

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ЗАМКНУТЫХ ЧЕРЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Толочко О.И., Коцегуб П.Х., Федоряк Р.В.

Донецкий государственный технический университет
olga@pandora.kita.dgtu.donetsk.ua

Analysis of modal control systems, which confined across the full order state observer, has carried out. The method of system transfer function definition was suggested with help of transfer functions of system, confined on proper state variables, and observer's transfer function. It was proved the appropriateness of using the symbol mathematic software for analysis and synthesis such kind of systems.

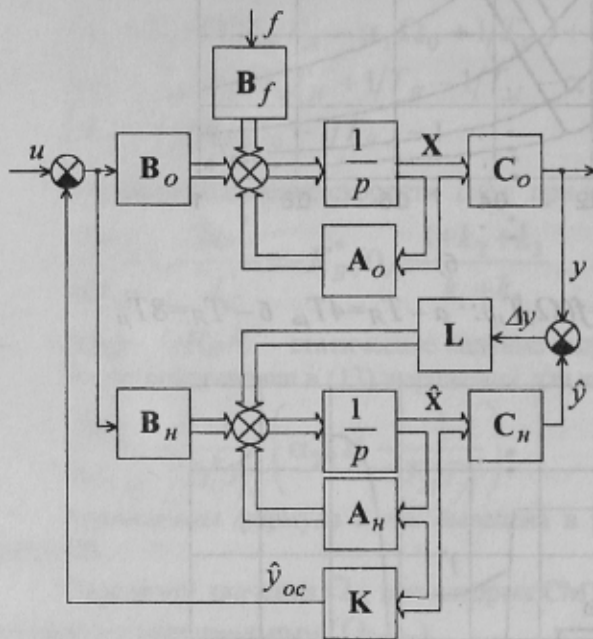


Рисунок 1

Рассмотрим систему модального управления (СМУ), замкнутую через наблюдатель состояния (НС) полного порядка, структурная схема которой показана на рис.1, где u – управляющее воздействие; f – возмущающее воздействие; $A_o, B_o, B_f, C_o, A_n, B_n, C_n$ – матрицы состояния, управления, возмущения и выхода объекта регулирования (ОР) и наблюдателя соответственно; $K=[k_1 k_2 \dots k_n]$ – коэффициенты передачи модального регулятора (МР); $L=[l_1 l_2 \dots l_n]^T$ – коэффициенты НС.

В [1] показано, что при полной идентичности разомкнутых ОР и НС

$$A_o = A_n = A, B_o = B_n = B_u, C_o = C_n = C \quad (1)$$

математическое описание системы рис.1 можно преобразовать к виду:

$$p \begin{bmatrix} X \\ \Delta X \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} X \\ \Delta X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_f \\ B_f \end{bmatrix} f, \quad (2)$$

$$\text{где } \Delta X = X - \hat{X} \quad (3)$$

– вектор ошибок оценивания НС,

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{o3} & B_u K \\ 0 & A_{n3} \end{bmatrix},$$

$$A_{o3} = A - B_u K,$$

$$A_{n3} = A - LC$$

(4)

– матрицы состояния СМУ, замкнутой через НС, СМУ, замкнутой по собственным переменным состояния, и наблюдателя состояния соответственно.

На основании анализа клеточной матрицы A_3 иногда делают вывод о том, что замкнутая система с одним регулятором состояния является более быстродействующей, чем система, замкнутая через наблюдатель, поскольку характеристический полином СМУ с НС полного порядка G_3 равен произведению характеристических полиномов СМУ без НС G_{o3} и НС G_{n3} :

$$G_3(p) = \det(pI - A_3) = \det(pI - A_{o3}) \cdot \det(pI - A_{n3}) = G_{o3}(p) \cdot G_{n3}(p). \quad (5)$$

