например, корень $x = 1$ и производя процедуру деления. В следующем примере приходится столкнуться с гораздо большими техническими трудностями.

Пример 22. Решить уравнение

$$x^3 - \left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 - \left(3 + \sqrt{2}\right)x + 3\sqrt{2} = 0.$$

Решение. Поступая аналогично решению предыдущему примера, в конечном итоге придем к системе

$$\begin{cases} 1 = a \\ 1 - \sqrt{2} = b - ap \\ -3 - \sqrt{2} = c - bp \\ 3\sqrt{2} = -pc \end{cases}.$$

Выражаем параметры p и c через b. В результате после некоторых преобразований приходим к разрешающему кубическому уравнению относительно параметра b.

$$b^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)b^2 - \sqrt{2}b + \sqrt{2} + 1 = 0.$$

Подбором подбираем корень этого уравнения $b = 1$. После деления «уголком» приходим к разложению левой части на сомножители:

$$(b-1)\left(b^2 + \left(2\sqrt{2} - 1\right)b - \left(\sqrt{2} - 1\right)\right) = 0.$$

Таким образом, имеем три возможных значения параметра b: $b_1 = 1;\ b_{2,3} = \dfrac{1 - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{13}}{2}$, однако, после нахождения параметров p и c, приходим к одному и тому же разложению левой части исходного уравнения, которое можно теперь записать в виде

$$\left(x^2 + x - 3\right)\left(x - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2};\ x_3 = \sqrt{2}$.

Отметим, что решение кубических уравнений методом неопределенных коэффициентов в общем случае сводится к решению также кубического уравнения относительно одного из параметров разложения. Естественно, если мы не сможем подобрать корень этого уравнения (в предыдущем примере, например, $b = 1$), то метод неопределенных коэффициентов не приведет к цели. Поэтому чаще всего этот метод применяется при решении примеров следующей структуры.

Пример 23. При каких значениях a и b многочлен $x^4 - x^3 - 9x^2 + ax - 10$ делится без остатка на трехчлен $x^2 + 2x + b$?

Решение. Представим многочлен четвертого порядка в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$x^4 - x^3 - 9x^2 + ax - 10 = \left(x^2 + 2x + b\right)\left(x^2 + px + q\right)$$

Раскрываем скобки в правой части написанного равенства и группируем слагаемые с одинаковыми степенями x. После некоторых преобразований получим:

$$x^4 - x^3 - 9x^2 + ax - 10 =$$
$$= x^4 + (p+2)x^3 + (q + 2p + b)x^2 + (2q + bp)x + bq.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} p + 2 = -1 \\ q + 2p + b = -9 \\ 2q + bp = a \\ bq = -10 \end{cases}.$$

Решение этой системы не представляет особых трудностей. Выражаем из первого уравнения $p = -3$. После этого из второго уравнения имеем связь между q и b: $q = -3 - b$, что после подстановки в четвертое уравнение системы приведет к квадратному уравнению относительно b:

$$b^2 + 3b - 10 = 0.$$

Корни этого уравнения $b_1 = -5;\ b_2 = 2$ позволяют из третьего уравнения системы найти параметр a.

Ответ: $a_1 = 19$; $b_1 = -5$ или $a_2 = -16$; $b_2 = 2$.

3. Применение общих формул и методов решения рациональных уравнений 3-й и 4-й степени.

Переходим к обзору наиболее общих методов решения целых алгебраических уравнений, большинство которых выходит за рамки школьной программы. Начнем с т.н. «замечательного тождества», или, как его еще называют, формулы разложения суммы трех кубов. Она имеет следующий вид

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= (a + b + c)\cdot(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \qquad (3.1)$$

Приведем доказательство этого равенства, поскольку оно методически полезно. Разложим левую часть формулы (3.1) на множители так, чтобы выделить сомножитель $a + b + c$, входящий в правую часть. Воспользовавшись известными разложениями кубических выражений, имеем

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$
$$= (a^3 + 3ab(a + b) + b^3) - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc =$$
$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc =$$
$$= ((a + b)^3 + c^3) - 3ab(a + b) - 3abc =$$
$$= (a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) =$$
$$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) =$$
$$= (a + b + c)\cdot(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Формула (3.1) доказана. Заметим, что «замечательное тождество» может иметь различные применения в элементарной математике. В частности это происходит при решении приведенных кубических уравнений вида $x^3 + qx + r = 0$, при выяснении вопросов о равносильности уравнений, содержащих кубические радикалы и т.д.

Пример 24. Решить уравнение

$$2x^3 - 6x + 5 = 0.$$

Решение. Данное уравнение рациональных корней не имеет, в чем можно убедиться, проверив условия теоремы 2. Попытки выделения полного куба суммы или разности двух выражений займут много времени и также к цели не приведут. Попробуем применить формулу (3.1). С этой целью представим левую часть уравнения в виде левой части формулы (3.1):

$$x^3 - 3x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x^3 + 2 + \frac{1}{2} - 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow$$
$$x^3 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3 - 3x\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0.$$

Цель достигнута. Теперь можно применить «замечательное тождество» и разложить левую часть уравнения на множители. Имеем

$$\left(x + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{2}\cdot x - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot x - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x + \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 0 \\ x^2 - \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cdot x + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1 = 0 \end{array}\right..$$

Первое уравнение совокупности дает корень $x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, а второе представляет собой квадратное уравнение, которое не имеет действительных решений. Для доказательства этого утверждения вычислим его дискриминант:

$$D = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1\right) =$$
$$= -3\cdot\sqrt[3]{4} - 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + 6 = 3\cdot\left(2 - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right).$$

Рассмотрим выражение в скобках и убедимся, что оно отрицательно, т.е. докажем неравенство

$$2<\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Поскольку обе части неравенства положительны, возведем их в квадрат:

$$4<\sqrt[3]{16}+2+\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\text{, т.е., }2<\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{\frac{1}{16}}.$$

Заключительное неравенство является очевидным, поскольку $2=\sqrt[4]{16}<\sqrt[3]{16}$. Производя все действия в обратном порядке, приходим к доказательству исходного неравенства.

Ответ: $x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

В общем случае кубичное уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

подстановкой $x=y-\frac{a}{3}$ приводится к неполному виду

$$y^3+py+q=0, \qquad (3.2)$$

где $p=-\frac{a^3}{3}+b$, $q=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-\frac{ab}{3}+c$.

Уравнение (3.2) имеет или один действительный и два сопряженных комплексных корня (их определение не рассматривается в школьном курсе математики), или три действительных корня, по крайней мере, два из которых равны, или три различных действительных корня в зависимости от того, будет ли выражение

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

соответственно положительно, равно нулю или отрицательно.

В первом случае ($Q>0$) единственный действительный корень уравнения (3.2) находится по формуле Кардано

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}.$$

Во втором случае ($Q=0$) кроме выписанного корня имеем еще два одинаковых действительных корня

$$y_{2,3}=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Если же кубическое уравнение имеет три действительных корня, то они всегда могут быть выражены через тригонометрические функции. Действительно, сделаем в приведенном уравнении $x^3+px+q=0$ замену $x=ky$. При этом коэффициент k подберем так, чтобы отношение коэффициентов при y^3 и y в полученном в результате этой замены уравнении было бы равно $-\frac{4}{3}$. Таким образом, в уравнении

$$k^3y^3+kpy+q=0$$

потребуем, чтобы $\frac{k^3}{kp}=\frac{k^2}{p}=-\frac{4}{3}$, так что $k^2=-\frac{4p}{3}$.