Однако в общем случае быстродействие и другие показатели качества переходных процессов зависят не только от полюсов передаточной функции (ПФ), но и от ее нулей. В связи с этим определим матричную ПФ исследуемой СМУ от управляющего и возмущающего воздействий до вектора состояния:

$$W_x(p) = (pI - A_3)^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} pI - A_{o3} & -B_u K \\ 0 & pI - A_{n3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B_u & B_f \\ 0 & B_f \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Воспользовавшись формулой обращения клеточной матрицы [2], получим

$$(pI - A_3)^{-1} = \begin{bmatrix} (pI - A_{o3})^{-1} & (pI - A_{o3})^{-1} B_u K (pI - A_{n3})^{-1} \\ 0 & (pI - A_{n3})^{-1} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

После подстановки (7) в (6) и перемножения матриц имеем:

$$W_x(p) = \begin{bmatrix} \frac{X(p)}{u(p)} & \frac{X(p)}{f(p)} \\ \frac{\Delta X(p)}{\Delta X(p)} & \frac{\Delta X(p)}{\Delta X(p)} \\ u(p) & f(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xu}(p) & W_{xf}(p) \\ W_{\Delta xu}(p) & W_{\Delta xf}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (pI - A_{os})^{-1} B_u & (pI - A_{os})^{-1} B_f + (pI - A_{os})^{-1} B_u \cdot K(pI - A_{nz})^{-1} B_f \\ 0 & (pI - A_{nz})^{-1} B_f \end{bmatrix} \quad (8)$$

Из (8) видно, что ПФ СМУ, замкнутой через НС, от управляющего воздействия до переменных состояния объекта регулирования $W_{xu}(p)$ совпадает с соответствующей ПФ СМУ без НС $W_{xuo}(p)$:

$$W_{xu}(p) = \frac{X(p)}{u(p)} = W_{xuo}(p) = (pI - A_{os})^{-1} B_u = \frac{Adj(pI - A_{os}) B_u}{det(pI - A_{os})}, \quad (9)$$

а ошибки оценивания НС при обработке управляющего воздействия тождественно равны нулю. Сопоставляя характеристический полином ПФ (9) с полиномом (5), приходим к выводу, что передаточные функции СМУ с НС полного порядка по управляющему воздействию содержат в числителе характеристический полином наблюдателя, который сокращается с таким же полиномом в знаменателе.

При обработке возмущающего воздействия поведение вектора ошибок оценивания ΔX определяется передаточной функцией $W_{\Delta xf}(p)$ НС, к которому приложено возмущающее воздействие

$$W_{\Delta xf}(p) = \frac{\Delta X(p)}{f(p)} = W_{\Delta xf}(p) = (pI - A_{nz})^{-1} B_f = \frac{Adj(pI - A_{nz}) B_f}{det(pI - A_{nz})}, \quad (10)$$

а поведение координат объекта зависит как от параметров объекта, так и от параметров наблюдателя.

Анализируя правую верхнюю клетку матрицы (8), можно записать:

$$W_{xf}(p) = X(p) / f(p) = W_{xfo}(p) + W_{xuo}(p) \cdot W_{yocf}(p), \quad (11)$$

где

$$W_{yocf}(p) = \hat{y}_{oc}(p) / f(p) = K(pI - A_{nz}) B_f = K W_{\Delta xf}(p) \quad (12)$$

– передаточная функция наблюдателя от приложенного к нему возмущающего воздействия до выходного сигнала модального регулятора.

Умножая обе части уравнения (11) на вектор выхода C слева, получим ПФ системы от возмущающего воздействия до выходного сигнала:

$$W_{yf}(p) = y(p) / f(p) = W_{yfo}(p) + W_{yuo}(p) \cdot W_{yocf}(p). \quad (13)$$

Следовательно, любая передаточная функции СМУ с НС полного порядка по возмущающему воздействию равна сумме соответствующей передаточной функции СМУ без НС по возмущающему воздействию и произведения передаточной функции СМУ без НС по управляющему воздействию на передаточную функцию наблюдателя от возмущающего воздействия, приложенного к НС, до выходного сигнала модального регулятора.

Формулы (11) и (13) дают возможность упростить вывод передаточных функций СМУ с наблюдателем полного порядка за счет использования вместо исходной структурной схемы с большим количеством перекрестных связей более простых расчетных структурных схем СМУ без НС и НС без СМУ.