Следовательно, уравнение преобразуется к виду

$$k\cdot\left(-\frac{4p}{3}y^3+py\right)+q=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{kp}{3}\left(4y^3-3y\right)=q.$$

Теперь после замены $y=\cos t$ получим уравнение

$$\frac{kp}{3}\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)=q.$$

С помощью тригонометрической формулы для синуса тройного угла это уравнение перепишется в виде

$$\cos 3t=\frac{3q}{kp}.$$

Полученное тригонометрическое уравнение имеет решение, если $\left|\frac{3q}{kp}\right| \le 1$. Учитывая неотрицательность обеих частей этого неравенства, после возведения в квадрат, получим условие

$$9q^2 \le k^2 p^2 = -\frac{4}{3} p^3 .$$

Таким образом, имеем условие $9q^2 + \frac{4}{3} p^3 \le 0$, что после деления на 36 приведет к знакомому ограничению $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \le 0$, т.е. $Q \le 0$. Это неравенство, как было указано выше, имеет место как раз тогда, когда исходное уравнение имеет три действительных корня. Приведем окончательный ответ

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3q}}{2\sqrt{-p^3}} + \frac{2\pi n}{3}\right), \qquad n = 0,1,2 .$$

Формулы Кардано можно вывести и иначе. Проиллюстрируем этот способ на примере.

Пример 25. Решить уравнение

$$6x^3 - 18x = 13 .$$

Решение. В том случае, когда не подходят вышеприведенные способы решения, целесообразно попробовать провести замену

$$x = y + t .$$

Тогда уравнение примет вид

$$(y+t)^3 - 3(y+t) = \frac{13}{6},$$

Возводим в куб и приводим уравнение к виду

$$y^3 + t^3 + 3ty(y+t) - 3(y+t) = \frac{13}{6} .$$

Поскольку вместо одной переменной введено две, то одну из них можно выбрать произвольно. В нашем случае имеется возможность выбрать значения y и t так, чтобы выполнялось соотношение $yt = 1$. Тогда имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} ty = 1 \\ t^3 + y^3 = \frac{13}{6} \end{cases}.$$

Решение этой системы труда не представляет. Оно имеет вид

$$\begin{cases} ty = 1 \\ y_1^3 = \frac{3}{2};\ y_2^3 = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Окончательно имеем $y_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}};\ t_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ или $y_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}};\ t_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Возвращаемся к исходной переменной:

$$x = y + t = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}} .$$

Ответ.: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

4. Метод введения новой переменной

Предполагается обозначение новой переменной некоторого повторяющегося выражения. Самое трудное при решении уравнений догадаться, какое выражение заменить новой переменной. Но для некоторых видов уравнений подстановки всегда одни и те же. Рассмотрим некоторые из этих уравнений.

4.1. Простейшая замена переменной

В несложных задачах увидеть замену переменной достаточно легко. Чаще всего за новую неизвестную принимается либо квадратный трехчлен, либо дробно-рациональная функция от старой переменной.

Пример 26. Решить уравнение

$$(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=\frac{9}{2}.$$

Решение. Уравнение существует при всех действительных значениях неизвестной: $x \in R$. После раскрытия скобок имеем уравнение в виде

$$\left(64x^2+112x+49\right)\cdot\left(4x^2+7x+3\right)=\frac{9}{2}.$$

Теперь нужно заметить, что коэффициенты при x^2 и x в обеих скобках пропорциональны. Это дает возможность ввести переменную

$$4x^2+7x+3=y.$$

Преобразуем все остальные выражения, входящие в уравнение, через новую переменную. Последовательно находим:

$$64x^2+112x+48=16y,$$

$$64x^2+112x+49=16y+1.$$

Теперь уравнение примет вид квадратного уравнения относительно новой переменной y:

$$(16y+1)y=\frac{9}{2}.$$

Его решение труда не представляет:

$$16y^2+y-\frac{9}{2}=0 \Rightarrow 32y^2+2y-9=0 \Rightarrow$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+32\cdot 9}}{32}=\frac{-1\pm 17}{32} \Rightarrow$$

$$y_1=-\frac{9}{16};\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 4x^2+7x+3=-\dfrac{9}{16} \\ 4x^2+7x+3=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+7x+\dfrac{57}{16}=0 \\ 4x^2+7x+\dfrac{5}{2}=0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \ (D<0) \\ x_1=-\dfrac{5}{4};\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-\dfrac{5}{4};\ x_2=-\dfrac{1}{2}$

Пример 27. Решить уравнение

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$$

Решение.

Определим область допустимых значений переменной x:

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ x^2+x-5\neq 0. \\ x\in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \\ x\in R \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{x^2+x-5}{x}=t$, тогда исходное уравнение примет вид: $t+\dfrac{3}{t}+4=0, t\neq 0$ (следует из вышеопределенной области допустимых значений). Корни полученного уравнения: $t_1=-3, t_2=-1$. Возвращаясь к исходной переменной, получим ответ:

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-3 \Rightarrow x_1=-5, x_2=1,$$

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-1 \Rightarrow x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}.$$

Ответ: $x_1=-5, x_2=1, x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}.$

4.2. Дробно-рациональная замена переменной

Основным «внешним» признаком необходимости применения дробно-рациональной замены переменной является тот факт, что в уравнении присутствуют квадратные трехчлены, у которых коэффициенты при x^2 и свободные члены равны (или пропорциональны).

Пример 28. Решить уравнение

$$(x+6)(x+3)(x-1)(x-2)=12x^2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$(x+6)(x-1)\cdot(x+3)(x-2)=12x^2.$$

Раскроем скобки в левой части:

$$(x^2+5x-6)(x^2+x-6)=12x^2.$$

Разделим обе части уравнения на $x^2\neq 0$ (можно путем подстановки проверить, что x=0 не является корнем уравнения). Тогда уравнение примет вид:

$$\left(x+5-\frac{6}{x}\right)\left(x+1-\frac{6}{x}\right)=12.$$

Вводим новую переменную: $t=x+1-\dfrac{6}{x}$. Получаем квадратное уравнение относительно t и решаем его:

$$t(t+4)=12,$$

$$t^2+4t-12=0,$$

$$t_1=-6, t_2=2.$$

В терминах исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x+1-\dfrac{6}{x}=-6 \\ x+1-\dfrac{6}{x}=2, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+7x-6=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2} \\ x_3=-2, x_4=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2}, x_3=-2, x_4=3.$

4.3. Возвратно-симметрические уравнения

Алгебраическое уравнение четвертой степени вида

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \qquad (4.1)$$

при $e\neq 0$ называется возвратно-симметрическим, если коэффициенты уравнения, a,b,d,e связаны соотношениями

$$\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2,$$

или иначе

$$d=\lambda b, \qquad e=\lambda^2 a.$$

Здесь λ – некоторое отличное от нуля число.

Используя эту связь между коэффициентами, уравнение (4.1) можно записать в виде

$$ax^4+bx^3+cx^2+\lambda bx+\lambda^2 a=0 \qquad (4.2)$$

Так как $x=0$ не является корнем уравнения (4.1), то, разделив почленно обе части уравнения (4.2) на x^2 и проведя соответствующую группировку членов левой части уравнения, получим уравнение, эквивалентное уравнению (4.2):

$$a\left(x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)+c=0$$

Вводим новую переменную по формуле

$$x+\frac{\lambda}{x}=y \qquad (4.3)$$

Для того, чтобы записать уравнение в терминах новой переменной y, необходимо выразить через y выражение $x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}$. С этой целью возводим обе части формулы (4.3) в квадрат:

$$x^2+2x\frac{\lambda}{x}+\frac{\lambda^2}{x^2}=y^2.$$

Таким образом,

$$x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}=y^2-2\lambda,$$

и уравнение перепишется в виде квадратного уравнения относительно y:

$$a\left(y^2-2\lambda\right)+by+c=0 \qquad (4.4)$$

Решая уравнение (4.4), и возвращаясь по формуле (4.3) к исходной переменной, получаем ответ.

Следует отметить, что возведение в квадрат обеих частей выражения (4.3) может привести к появлению посторонних корней, поскольку переменная y может быть любого знака. Поэтому перед формулировкой ответа необходимо сделать проверку полученных значений x.

Частным случаем возвратно-симметрического уравнения является симметрическое уравнение, соответствующее значению $\lambda=1$ и кососимметрическое, соответствующее значению $\lambda=-1$.

Заменой $x+\frac{1}{x}=y$ для симметрического и $x-\frac{1}{x}=y$ для кососимметрического уравнений эти уравнения вводятся к квадратным уравнениям относительно неизвестной y.

Пример 29. Решить уравнение

$$4x^4-16x^3+7x^2-32x+16=0.$$

Решение. ОДЗ: $x\in R$.

Для нашего уравнения коэффициенты a,b,c,d,e принимают значения $a=4$, $b=-16$, $c=7$, $d=-32$, $e=16$. Таким образом,

$$\frac{a}{e}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},\quad \left(\frac{b}{d}\right)^2=\left(\frac{-16}{-32}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Соотношение $\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2$ выполняется, т.е., уравнение является возвратно-симметрическим. Подстановкой убеждаемся, что значение $x=0$ не является корнем, поэтому можно обе части исходного уравнения разделить на x^2 и записать уравнение в виде

$$4\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{2}{x}\right)+7=0.$$

Вводим новую переменную $x+\frac{2}{x}=y$. Тогда $x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=y^2$, откуда $x^2+\frac{4}{x^2}=y^2-4$. Подставляем эти соотношения в выписанное уравнение:

$$4\left(y^2-4\right)+16y+7=0,\text{ или } 4y^2-16y-9=0.$$

Корни полученного квадратного уравнения $y_1 = \frac{9}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Возвращаемся к исходной переменной и решаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{2}{x} = \frac{9}{2} \\ x + \frac{2}{x} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 4 = 0 \\ 2x^2 + x + 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 4; x_2 = \frac{1}{2}. \\ x \in \varnothing \left(D < 0\right) \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что полученные значения корней удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = 4; x_2 = \frac{1}{2}$.

К возвратно-симметрическим уравнениям шестой степени относят уравнения вида

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + j = 0, \qquad \text{(д)}$$

в которых выполняются следующие соотношения между коэффициентами:

$$\left(\frac{a}{j}\right)^2 = \left(\frac{b}{f}\right)^3 = \left(\frac{c}{e}\right)^6.$$

В этом случае, если $j \neq 0$, нужно разделить все уравнение (д) на x^3 и ввести переменную $\frac{c}{e}x + \frac{1}{x} = y$.

4.4. Однородные уравнения

Уравнения 2го порядка данного типа можно представить в виде:

$$au^{2\alpha} + bu^{\alpha}v^{\alpha} + cv^{2\alpha} = 0,$$

где a, b, c, α – заданные (отличные от нуля) числа, $u = u(x), v = v(x)$ – некоторые функции от x. Для решения уравнения необходимо разделить обе части уравнения на $v^{2\alpha} \neq 0$ и получить уравнение вида,

$$a\left(\frac{u}{v}\right)^{2\alpha} + b\left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha} + c = 0,$$

которое является квадратным уравнением относительно новой переменной $t = \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha}$.

Пример 30. Решить уравнение

$$(2x^2 - x + 1)^2 + x^2(2x^2 - x + 1) - 6x^4 = 0.$$

Решение.

Делим обе части уравнения на $x^4 \neq 0$ (можно проверить путем подстановки). Получаем:

$$\left(\frac{2x^2 - x + 1}{x^2}\right)^2 + \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} - 6 = 0.$$

Обозначаем: $t = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2}$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -3, t_2 = 2.$$

Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = -3 \\ \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2 - x + 1 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \ (D < 0) \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1$.

4.5. Метод дополнения до полного квадрата

В основе решения уравнений такого типа – использование формул: $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ и $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

Пример 31. Решить уравнение $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=7$.

Решение. Определим область допустимых значений переменной x: $x\neq -3$.

Используя упомянутую в этом подразделе формулу $\left(a=x;\ b=\dfrac{3x}{x+3}\right)$, получаем:

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+2x\frac{3x}{x+3}-7=0,$$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\frac{x^2}{x+3}-7=0.$$

Обозначим: $t=\dfrac{x^2}{x+3}$. Тогда имеем квадратное уравнение:

$$t^2+6t-7=0\Rightarrow t_1=-7, t_2=1.$$

Таким образом:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x+3}=-7\\ \dfrac{x^2}{x+3}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+7x+21=0\\ x^2+x-3=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\ (D<0)\\ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

4.6. Уравнения вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ и $(x+a)^5-(x+b)^5=c$

Подстановка вида $x=t-\dfrac{a+b}{2}$ сводит эти уравнения к биквадратным. Для решения уравнений данного типа необходимо также использование следующих формул:

$$(x\pm a)^4=x^4\pm 4x^3a+6x^2a^2\pm 4xa^3+a^4,$$

$$(x\pm a)^5=x^5\pm 5x^4a+10x^3a^2\pm 10x^2a^3+5xa^4+a^5.$$

Пример 32. Решить уравнение

$$(x+3)^5-(x-1)^5=64.$$

Решение. Производим замену $x=t-\dfrac{3-1}{2}=t-1$.

Получаем уравнение вида:

$$(t-1+3)^5-(t-1-1)^5=64,$$

$$(t+2)^5-(t-2)^5=64,$$

$$t^5+10t^4+40t^3+80t^2+80t+32-(t^5-10t^4+40t^3-80t^2+80t-32)=0,$$

$$20t^4+160t^2=0,$$

$$20t^2(t^2+8)=0,$$

$$20t^2=0, t=0\Rightarrow x_{1,2}=-1,$$

$$t^2+8=0\Rightarrow \textit{решений нет}\ (t^2\geq 0\ \forall t).$$

Ответ: $x_{1,2}=-1$.