Попробуем воспользоваться уравнением (13) для оценки статизма по нагрузке системы тиристорный преобразователь-двигатель постоянного тока (ТП-Д) с компенсацией внутренней обратной связи по ЭДС двигателя с модальным регулятором, рассмотренную в [3]. Структурная схема этой системы в относительных единицах представлена на рис.2. Здесь возмущающим воздействием является ток нагрузки $f=I_c^*$, управляющим – задание на скорость двигателя $u=\omega_s^*$, переменными состояния – скорость двигателя, ток якоря и ЭДС преобразователя $X=[\omega^* I^* E_n^*]$, выходной координатой – скорость двигателя $y=\omega^*$, $C=[1 \ 0 \ 0]$.

Расчетные структурные схемы представлены на рис.3а,б.

Из схемы рис.3а

$$W_{yfo}(0) = \left. \frac{\omega^*(p)}{I_c^*(p)} \right|_{p=0} = \frac{k_2 + k_3 + 1}{k_1 + k_3}, \quad W_{yuo}(0) = \left. \frac{\omega^*(p)}{\omega_k^*(p)} \right|_{p=0} = \frac{1}{k_1 + k_3}; \quad (14)$$

из схемы рис.3б

$$W_{yocf}(0) = \left. \frac{\hat{y}_{oc}(p)}{f(p)} \right|_{p=0} = \frac{-k_1 + k_2(l_2 T_{Я} + l_3 T_{\mu}) + k_3(l_3 T_{\mu} - 1)}{(l_1 T_M + l_2 T_{Я} + l_3 T_{\mu})}. \quad (15)$$

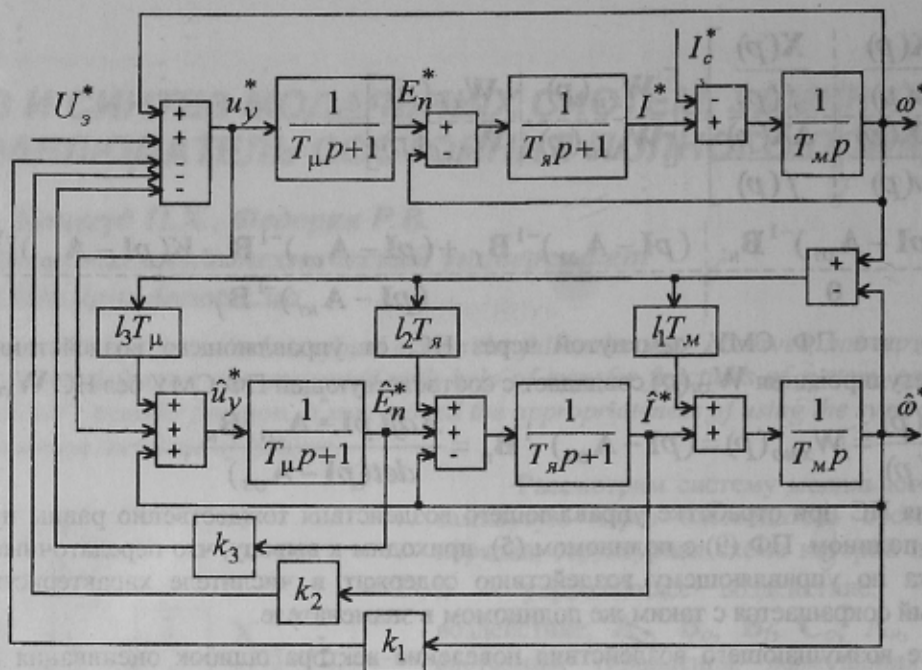
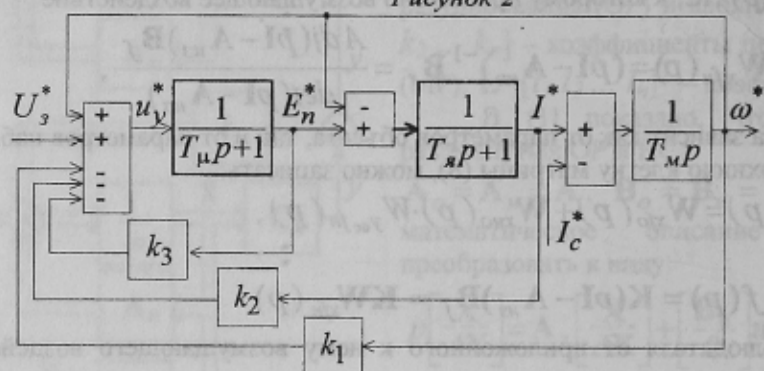
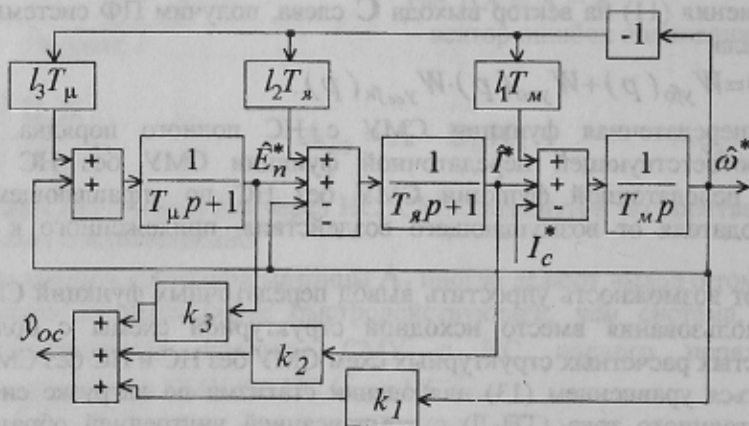