Пример 33. Решить уравнение $(x+1)^4+(x+5)^4=82$.

Решение. Пусть $x=t-3$, тогда исходное уравнение можно переписать как:

$$(t-2)^4+(t+2)^4=82,$$

$$t^4-8t^3+24t^2-32t+16+t^4+8t^3+24t^2+32t+16=82,$$

$$2t^4+48t^2+32=82,$$

$$t^4+24t^2-25=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t^2=-25 \\ t^2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t\in\varnothing \\ t=\pm 1 \end{array}\right..$$

По формуле $x=t-3$ возвращаемся к первоначальной переменной и получаем решение $x_1=-4, x_2=-2$.

Ответ: $x_1=-4, x_2=-2.$

5. Метод выделения целой части

При решении примеров данным методом необходимо сначала в каждой из дробей уравнения выделить целую часть, затем произвести группировку полученных дробей.

Пример 34. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}.$$

Решение. Так как в условии присутствуют дробные выражения, то определим область допустимых значений переменной *x*: $x\neq -2, x\neq -3, x\neq -5, x\neq -6.$

Выделяем целую часть у каждой из дробей уравнения:

$$\frac{x+2-3}{x+2}-\frac{x+3-5}{x+3}=\frac{x+5-9}{x+5}-\frac{x+6-11}{x+6},$$

$$1-\frac{3}{x+2}-1+\frac{5}{x+3}=1-\frac{9}{x+5}-1+\frac{11}{x+6}.$$

Группируем полученные дроби:

$$\frac{5}{x+3}-\frac{11}{x+6}=\frac{3}{x+2}-\frac{9}{x+5},$$

$$\frac{5x+30-11x-33}{x^2+9x+18}=\frac{3x+15-9x-18}{x^2+7x+10},$$

$$\frac{-6x-3}{x^2+9x+18}=\frac{-6x-3}{x^2+7x+10},$$

$$\frac{2x+1}{x^2+9x+18}=\frac{2x+1}{x^2+7x+10},$$

Учитывая ограничения, приведенные выше и определяющие ОДЗ, уравнение можно переписать в виде:

$$(2x+1)(x^2+9x+18-x^2-7x-10)=0,$$

$$x_1=-0.5, x_2=-4.$$

Ответ: $x_1=-0.5, x_2=-4.$

6. Использование теоремы о пределе монотонной последовательности

При решении уравнений данного типа используется теорема, доказываемая в курсе высшей математики: если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Сформулированная теорема сводится к тому, что если из бесконечного числа объектов удалить конечное их число, то бесконечность останется неизменной.

Пример 35. Решить уравнение

$$(x^2-1)+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\ldots=3.$$

Решение. Обозначим

$$y=(x^2-1)+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\ldots=3$$

и вынесем общий множитель в левой части за скобки:

$$(x^2-1)\left[1+(x^2-1)+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\ldots\right]=3,$$

$$(x^2-1)\left[1+y\right]=3,$$

$$(x^2-1)\left[1+3\right]=3,$$

$$(x^2-1)=\frac{3}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$

Пример 36. Решить уравнение

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}=6.$$

Решение. Определим область допустимых значений переменной *x*: $x \ge 0$.

Возведем обе части уравнения во вторую степень:

$$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}=36,$$

$$x\cdot 6=36 \Rightarrow x=6.$$

Найденный корень удовлетворяет определенной выше области допустимых значений переменной.

Ответ: $x=6$.

7. Использование свойств монотонных функций

Решение уравнений с использованием свойств монотонности основывается на следующих утверждениях.

1. Если $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке *X*, то уравнение $f(x)=C$, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке *X*.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на промежутке *X* функции, причем $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке *X*.

В качестве промежутка *X* могут быть бесконечный промежуток $(-\infty;\infty)$, промежутки $(a;\infty)$, $(-\infty;a)$, $[a;\infty)$, $(-\infty;a]$, отрезки, интервалы и полуинтервалы.

Пример 39. Решить уравнение

$$x^9+6x-7=0.$$

Решение. ОДЗ: $x\in R$. Перепишем уравнение в виде:

$$x^9=7-6x.$$

Функция $y=x^9-$монотонно возрастающая, а функция $y=7-6x-$монотонно убывающая. Значит, данное уравнение имеет только один корень, который можно найти перебором: *x*=1.

Ответ: *x*=1.

Пример 40. Решить уравнение

$$x^5+x^3+5x-7=0.$$

Решение. ОДЗ: $x\in R$.

Исследование делителей свободного члена дают одно решение уравнения $x=1$. Однако, после деления левой части на двучлен $x-1$ получается уравнение

$$x^4+x^3+2x^2+2x+7=0,$$

решение которого весьма проблематично. Поэтому изберем другой путь и представим исходное уравнение в виде

$$x^5+5x=7-x^3. \qquad (7.1)$$

Легко заметить, что на всей числовой оси функция $f(x)=x^5+5x$ непрерывна и возрастает ($f'(x)=5x^4+5>0\ \forall x\in R$), а функция $g(x)=7-x^3$ – непрерывна и убывает ($g'(x)=-3x^2\le 0\ \forall x\in R$).

Поэтому уравнение (7.1) имеет единственное решение $x=1$.

Ответ: $x=1$.

8. Метод оценок

При решении задач методом оценок используется ограниченность функций, входящих в уравнения. Практическая реализация этого метода основывается на следующих фактах.

1. Если $a>0$, то $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ ($a+\dfrac{1}{a}=2$, только при $a=1$). Если $a<0$, то $a+\dfrac{1}{a}\leq -2$ ($a+\dfrac{1}{a}=-2$, только при $a=-1$).

2. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ ограничена значением $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ снизу при $a>0$ и сверху при $a<0$.

3. Если $f(x)\geq 0$ и $g(x)\geq 0$, то уравнение $f(x)+g(x)=0$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$.

4. Если $f(x)\geq m$, а $g(x)\leq m$, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

5. Если $|f(x)|\geq a$, а $|g(x)|\geq b$, $a>0$, $b>0$, то уравнение $f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$ равносильно системе $\begin{cases} |f(x)|=a \\ |g(x)|=b \end{cases}$, причем $f(x)$ и $g(x)$ одного знака.

6. Если $|f(x)|\geq a$, а $|g(x)|\leq b$, $a>0$, $b>0$, то уравнение $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ равносильно системе $\begin{cases} |f(x)|=a \\ |g(x)|=b \end{cases}$, причем $f(x)$ и $g(x)$ одного знака.

Пример 41. Решить уравнение

$$\left(1+x^2+x^4+x^6+x^8\right)\cdot\left(x^{10}+1\right)=10x^9.$$

Решение. ОДЗ: $x\in R$. Воспользуемся очевидными неравенствами $1+x^2+x^4+x^6+x^8\geq 1$, $x^{10}+1\geq 1$, которые выполняются для всех $x\in R$. Тогда для правой части уравнения

справедлива оценка $10x^9\geq 1$, т.е. $x\geq \dfrac{1}{\sqrt[9]{10}}>0$. Итак, корни исходного уравнения должны быть положительны.

Перемножаем скобки в левой части уравнения и, используя тот факт, что значение $x=0$ не удовлетворяет уравнению, делим обе его части на $x^9\neq 0$. Имеем:

$$x^{18}+x^{16}+x^{14}+x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=10x^9,$$

$$\left(x^9+\frac{1}{x^9}\right)+\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=10.$$

В силу положительности x можно утверждать, что каждая скобка не превышает двух. Тогда заключительное равенство возможно лишь тогда когда каждая скобка равна точно двум, а это будет только при $x=1$.

Ответ: $x=1$.

Задания для самостоятельной работы

Метод преобразования алгебраических выражений

1. $\frac{4}{x+3}+\frac{4}{x-3}=1$ Отв.: $-1; 9$.

2. $\frac{x}{x+4}+\frac{4}{x-4}=\frac{20}{x^2-16}$ Отв.: ± 2.

3. $\frac{2x}{x+5}-\frac{5}{5-x}=\frac{25}{x^2-25}$ Отв.: 0; $\frac{5}{2}$.

4. $\frac{x}{x+3}-\frac{5}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}$ Отв.: 11.

5. $\frac{x-2}{2x-1}-\frac{x+1}{3x-1}=\frac{x-8}{6x-2}$ Отв.: 2.

6. $\frac{x+2}{x-1}+\frac{2x-1}{x+3}=\frac{3x-4}{x+4}$ Отв.: -2; $-\frac{2}{3}$.

7. $\frac{2x-1}{x+3}+\frac{x}{x+1}=\frac{3x}{x+4}$ Отв.: -2; $\frac{1}{2}$.

8. $\frac{x}{x-4}=\frac{4}{x-4}+\frac{2}{x+4}+\frac{7}{x^2-16}$ Отв.: 5; -3.

9. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{x+1}{x-1}$ Отв.: 2.

10. $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2$ Отв.: 0; 5; $\frac{38}{11}$.

11. $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0$ Отв.: 3.

12. $\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{2x(x+3)}-\frac{x-1}{x^2-3x}=0$ Отв.: 1.

13. $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{4}{x(x-1)}=\frac{-2}{x^2+x-2}$ Отв.: -1.

Метод разложения на сомножители

Теорема Безу и следствия из нее

14. $x^3+x^2-10x+8=0$ Отв.: -4; 1; 2.

15. $x^3-6x^2+5x+12=0$ Отв.: -1; 3;4.

16. $x^3-4x^2+x+6=0$ Отв.: -1; 2; 3.

17. $x^{38}+6x^{37}+11x^{36}+6x^{35}=0$
Отв.: $-1; -2; -3; 0$.

18. $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$ Отв.: -1; 2.

19. $x^4+2x^3-x=2$ Отв.: 1; -2.

20. $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$
Отв.: 2; -3; $\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$.

21. $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1=0$
Отв.: 1.

22. $x^6-8x^4+19x^2-12=0$
Отв.: $\pm 1; \pm\sqrt{3}; \pm 2$.

23. $x^3-3x+2=0$ Отв.: -2; 1.

24. $x^3-x-6=0$ Отв.: 2.

25. $x^3-3x^2+4=0$ Отв.: -1; 2.

26. $8x^3-4x^2-5x+1=0$ Отв.: 1; $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$.

27. $4x^3-3x^2+7=0$ Отв.: -1.

28. $2x^3+x^2-2x-1=0$ Отв.: ± 1; $-\frac{1}{2}$.

29. $5x^3-6x^2+11x-2=0$ Отв.: $\frac{1}{5}$.

30. $4x^3+7x^2+7x+3=0$ Отв.: $-\frac{3}{4}$.

31. $24x^3-26x^2+9x-1=0$ Отв.: $\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2}$.

32. $36x^4-36x^3-37x^2+11x+6=0$

Отв.: $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{2}$.

33. $27x^3+9x^2-48x+20=0$ Отв.: $-\frac{2}{3};-\frac{5}{3}$.

34. $21x^3+x^2-5x-1=0$ Отв.: $-\frac{1}{3};\ \frac{1}{-1\pm2\sqrt{2}}$.

Метод группировки

35. $8x^4+x^3+64x+8=0$ Отв.: $-2;-\frac{1}{8}$.

36. $x^4+2x^3-x^2-2x=0$ Отв.: 0; -2; -1; 1.

37. $1-16x^2(x-1)^2=0$ Отв.: $\frac{1}{2};\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

38. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$ Отв.: ±3.

39. $(x^3+x+1)^2=(x^2+3x-1)^2$ Отв.: 0; 1; $\pm\sqrt{2}$.

40. $(x^2-4x+5)^2=(x^2-2x-1)^2$ Отв.: 1; 2; 3.

41. $x^4-3x^2+4x-3=0$ Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

42. $x^4-4x^3-1=0$ Отв.: $\frac{1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{2}}$.

43. $x^4+4x-1=0$ Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{2}}$.

44. $x^4-8x-7=0$ Отв.: $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}$.

45. $x^4-12x+323=0$ Отв.: $\varnothing$.

46. $x^4+4x^2-4x+15=0$ Отв.: $\varnothing$.

47. $4x^4+8x^3+7x^2-2x-1=0$

Отв.: $\frac{\sqrt{5}-2\pm\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{4}$.

48. $x^4-2x^3+x^2+2x-1=0$

Отв.: $\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

49. $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+4=0$ Отв.: $-\sqrt[3]{11}-1$.

50. $3x^3+\frac{1}{3}x^2+x+1=0$ Отв.: $-\frac{3}{1+\sqrt[3]{80}}$.

51. $x^3+x^2+\frac{1}{3}x+1=0$ Отв.: $-\frac{\sqrt[3]{26}+1}{3}$.

52. $5x^3+x^2+x+\frac{1}{3}=0$ Отв.: $-\frac{1}{\sqrt[3]{14}+1}$.

53. $5x^3+x^2+x+\frac{1}{3}=0$ Отв.: $-\frac{1}{1+\sqrt[3]{14}}$.

54. $12x^3+3x^2+3x+1=0$ Отв.: $-\frac{1}{1+\sqrt[3]{11}}$.

55. $x^3-9x^2+9x-3=0$ Отв.: $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.

56. $x^3+12x^2-24x+16=0$ Отв.: $\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$.

57. $9x^3+6x^2+12x+8=0$ Отв.: $-\frac{2}{3}$.

58. $2x^3-\frac{1}{3}x^2-x-1=0$ Отв.: $\frac{3}{\sqrt[3]{55}-1}$.

59. $(x-2)^4=(3x+1)^4$ Отв.: $-\frac{3}{2};\frac{1}{4}$.

60. $(x+1)^4=2\left(1+x^4\right)$

Отв.: $-1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}$.

61. $x^3+2x-5\sqrt{3}=0$ Отв.: $\sqrt{3}$.

62. $x^3+2x-7\sqrt{5}=0$ Отв.: $\sqrt{5}$.