Рисунок 2



а)



б)

Рисунок 3

Используя формулу (13) при $p=0$ с учетом (14) и (15), имеем:

$$W_{yf}(0) = \frac{\Delta \omega_c^*}{I_c^*} = W_{yfo}(0) + W_{yuo}(0) \cdot W_{yocfu}(0) =$$

$$= -\frac{k_2 + k_3 + 1}{k_1 + k_3} + \frac{-k_1 + k_2(l_2 T_я + l_3 T_\mu) + k_3(l_3 T_\mu - 1)}{(k_1 + k_3)(l_4 T_M + l_2 T_я + l_3 T_\mu)} \quad (16)$$

Разделив обе части уравнения (16) на первое слагаемое, получим выражение для отношения падения скорости в СМУ с НС $\Delta \omega_c^*$ к падению скорости в СМУ без НС $\Delta \omega_{co}^*$:

$$\frac{\Delta \omega_c^*}{\Delta \omega_{co}^*} = \frac{\Delta \omega_c}{\Delta \omega_{co}} = 1 - \frac{-k_1 + k_2(l_2 T_я + l_3 T_\mu) + k_3(l_3 T_\mu - 1)}{(k_2 + k_3 + 1)(l_4 T_M + l_2 T_я + l_3 T_\mu)} \quad (17)$$

Аналогичным образом можно определить и соответствующие передаточные функции. Однако, несмотря на некоторое облегчение этого процесса при помощи выше изложенной методики, существенную помощь можно получить только при использовании ЭВМ.

В настоящее время многие программные пакеты обладают способностью решать математические задачи в аналитическом виде. Из них в наибольшей степени для исследования и проектирования САУ приспособлена система MATLAB 5 [4], которая имеет в своем составе пакет прикладных программ символьной математики Symbolic Toolbox, инструментарий для анализа и синтеза линейных систем Control Toolbox, приложение для структурного математического моделирования Simulink и многие другие полезные функции. В состав пакета Symbolic Toolbox включено ядро мощной системы символьных вычислений MAPLE V.

Рассмотрим возможность применения вышеназванных программных средств для параметрического синтеза системы рис.2 и для анализа влияния отношения среднегеометрических корней характеристических полиномов СМУ, замкнутой по собственным переменным состояния, и наблюдателя (Ω_o и Ω_n).