63. $x^3-\left(1+\sqrt{2}\right)x^2+2=0$ Отв.: $\sqrt{2};\ \frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$.

64. $2x^4-7x^3+x^2+7x-3=0$ Отв.: $\pm 1; 3; \frac{1}{2}$.

65. $2x^4+x^3-4x^2+1=0$ Отв.: $1; -\frac{1}{2}; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

66. $x^2(1+x)^2+x^2=8(1+x)^2$ Отв.: $-2;\ 1\pm\sqrt{3}$.

67. $(x+2)\left(x^3-6x-4\right)=0 \Rightarrow (x+2)\left(x^3+8-6(x+2)\right)=0$.

Отв.: $-2;\ 1\pm\sqrt{3}$.

68. $x^2(x-1)^2-8(x-1)^2+x^2=0$ Отв.: $2;\ -1\pm\sqrt{3}$.

69. $\left(x^2+2x-3\right)^3+\left(2x^2-5x+2\right)^3=\left(3x^2-3x-1\right)^3$

Отв.: -3; 1; 2; $\frac{1}{2};\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

70. $\frac{4x^2}{4x^2+1}+16x^2-17x+4=0$ Отв.: $\frac{1}{2}$.

71. $\frac{4x^2}{3x^2+1}+12x^2-17x+4=0$ Отв.: $\frac{1}{3};\ 1$.

Специальная структура уравнений

72. $x^4+2x^3+3x^2-2x+5=0$ Отв.: $x\in\varnothing$.

73. $5x^4-3x^3-6x^2+11x-9=0$ Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{46}}{5}$.

Уравнения, квадратные относительно коэффициентов

74. $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$

Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2};\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

75. $x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$

Отв.: $\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$.

76. $\left(x^2-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(4x-\sqrt{3}-1\right)=0$

Отв.: $-1\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

77. $x^3+2\sqrt{7}x^2+7x+4\sqrt{7}+8=0$ Отв.: $-2-\sqrt{7}$.

Метод неопределенных коэффициентов

78. При каких значениях a и b многочлен $x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится без остатка на трехчлен x^2-3x+4? Отв.: $a=3,\ b=-4$.

79. При каких значениях a и b многочлен $x^4-2x^3+ax^2-3x+b$ делится без остатка на трехчлен x^2-3x+3? Отв.: $a=2,\ b=6$.

80. При каком значении a многочлен x^3+6x^2+ax+5 делится без остатка на x^2+x+1?

Отв.: $a = 6$.

Общие методы решения рациональных уравнений

81. $3x^3 - 9x + 10 = 0$ Отв.: $-\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

82. $20x^3 - 60x = 41$ Отв.: $x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} + \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

Метод введения новой переменной

Простейшие замены переменной

83. $(x+3)^4 - 3(x+3)^2 + 2 = 0$

Отв.: $-4; -2; -\sqrt{2} - 3; \sqrt{2} - 3$.

84. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$ Отв.: $-2; 1$.

85. $\frac{x^4}{(2x+3)^2} - \frac{2x^2}{2x+3} + 1 = 0$ Отв.: $-1;\ 3$.

86. $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$ Отв.: $1;\ 3$.

87. $\frac{x^2 - 3x - 6}{x} - \frac{8x}{x^2 - 3x - 6} = -2$

Отв.: $-3;\ -1;\ 2;\ 6$.

88. $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3$ Отв.: $\pm 1; 2; 4$.

89. $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$ Отв.: $3; 3 \pm \sqrt{20}$.

90. $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$ Отв.: $-4;\ 2$.

91. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 1$ Отв.: $-\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}$.

92. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$ Отв.: $\frac{-15 \pm \sqrt{189}}{18}$.

93. $(x^2 - 5x + 7)(x-2)(x-3) = 2$ Отв.: $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

94. $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7) = -16$ Отв.: $-4 \pm \sqrt{5}$.

95. $(x-1)(x-7)(x-4)(x+2) = 40$

Отв.: $2; 3; \frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}$.

96. $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$

Отв.: 1.

97. $\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$ Отв.: $0;\ 1$.

98. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$ Отв.: $0;\ -2$.

99. $(8x^2 - 3x + 1)^2 = 32x^2 - 12x + 1$

Отв.: $0;\ \frac{3}{8};\ \frac{3 \pm \sqrt{73}}{16}$.

100. $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

Отв.: $-1;\ 0;\ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

101. $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$ Отв.: $-3;\ 1$.

102. $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$

Отв.: $-3;\ 0;\ \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$.

103. $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$ Отв.: $-3;\ 2$.

104. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$ Отв.: $-1;\ 12.$

105. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$ Отв.: $-\frac{1}{12};\ \frac{1}{2}.$

106. $(2x-3)(2x-1)(x+1)(x+2)=36$ Отв.: $-\frac{5}{2};\ 2.$

107. $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{5}$ Отв.: -4; -1.

108. $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=2$

Отв.: -2; 3; $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$

109. $\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2-9x+20\right)=-30$

Отв.: $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2};\ \frac{3\pm\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2};\frac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}.$

110. $\left(x^2-3x-6\right)\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2-9x+20\right)=5$

Отв.: $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2};\ \frac{3\pm\sqrt{39+2\sqrt{29}}}{2};\frac{3\pm\sqrt{39-2\sqrt{29}}}{2}.$

Дробно-рациональные замены переменных

111. $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$

Отв.: $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2};\ \frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}.$

112. $(2x-1)(x-2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$

Отв.: $-\frac{1}{2};-2.$

113. $(x+3)(x+2)(x+8)(x+12)=4x^2$

Отв.: $-6;-4;\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}.$

114. $(x+3)(x+6)(x-1)(x-2)=12x^2$

Отв.: $-2;3;\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}.$

115. $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

Отв.: $\frac{1}{2};\frac{7}{2}.$

116. $\left(x^2-6x-9\right)^2=x\left(x^2-4x-9\right)$

Отв.: $-1;9;\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}.$

117. $\frac{x}{x^2+3x+2}-\frac{x}{x^2+5x+2}=\frac{1}{24}$

Отв.: 1; 2; $\frac{-11\pm\sqrt{113}}{2}.$

118. $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$ Отв.: $7\pm\sqrt{34}.$

119. $\frac{x^2-3x+1}{x}+\frac{2x}{x^2-2x+1}=\frac{7}{2}$

Отв.: $\frac{1}{2};\ 2;\ 3\pm2\sqrt{2}.$

120. $\frac{2x^2-x+3}{3}-\frac{2x^2}{2x^2-4x+3}=\frac{x}{6}$

Отв.: $2;\ \frac{3}{4}.$

121. $\frac{2x^2+x+2}{3x^2-x+3}=\frac{2x^2-3x+2}{x^2-x+1}$ Отв.: 1.

122. $\left(x^2-6x-9\right)^2=x\left(x^2-4x-9\right)$

Отв.: $-1; 9; \frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

Возвратно-симметрические уравнения

123. $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$ Отв.: 1; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

124. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ Отв.: $\frac{1}{2}$; 2.

125. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$ Отв.: $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11\pm\sqrt{105}}{2}$.

126. $2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{18}+\frac{4}{3}$ Отв.: $-3\pm\sqrt{15}$.