Перечислим основные функции, которые могут быть использованы при решении поставленной задачи:

syms var1 var2 ... varN – объявление символьных переменных;

G = poly (A, p) – формирование характеристического полинома системы *G* по ее матрице состояния *A* в функции символьской переменной *p*;

Ac = ctrb (A, B) – формирование матрицы управления;

Ao = obsv (A, C) – формирование матрицы наблюдения;

Ai = inv (A) – обращение матрицы;

At = A' – транспонирование матрицы;

[num, den] = ss2tfm (A, B, C, D, iu) – формирование коэффициентов полиномов числителя *num* и знаменателя *den* передаточной функции системы по *i*-му входному сигналу, исходя из описания системы в пространстве состояний (матрицы *A, B, C, D*);

expr1 = collect (expr, var) – приведение подобных в выражении *expr* по переменной *var*;

expr1 = subs (expr, var, var1) – подстановка в символьское выражение *expr* вместо переменной *var* подвыражения, присвоенного предварительно переменной *var1*;

var = eval (expr) – вычисление символьского выражения.

Листинг решения поставленной задачи с помощью системы MATLAB, имеет вид:

```
K =
[ (Tmu+w0^3*Tm*Ta^2*Tmu)/Ta,
  Tmu*(Tm+a2*w0^2*Tm*Ta^2-Ta-Tm*a1*w0*Ta)/Tm/Ta,
  (a1*w0*Ta*Tmu-Ta-Tmu)/Ta]

L =
[ a1*wn-1/Tmu-1/Ta]
[ Tm*(a2*wn^2-1/Tm/Ta-1/Ta/Tmu)-Tm*(Ta+Tmu)/Tmu/Ta*(a1*wn-1/Tmu-1/Ta)]
[ Tm*Ta*(wn^3-(1-kke)/Ta/Tm/Tmu)-1/Tmu*Tm*Ta*(a2*wn^2-1/Tm/Ta-1/Ta/Tmu)+
  +1/Tmu^2*Tm*Ta*(a1*wn-1/Tmu-1/Ta)]

dWc0 =
-a2/Tm/w0+1/Ta/Tm^2/w0^3

dWc =
(-1 + (1/Tmu/w0-a1+1/w0/Ta)*a2/kw +
+((-a1*a2/Tmu+a1^2/w0/Tmu-a1/w0^2/Tmu^2)-a1/w0^2/Ta^3+
+(a1^2/w0-a1/w0^2/Tmu)/Ta+a1/w0^2/Ta/Tm)/kw^2+
+((a2/w0/Tmu+1/w0^3/Tmu^3-1-a1/w0^2/Tmu^2)+1/w0^3/Ta^3+(-a1/w0^2+1/w0^3/Tmu)/Ta^2+
+(a2/w0+1/w0^3/Tmu^2-a1/w0^2/Tmu)/Ta+((a1/w0^2-2/w0^3/Tmu)/Ta-2/w0^3/Ta^2)/Tm)/ kw^3)/
/Tmu/Ta/Tm/w0^3
```

Здесь обозначено: $Ta \rightarrow T_x$, $Tm \rightarrow T_m$, $Tmu \rightarrow T_\mu$, $w0 \rightarrow \Omega_o$, $wn \rightarrow \Omega_n$, $kw \rightarrow k_\Omega = \Omega_n/\Omega_o$, $dWc0 \rightarrow \Delta\omega_{co}/I_c^*$, $dWc \rightarrow \Delta\omega_c/I_c^*$, $a1, a2 \rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ – коэффициенты нормированного полинома третьего порядка

$$G(p) = p^3 + \alpha_1 \Omega p^2 + \alpha_2 \Omega^2 p + \Omega^3, \quad (18)$$

принятого в качестве желаемого для характеристических полиномов СМУ и НС, которые в данном случае будут отличаться друг от друга только значением среднегеометрического корня Ω .

Во второй части программы выполнена подстановка в символьные выражения конкретных значений, в результате чего получены графики зависимостей $\Delta\omega_{co} / \Delta\omega_c$ от k_Ω при разных значениях T_x и T_m , представленные на рис.4 а, б ($\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ – фильтр Баттерворта).

Графики рис.4 имеют один "ноль" и два экстремума: максимум и очень сглаженный минимум, которые можно найти при помощи MATLAB-функций *diff (expr, var)*, выполняющей дифференцирование выражения *expr* по заданной переменной *var*, и *solve (expr)*, определяющей корни уравнения $expr(var)=0$. Из графиков видно, что в большом диапазоне параметров статизм СМУ, замкнутой через наблюдатель (рис.2), оказывается ниже, чем аналогичной системы без НС (рис.3а), причем при некотором значении k_{Ω} , близком к 1, анализируемая система становится астатической.

Для подтверждения правильности полученных результатов на рис.5 приведены графики переходных процессов тока и ошибки по скорости при набросе номинальной нагрузки в СМУ с $T_r=4T_{\mu}$, $T_m=8T_{\mu}$, $\Omega_o=0.5/T_{\mu}$. Штрих-пунктиром показаны переходные процессы в СМУ, замкнутой по собственным координатам, а сплошными линиями – в системе с НС при значениях коэффициента k_{Ω} , обеспечивающих нулевую (графики 1) и экстремальные (графики 2, 3) величины статического падения скорости. Из рисунка видно, что замыкание СМУ через наблюдатель полного порядка при данных параметрах привода приводит к снижению статического и динамического падения скорости, к увеличению перерегулирования по току и к уменьшению времен достижения током и скоростью максимальных значений.