127. $x^2+\frac{36}{x^2}=\frac{112}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)$ Отв.: $5\pm\sqrt{31}$; $\frac{3\pm\sqrt{159}}{5}$.

128. $3\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$ Отв.: -2; 6; $3\pm\sqrt{21}$.

129. $\frac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{9}$ Отв.: $\frac{1}{2}$; 2; $2\pm\sqrt{3}$.

130. $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{625}{112}$ Отв.: $\frac{1}{7}$; 7.

131. $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=5\left(x+\frac{1}{x}\right)$ Отв.: $\sqrt{2}\pm1$; $-\sqrt{2}\pm1$.

132. $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=6$

Отв.: 1.

133. $12x^2+\frac{1}{3x^2}+10\left(2x+\frac{1}{3x}\right)+11=0$

Отв.: $-1; -\frac{1}{6}$.

134. $3x^4-25x^3+24x^2+100x+48=0$

Отв.: $-1; -\frac{2}{3}; 4; 6$.

135. $x^4+3x^3+4x^2+6x+4=0$

Отв.: -2; -1.

136. $x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$

Отв.: -2; -1; 2; 4.

137. $x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$

Отв.: -3; -1; $3\pm\sqrt{6}$.

138. $4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=0$

Отв.: $\frac{1}{2}$; 2.

Однородные алгебраические уравнения

139. $(x^2-2x+2)^2+3x(x^2-2x+2)=10x^2$

Отв.: -2; -1; $2\pm\sqrt{2}$.

140. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$

Отв.: -1; 2; 4; $-\frac{1}{2}$.

141. $(2x^2-x+1)^2+x^2(2x^2-x+1)-6x^4=0$

Отв.: 1.

142. $(x^2-x)^4-5(x^2-x)^2x^2+6x^4=0$

Отв.: 0; $1\pm\sqrt{2}$; $1\pm\sqrt{3}$.

143. $(x^2-3x+1)^2+3(x-1)(x^2-3x+1)=4(x-1)^2$

Отв.: $2\pm\sqrt{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

144. $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$ Отв.: $3\pm\sqrt{3}; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

145. $(2x-1)^2+(2x-1)(x+2)-2(x+2)^2=0$

Отв.: $-\frac{3}{4}; 3$.

146. $2(x^3+1)+(x^2-x+1)^2=3(x+1)^2$

Отв.: 2; 0.

147. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right)=0$

Отв.: $\frac{2}{3}$; 3.

148. $(x^2+x+1)^2=x^2(3x^2+x+1)$

Отв.: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Дополнение до полного квадрата

149. $x^2+\frac{81x^2}{(x+9)^2}=40$ Отв.: $1\pm\sqrt{19}$.

150. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$ Отв.: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

151. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$ Отв.: 2; $-1\pm\sqrt{3}$.

152. $x^2+\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2=2$ Отв.: 1; $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

153. $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=3$ Отв.: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

154. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=90$ Отв.: $\frac{\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{\pm3\sqrt{11}}{11}$.

155. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=\frac{40}{9}$ Отв.: -1; 3; $\frac{11\pm\sqrt{55}}{11}$.

156. $\frac{1}{(x^2-2)^2}+\frac{1}{(x^2+2)^2}=\frac{40}{9x^4}$

Отв.: ±2; $\pm\sqrt[4]{\frac{20}{11}}$.

157. $x^4+10x^3-125x-54=0$

Отв.: $\frac{-5\pm\sqrt{133}}{2}$; $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

158. $x^4+6x^3-27x-10=0$

Отв.: -5; 2; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

159. $x^4-2x^3+x-30=0$ Отв.: -2; 3.

Уравнения вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ и $(x+a)^5$-$(x+b)^5=c$

160. $(x+1)^4+(x+1)^4=32$ Отв.: -3;1.

161. $(x+3)^4+(x+1)^4=20$ Отв: $-2\pm\sqrt{3\sqrt{2}-3}$.

162. $x^4+(x-2)^4=2$ Отв.: 1.

163. $(x-2)^4+(x+1)^4=17$ Отв.: 0; 1.

164. $x^4+(x-1)^4=97$ Отв.: -2; 3.

165. $(x+3)^5-(x-1)^5=64$ Отв.: -1.

166. $x^5+(6-x)^5=1056$ Отв.: 2; 4.

167. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$

Отв.: -2; -1; 0.

168. $(x-3)^4+(x-2)^4-(2x-5)^4=0$

Отв.: 2; 3.

Использование теоремы о пределе монотонной последовательности

169. $x+x^2+x^3+\cdots=6$ Отв.: $\frac{6}{7}$.

170. $x^2-1+(x^2-1)^2+(x^2-1)^3+\cdots=3$ Отв.: $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

171. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}=6$ Отв.: 6.

172. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=3$ Отв.: 6.

173. $\sqrt{x+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\cdots}}}}=x$ Отв.: 2.

174. $\sqrt{x+3\sqrt{x+3\sqrt{x+3\sqrt{x+\cdots}}}}=x$ Отв.: 4; 0.

175. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}=2$ Отв.: 2.

176. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=x$ Отв.: 2.

177. $x^{x^3}=3$ Отв.: $\sqrt[3]{3}$.

Выделение целой части

178. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4$

Отв.: $\frac{-5\pm\sqrt{345}}{10}$.

179. $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$

Отв.: -4; $-\frac{1}{2}$.

180. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$

Отв.: $-\frac{5}{4}$; 5.

181. $\frac{x^2+4x+4}{x+4}-\frac{2x+6}{x+2}=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{2x+9}{x+3}$

Отв.: 0; $\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$.

182. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$

Отв.: $-\frac{5}{2}$; 0.

183. $31\cdot\left(\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\cdot\left(\frac{17-7x}{x+2}+\frac{8x+55}{x+3}\right)$

Отв.: $-\frac{5}{2}$.

184. $112+19\cdot\left(\frac{8-3x}{x+3}+\frac{3-2x}{x+7}\right)=17\cdot\left(\frac{15-x}{x+4}+\frac{31+2x}{x+6}\right)$

Отв.: -5.

Использование свойств монотонных функций

185. $x^9+9x=10$ Отв.: 1.

186. $x^9-x^5+x=73\sqrt{3}$ Отв.: $\sqrt{3}$.

187. Сколько действительных корней имеет уравнение $x^5+x^2+1=0$?

Отв.: один корень.

Метод оценок

188. $(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}=2-x^4$ Отв.: 0.

189. $x^{16}+1=2x^8-(x+x^2)^8$ Отв.: -1.

190. $\left(x^{2k}+1\right)\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k-2}\right)=2kx^{2k-1}$

Отв.: 1.

191. $\left(16x^{200}+1\right)\left(y^{200}+1\right)=16(xy)^{100}$

Отв.: $x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y=\pm 1$.

Уравнения вида *f(f(x))=x*

192. $\left(x^2+3x-2\right)^2+3\left(x^2+3x-2\right)-2=x$

Отв.: $-1\pm\sqrt{3};-2\pm\sqrt{2}$.