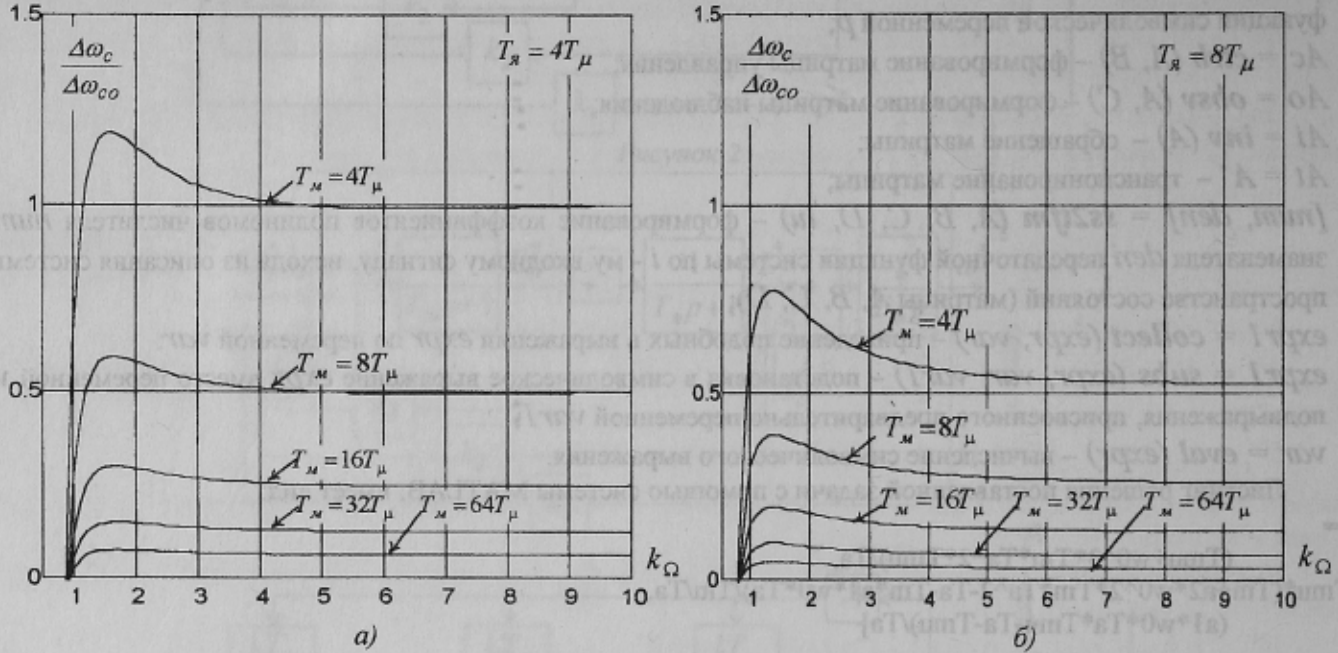


Рисунок 4

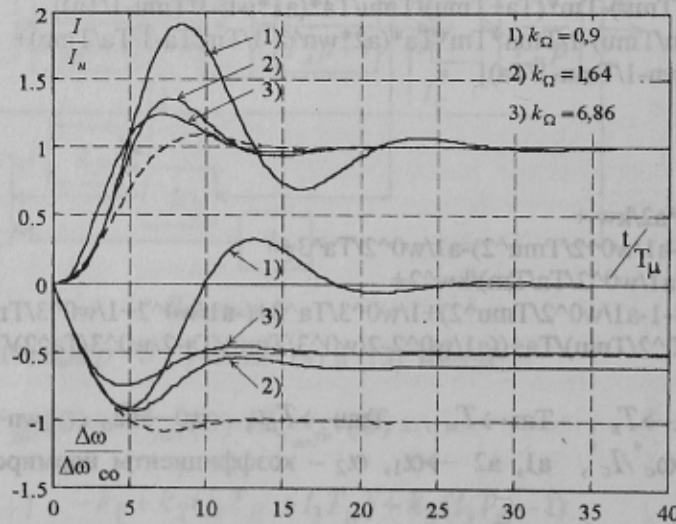


Рисунок 5

Выводы

1. СМУ, замкнутая через НС полного порядка, при полной идентичности параметров объекта регулирования и наблюдателя обрабатывает управляющее воздействие так же, как СМУ, замкнутая по собственным переменным состояния; отклонения координат наблюдателя от соответствующих координат объекта в этом режиме тождественно равны нулю.
2. Передаточные функции исследуемой СМУ по управляющему воздействию содержат в числителе характеристический полином наблюдателя, который сокращается с таким же полиномом в знаменателе.
3. ПФ исследуемой СМУ по возмущающему воздействию равна сумме соответствующей передаточной функции СМУ без НС по возмущающему воздействию и скалярного произведения передаточной функции СМУ без НС по управляющему воздействию, вектора коэффициентов модального регулятора и передаточной функции замкнутого наблюдателя от возмущающего воздействия, приложенного к НС, до его переменных состояния. Это свойство позволяет упростить вывод передаточных функций и коэффициентов усиления систем модального управления с наблюдателями полного порядка.
4. Быстродействие и другие показатели качества переходных процессов СМУ с НС по возмущающему воздействию зависят от структуры и параметров конкретной системы и могут оказаться не хуже, чем в СМУ, замкнутой по собственным переменным состояния.
5. Существенно облегчить и ускорить анализ и синтез систем с наблюдателями можно, используя пакет MATLAB 5.

Следует отметить, что приведенные выводы справедливы и в том случае, когда управляющее и возмущающее воздействия являются не скалярными, а векторными сигналами. Указанное ограничение введено в систему рис. 1 только для упрощения понимания и обеспечения большей наглядности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов Л.В., Долбня В.Т., Клепиков А.В. Об итерационности по возмущению модальных систем, замкнутых по вектору состояния через наблюдатель. Сб. Автоматизированные электромеханические системы с модальными регуляторами и наблюдателями состояния. – Харьков: ХГПУ, 1997. С.29-38.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: "Наука", 1970. – 664 с.
3. Толочко О.И., Тищенко А.А. Система модального управления приводом постоянного тока с узлом токоограничения. – Сб. Автоматизированные электромеханические системы с модальными регуляторами и наблюдателями состояния. – Харьков: ХГПУ, 1997. С.49-55.
4. Потемкин В.Г. Система MATLAB 5 для студентов. Справочное пособие. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1998 – 314 с.