193. $\left(x^2+2x-5\right)^2+2\left(x^2+2x-5\right)-5=x$

Отв.: $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2};\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Тригонометрические замены переменной

194. $8x^3-6x-1=0$ Отв.: $\cos\frac{\pi}{9}$; $\cos\frac{5\pi}{9}$; $\cos\frac{7\pi}{9}$.

195. $8x\left(1-2x^2\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1$

Отв.: $x_1=\cos\left(\frac{2\pi n}{9}\right), n\in Z, n\neq 9m, m\in Z;$

$x_2=\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}\right), k\in Z, k\neq 3+7m, m\in Z$.

196. $8x\left(2x^2-1\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1$

Отв.: $x_1=\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right), n\in Z, n\neq 7m, m\in Z;$

$x_2=\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9}\right), k\in Z, k\neq 4+9m, m\in Z$.

Разные уравнения

197. $\frac{1}{6x^2-7x+2}+\frac{1}{12x^2-17x+6}=4x^2-5x$

Отв.: $\frac{5\pm\sqrt{33}}{8}$.

198. $x^2+3x+2=15\cdot\frac{x^2+5x+10}{x^2+7x+12}$ Отв.: -7; 2.

199. $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$ Отв.: $-1\pm\sqrt{7}$.

200. $(x^2-20)(x-4)^2+16x^2=0$ Отв.: -4; 2.

201. $(x^2-32)(x-7)^2+49x^2=0$ Отв.: $-1\pm\sqrt{15}$.

202. $(x^2-5x+1)(x^2-4)=6(x-1)^2$

Отв.: $3\pm\sqrt{7}$; $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

203. $(x^2+4x+8)^2+3x^3+14x^2+24x=0$

Отв.: -4; -2.

204. $x^4+3x^3+3x^2-2x-4=0$

Отв.: $\frac{\sqrt{5}-3\pm\sqrt{10\sqrt{5}-2}}{4}$.

205. $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+a=0$ Отв.: $\sqrt[3]{1-3a}-1$.

206. $ax^3+\frac{1}{3}x^2+x+1=0$

Отв.: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{1-27a}-1}$.

207. $x^3+x^2+\dfrac{1}{3}x^2+a=0$ Отв.: $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{1-27a}-1\right)$.

208. $ax^3+x^2+x+\dfrac{1}{3}=0$ Отв.: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-3a}-1}$.

209. $x^2(x+1)^4(x+2)^2+2(x+1)^2-1=0$

Отв.: $-1\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)}$.

210. $(x^2-5x+7)^2-5(x^2-5x+7)+7=x$

Отв.: $1; 3; 3\pm\sqrt{2}$.

211. $(x^2+4x-6)^2+4(x^2+4x-6)-6=x$

Отв.: $\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}; \dfrac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаян Э.Н. Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности. – Ростов-на-Дону: Изд-во «Феникс», 2004. – 480с.
2. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. 4-е изд., испр. – М.: Издательский отдел УНЦДО, ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 690с.
3. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – Київ: Рад. шк., 1991. – 224с.
4. Гайштут А.Г., Ушаков Р.П. Сборник задач по математике с примерами решений. – Киев: А.С.К., 2002. – 592с.
5. Гельфанд М.Б., Мануха А.С., Ушаков Р.П. Математика. Справочное пособие. – Киев: Вища школа, 1982. – 464с.
6. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983. – 384с.
7. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Иррациональные уравнения // «Квант». – 2001. – №5. – С. 42–45.
8. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Монотонные функции в конкурсных задачах. // «Квант». – 2002. – №6. – С. 34–40.
9. Иванов О.А. Задачи по алгебре и началам анализа. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 384с.
10. Кононов Ю.Н., Солонский Ю.Н., Шалдырван В.А. Как подготовиться к вступительным экзаменам в вуз. Донецк: ДНУ, 1995. – 128с.
11. Кушнір І. Задачі з однією підказкою. – Київ: ФАКТ, 2003. – 176с.
12. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия. – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век": ООО "Издательство "Мир и Образование", 2005. – 464с.
13. Лунгу К.Н. Тесты по математике для абитуриентов. – М.: Абрис-пресс, 2004. – 352с.
14. Математика для поступающих в вузы. Учебное пособие / Бондаренко М.Ф. и др.; Под ред. Семенца В.В. – Харьков, ХТУРЭ. – 1120с.
15. Математика: сборник задач с решениямидля поступающих в

вузі / Н.В. Мирошин и др.; под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. – М.: АСТ: Астрель, 2005. – 829с.
16. Материалы вступительных экзаменов. Задачи по физике и математике / Егоров А.А. и др..; Под ред. Розова Н.Х. и Стасенко А.Л. – М.: Бюро Квантум, 1993. – 320с.
17. Махров В.Г., Махрова В.Н. Новый репетитор по математике для старшекласников и абитуриентов. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 2004. – 544с.
18. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 320с.
19. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / Кравцов С.В. и др. – М.: Издательство "Экзамен", 2005. – 544с.
20. Назаретов А.П. 1000 задач по математике для поступающих в вузы. – М.: Аквариум, 2001. – 416с.
21. Нестеренко Ю.В., Олейник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. – М.: Наука. Главная ред.. физ.-мат. литературы, 1983. – 448 с.
22. письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике. . – М.: Айрис-пресс, 2004. – 320с.
23. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Бортаковский А.С. и др.; Под ред. Молодожниковой Р.Н. – М.: Изд-во МАИ, 1995. – 464с.
24. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Егерев В.К. и др.; Под ред. Сканави М.И. – Киев: Канон, 1997. – 528с.
25. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / Довбыш Р.И. и др.– Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336с.
26. Сборник тренировочных задач по математике от простых до самых сложных. Методические материалы для слушателей школ инженерного резерва дистанционного обучения ДонНТУ. – Донецк, 2006. – 99с.
27. Суконник Я.Н. Математические задачи повышеннной трудности. Пособие для учителей. – Киев: Рад. Шк., 1985. – 176с.
28. Титаренко А.М., Роганин А.Н. Форсированнiй курс школьной математики. – Х.: Торсинг, 2005. – 448с.

29. Титаренко О.М. 5770 задач з математики. – Харкiв: Торсiнг, 2004. – 336с.
30. Улитин Г.М., Мироненко Л.П. Математика. Методическое пособие для абитуриентов. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – 330с.
31. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс пiдготовки к екзамену. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 420с.
32. Шарыгин И.Ф. Математика. Для поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1997. – 416с.
33. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1989. – 252с.
34. Ярский А.С. Уравнения, которые «не решаются» // «Квант». – 1998. – №3. – С. 47–49.
35. 3000 конкурсных задач по математике / Куланин Е.Д. и др.; Под ред. Бобылева Н.А. – М.: Рольф, 1997. – 608с.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по теме «Алгебраические уравнения»
для слушателей подготовительных курсов
автодорожного института ДонНТУ

Леонид Петрович Вовк

Подписано к печати — Тираж 200
Усл. печ. листов. 5,85
Заказ 3-07 — Формат 70*90/16

АДИ ГВУЗ ДонНТУ
84646, г. Горловка, ул. Кирова, 51